PRML 演習問題1.34

@americiumian

平成 24 年 9 月 26 日

1 問題

変分法を使って，(1.108) 式の上にある汎関数の停留点が (1.108) で与えられることを示せ．また，制約 (1.105),(1.106),(1.107) を使ってラグランジュ乗数を消去し，最大エントロピー解がガウス分布 (1.109) で与えられることを示せ．

2 解答

$$-\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)dx + \lambda_1\left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx - 1\right) + \lambda_2\left(\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx - \mu\right) + \lambda_3\left(\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 p(x)dx - \sigma^2\right) \quad (1)$$

を $p(x)$ について最大化する．

$$\begin{aligned}
(1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{-p(x)\log p(x) + \lambda_1 p(x) + \lambda_2 xp(x) + \lambda_3(x-\mu)^2 p(x)\right\}dx + (-\lambda_1 - \mu\lambda_2 - \sigma^2\lambda_3) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{-p(x)\log p(x) + \lambda_1 p(x) + \lambda_2 xp(x) + \lambda_3(x-\mu)^2 p(x) + (-\lambda_1 - \mu\lambda_2 - \sigma^2\lambda_3)q(x)\right\}dx \\
&\quad \left(\text{ただし}, q(x)\text{ は}\int_{-\infty}^{\infty} q(x)dx = 1\text{ を満たす関数}\right)
\end{aligned}$$

この式を $F[p]$ と置く．F の被積分関数に p' は含まれていないため，停留条件は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -(\log p(x) + 1) + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3(x-\mu)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & p(x) = \exp\{-1 + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3(x-\mu)^2\} \\
\Leftrightarrow\quad & p(x) = \exp\left\{-1 + \lambda_1 + \lambda_3\left(x^2 - 2\left(\mu - \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\right)x\right) + \lambda_3\mu^2\right\} \\
\Leftrightarrow\quad & p(x) = \exp\left\{-1 + \lambda_1 + \lambda_3\mu^2 + \lambda_3\left(x - \left(\mu - \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\right)\right)^2 - \lambda_3\left(\mu - \frac{\lambda_2}{2\lambda_3}\right)^2\right\} \\
& \text{ここで},\mu - \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} = m, \lambda_3 = -\frac{1}{2s^2}\text{とおくと}, \\
\Leftrightarrow\quad & p(x) = \exp\left\{-1 + \lambda_1 + \lambda_3\mu^2 - \lambda_3 m^2\right\}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right\}
\end{aligned}$$

式 (1.105) より,

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-1+\lambda_1+\lambda_3\mu^2-\lambda_3 m^2\right\} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right\} dx = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \exp\left\{-1+\lambda_1+\lambda_3\mu^2-\lambda_3 m^2\right\} \sqrt{2\pi s^2} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \exp\left\{-1+\lambda_1+\lambda_3\mu^2-\lambda_3 m^2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right\}
$$

式 (1.106) より,

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \mu \\
\Leftrightarrow \quad & m = \mu
\end{aligned}
$$

式 (1.107) より,

$$
\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)dx = \sigma^2 \\
\Leftrightarrow \quad & s^2 = \sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\therefore p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}
$$

従って，制約 (1.105),(1.106),(1.107) の下での，微分エントロピーの最大値はガウス分布となる.