Содержание

1 О неприводимых многочленах

1.1 Неприводимые многочлены

Пусть F - поле, $P \in F[x]$. Многочлен P называется неприводимым над F, если $\deg P > 0$ и P не раскладывается в произведение двух многочленов положительной степени.

1.2 Основная теорема арифметики для многочленов над полем

1.2.1 Вспомогательная лемма 1

Пусть F - поле, $Q \in F[x], \deg Q > 0$. Тогда Q раскладывается в произведение неприводимых многочленов.

Доказательство.

Докажем утверждение индукцией по $\deg Q$. База тривиальна: если $\deg Q = 1$, то он уже неприводим. Докажем переход. Если Q неприводим, то получено требуемое, иначе выполнено равенство $Q = Q_1 Q_2$ для некоторых $Q_1, Q_2 \in F[x]$ таких, что $0 < \deg Q_1$, $\deg Q_2 < \deg Q$, тогда Q_1, Q_2 представляются в виде произведения неприводимых по предположению индукции.

1.2.2 Вспомогательная лемма 2

Пусть F - поле, $P, Q, R \in F[x]$, многочлен P неприводим и выполнено $P \mid QR$. Тогда $P \mid Q$ или $P \mid R$.

Доказательство.

Предположим, что $P \nmid Q$. Тогда, в силу неприводимости многочлена P, выполнено равенство $\gcd(P, Q) = 1$, поэтому существуют многочлены $K, L \in F[x]$ такие, что $KP + LQ = 1$. Умножая обе части равенства на R, получим, что $KPR + LQR = R$, откуда $P \mid KPR + LQR = R$.

1.2.3 Теорема

Пусть F - поле, и $Q \in F[x] \setminus \{0\}$. Тогда существует такой скаляр $\alpha \in F^*$ и такие неприводимые многочлены $P_1, \ldots, P_k \in F[x]$, что Q можно представить в следующем виде:

$$Q = \alpha P_1 \ldots P_k$$

Более того, если $Q = \alpha P_1 \ldots P_k = \beta R_1 \ldots R_l$ для некоторого скаляра $\beta \in F^*$ и неприводимых многочленов $R_1 \ldots R_l \in F[x]$, то $k = l$ и существует перестановка $\sigma \in S_k$ такая, что для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ многочлены P_i и $P_{\sigma(i)}$ ассоциированы.

Доказательство.

- (Существование) Случай, когда $\deg Q > 0$ уже разобран, если $\deg Q = 0$, то $Q = \alpha$
- (Единственность) Проведём индукцию по k (Количеству неприводимых многочленов, на которые раскладывается Q). База, k $= 0$, тривиальна: $\deg Q = 0 \Rightarrow k = l = 0, Q = \alpha = \beta$.

  Теперь докажем переход. Пусть $k > 0$ и выполнены равенства $Q = \alpha P_1 \ldots P_k = \beta R_1 \ldots R_l$. Тогда, поскольку $P_k \mid R_1 \ldots R_l$, существует $i \in \{1, \ldots, l\}$ такое, что $P_k \mid R_i$, то есть многочлены ассоциированы в силу их неприводимости: $R_i = \gamma P_k, \gamma \in$

F^*. Пусть без ограничени общности $i = l$, тогда $\alpha P_1 \dots P_{k-1} = (\beta\gamma) R_1 \dots R_{l-1}$, и применимо предположение индукции.

2 О корнях многочленов

2.1 Корни многочленов

Пусть $P \in F[x]$. Скаляр $\alpha \in F$ называется корнем многочлена P, если выполнено равенство $P(a) = 0$

2.2 Теорема Безу

Скаляр $\alpha \in F$ является корнем многочлена $P \in F[x] \Leftrightarrow (x - a) \mid P$

Доказательство.

Разделим P с остатком на $(x - a)$, то есть выберем $R, Q \in F[x]$ такие, что $P = (x - a)Q + R$ и $\deg R \leqslant 0$. Заметим, что $P(a) = R$, тогда выполнены равносильности $P(a) = 0 \Leftrightarrow R = 0 \Leftrightarrow (x - a) \mid P$

2.3 Формальная производная

2.3.1 Определение

Пусть $P = p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n \in F[x]$. Формальной производной многочлена $P(x)$ называется многочлен $P' := p_1 + 2p_2 x + \dots + np_n x^{n-1}$, где целочисленные скаляры понимаются, как суммы соответствующего числа единиц.

2.3.2 Основные свойства

1. $\forall \alpha, \beta \in F : \forall P, Q \in F[x] : (\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$ (Линейность)
2. $\forall P, Q \in F[x] : (PQ)' = P'Q + PQ'$ (Правило Лейбница)

Доказательство.

1. Пусть $n := \max(\deg P, \deg Q)$, тогда многочлены P и Q можно представить в виде $P = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i x^i, Q = \sum\limits_{i=0}^{n} q_i x^i$, откуда $\alpha P + \beta Q = \sum\limits_{i=0}^{n} (\alpha p_i + \beta q_i) x^i$. Проверим требуемое равенство непосредственной проверкой:

$$(\alpha P + \beta Q)' = \sum_{i=0}^{n} i(\alpha p_i + \beta q_i) x^{i-1} = \alpha \sum_{i=0}^{n} i p_i x^{i-1} + \beta \sum_{i=0}^{n} i q_i x^{i-1} = \alpha P' + \beta Q'$$

2. Левая и правая часть требуемого равенства линейны по P и Q, поэтому равенство достаточно проверить на некотором базисе пространства многочленов, например, для произвольных многочленов вида $P(x) = x^i, Q(x) = x^j, i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(PQ)' = (i + j) x^{i+j-1} = i x^{i-1} x^j + j x^i x^{j-1} = P'Q + Q'P$$

2.4 Кратные корни

2.4.1 Определение

Пусть $a \in F$ - корень многочлена $P \in F[x]$. Кратностью корня a называется наибольшее $\gamma \in \mathbb{N}$ такое, что $(x-a)^\gamma \mid P$. Если $\gamma > 1$, то корень a называется кратным, иначе - простым.

2.4.2 Эквивалентные условия существования кратного корня

1. c - кратный корень P.

2. $P(c) = P'(c) = 0$

3. $(x-c) | \gcd(P, P')$

Доказательство.

- $(1 \Leftrightarrow 2)$ Пусть c - корень многочлена P, тогда $P = (x-c)Q$ и $P' = Q + (x-c)Q'$, поэтому c - кратный корень многочлена $P \Leftrightarrow P'(c) = 0$

- $(2 \Leftrightarrow 3)$ $P(c) = P'(c) = 0 \Leftrightarrow (x-c) \mid P', P \Leftrightarrow (x-c) \mid \gcd(P, P')$

2.4.3 Свойства кратных корней

Пусть $c \in F$ - корень многочлена $P \in F[x]$ кратности $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Тогда выполнены следующие свойства:

1. c - корень многочлена P' кратности хотя бы $k-1$.

2. Если char $F > k$ или char $F = 0$, то c - корень многочлена P' кратности ровно $k-1$.

Доказательство.
Многочлен P имеет вид $P = (x-c)^k Q, Q \in F[x], (x-c) \nmid Q$. Тогда:

$$P' = k(x-c)^{k-1}Q + (x-c)^k Q' = (x-c)^{k-1}(kQ + (x-c)Q')$$

Из равенства выше следует, что c уже корень многочлена P' кратности хотя бы $k-1$. Рассмотрим теперь многочлен $kQ + (x-c)Q'$. Если char $F > k \vee$ char $F = 0$, то $kQ(c) \neq 0$, поэтому кратность корня c у многочлена P' равна $k-1$

3 Об инвариантных подпространствах

3.1 Инвариантные подпространства

3.1.1 Определение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Подпространство $U \leqslant V$ называется инвариантным относительно преобразования φ, если $\varphi(U) \leqslant U$

3.1.2 Свойства

1. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, подпространства $U, W \leqslant V$ таковы, что $U \leqslant \text{Ker } \varphi$ и $\text{Im } \varphi \leqslant W \leqslant V$. Тогда U и W инвариантны относительно φ.

2. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$, причём $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Тогда $\text{Ker } \psi$ и $\text{Im } \psi$ инвариантны относительно φ.

Доказательство.

1. - $\varphi(U) \leqslant \varphi(\text{Ker } \varphi) = \{\vec{0}\} \leqslant U$
   - $\varphi(W) \leqslant \text{Im } \varphi \leqslant W$

2. - Пусть $\vec{u} \in \text{Ker } \psi$, тогда $\psi(\varphi(\vec{u})) = \varphi(\psi(\vec{u})) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0} \in \text{Ker } \psi$
   - Пусть $\vec{u} \in \text{Im } \psi$, тогда $\exists \vec{w} \in V : \ \psi(\vec{w}) = \vec{u} \, \varphi(\vec{u}) = \varphi(\psi(\vec{w})) = \psi(\varphi(\vec{w})) \in \text{Im } \psi$

3.2 Собственные векторы и собственные значения

3.2.1 Определение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Вектор $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ называется собственным вектором оператора φ с собственным значением $\lambda \in F$, если $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Скаляр $\mu \in F$ называется собственным значением оператора φ, если существует собственный вектор $\vec{u} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ оператора φ с собственным значением μ.

3.2.2 Собственное подпространство

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$,$\lambda \in F$ - собственное значение оператора φ. Подпространство $V_\lambda := \text{Ker } (\varphi - \lambda) \leqslant V$ называется собственным подпространством оператора φ, соответствующим собственному значению λ

3.3 Характеристический многочлен и его инвариантность

3.3.1 Определение

Пусть $A \in M_n(F)$. Характеристическим многочленом матрицы A называют многочлен $\chi_\lambda(A) = |A - \lambda E|$

3.3.2 О делителях характеристического многочлена

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), \varphi \leftrightarrow A \in M_n(F)$. Тогда скаляр $\lambda_0 \in F$ является собственным значением оператора $\varphi \Leftrightarrow \chi_A(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_0) \mid \chi_A(\lambda)$

Доказательство.

Скаляр λ_0 является собственным значением тогда и только тогда, когда $\text{Ker } (\varphi - \lambda_0) \neq \{\vec{0}\}$. Выполнены следующие равносильности:

$$\text{Ker } (\varphi - \lambda_0) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \text{rk } (A - \lambda_0 E) < n \Leftrightarrow |A - \lambda_0 E| = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_0) \mid \chi_A(\lambda_0)$$

3.3.3 Подобные матрицы

Матрицы $A, B \in M_n(F)$ называются подобными, если существует матрица $S \in Gl_n(F)$ такая, что $B = S^{-1}AS$

Подобные матрицы - это матрицы одного и того же оператора в разных базисах.

3.3.4 Об инвариантности характеристического многочлена

Пусть $A, B \in M_n(F)$ - подобные матрицы. Тогда $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$

Доказательство.

Зафиксируем значение $\lambda \in F$, тогда выполнены следующие равенства:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = |S^{-1}(B - \lambda E)S| = |B - \lambda E| = \chi_B(\lambda)$$

3.3.5 Характеристический многочлен оператора

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Характеристическим многочленом оператора φ называется характеристический многочлен его матрицы в произвольном базисе. Обозначение - $\chi_\varphi(\lambda)$

3.4 Определитель и след преобразования

3.4.1 О коэффициентах в характеристическом многочлене

Пусть $A \in M_n(F)$. Тогда в характеристическом многочлене $\chi_A(\lambda)$ коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}\text{tr } A$, а свободный член равен $\det A$.

Доказательство.

Во всех нетождественных перестановках степень получаемых в $\chi_a(\lambda)$ мономов не превосходит $n-2$, поэтому слагаемое с λ^{n-1} может возникнуть только при $\sigma = id$, когда число $(-\lambda)$ перемножается $n-1$ раз и умножается на один из диагональных элементов, поэтому коэфициент при $(\lambda)^{n-1}$ равен $(-1)^{n-1} \cdot \text{tr } A$. Свободный член в $\chi_A(\lambda)$ равен $\chi_A(0) = |A|$.

3.4.2 След и определитель оператора

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Следом оператора φ называется след матрицы φ в произвольном базисе, определителем оператора - определитель матрицы φ в произвольном базисе. Обозначения - $\text{tr } \varphi$, $\det \varphi$ соответственно.

4 О собственных векторах и собственных значениях

4.1 Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ - различные собственные значения оператора φ. Тогда сумма $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_n}$ - прямая.

Доказательство.

Проведём индукцию по k (количеству собственных подпространств). База $n = 1$ тривиальна, докажем переход. Пусть для некоторого $k > 1$ утверждение неверно, тогда, по критерию прямой суммы, существует индекс $i \in \{i, \ldots, k\}$ такой, что выполнено следующее:

$$V_{\lambda_i} \cap (\lambda_1 \cup \cdots \cup \lambda_{i-1} \cup \lambda_{i+1} \cup \cdots \cup \lambda_k) \neq \{\vec{0}\}$$

Пусть без ограничений общности $i = k$, тогда существуют векторы $\vec{v_1} \in V_{\lambda_1}, \ldots, \vec{v_{k-1}} \in V_{\lambda_{k-1}}$ такие, что выполнено следующее:

$$\vec{v_1} + \cdots + \vec{v_{k-1}} = \vec{v_k} \neq \{\vec{0}\}$$

Применим к неравенству выше оператор φ, и вычтем из полученного равенства исходное, умноженное на λ_k, тогда:

$$(\lambda_1 - \lambda_k)\vec{v_1} + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\vec{v_{k-1}} = \vec{0}$$

Все коэффициенты в левой части по условию отличны от нуля, а также хотя бы один из векторов в левой части - ненулевой, поскольку сумма этих векторов равна $\vec{v_k} \neq \vec{0}$. Получено нетривиальное разложение нуля, что невозможно по предположению индукции, значит сумма $\vec{v_1} + \cdots + \vec{v_k}$ - прямая.

4.2 Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения

4.2.1 Определение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), \lambda_0 \in F$ - собственное значение оператора φ. Алгебраической кратностью собственного значения λ_0 называется кратность корня λ_0 в $\chi_\varphi(\lambda)$, геометрической кратностью - величина $\dim V_{\lambda_0}$

4.2.2 Теорема о связи геометрической и алгебраической кратностей

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), \lambda_0 \in F$ - собственное значение оператора φ. Тогда алгебраическая кратность значения λ_0 не меньше его геометрической кратности.

Доказательство.

Пусть геометрическая кратность значения λ_0 равна $k \in \mathbb{N}$. Выберем базис $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k})$ в V_{λ_0} и дополним этот базис до базиса в $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{v_n})$ в V. Тогда матрица оператора φ в этом базисе имеет следующий вид для некоторой матрицы $D \in M_{n-k}(F)$:

$$\varphi \leftrightarrow_e A := \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 E_k & * \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

По теореме об определителе с углом нулей, выполнены следующие равенства:

$$\chi_\varphi(\lambda) = |A - \lambda E_k| = |(\lambda_0 - \lambda)E_k| \cdot |D - \lambda E_{n-k}| = (\lambda_0 - \lambda)^k |D - \lambda E_{n-k}|$$

Значит, λ_0 - корень кратности не меньше k в $\chi_\varphi(\lambda)$.

4.3 Условия диагонализуемости преобразования

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда равносильны следующие условия:

1. Оператор φ диагонализуем.

2. Алгебраическая кратность каждого собственного значения оператора φ равна геометрической, и χ_φ раскладывается на линейные сомножители.

3. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$

4. В V есть базис из собственных векторов оператора φ.

Доказательство.

1. ($1 \Rightarrow 2$) Пусть в некотором базисе e в V матрица оператора φ имеет диагональный вид, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ - различные элементы на диагонали, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ - количества их вхождений в матрицу, тогда $\chi_\varphi(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ алгебраическая кратность значения λ_i равна α_i, при этом α_i базисных векторов из e являются собственными векторами со значениями λ_i, откуда $\dim V_{\lambda_i} \geqslant \alpha_i$, и обратное неравенство тоже верно (по предыдущей теореме).

2. ($2 \Rightarrow 3$). Пусть $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k} \leqslant V$ - собственные подпространства оператора φ. Их сумма - прямая, и по условию $\sum\limits_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = n$, поэтому $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} = V$

3. ($3 \Rightarrow 4$). Выберем базисы $e_1, \ldots, e_k$ в пространствах $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$. Тогда, так как сумма $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ - прямая, то объединение этих базисов даёт базис в V, который и является искомым.

4. ($4 \Rightarrow 1$). Если e - базис, составленный из собственных векторов, то именно в этом базисе матрица оператора будет иметь диагональный вид.

5 О Гамильтоне-Кэли

5.1 Приведение матрицы преобразования к треугольному виду

5.1.1 Новые обозначения

1. Для произвольных $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ и $\mu \in F$ положим $\varphi_\mu := \varphi - \mu$

2. Для произвольных $A \in M_n(F)$ и $\mu \in F$ положим $A_\mu := A - \mu E$

5.1.2 Инвариантность "сдвинутых"операторов

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда $U \leqslant V$ является инвариантным относительно $\varphi \Leftrightarrow U$ является инвариантным относительно φ_μ

Доказательство.

$\Rightarrow$ Если U инвариантно относительно φ, то $\varphi_\mu(U) \leqslant \varphi(U) + \mu U \leqslant U$

$\Leftarrow$ Если U ивариантно относительно φ, то $\varphi(U) \leqslant \varphi_\mu(U) + \mu U \leqslant U$

5.1.3 Об инвариантных подпространствах в операторе с собственным значением

Пусть оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ имеет собственное значение. Тогда существует инвариантное относительно φ подпространство $U \leqslant V$ размерности $n-1$.

Доказательство.

Пусть $\mu \in F$ - собственное значение оператора φ. Тогда φ_μ - невырожденный оператор, то есть $\dim \operatorname{Im}\, \varphi_\mu \leqslant n-1$. Дополним базис в $\dim \operatorname{Im}\, \varphi_\mu$ до базиса в некотором подпространстве $U \leqslant V$ размерности $n-1$, тогда U инвариантно относительно φ_μ и, следовательно, отнсительно φ.

5.1.4 Теорема о приведении матрицы преобразования к треугольному виду

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, и χ_φ раскладывается на линейные сомножители. Тогда в V существует такой базис $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$, что для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ подпространство $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ инвариантно относительно оператора φ.

Доказательство.

Проведём индукцию по n (размеру этого подпространства). База $n = 1$, тривиальна, докажем переход, $n > 1$. Многочлен χ_φ имеет корни, поэтому существует инвариантное подпространство $U \leqslant V$ размерности $n-1$. Положим $\psi := \varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$, тогда $\chi_\psi \mid \chi_\varphi$, поэтому χ_ψ также раскладывается на линейные сомножители, и к нему применимо предположение индукции. Выберем подходящий базис e' в U и дополним его до базиса в V, получим требуемое.

5.2 Теорема Гамильтона-Кэли

Для любого оператора (но мы доказываем только для таких, характеристический многочлен которых раскладывается на линейные сомножители) $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ выполнено следующее равенство:

$$\chi_\varphi(\varphi) = 0$$

Доказательство.

Выберем базис e в V, в котором $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \ V_i := \langle \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_i} \rangle \leqslant V$ инвариантно относительно φ, тогда матрица оператора φ в этом базисе имеет верхнетреугольный вид. Пусть $\varphi \leftrightarrow_e diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in M_n(F)$. Покажем, что тогда $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \varphi_{\lambda_i}(V_i) \leqslant V_{i-1}$.

Действительно, так как V_i инвариантно относительно φ, то оно также инвариантно относительно φ_{λ_i}, и матрица сужения $\psi := \varphi_{\lambda_i}|_{V_i} \in \mathcal{L}(V_i)$ имеет вид:

$$\psi \leftrightarrow_{(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_i})} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_0 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_0 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Последняя координата у образов всех базисных векторов нулевая, поэтому $\psi(V_i) \leqslant V_{i-1}$. Следовательно, выполнены следующие включения:

$$\chi_\varphi(\varphi)(V) = (\varphi_{\lambda_1} \ldots \varphi_{\lambda_n})(V) \leqslant (\varphi_{\lambda_1} \ldots \varphi_{\lambda_{n-1}})(V_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant \{\vec{0}\}$$

Таким образом, $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

6 О ЖНФ

6.1 Аннулирующие многочлены преобразования

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Многочлен $P \in F[x] \setminus \{0\}$ называется аннулирующим многочленом оператора φ, если $P(\varphi) = 0$.

6.2 Корневые подпространства

Пусть λ_i - собственное значение оператора φ. Корневым подпространством, соответствующим λ_i, называется $V^{\lambda_i} = \text{Ker } (\varphi_{\lambda_i})^{\alpha_i}$, где α_i - алгебраическая кратность собственного значения λ_i для оператора φ

6.3 Разложение пространства в сумму корневых подпространств

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), P \in F[x]$ - аннулирующий многочлен оператора φ, и $P = P_1 P_2$, для многочленов $P_1, P_2 \in F[x]$, таких, что $\gcd(P_1, P_2) = 1$. Тогда $V = V_1 \oplus V_2$, где $V_1 := \text{Ker } P_1(\varphi), V_2 := \text{Ker } P_2(\varphi)$ - инвариантные относительно φ подпространства.

Доказательство.

Подпространства из условия инвариантны относительно φ, поскольку операторы $P_1(\varphi), P_2(\varphi)$ коммутируют с φ. Покажем, что $\text{Im } P_1(\varphi) \leqslant V_2$. Действительно, $P_2(\varphi)(P_1(\varphi)(V)) = P(\varphi)(V) = \{\vec{0}\}$, то есть $\text{Im } P_1(\varphi) \leqslant V_2$. Аналогично, выполняется включение для $\text{Im } P_2(\varphi) \leqslant V_1$. Поскольку $\gcd(P_1, P_2) = 1$, то существуют многочлены $Q_1, Q_2 \in F[x]$ такие, что выполнено равенство $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1$, подставим φ в это равенство и получим следующее:

$$P_1(\varphi)Q_1(\varphi) + P_2(\varphi)Q_2(\varphi) = id$$

Значит, для произвольного $\vec{v} \in V$ выполнены следующие равенства:

$$\vec{v} = id(\vec{v}) = Q_1(\varphi)(P_1(\varphi)(\vec{v})) + Q_2(\varphi)(P_2(\varphi)(\vec{v}))$$

Заметим теперь, что $P_1(\varphi)(\vec{v}) \in \text{Im } P_1(\varphi) \leqslant V_2, P_2(\varphi)(\vec{v}) \in \text{Im } P_2(\varphi) \leqslant V_1$, откуда $Q_1(\varphi)(P_1(\varphi)(\vec{v})) \in V_2, Q_2(\varphi)(P_2(\varphi)(\vec{v})) \in V_1$ в силу инвариантности подпространств V_1 и V_2 относительно φ. Значит $V_1 + V_2 = V$, причём эта сумма - прямая, т.к. для любого вектора $\vec{w} \in V_1 \cap V_2$ выполнены следующие равенства:

$$\vec{w} = Q_1(\varphi)(P_1(\varphi)(\vec{w})) + Q_2(\varphi)(P_2(\varphi)(\vec{w})) = Q_1(\varphi)(\vec{0}) + Q_2(\varphi)(\vec{0}) = \vec{0}$$

Таким образом, $V = V_1 \oplus V_2$.

6.4 Жорданова нормальная форма

6.4.1 Жорданова клетка

Пусть F - поле, $\lambda_0 \in F$. Жордановой клеткой размера $k \in \mathbb{N}$ с собственным значением λ_0 называется матрица $J_k(\lambda_0) \in M_k(F)$, имеющая следующий вид:

$$J_k(\lambda_0) := \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

6.4.2 Жорданов вид

Пусть F - поле, $A \in M_n(F)$. Матрица A имеет жорданов вид, если она имеет блочно-диагональный вид, в котором каждый блок является жордановой клеткой.

6.4.3 Жорданова нормальная форма

Пусть V - линейное пространство, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Если в некотором базисе матрица оператора φ имеет жорданов вид, то она называется жордановой нормальной формой оператора φ, а соответствующий базис - его жордановым базисом.

6.4.4 Нильпотентный оператор

Пусть $\psi \in \mathcal{L}(V)$. Оператор ψ называется нильпотентным, если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\psi^m = 0$

6.4.5 Циклическое подпространство

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - нильпотентный оператор. Подпространство $U \leqslant V$ называется циклическим относительно ψ, если оно инвариантно относительно ψ и существует вектор $\vec{v} \in V$ такой, что U - минимальное по включению инвариантное подпространство, содержащее $\vec{v}$.

6.4.6 Высота вектора

Пусть $\psi \in \mathcal{L}(V)$ - нильпотентный оператор, $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Высотой вектора $\vec{v}$ относительно ψ называется наименьшее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\psi^n(\vec{v}) = 0$

6.4.7 О линейной независимости векторов с различными высотами

Пусть $\psi \in \mathcal{L}(V)$ - нильпотентный оператор, и пусть векторы $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ имеют попарно различные высоты относительно ψ. Тогда эти векторы образуют линейно независимую систему.

Доказательство.

Предположим, что это не так, тогда существует нетривиальная линейная комбинация с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$, равная нулю:

$$\alpha_1\vec{v_1} + \cdots + \alpha_k\vec{v_k} = \vec{0}$$

Пусть $\vec{v_i}$ - вектор с наибольшей высотой n_i, коэффициент при котором не равен нулю. Применяя к данному равенству ψ^{n-1}, получим, что $\alpha_i\psi^{n-1}(\vec{v_i}) = \vec{0}$. Значит $\alpha_i = 0$, что противоречит нашему условию.

6.4.8 О дополнении циклического подпространства до всего пространства

Пусть $\psi \in \mathcal{L}(V)$ - нильпотентный оператор, $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ - вектор наибольшей высоты n в пространстве V, и $U \leqslant V$ - циклическое подпространство, порождённое $\vec{v}$. Тогда существует $W \leqslant V$ такое, что W инвариантно относительно ψ и $V = U \oplus W$.

Доказательство.

Вектор из условия определён корректно, т.к. все векторы из $V \setminus \{\vec{0}\}$ имеют конечную высоту, ограниченную сверху величиной $\dim V$. Выберем инвариантное подпространство

$W \leqslant V$ наибольшей размерности такое, что $W \cap U = \{\vec{0}\}$. Такое пространство точно существует, потому что $\vec{0} \leqslant V$ удовлетворяет условию. Если $U \oplus W = V$, то утверждение доказано.

Если же $U \oplus W \neq V$, то выберем $\vec{v} \notin U \oplus W$. Поскольку в наборе $\vec{v}, \psi(\vec{v}), \ldots, \vec{0}$ первый вектор не лежит в $U \oplus W$, а последний - лежит, то в некоторый момент произойдёт скачок из $V \setminus (U \oplus W)$ в $U \oplus W$. Пусть без ограничения общности это произойдёт на первом шаге, тогда:

$$\psi(\vec{v}) = \alpha_0 \vec{v_0} + \cdots + \alpha_{n-1}\psi^{n-1}(\vec{v_{n-1}}) + \vec{w}$$

Применим к обеим частям равенства оператор ψ^{n-1}, получим следующее:

$$\vec{0} = \alpha_0 \psi^{n-1}(\vec{v_0}) + \psi^{n-1}(\vec{w})$$

Поскольку сумма прямая, то оба слагаемых в правой части равны нулю, то есть $\alpha_0 = 0 \land \psi^{n-1}(\vec{w}) = 0$. Положим теперь $\vec{v'} := \vec{v} - \alpha_1 \vec{v_1} - \cdots - \alpha_{n-1}\psi^{n-2}(\vec{v_{n-1}})$. Заметим, что $\vec{v'} \notin U \oplus W$, т.к. $\vec{v} \notin U \oplus W$. Кроме того:

$$\psi(\vec{v'}) = \psi(\vec{v}) - \alpha_1 \psi(vecv_1) - \cdots - \alpha_{n-1}\psi^{n-1}(\vec{v_{n-1}}) = \vec{w}$$

Значит, пространство $W \oplus \langle \vec{x'} \rangle$ - тоже инвариантно относительно ψ, причём $(W \oplus \langle \vec{x'} \rangle) \cap U = \{\vec{0}\}$. Получено противоречие с максимальное размерностью пространства W.

6.5 Существование жордановой нормальной формы в случае единственного собственного значения и в общем случае

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ и χ_φ раскладывается на линейные сомножители. Тогда у оператора φ существует жорданова нормальная форма.

Доказательство.

Представим V в виде прямой суммы подпространств:

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}$$

$\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \varphi_{\lambda_i}|_{V^{\lambda_i}}$ - нильпотентный, поэтому он раскладывается в прямую сумму подпространств и, как следствие, имеет жорданов базис e_i. В этом базисе оператор $\varphi_{\lambda_i}|_{V^{\lambda_i}}$ имеет жорданову нормальную форму с нулями на главной диагонали.

В этом же базисе e_i оператор $\varphi|_{V^{\lambda_i}}$ имеет матрицу, состоящую из тех же клеток, что и $\varphi_{\lambda_i}|_{V^{\lambda_i}}$, только вместо нуля на диагонали стоит λ_i

Объединение жордановых базисов в подпространствах $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_k}$ даёт искомый жорданов базис в V.

6.6 Единственность жордановой нормальной формы

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, и χ_φ раскладывается на линейные сомножители. Тогда жорданова нормальная форма оператора φ единственна с точностью до перестановки клеток.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in F$ - собственное значение оператора φ. Выберем жорданов базис $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ такой, что $\varphi \leftrightarrow_e A \in M_n(F)$, где A - жорданова нормальная форма, в которой все клетки со значением λ_0 стоят в начале и имеют суммарный размер $d \leqslant n$, тогда этим клеткам соответствует начальный фрагмент базиса $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_d})$. Обозначим размеры этих клеток через $k_1, \ldots, k_s$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{s} k_i = d$. Достаточно показать, что набор $\{k_1, \ldots, k_s\}$ определён однозначно.

Пусть α_0 - алгебраическая кратность значения λ_0, тогда выполнено равенство $d = \alpha_0$. Рассмотрим оператор φ_{λ_0} и заметим, что $\varphi_{\lambda_0} \leftrightarrow_e A_{\lambda_0} = A - \lambda_0 E$, то есть первые d элементов на диагонали A_{λ_0} равны нулю, а остальные - отличные от нуля. При возведении матрицы A_{λ_0} в некоторую степень каждая клетка возводится в степень независимо, причём ранг каждой вырожденной клетки в каждой следующей степени уменьшается на один, пока клетка не станет нулевой, а невырожденные клетки остаются невырожденными. Значит $\text{rk } (A_{\lambda_0})^d = n - d$.

Исследуем нильпотентный оператор $\psi := \varphi_{\lambda_0}|_{V^{\lambda_0}} \in \mathcal{L}(V^{\lambda_0})$. Его матрица в базисе $e' = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_d})$ имеет блочно-диагональный вид из жордановых клеток со значением ноль и размерами $k_1, \ldots, k_s$.

Пусть n_1 - число клеток, с размером $\geqslant 1$, n_2 - число клеток с размером $\geqslant 2$, и так далее. Число клеток размера $j \in \{1, \ldots, d\}$ равно $n_j - n_{j+1}$, поэтому для опредления числа клеток каждого размера достаточно найти числа n_i. $\forall i \in \{1, \ldots, d\} : V_i := \text{Ker } \psi^i$, тогда $V_{\lambda_0} = V_1 \leqslant \ldots \leqslant V_d = V^{\lambda_o}$. Чтобы определить величины $\dim V_1, \ldots, \dim V_d$ снова воспользуемся замечанием о том, что возведение клетки в каждую следующую степень уменьшает её ранг на один, пока она не станет нулевой:

$$\dim V_1 = \dim \text{Ker } \psi = d - \text{rk } \psi = n_1$$

$$\dim V_2 = \dim \text{Ker } \psi^2 = d - \text{rk } \psi^2 = (d - \text{rk } \psi) + (\text{rk } \psi - \text{rk } \psi^2) = n_1 + n_2$$

$$\ldots$$

$$\dim V_d = \dim \text{Ker } \psi^d = (d - \text{rk } \psi^{d-1}) + (\text{rk } \psi^{d-1} - \text{rk } \psi^d) = \sum_{i=1}^{d} n_i$$

Таким образом, числа $n_1, \ldots, n_d$ определяются однозначно через величины $\dim V_1, \ldots, \dim V_d$ вне зависимости от выбора базиса, и по ним однозначно определяется набор $\{k_1, \ldots, k_s\}$, что и требовалось доказать.

6.7 Метод её нахождения без поиска базиса

Метод нахождения ЖНФ без поиска базиса описан в доказательстве единственности разложения жордановой нормальной формы.

6.8 Минимальный многочлен линейного преобразования, его свойства, связь с жордановой нормальной формой

6.8.1 Определение

Минимальным многочленом оператора φ называется аннулирующий многочлен наименьшей степени.

6.8.2 О делимости любого аннулирующего многочлена минимальным

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), \mu_\varphi$ - минимальный многочлен для φ. Тогда многочлен $P \in F[x]$ - аннулирующий для $\varphi \Leftrightarrow \mu_\varphi \mid P$

Доказательство.

Разделим P на μ_φ с остатком: $P = \mu_\varphi Q + R$, $\deg R < \deg \mu_\varphi$, тогда $P(\varphi) = R(\varphi)$. Т.к. μ_φ - минимальный, то:

$$P(\varphi) = 0 \Leftrightarrow R(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \mu_\varphi \mid P$$

6.8.3 Единственность

Минимальный многочлен оператора $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ единственен с точностью до ассоциированности.

Доказательство.

Пусть $\mu_1, \mu_2 \in F[x]$ - различные минимальные многочлены для φ, тогда:

$$\begin{cases} \mu_1 \mid \mu_2 \\ \mu_2 \mid \mu_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \deg \mu_1 \leqslant \deg \mu_2 \\ \deg \mu_2 \leqslant \deg \mu_1 \end{cases} \Rightarrow \deg \mu_1 = \deg \mu_2$$

Т.к. $\mu_1 \mid \mu_2$, то μ_1 и μ_2 ассоциированы.

6.8.4 Связь минимального многочлена с жордановой формой

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, и χ_φ раскладывается на линейные сомножители. Тогда его минимальный многочлен имеет вид $\mu_\varphi = \prod(\lambda_i - \lambda)^{\beta_i}$, где β_i - наибольший размер клетки с собственным значением λ_i в жордановой нормальной форме оператора φ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$

Доказательство.

Многочлен p аннулирующий $\Leftrightarrow$ он обнуляет каждую клетку жордановой нормальной формы. Пусть s_j - наибольший размер клетки, соответствующей значению λ_j в ЖНФ оператора φ, тогда:

$$p(J_{s_j}(\lambda_j)) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda_i E - J_{s_j}(\lambda_j))^{\beta_i} = (-J_{s_j})^{b_j} \prod_{i \neq j}(\lambda_i E - J_{s_j}(\lambda_j))^{\beta_i}$$

Поскольку все матрицы в произведении, кроме первой, невырожденные, то их произведение тоже невырожденная матрица, поэтому выполнено неравенство $(J_{s_j})^{\beta_j} = 0$, откуда $\beta_j \geqslant s_j$. Но нам достаточно и степени $\beta_j = s_j$.

7 О линейных рекуррентах

7.1 Линейные рекурренты

7.1.1 Определение

Последовательность $(a_i) \in F^\infty$ называется линейной рекуррентой с характеристическим многочленом $p = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0 \in F[x]$, если выполнено следующее условие:

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \; a_{k+n} + p_{n-1}a_{k+n-1} + \cdots + p_0 a_k = 0$$

Обозначим множество рекуррент с характеристическим многочленом p через V_p

7.1.2 Оператор левого сдвига

Оператором левого сдвига на F^∞ называется оператор $\varphi : F^\infty \to F^\infty$, заданный для каждой последовательности $(a_i) \in F^\infty$ как $\varphi((a_i)) := (a_{i+1})$

7.1.3 Инвариантность оператора левого сдвига

Пусть $p \in F[x], \varphi$ - оператор левого сдвига. Тогда $V_p = \text{Ker } p(\varphi)$.

Из этого следует, что V_p инвариантно относительно φ, поэтому можно рассматривать оператор $\psi := \varphi|_{V_p}$

Доказательство.

Для любой последовательности $A = (a_i) \in F^\infty$ выполнена равносильность $A \in \text{Ker } p(\varphi) \Leftrightarrow p(\varphi)(A) = (0)$. Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : [p(\varphi)(A)]_k = a_{k+n} + a_{k+n-1}p_{n-1} + \dots + a_k p_0$, поэтому $A \in \text{Ker } p(\varphi) \Leftrightarrow A \in V_p$

7.1.4 Минимальный многочлен оператора сдвига

Минимальный многочлен μ_ψ оператора ψ равен p с точностью до ассоциированности.

Доказательство.

С одной стороны, $V_p = \text{Ker } p(\varphi)$, поэтому $\text{Im } p(\psi) = p(\varphi)(V_p) = \{\vec{0}\}$, значит $\mu_\psi \mid p$.

С другой стороны, $\forall A \in V_p : \mu_\psi(\psi)(A) = (0) \Leftrightarrow A \in \text{Ker } \mu_\psi(\psi) \Leftrightarrow A \in V_{\mu_\psi} \Rightarrow V_p \leqslant V_{\mu_\psi} \Rightarrow \deg p \leqslant \deg \mu_\psi \Rightarrow p = \mu_\psi$ с точностью до ассоциированности.

7.1.5 Характеристический многочлен оператора сдвига

Характеристический многочлен χ_ψ оператора ψ равен $(-1)^n p$

Доказательство.

В стандартном базисе e матрица преобразования ψ имеет следующий вид:

$$\psi \leftrightarrow_e A_p \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}$$

Докажем индукцией по n, что $|A_p - \lambda E| = (-1)^n p(\lambda)$, база $n = 1$ тривиальна. Докажем переход, используя разложение определителя по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \dots & -p_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-p_0) =$$

$$(-\lambda)(-1)^{n-1}(p_1 + \lambda p_2 + \dots + \lambda^{n-2} p_{n-1}) + (-1)^n p_0 = (-1)^n p(\lambda)$$

7.2 Общий вид линейной рекурренты над производным полем

Пусть $p \in F[x]$ раскладывается на линейные сомножители. Тогда каждое решение рекурренты с характеристическим многочленом p имеет следующий вид для некоторого набора коэффициентов $\{\beta_{it}\} \subset F$:

$$(a_m) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{\alpha_i} \beta_{it} C_m^{t-1} \lambda_i^{m+1-t}$$

Доказательство.

Поскольку минимальный многочлен ψ равен харaктестическому многочлену ψ, то для каждого собственного значения λ в ЖНФ оператора ψ есть ровно одна жорданова клетка с таким собственным значением, и она имеет размер α. Найдём последовательности $A_1, \ldots, A_\alpha$ такие, что

$$\varphi(A_1) = (0)$$

$$\varphi(A_2) = A_1$$

$$\ldots$$

$$\varphi(A_\alpha) = \varphi(A_{\alpha-1})$$

Все эти последовательности обнуляются оператором $(\varphi_\lambda)^\alpha$, а значит и $p(\varphi)$, поэтому они лежат в V_p. Именно они образуют жорданов базис в V^λ. Пусть $A_1 := (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$, тогда $\psi_\lambda(A_1) = (0)$, теперь для каждого $t \in \{1, \ldots, \alpha\}$ положим, что $A_t = (f_t(m)\lambda^{m+1-t})$ для некоторой функции $f_t: \mathbb{N} \cup \{0\} \to F$, причём $f_1 = 1$, считая A_t найденным, найдём A_{t+1}:

$$\varphi_\lambda(A_{t+1}) = A_t$$

$$f_{t+1}(m+1)\lambda^{m+1-t} - \lambda f_{t+1}(m)\lambda^{m-t} = f_t(m)\lambda^{m+1-t}$$

$$f_{t+1}(m+1) - f_{t+1}(m) = f_t(m)$$

Базе $f_1 = 1$ и рекуррентному соотношению удовлетворяет семейство функций $\{f_t\}_{t=1}^{\alpha}$ такое, что $f_t(m) = C_m^{t-1}$. Таким образом, $A_t = (C_m^{t-1}\lambda^{m+1-t})$. Объединение жордановых базисов клеток и будет базисом в V_p, который позволяет представить каждый элемент из V_p в требуемом виде.

8 О билинейных формах

8.1 Билинейные формы

Пусть V - линейное пространство над полем F. Билинейной формой на V называется функция $b: V \times V \to F$, линейная по обоим аргументам.

8.2 Координатная запись билинейной формы

8.2.1 Матрица формы

Матрицей формы $b \in \mathcal{B}(V)$ в базисе $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_2}) =: e$ называется следующая матрица B:

$$B = (b(\vec{b_i}, \vec{b_j})) = \begin{pmatrix} b(\vec{e_1}, \vec{e_1}) & \ldots & b(\vec{e_1}, \vec{e_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\vec{e_n}, \vec{e_1}) & \ldots & b(\vec{e_n}, \vec{e_n}) \end{pmatrix}$$

8.2.2 Координатная запись

Пусть $b \in \mathcal{B}(V), e$ - базис в $V, b \leftrightarrow_e B$. Тогда для любых $\vec{u}, \vec{v} \in V, \vec{u} \leftrightarrow_e x, \vec{v} \leftrightarrow_e y$, выполнено $b(\vec{u}, \vec{v}) = x^T B y$

Доказательство.

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i b(\vec{e_i}, \vec{e_j}) y_j = x^T B y$$

8.3 Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса

Пусть $b \in \mathcal{B}(V), e$ и e' - два базиса в $V, e' = eS$. Тогда если $b \leftrightarrow_e B, b \leftrightarrow_{e'} B'$, то $B' = S^T B S$

9 Ещё больше о билинейных формах

9.1 Симметричные и кососимметричные билинейные формы, их матрицы

9.1.1 Определение симметричной формы

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$. Форма b называется симметричной, если для всех $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $b(\vec{u}, \vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{u})$. Пространство симметричных форм на V обозначается через $\mathcal{B}^+(V)$

9.1.2 Определение кососимметричной формы

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$. Форма b называется кососимметричной, если:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \ b(\vec{u}, \vec{v}) = -b(\vec{v}, \vec{u})$
2. $\forall \vec{u} \in V: \ b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$

Пространство кососимметричных форм обозначается через $\mathcal{B}^-(V)$

9.1.3 Свойства матриц кососимметричных и симметричных форм

Пусть e - базис в $V, b \in \mathcal{B}(V), b \leftrightarrow_e B$. Тогда:

1. $b \in \mathcal{B}^+(V) \Leftrightarrow B = B^T$
2. $b \in \mathcal{B}^-(V) \Leftrightarrow B = -B^T$ и на главной диагонали B стоят нули

9.2 Ядро формы, ортогональное дополнение подпространства (относительно формы), их свойства

9.2.1 Ядро формы

Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$. Ядром формы b называется подпространство $\mathrm{Ker}\ b := \{\vec{v} \in V : \forall \vec{u} \in V : \ b(\vec{u}, \vec{v}) = 0\} = \{\vec{u} \in V : \ \forall \vec{v} \in V : \ b(\vec{u}, \vec{v}) = 0\} \leqslant V$

9.2.2 Ортогональное дополнение подпространства

Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V), \vec{u}, \vec{v} \in V$. Векторы $\vec{u}, \vec{v}$ называются ортогональными, если $b(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Если $U \leqslant V$, то ортогональным дополнением к U относительно b называется $U^{\perp} := \{\vec{v} \in V : \forall \vec{u} \in U : b(\vec{u}, \vec{v}) = 0\}$

9.2.3 Свойства ортогональных дополнений

Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V), U \leqslant V$. Тогда:

1. $\dim U^{\perp} \geqslant \dim V - \dim U$
2. Если b невырожденна, то $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$

Доказательство.

Пусть $n := \dim V, k := \dim U$. Дополним базис $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k})$ в U до базиса $e := (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ в V.

Тогда, если $\vec{v} \in V, \vec{v} \leftrightarrow_e x$, то $\vec{v} \in U^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, k\} : b(\vec{e_i}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow B'x = 0$, где B' - матрица, составленная из первых k строк матрицы B. Тогда, так как $\text{rk } B' \leqslant k$, то $\dim U^{\perp} \geqslant \dim V - \dim U$. Более того, если форма b невырождена, то матрица B тоже невырождена, откуда $\text{rk } B' = k \Rightarrow \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.

9.2.4 Относительная невырожденность

Подпространство $U \leqslant V$ называется невырожденным относительно $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$, если ограничение $b|_U \in \mathcal{B}^{\pm}(U)$ невырожденно.

9.2.5 Теорема о прямой сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$. Тогда подпространство $U \leqslant V$ невырожденно относительно $b \Leftrightarrow V = U \oplus U^{\perp}$

Доказательство.

$\Rightarrow$ Значит $\dim U^{\perp} = n - k, \text{Ker } b|_U = \{\vec{0}\}$, значит $\forall \vec{u} \in U : \exists \vec{v} \in U : b(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$. Это значит, что $U \cap U' = \{\vec{0}\} \Rightarrow U \oplus U'$, но $\dim(U \oplus U') = n \Rightarrow V = U \oplus U'$

$\Leftarrow$ Если сумма $U \oplus U'$ прямая, то $\text{Ker } b|_U = \{\vec{0}\}$. Значит U невырождено относительно b.

10 О квадратичных формах

10.1 Квадратичные формы, их связь с симметричными билинейными формами

10.1.1 Определение

Квадратичной формой, соответствующей форме $b \in \mathcal{B}(V)$ называется функция $h : V \to F$ такая, что $\forall \vec{v} \in V : h(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v})$. Квадратичные формы на V образуют линейное пространство над F, обозначаемое через $\mathcal{Q}(V)$

10.1.2 Связь квадратичных форм с симметричными билинейными формами

Пусть char $F \neq 2$. Тогда для любой квадратичной формы h на V существует единственная форма $b \in \mathcal{B}^+(V)$, соответствующая ей.

Доказательство.

Пусть $b \in \mathbb{B}(V), h(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v})$. b представимо в виде $b^+ + b^-$, где $b^\pm \in \mathbb{B}^\pm(V)$, тогда $h(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v}) = b^+(\vec{v}, \vec{v})$. Более того, по h можно однозначно восстановить b^+ следующим образом: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \ b^+(\vec{u},\vec{v}) := \frac{h(\vec{u}+\vec{v})-h(\vec{v})-h(\vec{u})}{2}$

10.2 Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Пусть char $F \neq 2, h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда в пространстве V существует такой базис e, что h в этом базисе имеет диагональную матрицу.

Следствие. Пусть $F = \mathbb{R}, h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда в пространстве V существует такой базис e, что h в этом базисе имеет диагональную матрицу с числами 0 и ± 1 на главной диагонали.

Доказательство.

Проведём индукцию по $n := \dim V$. База, $n = 1$, тривиальна. Пусть теперь $n > 1, h \in \mathbb{Q}(V), b \in \mathbb{B}^+(V)$ - полярная к h форма. Если $h = 0$, то $b = 0$, поэтому у h нулевая матрица, если же $h \neq 0$, то $\exists \vec{e_1} \in V : \ h(\vec{e_1}) \neq 0$. Тогда $\langle e_1 \rangle$ невырожденно относительно b, откуда $V = \langle \vec{e_1} \rangle \oplus \langle \vec{e_1} \rangle^\perp$. По предположению индукции, в $U^\perp$ существует базис, в котором матрица $h|_U$ диагональна, и объединение этого базиса с $\vec{e_1}$ и даёт искомый базис в V.

10.3 Положительно определённые квадратичные формы

10.3.1 Определение

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда h называется:

- Положительно определённой, если $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} : \ h(\vec{v}) > 0$.
- Положительно полуопределённой, если $\forall \vec{v} \in V : \ h(\vec{v}) \geqslant 0$
- Отрицательно определённой, если $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} : \ h(\vec{v}) < 0$.
- Отрицательно полуопределённой, если $\forall \vec{v} \in V : \ h(\vec{v}) \leqslant 0$

10.3.2 Критерий положительной определённости

$B \in M_n(\mathbb{R})$ положительно определена $\Leftrightarrow \exists A \in Gl_n(\mathbb{R}) : \ B = A^T A$

Доказательство.

Квадратичная форма $h \leftrightarrow_e B$ положительно определена $\Leftrightarrow$ h имеет нормальный вид $E \Leftrightarrow$ для некоторой матрицы $S \in Gl_n(\mathbb{R})$ выполнено $E = S^T B S \Leftrightarrow$ для некоторой матрицы $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ выполнено $B = A^T A$

10.4 Индексы инерции квадратичной формы

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Её положительным индексом инерции $\sigma_+(h)$ называется наибольшая размерность подпространства $U \leqslant V$ такого, что $h|_U$ положительно определена, отрицательным индексом инерции $\sigma_-(g)$ - наибольшая размерность подпространства $U \leqslant V$ такого, что $h|_U$ отрицательно определена.

10.5 Закон инерции

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V), B$ - нормальная форма h в нормальном базисе e. Тогда на диагонали матрицы стоит ровно $\sigma_+(h)$ единиц и $\sigma_-(h)$ минус единиц.

Следствие. (Закон инерции). Нормальный вид квадратичной формы $h \in \mathcal{Q}(V)$ определён однозначно с точностью до перестановки диагональных элементов.

Доказательство.

Пусть $n := \dim V$. Без ограничений общности можно считать, что нормальная форма h имеет вид, где на диагонали стоят подряд k единиц, l нулей и m минус единиц, где $k + l + m = n$

Пусть $U := \langle \vec{e_1}, \dots, \vec{e_j} \rangle, W := \langle \vec{e_{k+1}}, \dots, \vec{e_n} \rangle$ сужение $h|_U$ положительно определено $\Rightarrow \sigma_+(h) \geqslant k$. С другой стороны, сужение $h|_W$ отрицательно полуопределено, пусть теперь $U' \leqslant V$ положительно определено, тогда $U' \cap W = \{\vec{0}\}$. Значит $\sigma_+(h) = k$. Аналогично $\sigma_-(h) = m$.

10.6 Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V), h \leftrightarrow_e B$, причём все главные миноры матрицы B отличны от нуля. Тогда существует такой базис $e' = eS$, что матрица перехода S - верхнетреугольная с единицами на главной диагонали, $h \leftrightarrow_{e'} B'$ и B' диагональна. Более того, тогда $B' = diag(\Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, \dots, \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)})$

Доказательство.

Докажем индукцией по $n := \dim V$, что матрица формы h приводится к диагональному виду в базисе с матрицей перехода из условия. База $n = 1$ тривиальна, подходит исходный базис e. Пусть теперь $n > 1$, тогда $U := \langle \vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n-1}} \rangle$ невырожденно относительно b, т.к. $\Delta_{n-1}(B) \neq 0$. Значит $V = U \oplus U^\perp$. Представим $\vec{e_n} = \vec{u} + \vec{e_n'}, \vec{u} \in U, \vec{e_n'} \in U^\perp, \vec{e_n'} \neq \vec{0}$. По предположению индукции, в U можно выбрать подходящий базис $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n-1}})$, тогда его объединение с $\vec{e_n'}$ будет искомым.

Вычислим значения диагональных элементов $d_i, i \in \{1, \dots, n\}$ Заметим, что поскольку базис e' получен описанным выше образом, то $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \langle \vec{e_1}, \dots, \vec{e_i} \rangle = \langle \vec{e_1'}, \dots, \vec{e_i'} \rangle$. Пусть B_i - подматрица B в левом верхнем углу, а B_i' - аналогичная матрица в B'. Тогда $B_i' = S_i^T B_i S_i$, где S_i - соответствующая подматрица S, поэтому $b_1 b_2 \dots b_i = \Delta_i(B_i') = |B_i'| = |S_i^T B_i S_i| = |B_i| = \Delta(B_i)$. Значит $B' = diag(\Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, \dots, \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)})$

10.7 Критерий Сильвестра

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V), h \leftrightarrow_e B$. Тогда h положительно определена $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : \Delta_i(B) > 0$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Если h положительно определена, то $B = A^T A, A \in Gl_n(\mathbb{R})$. Тогда $\Delta_n(B) = |B| = |A|^2 > 0$. Поскольку главному минору порядка i соответствует ограничение h на $U = \langle \vec{e_1}, \dots, \vec{e_i} \rangle$, которое тоже положительно определено, то, аналогично $\Delta_i(B) > 0$

$\Leftarrow$ Очевидно, используя метод Якоби.

11 Приведение кососимметричной билинейной формы к каноническому виду

Пусть $b \in \mathcal{B}^-(V)$. Тогда в V существует базис e, в котором матрица b имеет блочно-диагональный вид, состоящий из блоков B_i, где $\forall i: \ B_i = (0) \vee B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Доказательство.

Докажем данное утверждение индукцией по $n := \dim V$. База, $n = 1$, и случай, когда $b = 0$, тривиальны. Пусть теперь $\exists \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V \ : \ b(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \neq 0$. Пусть $U = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$. Тогда эти векторы линейно независимы, и без ограничения общности можно считать, что $b|_U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Заметим, что ограничение $b|_U$ невырожденно, значит $V = U \oplus U^\perp$, и к $U^\perp$ применимо предположение индукции.

12 Об эрмитовых формах

12.1 Полуторалинейные формы в комплексном пространстве

Полуторалинейной формой на V называется функция $b: \ V \times V \to \mathbb{C}$ такая, что:

1. b линейна по первому аргументу
2. b сопряжённо-линейна по второму аргументу:
   - $\forall \vec{u}, \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V: \ b(\vec{u}, \vec{v_1} + \vec{v_2}) = b(\vec{u}, \vec{v_1}) + b(\vec{u}, \vec{v_2})$
   - $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \ \forall \lambda \in \mathbb{C}: \ b(\vec{u}, \lambda \vec{v}) = \overline{\lambda} b(\vec{u}, \vec{v})$

12.2 Эрмитовы полуторалинейные и квадратичные формы, связь между ними

12.2.1 Определение эрмитовой полуторалинейной формы

Пусть $b \in \mathcal{S}(V)$. Форма b называется эрмитовой, если для всех $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $b(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{b(\vec{v}, \vec{u})}$. Матрица $B \in M_n(\mathbb{C})$ называется эрмитовой, если $B^T = \overline{B}$, или $B = B^*$, где $B^* := \overline{B^T}$ - эрмитово сопряжённая к B матрица.

12.2.2 Определение эрмитовой квадратичной формы

Эрмитовой квадратичной формой, соответствующей эрмитовой форме $b \in \mathcal{S}(V)$, называется функция $h: \ V \to \mathbb{C}$ такая, что $\forall \vec{v} \in V: \ h(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v})$. Форма h называется полярной к h.

12.2.3 О связи эрмитовых полуторалинейных и квадратичных форм

Если $b_1, b_2 \in \mathcal{S}(V)$ - различные эрмитовы формы, то соответствующие им квадратичные формы также различны.

Доказательство.

Пусть h - эрмитова квадратичная форма. Восстановим эрмитову форму $b \in \mathbb{S}(V)$, полярную к h:

$$Re(b(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{h(\vec{u} + \vec{v}) - h(\vec{u}) - h(\vec{v})}{2}$$
$$Im(b(\vec{u}, \vec{v})) = Re(-ib(\vec{u}, \vec{v})) = Re(b(\vec{u}, i\vec{v}))$$

12.3 Приведение к каноническому виду

Пусть h - эрмитова квадратичная форма. Тогда в пространстве V существует такой базис e, что h в этом базисе имеет диагональную матрицу с числами 0 и ± 1 на главной диагонали.

Доказательство аналогично билинейному случаю.

12.4 Закон инерции и критерий Сильвестра для эрмитовых квадратичных форм

Аналогично билинейному случаю.

13 Об операторах в евклидовых и эрмитовых пространствах

13.1 Евклидово и эрмитово пространство

13.1.1 Евклидово пространство

Евклидовым пространством называется линейное пространство V над $\mathbb{R}$, на котором определена положительно определённая симметричная билинейная форма $(\vec{u}, \vec{v})$ - скалярное произведение.

13.1.2 Эрмитово пространство

Эрмитовым пространством называется линейное пространство V над $\mathbb{C}$, на котором определена положительно определённая квадратичная форма $(\vec{u}, \vec{v})$ - скалярное произведение.

13.2 Выражение скалярного произведения в координатах

В евклидовом случае матрица Грама симметрична, в эрмитовом - эрмитова. Более того, очевидно, что для любых векторов $\vec{u} \leftrightarrow_e x, \vec{v} \leftrightarrow_e y$ выполнено $(\vec{u}, \vec{v}) = x^T \Gamma y$

13.3 Свойства матрицы Грама

Система $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k})$ линейно независима $\Leftrightarrow$ её матрица Грама Γ положительно определена $\Leftrightarrow \det \Gamma > 0$

Доказательство.

Если система $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k})$ линейно зависима, то тогда существует столбец $x \neq \vec{0}$ такой, что $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k})x = \vec{0}$. Тогда $\forall i \in \{1, \ldots, k\} : \ (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)\Gamma x = 0 \Rightarrow E\Gamma x = 0 \Rightarrow$

Γ вырожденна, откуда $\det\Gamma = 0$, и Γ не положительно определена. Если же система $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k})$ линейно независима, то Γ - это матрица ограничения скалярного произведения на $\langle \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k} \rangle$, тогда Γ положительно определена, а значит $\det\Gamma > 0$

13.4 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника

13.4.1 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Для любых векторов $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $|(\vec{u}, \vec{v})| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны.

Доказательство.

Обозначим через Γ матрицу Грама системы векторов $(\vec{u}, \vec{v})$, тогда выполнено $\det 0 \leqslant \det\Gamma = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}, \vec{v})^2$, откуда $|(\vec{u}, \vec{v})| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

13.4.2 Неравенство треугольника

Для любых векторов $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского-Шварца.

$$\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2+2Re(\vec{u}, \vec{v}) \leqslant \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2(\vec{u}, \vec{v}) \leqslant \|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\| = (\|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|)^2$$

14 Об ортонормированных векторах и изоморфизмах

14.1 Ортонормированные базисы и ортогональные (униатрные) матрицы

14.1.1 Определения для векторов

Векторы $\vec{u}, \vec{v} \in V$ называются ортогональными, если $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Обозначение $\vec{u} \perp \vec{v}$. Система векторов $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k})$ из V называется ортогональной, если все векторы системы попарно ортогональны, и ортонормированной, если она ортогональна и длина каждого вектора равна 1.

14.1.2 Определения для матриц

Матрица $S \in M_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если $S^T S = E$. Матрица $S \in M_n(\mathbb{C})$ называется унитарной, если $\overline{S^T} S = E$, или $S^T \overline{S} = E$.

14.2 Существование ортонормированных базисов

В пространстве V существует ортонормированный базис.

Доказательство.

Приведём скалярное произведение к нормальному виду E. Нормальный базис и будет искомым ортонормированным базисом.

14.3 Изоморфизмы евклидовых и эрмитовых пространств

14.3.1 Определение

Пусть V_1 и V_2 евклидовы (эрмитовы) пространства. Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется изоморфизмом евклидовых (эрмитовых) пространств, если:

1. φ - изоморфизм линейных прострнств V_1 и V_2.
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : (\vec{u}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}))$

14.3.2 Теорема об изоморфизме пространств с одинаковой размерностью

Пусть V_1 и V_2 - евклидовы (эрмитовы) пространства. Тогда $V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

Доказательство.

$\Leftarrow$ Пусть e_1, e_2 - ортонормированные базисы в V_1, V_2, φ - линейное отображение, такое, что $\varphi(e_1) = e_2$, причём для любых $\vec{u}, \vec{v} \in V_1 : \vec{v} \leftrightarrow_{e_1} x, \vec{u} \leftrightarrow_{e_1} y$, выполнено $(\vec{u}, \vec{v}) = x^T \overline{y} = (\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}))$.

$\Rightarrow$ Поскольку $V_1 \cong V_2$, то они в частности изоморфны, как линейные пространства, тогда $\dim V_1 = \dim V_2$

14.4 Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряжённого к нему

Для каждого $\vec{v} \in V$ положим $f_{\vec{v}}(\vec{u}) := (\vec{v}, \vec{u})$. Тогда сопоставление $\vec{v} \mapsto f_{\vec{v}}$ осуществляет изоморфизм между V и V^*.

Доказывается непосредственной проверкой.

15 Об ортогонализации и объёмах

15.1 Ортогональное дополнение подпространства

Пусть $U, W \leqslant V$. Тогда:

1. $(U^\perp)^\perp = U$
2. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
3. $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Доказательство.

Расммотрим изоморфизм $\theta : V \to V^*$ из предыдущей теоремы и заметим, что $\theta(U^\perp) = \{f_{\vec{v}} \in V^* \mid \vec{v} \in U^\perp\} = \{f \in V^* \mid \forall \vec{u} \in U : f(\vec{u}) = 0\} = U^0$ для любого подпространства $U \leqslant V$.

1. Докажем данную формулу непосредственно. Так как $\dim U = \dim V - \dim U;\ \dim U^\perp = \dim V - \dim(U^\perp)^\perp$, то $\dim U = \dim(U^\perp)^\perp$. При этом, $U \leqslant (U^\perp)^\perp$, поскольку $\forall \vec{u} \in U, \forall \vec{v} \in U^\perp : \vec{u} \perp \vec{v}$. Значит $U = (U^\perp)^\perp$
2. Поскольку $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$, то, применяя θ к обеим частям неравенства, получим, $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

3. Поскольку $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$, то, применяя θ к обеим частям неравенства, получим, $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

15.2 Ортогональное проектирование

15.2.1 Определение

Пусть $U \leqslant V, \vec{v} \in V$. Вектор $\vec{v}$ единственным образом представляется в виде суммы $\vec{u} + \vec{u'}, \vec{u} \in U, \vec{u'} \in U^\perp$. Вектор $\vec{u}$ называется ортогональной проекцией $\vec{v}$ на подпространство U. Обозначение - $pr_U\, \vec{v}$

15.2.2 Вычисление проекции

Пусть $e = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k})$ - это ортогональный базис в U. Тогда для любого вектора $\vec{v} \in V$ выполнено равенство:

$$pr_U\, \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\vec{v}, \vec{e_i})}{\|e_i\|^2} \vec{e_i}$$

Доказательство.

Представим $\vec{v}$ в виде $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u'}, \vec{u} \in U, \vec{u'} \in U^\perp$, тогда $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{e_i}$. Заметим теперь, что $\forall j \in \{1, \ldots, k\} : \; (\vec{e_j}, \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{u'}, \vec{e_j}) = (\vec{u}, \vec{e_j}) = \alpha_j \|\vec{e_j}\|^2$, откуда получаем требуемое.

15.3 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$ - базис в V. Тогда в V существует ортогональный базис $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ такой, что $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : \; \langle \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_i} \rangle = \langle \vec{f_1}, \ldots, \vec{f_i} \rangle$, причём матрица перехода S - верхнетреугольная с единицами на диагонали.

Доказательство.

Положим $\vec{e_1} := \vec{f_1}, \vec{e_i} = \vec{f_i} - pr_{\langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle}(\vec{f_i})$. Тогда матрица перехода S - верхнетреугольная с единицами на главной диагонали, поэтому $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ является базисом в V.

Проверим равенство $\langle \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k} \rangle = \langle \vec{f_1}, \ldots, \vec{f_k} \rangle$ индукцией по k. База $k = 1$ тривиальна. Пусть теперь $i > 1$, тогда: $\langle \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{i-1}}, \vec{e_i} \rangle = \langle \vec{f_1}, \ldots, \vec{f_{i-1}}, \vec{e_i} \rangle = \langle \vec{f_1}, \ldots, \vec{f_{i-1}}, \vec{f_i} \rangle$

15.4 Объём параллелипипеда

15.4.1 Определение

k - мерным объёмом системы $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k})$ векторов из V называется величина $V_k(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k})$, определяемая индуктивно:

- Если $k = 1$, то $V_1(\vec{v_1}) := \|\vec{v_1}\|$
- Если $k \geqslant 2$, то $V_k := V_{k-1}(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_{k-1}}) \cdot \rho(\langle \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_{k-1}} \rangle, \vec{v_k})$

15.4.2 Вычисление объёма параллелипипеда

Пусть $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k} \in V, \Gamma := \Gamma(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k})$. Тогда $V_k(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}) = \sqrt{\det \Gamma}$

Доказательство.

Если система $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k})$ линейно зависима, то $\det \Gamma = 0$, но при этом $\exists i \in \{1, \dots, k\}$: $\vec{v_i} \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}\rangle \Rightarrow V_i(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_i}) = 0$, поэтому все последующие объёмы также равны нулю.

Если же система $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k})$ линейно независима, то она образует базис в $U := \langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\rangle$. Применим к нему метод Грама-Шмидта и получим ортогональный базис $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k})$ такой, что $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}) = (\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k})S$, где матрица перехода S - верхнетреугольная с единицами на главной диагонали. Тогда $\det \gamma(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}) = \det \Gamma \cdot (\det S)^2 = \det \Gamma$, откуда:

$$V_k(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}) = V_1(\vec{e_1})\rho(\vec{e_2}, \langle \vec{e_1}\rangle) \dots \rho(\vec{e_k}, \langle \vec{e_1}, \dots, \vec{e_{k-1}}\rangle) =$$

$$\|\vec{e_1}\| \dots \|\vec{e_k}\| = \sqrt{\det \Gamma(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k})} = \sqrt{\det \Gamma}$$

Остаётся проверить по индукции, что $\forall i \in \{1, \dots, k\} : V_i(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_i}) = V_i(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_i})$. База $i = 1$ тривиальна. Пусть теперь $i \geqslant 2$, тогда:

$$V_i(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_i}) = V_{i-1}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{i-1}})\rho(\vec{e_i}, \langle \vec{e_1}, \dots, \vec{e_{i-1}}\rangle) =$$

$$V_{i-1}(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_{i-1}})\rho(\vec{e_i}, \langle \vec{v_1}, \dots, \vec{v_{i-1}}\rangle) = V_i(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_i})$$

16 О сопряжённых преобразованиях

16.1 Связь билинейных (полуторалинейных) форм и линейных преобразований в евклидовом (эрмитовом) пространстве

16.1.1 Новое обозначение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Для всех $\vec{u}, \vec{v} \in V$ положим $f_\varphi(\vec{u}, \vec{v}) := (\varphi(\vec{u}), \vec{v})$

16.1.2 Связь билинейных форм и преобразований

Пусть e - ортонормированный базис в V, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - такой оператор, что $\varphi \leftrightarrow_e A, f_\varphi \leftrightarrow_e B$. Тогда $B = A^T$.

Следствие. Сопоставление $\varphi \mapsto f_\varphi$ осуществляет изоморфизм между $\mathcal{L}(V)$ и $\mathcal{B}_\theta(V)$

Доказательство.

Если $\vec{u} \leftrightarrow_e x, \vec{v} \leftrightarrow_e y$. Тогда $f_\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{u}), \vec{v}) = x^T B y = (Ax)^T y = x^T A^T y$, что и означает требуемое в силу биективности сопоставления матриц θ-линейных форм.

16.2 Преобразование, сопряжённое данному

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Оператором, сопряжённым к φ, называется оператор φ^* такой, что $f_\varphi = g_{\varphi^*}$, то есть $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : (\varphi(\vec{u}), \vec{v}) = (\vec{u}, \varphi^*(\vec{v}))$

16.3 Его существование и единственность, его свойства

16.3.1 Существование сопряжённого оператора

Поскольку сопоставление $\varphi \mapsto f_\varphi \mapsto g_{\varphi^*} \mapsto \varphi^*$ биективны, то сопряжённый оператор существует и единственен. Более того, сопоставление $\varphi \mapsto \varphi^*$ осуществляет автоморфизм в евклидовом случае и антиавтоморфизм в эрмитовом случае.

16.3.2 Связь матрицы оператора и сопряжённого к нему

Пусть e - ортонормированный базис в V, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - такой линейный оператор, что $\varphi \leftrightarrow_e A$. Тогда $\varphi^* \leftrightarrow_e A^*$.

Доказательство.

Поскольку $\varphi \leftrightarrow_e A$, то $f_\varphi = g_{\varphi^*} \leftrightarrow A^T$. Значит $\varphi^* \leftrightarrow A^*$.

16.3.3 Свойства сопряжённых операторов

1. Сопоставление $\varphi \mapsto \varphi^*$ сопряжённо линейно
2. $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}(V): \ (\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$
3. $\forall \varphi \in \mathcal{L}(V): \ \varphi^{**} = \varphi$

Доказательство.

Первое свойство уже было отмечено, докажем два последних. Зафиксируем $\vec{u}, \vec{v} \in V$, тогда:

$$(\varphi\psi(\vec{u}), \vec{v}) = (\psi(\vec{u}), \varphi^*(\vec{v})) = (\vec{u}, \psi^*\varphi^*(\vec{v}))$$
$$(\vec{u}, \varphi(\vec{v})) = \overline{(\varphi(\vec{v}), \vec{u})} = \overline{(\vec{v}, \varphi^*(\vec{u}))} = (\varphi^*(\vec{u}), \vec{v})$$

В силу единственности оператора, получили требуемое.

16.3.4 О связи инвариантных подпространств оператора и сопряжённого к нему

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ и подпространство $U \leqslant V$ инвариантно относительно φ. Тогда $U^\perp$ инвариантно относительно φ^*.

Доказательство.

Пусть $\vec{v} \in U^\perp$. Тогда $\forall \vec{u} \in U: \ 0 = (\varphi(\vec{u}), \vec{v}) = (\vec{u}, \varphi^*(\vec{v}))$ в силу инвариантности U. Значит $\varphi^*(\vec{v}) \in U^\perp$.

16.4 Теорема Фредгольма

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда $\mathrm{Ker}\ \varphi^* = (\mathrm{Im}\ \varphi)^\perp$

Доказательство.

$\subset$. Пусть $\vec{v} \in \mathrm{Ker}\ \varphi^* \Rightarrow \varphi^*(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \forall \vec{u} \in V: \ 0 = (\vec{u}, \varphi^*(\vec{v})) = (\varphi(\vec{u}), \vec{v}) \Rightarrow \vec{v} \in (\mathrm{Im}\ \varphi)^\perp$

$\supset$. Заметим, что $\mathrm{rk}\, \varphi = \mathrm{rk}\, \varphi^* = \dim \mathrm{Im}\, \varphi = \dim \mathrm{Im}\, \varphi^* \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, \varphi^* = \dim V - \dim \mathrm{Im}\ \varphi^* = \dim V - \dim \mathrm{Im}\ \varphi = \dim (\mathrm{Im}\ \varphi)^\perp$.

17 О самосопряжённых преобразованиях

17.1 Самосопряжённые линейные преобразования

Оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется самосопряжённым, если $\varphi^* = \varphi$, то есть $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V (\varphi(\vec{u}), \vec{v}) = (\vec{u}, \varphi(\vec{v}))$.

17.2 Свойства самосопряжённых преобразований

17.2.1 Инвариантные пространства самосопряжённых операторов

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряжённый, $U \leqslant V$. Тогда U инвариантно относительно $\varphi \Leftrightarrow U^{\perp}$ инвариантно относительно φ.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Это уже было доказано.

$\Leftarrow$. $(U^{\perp})^{\perp} = U$, поэтому U инвариантно относительно φ.

17.2.2 Характеристический многочлен самосопряжённых операторов

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряжённый. Тогда его характеристический многочлен χ_φ раскладывается на линейные сомножители над $\mathbb{R}$.

Доказательство.

Пусть V - эрмитово пространство, $\lambda \in \mathbb{C}$ - корень χ_φ. Тогда λ является собственным значением φ с собственным вектором $\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}$, откуда

$$\lambda \|\vec{v}\|^2 = (\varphi(\vec{v}), \vec{v}) = (\vec{v}, \varphi^*(vev)) = \overline{\lambda} \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Пусть теперь V евклидово пространство с ортонормированным базисом e, тогда $\varphi \leftrightarrow_e A \in M_n(\mathbb{R}), A = A^T$. Рассмотрим U - эрмитово пространство с ортонормированным базисом $\mathcal{F}$, и оператор $\psi \leftrightarrow_{\mathcal{F}} A$. Тогда ψ тоже самосопряжённый, поэтому для ψ утвеждение выполнено. Тогда заметим, что $\chi_\varphi = \chi_A = \chi_\psi$.

17.2.3 Ортогональность собственных подпространств самосопряжённого оператора

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряжённый, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ - два различных собственных значения φ. Тогда $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$.

Доказательство.

Пусть $\vec{v_1} \in V_{\lambda_1}, \vec{v_2} \in V_{\lambda_2}$. Тогда:

$$\lambda_1(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = (\varphi(\vec{v_1}), \vec{v_2}) = (\vec{v_1}, \varphi(\vec{v_2})) = \lambda_2(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \Rightarrow (\vec{v_1}, \vec{v_2}) = 0$$

17.3 Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого линейного преобрзования

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряжённый. Тогда в V существует ортонормированный базис e, в котором матрица оператора φ диагональна.

Доказательство.

Проведём индукцию по $n := \dim V$. База, $n = 1$, тривиальна. Пусть $n > 1$. Поскольку корни χ_φ вещественные, то у φ есть собственное значение $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $\vec{e_0} \in V$ -

соответствующий ему собственный вектор длины 1. Тогда подпространство $U := \langle \vec{e_1} \rangle^\perp$ инвариантно относительно φ, поэтому можно рассмотреть оператор $\varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$, который также является самосопряжённым. По предположению индуции, в U есть ортонормированный базис из собственных векторов, тогда его объединение с $\vec{e_0}$ даёт нужный нам базис в V.

18 Об ортогональных операторах

18.1 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства

18.1.1 Определение

Оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется ортогональным (унитарным), если $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \ (\vec{u}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}))$

18.1.2 Критерий ортогональности преобразования

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда оператор φ ортогонален (унитарен) $\Leftrightarrow$ φ обратим и $\varphi^{-1} = \varphi^*$

Доказательство.

По определению, φ ортогонален (унитарен) $\Leftrightarrow$ для любых векторов $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $(\vec{u}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})) = (\vec{u}, \varphi^*\varphi(\vec{v})) \Rightarrow \varphi^*\varphi = id$. Это равносильно тому, что φ обратим и $\varphi^{-1} = \varphi^*$

18.1.3 Об инвариантных подпространствах ортогонального оператора

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - ортогональный (унитарный), $U \leqslant V$. Тогда U инвариантно относительно $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$ - инвариантно относительно φ

Доказательство.

Поскольку $(U^\perp)^\perp = U$, то достаточно доказать импликацию $\Rightarrow$. Так как U инвариантно относительно φ, то $\varphi^* = \varphi^{-1}$ инвариантно относительно $U^\perp$, то есть $\varphi^{-1}(U^\perp) \leqslant U^\perp$, но φ биективен, поэтому $\varphi^{-1}(U^\perp) = U^\perp \Rightarrow \varphi(U^\perp) = U^\perp$, откуда $U^\perp$ инвариантно относительно φ.

18.2 Инвариантные подпространства малой размерности для преобразований вещественного типа

Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{R}, \dim V \geqslant 1, \varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда у φ существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство.

По основной теореме алгебры, минимальный многочлен μ_φ имеет следующий вид:

$$\mu_\varphi = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i) \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 + \alpha_j \lambda + \beta_j)$$

Поскольку μ_φ - минимальный, то все операторы $\varphi - \lambda_i, \varphi^2 + \alpha_j \varphi + \beta_j$ вырождены. Значит, возможны два случая

1. Если $\varphi - \lambda_i$ вырожденный, то $\exists \vec{v} \in V : \ \varphi(\vec{v}) = \lambda_i \vec{v} \Rightarrow \langle \vec{v} \rangle$ - иваринтное подпространство размерности 1.

2. Если $\varphi^2 + \alpha_j\varphi + \beta_j$ вырожденный, то $\exists \vec{v} \in V : (\varphi^2 + \alpha_j\varphi + \beta_j)(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \varphi^2(\vec{v}) = -\alpha_j\varphi(\vec{v}) - \beta_j\vec{v} \Rightarrow \langle \vec{v}, \varphi(\vec{v})\rangle$ - инвариантное подпространство размерности 2.

18.3 Канонический вид унитарного и ортогонального преобразований

18.3.1 Канонический вид унитарного преобразования

Пусть V - эрмитово пространство, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - унитарный. Тогда в V существует ортонормированный базис e, в котором матрица оператора φ диагональна с числами модуля 1 на главной диагонали.

Доказательство.

Докажем диагонализируемость оператора φ в ортонормированном базисе индкцией по $n := \dim V$. База $n = 1$ тривиальна, пусть $n > 1$. Поскольку у χ_φ есть корень над $\mathbb{C}$, то у φ есть собственный вектор $\vec{e_0}$ длины 1. Тогда $U := \langle \vec{e_0}\rangle^\perp$ инвариантно относительно φ, поэтому можно рассмотреть оператор $\varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$, который также является унитарным. По предположению индукции, в U есть ортонормированный базис из собственных векторов, тогда объединение с $\vec{e_0}$ даёт искомый базис в V.

Покажем теперь, что все собственные значения оператора φ имеют модуль 1. Действительно, если $\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}$ - собственный вектор со значением λ, то $(\vec{v}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{v})) = \lambda^2(\vec{v}, \vec{v}) \Rightarrow |\lambda| = 1$.

18.3.2 Канонический вид ортогонального преобразования

Пусть V - евклидово пространство $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - ортогональный. Тогда в V существует ортонормированный базис e, в котором матрица оператора φ имеет блочно-диагональный вид, состоящий из блоков B_i, где $\forall i: \ B_i = (\pm 1) \vee B_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Доказательство.

Проведём индукцию по $n := \dim V$. База, $n = 0$ тривиальна. Пусть $n \geqslant 1$. Выберем $U \leqslant V$ - одномерное или двумерное инвариантное относительно φ подпространство. Тогда $U^\perp$ тоже инвариантно относительно φ, и в $U^\perp$ есть требуемый базис e' по предположению индукции. Если e'' - некоторый ортонормированный базис в U, то его объединение с e' даёт ортонормированный базис в V. Исследуем оператор $\varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$:

1. Если $\dim U = 1$, то $U = \langle \vec{v}\rangle$, где $\vec{v} \in V$ - собственный вектор длины 1 с собственным значением $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \pm 1$ аналогично комплексному случаю.

2. Если $\dim U = 2$, то $\varphi|_U \leftrightarrow_{e''} C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда, т.к. $\varphi|_U$ - также ортогональный, то:

$$C^T C = E \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

   Выберем $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ такие, что $a = \cos\alpha, b = \sin\beta, c = \sin\alpha, d = -\cos\beta$, тогда $\sin(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta \vee \alpha = \beta \pm \pi$. В первом случае уже получено требуемое, во втором матрица C имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

В этом случае $\chi_C(\lambda) = \lambda^2 - 1$, поэтому $U = \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle, \vec{u}, \vec{v} \in V$ - собственные векторы длины 1 с собственными значениями 1 и -1. Заметим теперь, что $(\vec{u}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})) = (\vec{u}, -\vec{v}) \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

18.4 Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда существуют $\psi, \theta \in \mathcal{L}(V)$ такие, что ψ - самосопряжённый с неотрицательными собственными значениями, а θ - ортогональный (унитарный), и $\psi = \psi\theta$

Доказательство.

Рассмотрим оператор $\nu := \varphi^*\varphi, \nu^* = \varphi^*\varphi \Rightarrow \nu$ самосопряжённый. Более того, если $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ - собственный вектор с собственным значением λ, то $(\varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{v})) = (\vec{v}, \nu(\vec{v})) = \lambda(\vec{v}, \vec{v}) \Rightarrow \lambda \geqslant 0$.

Пусть $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ - ортонормированный базис в V из собственных векторов ν с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$. Положим $\vec{f_i} = \varphi(\vec{e_i})$. Тогда $\forall i, j : (\vec{f_i}, \vec{f_j}) = (\vec{e_i}, \nu(\vec{e_j})) = \lambda(\vec{e_i}, \vec{e_j}) \Rightarrow$ система $(\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n})$ ортогональна и $\forall i : \|\vec{f_i}\| = \sqrt{\lambda_i}\vec{e_i}$

Без ограничения общности, будем считать, что первые k собственных значений положительные, а остальные - нулевые, тогда будем считать, что $\vec{g_i} = \begin{cases} \frac{\vec{f_i}}{\sqrt{\lambda_i}} & \vec{f_i} \neq \vec{0} \\ 0 & \vec{f_i} = 0 \end{cases}$ дополним систему $(\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_k})$ до ортонормированного базиса $(\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_n})$. Тогда оператор φ имеет следующий вид: $\varphi : \vec{e_i} \to \vec{g_i} \to \sqrt{\lambda}\vec{g_i} = \vec{f_i}$. Тогда зададим операторы $\theta, \psi \in \mathcal{L}(V)$, как:

$$\theta : \vec{e_i} \to \vec{g_i}$$

$$\psi : \vec{g_i} \to \sqrt{\lambda_i}\vec{g_i}$$

Таким образом, $\varphi = \psi\theta$. Наконец, θ переводит ортонормированный базис в ортонормированный, значит он ортогональный, а ψ имеет в базисе $(\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_n})$ диагональный вид, поэтому ψ - самосопряжённый.

19 О привидениях

19.1 Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям

Пусть V - евклидово (эрмитово) пространство, $q \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда в V существует ортонормированный базис e, в котором q имеет диагональный вид.

Доказательство.

Пусть $b \in \mathbb{B}^+(V)$ - θ линейная форма, полярная к q. Тогда $\exists\varphi \in \mathbb{L}(V) : b(\vec{u}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{u}), \vec{v})$. При этом:

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{u}), \vec{v}) = \overline{b(\vec{v}, \vec{u})} = \overline{(\varphi(\vec{v}), \vec{u})} = (\vec{u}, \varphi(\vec{v}))$$

Значит φ самосопряжённый, и в V существует ортонормированный базис, в котором φ диагонализуем. Тогда если $\varphi \leftrightarrow_e A, b \leftrightarrow_e A^T, q \leftrightarrow_e A^T$, поэтому форма q тоже имеет диагональную матрицу в базисе e.

19.2 Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C}), q_1, q_2 \in \mathbb{Q}(V)$ и q_2 положительно определена. Тогда в V существует такой базис e, в котором матрицы форм q_1, q_2 диагональны.

Доказательство.

Пусть b - θ-линейная форма, полярная к q_2. Тогда b можно объявить скалярным (эрмитовым) произведением на V. В полученном евклидовом (эрмитовом) пространстве форма q_1 приводится к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе e. Поскольку базис e - ортонормированный, то в этом же базисе q_2 имеет диагональный вид E.

20 О тензорах

20.1 Тензоры, как полилинейные отображения

20.1.1 Определение тензора

Тензором типа (p, q), или p раз контрвариантным и q раз ковариантным тензором называется полилинейное отображение $t : (V^*)^p \times V^q \to F$. Все тензоры типа (p, q) образуют линейное пространство над F, обозначение - $\mathbb{T}^p_q$.

20.1.2 Примеры тензоров

1. Тензор типа $(0, 1)$ - это линейный функционал на V, поэтому $\mathbb{T}^0_1 = V^*$
2. Тензор типа $(1, 0)$ - это элемент пространства V^{**}, поэтому $\mathbb{T}^1_0 = V^{**} \cong V$
3. Тензор типа $(0, 2)$ - это билинейная форма на V, поэтому $\mathcal{B}(V) = \mathbb{T}^0_2$

20.2 Тензорное произведение тензоров

Пусть $t \in \mathbb{T}^p_q, t' \in \mathbb{T}^{p'}_{q'}$. Тогда тензорным произведением тензоров t и t' называется тензор $t \otimes t' \in \mathbb{T}^{p+p'}_{q+q'}$ следующего вида:

$$t \otimes t'(f_1, \ldots, f_{p+p'}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_{q+q'}}) = t(f_1, \ldots, f_p, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_q}) \cdot t'(f_{p+1}, \ldots, f_{p+p'}, \vec{v_{q+1}}, \ldots, \vec{v_{q+q'}})$$

20.3 Координатная запись тензора, изменение координат при замене базиса

20.3.1 Координатная запись тензора

Пусть e и e^* - взаимные базисы V и $V^*, t \in \mathbb{T}^p_q$. Координатами тезора t в базисе e называется набор из следующих величин:

$$T^{i_1, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q} = t(e^{t_1}, \ldots, e^{t_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}), i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$$

Значит, произвольный тензор $t \in \mathbb{T}^p_q$ можно записать в таком виде:

$$t = t^{i_1, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$$

20.3.2 Изменение координат при замене базиса

Пусть e, e' - базисы в V такие, что $e'_j = a^i_j e_i, e^j = a^j_i e'^i$. Тогда преобразование координат тензора $t \in \mathbb{T}^p_q$ при замене базиса имеет следующий вид:

$$t^{j_1, \ldots, j_p}_{i_1, \ldots, i_q} = a^{j_1}_{j'_1} \ldots a^{j_p}_{j'_p} b^{i'_1}_{i_1} \ldots b^{i'_q}_{i_q} t^{j'_1, \ldots, j'_p}_{i'_1, \ldots, i'_q}$$

Доказательство.

Для простоты выполним проверку в случае, когда $t \in \mathbb{T}^1_1$, поскольку в общем случае рассуждение аналогично:

$$t = t^j_i e_j \otimes e^i = t^{j'}_{i'} e_{j'} \otimes e^{i'} = t^{j'}_{i'} (e_j a^j_{j'}) \otimes (e^i b^{i'}_i) = t^{j'}_{i'} a^j_{j'} b^{i'}_i e_j \otimes e^i$$

Получено разложение тензора t по базису e двумя способами, поэтому $t^j_i = t^{j'}_{i'} a^j_{j'} b^{i'}_i$