

PRML 演習問題 4.7

@americiumian

平成 24 年 12 月 10 日

4.7

ロジスティックシグモイド関数 (4.59) が $\sigma(-a) = 1 - \sigma(a)$ を満たすことを示せ。また、その逆関数が $\sigma^{-1}(y) = \ln\{y/(1-y)\}$ で与えられることを示せ。

$$\sigma(-a) = 1 - \sigma(a)$$

を示す。

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= 1 - \sigma(a) \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \exp(-a)} \\ &= \frac{\exp(-a)}{1 + \exp(-a)} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(a)} \\ &= \text{(左辺)} \end{aligned}$$

より、成立。

$$y = \sigma(x)$$

と置き、逆関数を求める。

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1 + \exp(-x)} \\ 1 + \exp(-x) &= \frac{1}{y} \\ \exp(-x) &= \frac{1-y}{y} \\ -x &= \ln \frac{1-y}{y} \\ x &= \ln \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

従って、ロジスティックシグモイド関数の逆関数は

$$\sigma^{-1}(y) = \ln\{y/(1-y)\}$$