# PRML 演習 2.19

@daimatz

(演習 2.19) 固有ベクトルの方程式について (2.45) が成立する実対称行列 $\mathbf{\Sigma}$ は，固有値を係数とする固有ベクトルで展開した， (2.48) の形で表せることを示せ．同様に，逆行列 $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ は (2.49) の形で表現できることを示せ．

---

行列

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_D)$$

および

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_D \end{pmatrix}$$

を用いて， (2.48) の右辺は

$$\sum_{i=1}^{D} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \quad (= \mathbf{P}\text{とおく})$$

と表せる． (2.46), (2.47) より

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_D^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_D) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I \quad (\text{単位行列})$$

(つまり $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$) となるので， $\mathbf{P}$ を用いて

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$$

である．また (2.45) より

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_D) = (\lambda_1\mathbf{u}_1, \cdots, \lambda_D\mathbf{u}_D)$$

なので

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U} &= \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(\lambda_1\mathbf{u}_1, \cdots, \lambda_D\mathbf{u}_D) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_D \end{pmatrix} (\lambda_1\mathbf{u}_1, \cdots, \lambda_D\mathbf{u}_D) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_D \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{\Lambda} \end{aligned}$$

となる．よって

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}$$

である．この等式の左から $(\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1}$ $(= \mathbf{U})$ を，右から $\mathbf{U}^{-1}$ をかけることによって $\mathbf{P} = \mathbf{\Sigma}$ が導かれる．

また $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ より

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$$

ここで

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\lambda_D \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{D} \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}$$

と表せる．