

Содержание

1	О неприводимых многочленах	6
1.1	Неприводимые многочлены	6
1.2	Основная теорема арифметики для многочленов над полем	6
1.2.1	Вспомогательная лемма 1	6
1.2.2	Вспомогательная лемма 2	6
1.2.3	Теорема	6
2	О корнях многочленов	7
2.1	Корни многочленов	7
2.2	Теорема Безу	7
2.3	Формальная производная	7
2.3.1	Определение	7
2.3.2	Основные свойства	7
2.4	Кратные корни	8
2.4.1	Определение	8
2.4.2	Эквивалентные условия существования кратного корня	8
2.4.3	Свойства кратных корней	8
3	Об инвариантных подпространствах	8
3.1	Инвариантные подпространства	8
3.1.1	Определение	8
3.1.2	Свойства	9
3.2	Собственные векторы и собственные значения	9
3.2.1	Определение	9
3.2.2	Собственное подпространство	9
3.3	Характеристический многочлен и его инвариантность	9
3.3.1	Определение	9
3.3.2	О делителях характеристического многочлена	9
3.3.3	Подобные матрицы	10
3.3.4	Об инвариантности характеристического многочлена	10
3.3.5	Характеристический многочлен оператора	10
3.4	Определитель и след преобразования	10
3.4.1	О коэффициентах в характеристическом многочлене	10
3.4.2	След и определитель оператора	10
4	О собственных векторах и собственных значениях	10
4.1	Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям	10
4.2	Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения	11
4.2.1	Определение	11
4.2.2	Теорема о связи геометрической и алгебраической кратностей	11
4.3	Условия диагонализруемости преобразования	11

5	О Гамильтоне-Кэли	12
5.1	Приведение матрицы преобразования к треугольному виду	12
5.1.1	Новые обозначения	12
5.1.2	Инвариантность "сдвинутых" операторов	12
5.1.3	Об инвариантных подпространствах в операторе с собственным значением	12
5.1.4	Теорема о приведении матрицы преобразования к треугольному виду	12
5.2	Теорема Гамильтона-Кэли	12
6	О ЖНФ	12
6.1	Аннулирующие многочлены преобразования	12
6.2	Корневые подпространства	12
6.3	Разложение пространства в сумму корневых подпространств	13
6.4	Жорданова нормальная форма	13
6.4.1	Жорданова клетка	13
6.4.2	Жорданов вид	13
6.4.3	Жорданова нормальная форма	13
6.4.4	Нильпотентный оператор	13
6.4.5	Циклическое подпространство	13
6.4.6	Высота вектора	13
6.4.7	О линейной независимости векторов с различными высотами	14
6.4.8	О дополнении циклического подпространства до всего пространства .	14
6.5	Существование жордановой нормальной формы в случае единственного собственного значения и в общем случае	14
6.6	Единственность жордановой нормальной формы	14
6.7	Метод её нахождения без поиска базиса	14
6.8	Минимальный многочлен линейного преобразования, его свойства, связь с жордановой нормальной формой	14
6.8.1	Определение	14
6.8.2	О делимости любого аннулирующего многочлена минимальным . . .	14
6.8.3	Единственность	14
6.8.4	Связь минимального многочлена с жордановой формой	15
7	О линейных рекуррентах	15
7.1	Линейные рекурренты	15
7.1.1	Определение	15
7.1.2	Оператор левого сдвига	15
7.1.3	Инвариантность оператора левого сдвига	15
7.1.4	Минимальный многочлен оператора сдвига	15
7.1.5	Характеристический многочлен оператора сдвига	15
7.2	Общий вид линейной рекурренты над производным полем	15
8	О билинейных формах	16
8.1	Билинейные формы	16
8.2	Координатная запись билинейной формы	16
8.2.1	Матрица формы	16
8.2.2	Координатная запись	16
8.3	Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса	16

9	Ещё больше о билинейных формах	16
9.1	Симметричные и кососимметричные билинейные формы, их матрицы	16
9.1.1	Определение симметричной формы	16
9.1.2	Определение кососимметричной формы	16
9.1.3	Свойства матриц кососимметричных и симметричных форм	17
9.2	Ядро формы, ортогональное дополнение подпространства (относительно формы), их свойства	17
9.2.1	Ядро формы	17
9.2.2	Ортогональное дополнение подпространства	17
9.2.3	Свойства ортогональных дополнений	17
9.2.4	Относительная невырожденность	17
9.2.5	Теорема о прямой сумме подпространства и его ортогонального дополнения	17
10	О квадратичных формах	17
10.1	Квадратичные формы, их связь с симметричными билинейными формами .	17
10.1.1	Определение	17
10.1.2	Связь квадратичных форм с симметричными билинейными формами	18
10.2	Приведение квадратичной формы к каноническому виду	18
10.3	Положительно определённые квадратичные формы	18
10.3.1	Определение	18
10.3.2	Критерий положительной определённости	18
10.4	Индексы инерции квадратичной формы	18
10.5	Закон инерции	18
10.6	Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду . . .	18
10.7	Критерий Сильвестра	19
11	Приведение кососимметричной билинейной формы к каноническому виду	19
12	Об эрмитовых формах	19
12.1	Полуторалинейные формы в комплексном пространстве	19
12.2	Эрмитовы полуторалинейные и квадратичные формы, связь между ними . .	19
12.2.1	Определение эрмитовой полуторалинейной формы	19
12.2.2	Определение эрмитовой квадратичной формы	19
12.2.3	О связи эрмитовых полуторалинейных и квадратичных форм	19
12.3	Приведение к каноническому виду	20
12.4	Закон инерции и критерий Сильвестра для эрмитовых квадратичных форм	20
13	Об операторах в евклидовых и эрмитовых пространствах	20
13.1	Евклидово и эрмитово пространство	20
13.1.1	Евклидово пространство	20
13.1.2	Эрмитово пространство	20
13.2	Выражение скалярного произведения в координатах	20
13.3	Свойства матрицы Грама	20
13.4	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника	20
13.4.1	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца	20
13.4.2	Неравенство треугольника	21

14 Об ортонормированных векторах и изоморфизмах	21
14.1 Ортонормированные базисы и ортогональные (униатрные) матрицы	21
14.1.1 Определения для векторов	21
14.1.2 Определения для матриц	21
14.2 Существование ортонормированных базисов	21
14.3 Изоморфизмы евклидовых и эрмитовых пространств	21
15 Об ортогонализации и объёмах	21
15.1 Ортогональное дополнение подпространства	21
15.2 Ортогональное проектирование	21
15.2.1 Определение	21
15.2.2 Вычисление проекции	22
15.3 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта	22
15.4 Объём параллелипипеда	22
15.4.1 Определение	22
15.4.2 Вычисление объёма параллелипипеда	22
16 О сопряжённых преобразованиях	22
16.1 Связь билинейных (полуторалинейных) форм и линейных преобразований в евклидовом (эрмитовом) пространстве	22
16.1.1 Новое обозначение	22
16.1.2 Связь билинейных форм и преобразований	22
16.2 Преобразование, сопряжённое данному	22
16.3 Его существование и единственность, его свойства	23
16.3.1 Существование сопряжённого оператора	23
16.3.2 Связь матрицы оператора и сопряжённого к нему	23
16.3.3 Свойства сопряжённых операторов	23
16.3.4 О связи инвариантных подпространств оператора и сопряжённого к нему	23
16.4 Теорема Фредгольма	23
17 О самосопряжённых преобразованиях	23
17.1 Самосопряжённые линейные преобразования	23
17.2 Свойства самосопряжённых преобразований	23
17.2.1 Инвариантные пространства самосопряжённых операторов	23
17.2.2 Характеристический многочлен самосопряжённых операторов	23
17.2.3 Ортогональность собственных подпространств самосопряжённого опе- ратора	24
17.3 Существование ортонормированного базиса из собственных векторов само- сопряжённого линейного преобразования	24
18 Об ортогональных операторах	24
18.1 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства	24
18.1.1 Определение	24
18.1.2 Критерий ортогональности преобразования	24
18.1.3 Об инвариантных подпространствах ортогонального оператора	24
18.2 Инвариантные подпространства малой размерности для преобразований ве- щественного типа	24

18.3	Канонический вид унитарного и ортогонального преобразований	24
18.3.1	Канонический вид унитарного преобразования	24
18.3.2	Канонический вид ортогонального преобразования	25
18.4	Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве	25
19	О приведениях	25
19.1	Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям	25
19.2	Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду	25
20	О тензорах	25
20.1	Тензоры, как полилинейные отображения	25
20.1.1	Определение тензора	25
20.1.2	Примеры тензоров	25
20.2	Тензорное произведение тензоров	26
20.3	Координатная запись тензора, изменение координат при замене базиса . . .	26
20.3.1	Координатная запись тензора	26
20.3.2	Изменение координат при замене базиса	26

1 О неприводимых многочленах

1.1 Неприводимые многочлены

Пусть F - поле, $P \in F[x]$. Многочлен P называется неприводимым над F , если $\deg P > 0$ и P не раскладывается в произведение двух многочленов положительной степени.

1.2 Основная теорема арифметики для многочленов над полем

1.2.1 Вспомогательная лемма 1

Пусть F - поле, $Q \in F[x]$, $\deg Q > 0$. Тогда Q раскладывается в произведение неприводимых многочленов.

Доказательство.

Докажем утверждение индукцией по $\deg Q$. База тривиальна: если $\deg Q = 1$, то он уже неприводим. Докажем переход. Если Q неприводим, то получено требуемое, иначе выполнено равенство $Q = Q_1 Q_2$ для некоторых $Q_1, Q_2 \in F[x]$ таких, что $0 < \deg Q_1, \deg Q_2 < \deg Q$, тогда Q_1, Q_2 представляются в виде произведения неприводимых по предположению индукции.

1.2.2 Вспомогательная лемма 2

Пусть F - поле, $P, Q, R \in F[x]$, многочлен P неприводим и выполнено $P \mid QR$. Тогда $P \mid Q$ или $P \mid R$.

Доказательство.

Предположим, что $P \nmid Q$. Тогда, в силу неприводимости многочлена P , выполнено равенство $\gcd(P, Q) = 1$, поэтому существуют многочлены $K, L \in F[x]$ такие, что $KP + LQ = 1$. Умножая обе части равенства на R , получим, что $KPR + LQR = R$, откуда $P \mid KPR + LQR = R$.

1.2.3 Теорема

Пусть F - поле, и $Q \in F[x] \setminus \{0\}$. Тогда существует такой скаляр $\alpha \in F^*$ и такие неприводимые многочлены $P_1, \dots, P_k \in F[x]$, что Q можно представить в следующем виде:

$$Q = \alpha P_1 \dots P_k$$

Более того, если $Q = \alpha P_1 \dots P_k = \beta R_1 \dots R_l$ для некоторого скаляра $\beta \in F^*$ и неприводимых многочленов $R_1 \dots R_l \in F[x]$, то $k = l$ и существует перестановка $\sigma \in S_k$ такая, что для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ многочлены P_i и $P_{\sigma(i)}$ ассоциированы.

Доказательство.

- (Существование) Случай, когда $\deg Q > 0$ уже разобран, если $\deg Q = 0$, то $Q = \alpha$
- (Единственность) Проведём индукцию по k (Количеству неприводимых многочленов, на которые раскладывается Q). База, $k = 0$, тривиальна: $\deg Q = 0 \Rightarrow k = l = 0, Q = \alpha = \beta$.

Теперь докажем переход. Пусть $k > 0$ и выполнены равенства $Q = \alpha P_1 \dots P_k = \beta R_1 \dots R_l$. Тогда, поскольку $P_k \mid R_1 \dots R_l$, существует $i \in \{1, \dots, l\}$ такое, что $P_k \mid R_i$, то есть многочлены ассоциированы в силу их неприводимости: $R_i = \gamma P_k, \gamma \in$

F^* . Пусть без ограничения общности $i = l$, тогда $\alpha P_1 \dots P_{k-1} = (\beta\gamma)R_1 \dots R_{l-1}$, и применимо предположение индукции.

2 О корнях многочленов

2.1 Корни многочленов

Пусть $P \in F[x]$. Скаляр $\alpha \in F$ называется корнем многочлена P , если выполнено равенство $P(\alpha) = 0$

2.2 Теорема Безу

Скаляр $\alpha \in F$ является корнем многочлена $P \in F[x] \Leftrightarrow (x - \alpha) \mid P$

Доказательство.

Разделим P с остатком на $(x - \alpha)$, то есть выберем $R, Q \in F[x]$ такие, что $P = (x - \alpha)Q + R$ и $\deg R \leq 0$. Заметим, что $P(\alpha) = R$, тогда выполнены равносильности $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow R = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha) \mid P$

2.3 Формальная производная

2.3.1 Определение

Пусть $P = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n \in F[x]$. Формальной производной многочлена $P(x)$ называется многочлен $P' := p_1 + 2p_2x + \dots + np_nx^{n-1}$, где целочисленные скаляры понимаются, как суммы соответствующего числа единиц.

2.3.2 Основные свойства

1. $\forall \alpha, \beta \in F : \forall P, Q \in F[x] : (\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$ (Линейность)
2. $\forall P, Q \in F[x] : (PQ)' = P'Q + PQ'$ (Правило Лейбница)

Доказательство.

1. Пусть $n := \max(\deg P, \deg Q)$, тогда многочлены P и Q можно представить в виде $P = \sum_{i=0}^n p_i x^i, Q = \sum_{i=0}^n q_i x^i$, откуда $\alpha P + \beta Q = \sum_{i=0}^n (\alpha p_i + \beta q_i) x^i$. Проверим требуемое равенство непосредственной проверкой:

$$(\alpha P + \beta Q)' = \sum_{i=0}^n i(\alpha p_i + \beta q_i) x^{i-1} = \alpha \sum_{i=0}^n i p_i x^{i-1} + \beta \sum_{i=0}^n i q_i x^{i-1} = \alpha P' + \beta Q'$$

2. Левая и правая часть требуемого равенства линейны по P и Q , поэтому равенство достаточно проверить на некотором базисе пространства многочленов, например, для произвольных многочленов вида $P(x) = x^i, Q(x) = x^j, i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(PQ)' = (i+j)x^{i+j-1} = ix^{i-1}x^j + jx^i x^{j-1} = P'Q + Q'P$$

2.4 Кратные корни

2.4.1 Определение

Пусть $a \in F$ - корень многочлена $P \in F[x]$. Кратностью корня a называется наибольшее $\gamma \in \mathbb{N}$ такое, что $(x - a)^\gamma \mid P$. Если $\gamma > 1$, то корень a называется кратным, иначе - простым.

2.4.2 Эквивалентные условия существования кратного корня

1. c - кратный корень P .
2. $P(c) = P'(c) = 0$
3. $(x - c) \mid \gcd(P, P')$

Доказательство.

- $(1 \Leftrightarrow 2)$ Пусть c - корень многочлена P , тогда $P = (x - c)Q$ и $P' = Q + (x - c)Q'$, поэтому c - кратный корень многочлена $P \Leftrightarrow P'(c) = 0$
- $(2 \Leftrightarrow 3)$ $P(c) = P'(c) = 0 \Leftrightarrow (x - c) \mid P', P \Leftrightarrow (x - c) \mid \gcd(P, P')$

2.4.3 Свойства кратных корней

Пусть $c \in F$ - корень многочлена $P \in F[x]$ кратности $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Тогда выполнены следующие свойства:

1. c - корень многочлена P' кратности хотя бы $k - 1$.
2. Если $\text{char } F > k$ или $\text{char } F = 0$, то c - корень многочлена P' кратности ровно $k - 1$.

Доказательство.

Многочлен P имеет вид $P = (x - c)^k Q, Q \in F[x], (x - c) \nmid Q$. Тогда:

$$P' = k(x - c)^{k-1}Q + (x - c)^k Q' = (x - c)^{k-1}(kQ + (x - c)Q')$$

Из равенства выше следует, что c уже корень многочлена P' кратности хотя бы $k - 1$. Рассмотрим теперь многочлен $kQ + (x - c)Q'$. Если $\text{char } F > k \vee \text{char } F = 0$, то $kQ(c) \neq 0$, поэтому кратность корня c у многочлена P' равна $k - 1$

3 Об инвариантных подпространствах

3.1 Инвариантные подпространства

3.1.1 Определение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Подпространство $U \leq V$ называется инвариантным относительно преобразования φ , если $\varphi(U) \leq U$

3.1.2 Свойства

1. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, подпространства $U, W \leq V$ таковы, что $U \leq \text{Ker } \varphi$ и $\text{Im } \varphi \leq W \leq V$. Тогда U и W инвариантны относительно φ .
2. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$, причём $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Тогда $\text{Ker } \psi$ и $\text{Im } \psi$ инвариантны относительно φ .

Доказательство.

1.
 - $\varphi(U) \leq \varphi(\text{Ker } \varphi) = \{\vec{0}\} \leq U$
 - $\varphi(W) \leq \text{Im } \varphi \leq W$
2.
 - Пусть $\vec{u} \in \text{Ker } \psi$, тогда $\psi(\varphi(\vec{u})) = \varphi(\psi(\vec{u})) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0} \in \text{Ker } \psi$
 - Пусть $\vec{u} \in \text{Im } \psi$, тогда $\exists \vec{w} \in V : \psi(\vec{w}) = \vec{u} \varphi(\vec{u}) = \varphi(\psi(\vec{w})) = \psi(\varphi(\vec{w})) \in \text{Im } \psi$

3.2 Собственные векторы и собственные значения

3.2.1 Определение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Вектор $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ называется собственным вектором оператора φ с собственным значением $\lambda \in F$, если $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Скаляр $\mu \in F$ называется собственным значением оператора φ , если существует собственный вектор $\vec{u} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ оператора φ с собственным значением μ .

3.2.2 Собственное подпространство

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), \lambda \in F$ - собственное значение оператора φ . Подпространство $V_\lambda := \text{Ker } (\varphi - \lambda) \leq V$ называется собственным подпространством оператора φ , соответствующим собственному значению λ

3.3 Характеристический многочлен и его инвариантность

3.3.1 Определение

Пусть $A \in M_n(F)$. Характеристическим многочленом матрицы A называют многочлен $\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E|$

3.3.2 О делителях характеристического многочлена

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), \varphi \leftrightarrow A \in M_n(F)$. Тогда скаляр $\lambda_0 \in F$ является собственным значением оператора $\varphi \Leftrightarrow \chi_A(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_0) \mid \chi_A(\lambda)$

Доказательство.

Скаляр λ_0 является собственным значением тогда и только тогда, когда $\text{Ker } (\varphi - \lambda_0) \neq \{\vec{0}\}$. Выполнены следующие равносильности:

$$\text{Ker } (\varphi - \lambda_0) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow [rk](A - \lambda_0 E) < n \Leftrightarrow |A - \lambda_0 E| = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_0) \mid \chi_A(\lambda_0)$$

3.3.3 Подобные матрицы

Матрицы $A, B \in M_n(F)$ называются подобными, если существует матрица $S \in Gl_n(F)$ такая, что $B = S^{-1}AS$

Подобные матрицы - это матрицы одного и того же оператора в разных базисах.

3.3.4 Об инвариантности характеристического многочлена

Пусть $A, B \in M_n(F)$ - подобные матрицы. Тогда $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$

Доказательство.

Зафиксируем значение $\lambda \in F$, тогда выполнены следующие равенства:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E| = |S^{-1}(B - \lambda E)S| = |B - \lambda E| = \chi_B(\lambda)$$

3.3.5 Характеристический многочлен оператора

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Характеристическим многочленом оператора φ называется характеристический многочлен его матрицы в произвольном базисе. Обозначение - $\chi_\varphi(\lambda)$

3.4 Определитель и след преобразования

3.4.1 О коэффициентах в характеристическом многочлене

Пусть $A \in M_n(F)$. Тогда в характеристическом многочлене $\chi_A(\lambda)$ коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1} \text{tr } A$, а свободный член равен $\det A$.

Доказательство.

Во всех нетождественных перестановках степень получаемых в $\chi_A(\lambda)$ мономов не превосходит $n-2$, поэтому слагаемое с λ^{n-1} может возникнуть только при $\sigma = id$, когда число $(-\lambda)$ перемножается $n-1$ раз и умножается на один из диагональных элементов, поэтому коэффициент при $(\lambda)^{n-1}$ равен $(-1)^{n-1} \cdot \text{tr } A$. Свободный член в $\chi_A(\lambda)$ равен $\chi_A(0) = |A|$.

3.4.2 След и определитель оператора

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Следом оператора φ называется след матрицы φ в произвольном базисе, определителем оператора - определитель матрицы φ в произвольном базисе. Обозначения - $\text{tr } \varphi$, $\det \varphi$ соответственно.

4 О собственных векторах и собственных значениях

4.1 Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ - различные собственные значения оператора φ . Тогда сумма $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_n}$ - прямая.

Доказательство.

Проведём индукцию по k (количеству собственных подпространств). База $n = 1$ тривиальна, докажем переход. Пусть для некоторого $k > 1$ утверждение неверно, тогда, по

критерию прямой суммы, существует индекс $i \in \{i, \dots, k\}$ такой, что выполнено следующее:

$$V_{\lambda_i} \cap (\lambda_1 \cup \dots \cup \lambda_{i-1} \cup \lambda_{i+1} \cup \dots \cup \lambda_k) \neq \{\vec{0}\}$$

Пусть без ограничений общности $i = k$, тогда существуют векторы $\vec{v}_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, \vec{v}_{k-1} \in V_{\lambda_{k-1}}$ такие, что выполнено следующее:

$$\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_{k-1} = \vec{v}_k \neq \{\vec{0}\}$$

Применим к неравенству выше оператор φ , и вычтем из полученного равенства исходное, умноженное на λ_k , тогда:

$$(\lambda_1 - \lambda_k)\vec{v}_1 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\vec{v}_{k-1} = \vec{0}$$

Все коэффициенты в левой части по условию отличны от нуля, а также хотя бы один из векторов в левой части - ненулевой, поскольку сумма этих векторов равна $\vec{v}_k \neq \vec{0}$. Получено нетривиальное разложение нуля, что невозможно по предположению индукции, значит сумма $\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k$ - прямая.

4.2 Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения

4.2.1 Определение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_0 \in F$ - собственное значение оператора φ . Алгебраической кратностью собственного значения λ_0 называется кратность корня λ_0 в $\chi_\varphi(\lambda)$, геометрической кратностью - величина $\dim V_{\lambda_0}$

4.2.2 Теорема о связи геометрической и алгебраической кратностей

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_0 \in F$ - собственное значение оператора φ . Тогда алгебраическая кратность значения λ_0 не меньше его геометрической кратности.

4.3 Условия диагонализуемости преобразования

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда равносильны следующие условия:

1. Оператор φ диагонализуем.
2. Алгебраическая кратность каждого собственного значения оператора φ равна геометрической, и χ_φ раскладывается на линейные сомножители.
3. $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$
4. В V есть базис из собственных векторов оператора φ .

5 О Гамильтоне-Кэли

5.1 Приведение матрицы преобразования к треугольному виду

5.1.1 Новые обозначения

1. Для произвольных $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ и $\mu \in F$ положим $\varphi_\mu := \varphi - \mu$
2. Для произвольных $A \in M_n(F)$ и $\mu \in F$ положим $A_\mu := A - \mu E$

5.1.2 Инвариантность "сдвинутых" операторов

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда $U \leq V$ является инвариантным относительно $\varphi \Leftrightarrow U$ является инвариантным относительно φ_μ

5.1.3 Об инвариантных подпространствах в операторе с собственным значением

Пусть оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ имеет собственное значение. Тогда существует инвариантное относительно φ подпространство $U \leq V$ размерности $n - 1$.

5.1.4 Теорема о приведении матрицы преобразования к треугольному виду

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, и χ_φ раскладывается на линейные множители. Тогда в V существует такой базис $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ подпространство $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ инвариантно относительно оператора φ .

5.2 Теорема Гамильтона-Кэли

Для любого оператора (но мы доказываем только для таких, характеристический многочлен которых раскладывается на линейные сомножители) $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ выполнено следующее равенство:

$$\chi_\varphi(\varphi) = 0$$

6 О ЖНФ

6.1 Аннулирующие многочлены преобразования

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Многочлен $P \in F[x] \setminus \{0\}$ называется аннулирующим многочленом оператора φ , если $P(\varphi) = 0$.

6.2 Корневые подпространства

Пусть λ_i - собственное значение оператора φ . Корневым подпространством, соответствующим λ_i , называется $V^{\lambda_i} = \text{Ker} (\varphi_{\lambda_i})^{\alpha_i}$, где α_i - алгебраическая кратность собственного значения λ_i для оператора φ

6.3 Разложение пространства в сумму корневых подпространств

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $P \in F[x]$ - аннулирующий многочлен оператора φ , и $P = P_1 P_2$, для многочленов $P_1, P_2 \in F[x]$, таких, что $\gcd(P_1, P_2) = 1$. Тогда $V = V_1 \oplus V_2$, где $V_1 := \text{Ker } P_1(\varphi)$, $V_2 := \text{Ker } P_2(\varphi)$ - инвариантные относительно φ подпространства.

6.4 Жорданова нормальная форма

6.4.1 Жорданова клетка

Пусть F - поле, $\lambda_0 \in F$. Жордановой клеткой размера $k \in \mathbb{N}$ с собственным значением λ_0 называется матрица $J_k(\lambda_0) \in M_k(F)$, имеющая следующий вид:

$$J_k(\lambda_0) := \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

6.4.2 Жорданов вид

Пусть F - поле, $A \in M_n(F)$. Матрица A имеет жорданов вид, если она имеет блочно-диагональный вид, в котором каждый блок является жордановой клеткой.

6.4.3 Жорданова нормальная форма

Пусть V - линейное пространство, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Если в некотором базисе матрица оператора φ имеет жорданов вид, то она называется жордановой нормальной формой оператора φ , а соответствующий базис - его жордановым базисом.

6.4.4 Нильпотентный оператор

Пусть $\psi \in \mathcal{L}(V)$. Оператор ψ называется нильпотентным, если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\psi^m = 0$.

6.4.5 Циклическое подпространство

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - нильпотентный оператор. Подпространство $U \leq V$ называется циклическим относительно ψ , если оно инвариантно относительно ψ и существует вектор $\vec{v} \in U$ такой, что U - минимальное по включению инвариантное подпространство, содержащее \vec{v} .

6.4.6 Высота вектора

Пусть $\psi \in \mathcal{L}(V)$ - нильпотентный оператор, $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Высотой вектора \vec{v} относительно ψ называется наименьшее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\psi^n(\vec{v}) = 0$.

6.4.7 О линейной независимости векторов с различными высотами

Пусть $\psi \in \mathcal{L}(V)$ - нильпотентный оператор, и пусть векторы $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V \setminus \{\vec{0}\}$ имеют попарно различные высоты относительно ψ . Тогда эти векторы образуют линейно независимую систему.

6.4.8 О дополнении циклического подпространства до всего пространства

Пусть $\psi \in \mathcal{L}(V)$ - нильпотентный оператор, $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ - вектор наибольшей высоты n в пространстве V , и $U \leq V$ - циклическое подпространство, порождённое \vec{v} . Тогда существует $W \leq V$ такое, что W инвариантно относительно ψ и $V = U \oplus W$.

6.5 Существование жордановой нормальной формы в случае единственного собственного значения и в общем случае

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ и χ_φ раскладывается на линейные сомножители. Тогда у оператора φ существует жорданова нормальная форма.

6.6 Единственность жордановой нормальной формы

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, и χ_φ раскладывается на линейные сомножители. Тогда жорданова нормальная форма оператора φ единственна с точностью до перестановки клеток.

6.7 Метод её нахождения без поиска базиса

Метод нахождения ЖНФ без поиска базиса описан в доказательстве единственности разложения жордановой нормальной формы.

6.8 Минимальный многочлен линейного преобразования, его свойства, связь с жордановой нормальной формой

6.8.1 Определение

Минимальным многочленом оператора φ называется аннулирующий многочлен наименьшей степени.

6.8.2 О делимости любого аннулирующего многочлена минимальным

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, μ_φ - минимальный многочлен для φ . Тогда многочлен $P \in F[x]$ - аннулирующий для $\varphi \Leftrightarrow \mu_\varphi \mid P$

6.8.3 Единственность

Минимальный многочлен оператора $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ единственен с точностью до ассоциированности.

6.8.4 Связь минимального многочлена с жордановой формой

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, и χ_φ раскладывается на линейные сомножители. Тогда его минимальный многочлен имеет вид $\mu_\varphi = \prod (\lambda_i - \lambda)^{\beta_i}$, где β_i - наибольший размер клетки с собственным значением λ_i в жордановой нормальной форме оператора φ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$

7 О линейных рекуррентах

7.1 Линейные рекурренты

7.1.1 Определение

Последовательность $(a_i) \in F^\infty$ называется линейной рекуррентой с характеристическим многочленом $p = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_0 \in F[x]$, если выполнено следующее условие:

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_{k+n} + p_{n-1}a_{k+n-1} + \dots + p_0a_k = 0$$

Обозначим множество рекуррент с характеристическим многочленом p через V_p

7.1.2 Оператор левого сдвига

Оператором левого сдвига на F^∞ называется оператор $\varphi : F^\infty \rightarrow F^\infty$, заданный для каждой последовательности $(a_i) \in F^\infty$ как $\varphi((a_i)) := (a_{i+1})$

7.1.3 Инвариантность оператора левого сдвига

Пусть $p \in F[x]$, φ - оператор левого сдвига. Тогда $V_p = \text{Ker } p(\varphi)$.

Из этого следует, что V_p инвариантно относительно φ , поэтому можно рассматривать оператор $\psi := \varphi|_{V_p}$

7.1.4 Минимальный многочлен оператора сдвига

Минимальный многочлен μ_ψ оператора ψ равен p с точностью до ассоциированности.

7.1.5 Характеристический многочлен оператора сдвига

Характеристический многочлен χ_ψ оператора ψ равен $(-1)^n p$

7.2 Общий вид линейной рекурренты над производным полем

Пусть $p \in F[x]$ раскладывается на линейные сомножители. Тогда каждое решение рекурренты с характеристическим многочленом p имеет следующий вид для некоторого набора коэффициентов $\{\beta_{it}\} \subset F$:

$$(a_m) = \sum_{i=1}^k \sum_{t=1}^{\alpha_i} \beta_{it} C_m^{t-1} \lambda_i^{m+1-t}$$

8 О билинейных формах

8.1 Билинейные формы

Пусть V - линейное пространство над полем F . Билинейной формой на V называется функция $b : V \times V \rightarrow F$, линейная по обоим аргументам.

8.2 Координатная запись билинейной формы

8.2.1 Матрица формы

Матрицей формы $b \in \mathcal{B}(V)$ в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) =: e$ называется следующая матрица B :

$$B = (b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)) = \begin{pmatrix} b(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & \dots & b(\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\vec{e}_n, \vec{e}_1) & \dots & b(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

8.2.2 Координатная запись

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$, e - базис в V , $b \leftrightarrow_e B$. Тогда для любых $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u} \leftrightarrow_e x$, $\vec{v} \leftrightarrow_e y$, выполнено $b(\vec{u}, \vec{v}) = x^T B y$

8.3 Матрица билинейной формы и её изменение при замене базиса

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$, e и $e' = eS$ - два базиса в V . Тогда если $b \leftrightarrow_e B$, $b \leftrightarrow_{e'} B'$, то $B' = S^T B S$

9 Ещё больше о билинейных формах

9.1 Симметричные и кососимметричные билинейные формы, их матрицы

9.1.1 Определение симметричной формы

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$. Форма b называется симметричной, если для всех $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $b(\vec{u}, \vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{u})$. Пространство симметричных форм на V обозначается через $\mathcal{B}^+(V)$

9.1.2 Определение кососимметричной формы

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$. Форма b называется кососимметричной, если:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : b(\vec{u}, \vec{v}) = -b(\vec{v}, \vec{u})$
2. $\forall \vec{u} \in V : b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$

Пространство кососимметричных форм обозначается через $\mathcal{B}^-(V)$

9.1.3 Свойства матриц кососимметричных и симметричных форм

Пусть e - базис в V , $b \in \mathcal{B}(V)$, $b \leftrightarrow_e B$. Тогда:

1. $b \in \mathcal{B}^+(V) \Leftrightarrow B = B^T$
2. $b \in \mathcal{B}^-(V) \Leftrightarrow B = -B^T$ и на главной диагонали B стоят нули

9.2 Ядро формы, ортогональное дополнение подпространства (относительно формы), их свойства

9.2.1 Ядро формы

Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$. Ядром формы b называется подпространство $\text{Ker } b := \{\vec{v} \in V : \forall \vec{u} \in V : b(\vec{u}, \vec{v}) = 0\} = \{\vec{u} \in V : \forall \vec{v} \in V : b(\vec{u}, \vec{v}) = 0\} \leq V$

9.2.2 Ортогональное дополнение подпространства

Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Векторы \vec{u}, \vec{v} называются ортогональными, если $b(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Если $U \leq V$, то ортогональным дополнением к U относительно b называется $U^\perp := \{\vec{v} \in V : \forall \vec{u} \in U : b(\vec{u}, \vec{v}) = 0\}$

9.2.3 Свойства ортогональных дополнений

Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, $U \leq V$. Тогда:

1. $\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$
2. Если b невырожденна, то $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

9.2.4 Относительная невырожденность

Подпространство $U \leq V$ называется невырожденным относительно $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, если ограничение $b|_U \in \mathcal{B}^\pm(U)$ невырожденно.

9.2.5 Теорема о прямой сумме подпространства и его ортогонального дополнения

Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$. Тогда подпространство $U \leq V$ невырожденно относительно $b \Leftrightarrow V = U \oplus U^\perp$

10 О квадратичных формах

10.1 Квадратичные формы, их связь с симметричными билинейными формами

10.1.1 Определение

Квадратичной формой, соответствующей форме $b \in \mathcal{B}(V)$ называется функция $h : V \rightarrow F$ такая, что $\forall \vec{v} \in V : h(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v})$. Квадратичные формы на V образуют линейное пространство над F , обозначаемое через $\mathcal{Q}(V)$

10.1.2 Связь квадратичных форм с симметричными билинейными формами

Пусть $\text{char } F \neq 2$. Тогда для любой квадратичной формы h на V существует единственная форма $b \in \mathcal{B}^+(V)$, соответствующая ей.

10.2 Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Пусть $\text{char } F \neq 2, h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда в пространстве V существует такой базис e , что h в этом базисе имеет диагональную матрицу.

Следствие. Пусть $F = \mathbb{R}, h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда в пространстве V существует такой базис e , что h в этом базисе имеет диагональную матрицу с числами 0 и ± 1 на главной диагонали.

10.3 Положительно определённые квадратичные формы

10.3.1 Определение

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда h называется:

- Положительно определённой, если $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} : h(\vec{v}) > 0$.
- Положительно полуопределённой, если $\forall \vec{v} \in V : h(\vec{v}) \geq 0$
- Отрицательно определённой, если $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} : h(\vec{v}) < 0$.
- Отрицательно полуопределённой, если $\forall \vec{v} \in V : h(\vec{v}) \leq 0$

10.3.2 Критерий положительной определённости

$B \in M_n(\mathbb{R})$ положительно определена $\Leftrightarrow \exists A \in Gl_n(\mathbb{R}) : B = A^T A$

10.4 Индексы инерции квадратичной формы

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Её положительным индексом инерции $\sigma_+(h)$ называется наибольшая размерность подпространства $U \leq V$ такого, что $h|_U$ положительно определена, отрицательным индексом инерции $\sigma_-(g)$ - наибольшая размерность подпространства $U \leq V$ такого, что $h|_U$ отрицательно определена.

10.5 Закон инерции

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V), B$ - нормальная форма h в нормальном базисе e . Тогда на диагонали матрицы стоит ровно $\sigma_+(h)$ единиц и $\sigma_-(h)$ минус единиц.

Следствие. (Закон инерции). Нормальный вид квадратичной формы $h \in \mathcal{Q}(V)$ определён однозначно с точностью до перестановки диагональных элементов.

10.6 Метод Якоби приведения квадратичной формы к диагональному виду

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V), h \leftrightarrow_e B$, причём все главные миноры матрицы B отличны от нуля. Тогда существует такой базис $e' = eS$, что матрица перехода S - верхнетреугольная с единицами на главной диагонали, $h \leftrightarrow_{e'} B'$ и B' диагональна. Более того, тогда $B' = \text{diag}(\Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, \dots, \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)})$

10.7 Критерий Сильвестра

Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$, $h \leftrightarrow_e B$. Тогда h положительно определена $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : \Delta_i(B) > 0$.

11 Приведение кососимметричной билинейной формы к каноническому виду

Пусть $b \in \mathcal{B}^-(V)$. Тогда в V существует базис e , в котором матрица b имеет блочно-диагональный вид, состоящий из блоков B_i , где $\forall i : B_i = (0) \vee B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

12 Об эрмитовых формах

12.1 Полуторалинейные формы в комплексном пространстве

Полуторалинейной формой на V называется функция $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что:

1. b линейна по первому аргументу
2. b сопряжённо-линейна по второму аргументу:
 - $\forall \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : b(\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = b(\vec{u}, \vec{v}_1) + b(\vec{u}, \vec{v}_2)$
 - $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \forall \lambda \in \mathbb{C} : b(\vec{u}, \lambda \vec{v}) = \bar{\lambda} b(\vec{u}, \vec{v})$

12.2 Эрмитовы полуторалинейные и квадратичные формы, связь между ними

12.2.1 Определение эрмитовой полуторалинейной формы

Пусть $b \in \mathcal{S}(V)$. Форма b называется эрмитовой, если для всех $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $b(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{b(\vec{v}, \vec{u})}$. Матрица $B \in M_n(\mathbb{C})$ называется эрмитовой, если $B^T = \bar{B}$, или $B = B^*$, где $B^* := \bar{B}^T$ - эрмитово сопряжённая к B матрица.

12.2.2 Определение эрмитовой квадратичной формы

Эрмитовой квадратичной формой, соответствующей эрмитовой форме $b \in \mathcal{S}(V)$, называется функция $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\forall \vec{v} \in V : h(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v})$. Форма h называется полярной к b .

12.2.3 О связи эрмитовых полуторалинейных и квадратичных форм

Если $b_1, b_2 \in \mathcal{S}(V)$ - различные эрмитовы формы, то соответствующие им квадратичные формы также различны.

12.3 Приведение к каноническому виду

Пусть h - эрмитова квадратичная форма. Тогда в пространстве V существует такой базис e , что h в этом базисе имеет диагональную матрицу с числами 0 и ± 1 на главной диагонали.

12.4 Закон инерции и критерий Сильвестра для эрмитовых квадратичных форм

Аналогично билинейному случаю.

13 Об операторах в евклидовых и эрмитовых пространствах

13.1 Евклидово и эрмитово пространство

13.1.1 Евклидово пространство

Евклидовым пространством называется линейное пространство V над \mathbb{R} , на котором определена положительно определённая симметричная билинейная форма (\vec{u}, \vec{v}) - скалярное произведение.

13.1.2 Эрмитово пространство

Эрмитовым пространством называется линейное пространство V над \mathbb{C} , на котором определена положительно определённая квадратичная форма (\vec{u}, \vec{v}) - скалярное произведение.

13.2 Выражение скалярного произведения в координатах

В евклидовом случае матрица Грама симметрична, в эрмитовом - эрмитова. Более того, очевидно, что для любых векторов $\vec{u} \leftrightarrow_e x, \vec{v} \leftrightarrow_e y$ выполнено $(\vec{u}, \vec{v}) = x^T \Gamma y$

13.3 Свойства матрицы Грама

Система $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ линейно независима \Leftrightarrow её матрица Грама Γ положительно определена $\Leftrightarrow \det \Gamma > 0$

13.4 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника

13.4.1 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Для любых векторов $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $|(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда \vec{u} и \vec{v} коллинеарны.

13.4.2 Неравенство треугольника

Для любых векторов $\vec{u}, \vec{v} \in V$ выполнено $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$.

14 Об ортонормированных векторах и изоморфизмах

14.1 Ортонормированные базисы и ортогональные (униатрные) матрицы

14.1.1 Определения для векторов

Векторы $\vec{u}, \vec{v} \in V$ называются ортогональными, если $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Обозначение $\vec{u} \perp \vec{v}$. Система векторов $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ из V называется ортогональной, если все векторы системы попарно ортогональны, и ортонормированной, если она ортогональна и длина каждого вектора равна 1.

14.1.2 Определения для матриц

Матрица $S \in M_n(\mathbb{R})$ называется ортогональной, если $S^T S = E$. Матрица $S \in M_n(\mathbb{C})$ называется унитарной, если $\overline{S^T} S = E$, или $S^T \overline{S} = E$.

14.2 Существование ортонормированных базисов

В пространстве V существует ортонормированный базис.

14.3 Изоморфизмы евклидовых и эрмитовых пространств

Для каждого $\vec{v} \in V$ положим $f_{\vec{v}}(\vec{u}) := (\vec{v}, \vec{u})$. Тогда сопоставление $\vec{v} \mapsto f_{\vec{v}}$ осуществляет изоморфизм между V и V^* .

15 Об ортогонализации и объёмах

15.1 Ортогональное дополнение подпространства

Пусть $U, W \leq V$. Тогда:

1. $(U^\perp)^\perp = U$
2. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$
3. $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

15.2 Ортогональное проектирование

15.2.1 Определение

Пусть $U \leq V, \vec{v} \in V$. Вектор \vec{v} единственным образом представляется в виде суммы $\vec{u} + \vec{u}', \vec{u} \in U, \vec{u}' \in U^\perp$. Вектор \vec{u} называется ортогональной проекцией \vec{v} на подпространство U . Обозначение - $pr_U \vec{v}$

15.2.2 Вычисление проекции

Пусть $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ - это ортогональный базис в U . Тогда для любого вектора $\vec{v} \in V$ выполнено равенство:

$$pr_U \vec{v} = \sum_{i=1}^k \frac{(\vec{v}, \vec{e}_i)}{\|\vec{e}_i\|^2} \vec{e}_i$$

15.3 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Пусть $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ - базис в V . Тогда в V существует ортогональный базис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ такой, что $\forall k \in \{1, \dots, n\} : \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_i \rangle$, причём матрица перехода S - верхнетреугольная с единицами на диагонали.

15.4 Объём параллелипипеда

15.4.1 Определение

k - мерным объёмом системы $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ векторов из V называется величина $V_k(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$, определяемая индуктивно:

- Если $k = 1$, то $V_1(\vec{v}_1) := \|\vec{v}_1\|$
- Если $k \geq 2$, то $V_k := V_{k-1}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}) \cdot \rho(\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1} \rangle, \vec{v}_k)$

15.4.2 Вычисление объёма параллелипипеда

Пусть $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V, \Gamma := \Gamma(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$. Тогда $V_k(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \sqrt{\det \Gamma}$

16 О сопряжённых преобразованиях

16.1 Связь билинейных (полуторалинейных) форм и линейных преобразований в евклидовом (эрмитовом) пространстве

16.1.1 Новое обозначение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Для всех $\vec{u}, \vec{v} \in V$ положим $f_\varphi(\vec{u}, \vec{v}) := (\varphi(\vec{u}), \vec{v})$

16.1.2 Связь билинейных форм и преобразований

Пусть e - ортонормированный базис в V , $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - такой оператор, что $\varphi \leftrightarrow_e A, f_\varphi \leftrightarrow_e B$. Тогда $B = A^T$.

Следствие. Сопоставление $\varphi \mapsto f_\varphi$ осуществляет изоморфизм между $\mathcal{L}(V)$ и $\mathcal{B}_\theta(V)$

16.2 Преобразование, сопряжённое данному

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Оператором, сопряжённым к φ , называется оператор φ^* такой, что $f_\varphi = g_{\varphi^*}$, то есть $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : (\varphi(\vec{u}), \vec{v}) = (\vec{u}, \varphi^*(\vec{v}))$

16.3 Его существование и единственность, его свойства

16.3.1 Существование сопряжённого оператора

Поскольку сопоставление $\varphi \mapsto f_\varphi \mapsto g_{\varphi^*} \mapsto \varphi^*$ биективны, то сопряжённый оператор существует и единственен. Более того, сопоставление $\varphi \mapsto \varphi^*$ осуществляет автоморфизм в евклидовом случае и антиавтоморфизм в эрмитовом случае.

16.3.2 Связь матрицы оператора и сопряжённого к нему

Пусть e - ортонормированный базис в V , $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - такой линейный оператор, что $\varphi \leftrightarrow_e A$. Тогда $\varphi^* \leftrightarrow_e A^*$.

16.3.3 Свойства сопряжённых операторов

1. Сопоставление $\varphi \mapsto \varphi^*$ сопряжённо линейно
2. $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}(V) : (\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$
3. $\forall \varphi \in \mathcal{L}(V) : \varphi^{**} = \varphi$

16.3.4 О связи инвариантных подпространств оператора и сопряжённого к нему

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ и подпространство $U \leq V$ инвариантно относительно φ . Тогда U^\perp инвариантно относительно φ^* .

16.4 Теорема Фредгольма

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда $\text{Ker } \varphi^* = (\text{Im } \varphi)^\perp$

17 О самосопряжённых преобразованиях

17.1 Самосопряжённые линейные преобразования

Оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется самосопряжённым, если $\varphi^* = \varphi$, то есть $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V(\varphi(\vec{u}), \vec{v}) = (\vec{u}, \varphi(\vec{v}))$.

17.2 Свойства самосопряжённых преобразований

17.2.1 Инвариантные пространства самосопряжённых операторов

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряжённый, $U \leq V$. Тогда U инвариантно относительно $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$ инвариантно относительно φ .

17.2.2 Характеристический многочлен самосопряжённых операторов

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряжённый. Тогда его характеристический многочлен χ_φ раскладывается на линейные сомножители над \mathbb{R} .

17.2.3 Ортогональность собственных подпространств самосопряжённого оператора

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряжённый, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ - два различных собственных значения φ . Тогда $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$.

17.3 Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого линейного преобразования

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряжённый. Тогда в V существует ортонормированный базис e , в котором матрица оператора φ диагональна.

18 Об ортогональных операторах

18.1 Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства

18.1.1 Определение

Оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется ортогональным (унитарным), если $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : (\vec{u}, \vec{v}) = (\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}))$

18.1.2 Критерий ортогональности преобразования

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда оператор φ ортогонален (унитарен) $\Leftrightarrow \varphi$ обратим и $\varphi^{-1} = \varphi^*$

18.1.3 Об инвариантных подпространствах ортогонального оператора

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - ортогональный (унитарный), $U \leq V$. Тогда U инвариантно относительно $\varphi \Leftrightarrow U^\perp$ - инвариантно относительно φ

18.2 Инвариантные подпространства малой размерности для преобразований вещественного типа

Пусть V - линейное пространство над \mathbb{R} , $\dim V \geq 1$, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда у φ существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

18.3 Канонический вид унитарного и ортогонального преобразований

18.3.1 Канонический вид унитарного преобразования

Пусть V - эрмитово пространство, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - унитарный. Тогда в V существует ортонормированный базис e , в котором матрица оператора φ диагональна с числами модуля 1 на главной диагонали.

18.3.2 Канонический вид ортогонального преобразования

Пусть V - евклидово пространство $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ - ортогональный. Тогда в V существует ортонормированный базис e , в котором матрица оператора φ имеет блочно-диагональный вид, состоящий из блоков B_i , где $\forall i : B_i = (\pm 1) \vee B_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

18.4 Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда существуют $\psi, \theta \in \mathcal{L}(V)$ такие, что ψ - самосопряжённый с неотрицательными собственными значениями, а θ - ортогональный (унитарный), и $\varphi = \psi\theta$

19 О приведениях

19.1 Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям

Пусть V - евклидово (эрмитово) пространство, $q \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда в V существует ортонормированный базис e , в котором q имеет диагональный вид.

19.2 Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду

Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}(V)$ и q_2 положительно определена. Тогда в V существует такой базис e , в котором матрицы форм q_1, q_2 диагональны.

20 О тензорах

20.1 Тензоры, как полилинейные отображения

20.1.1 Определение тензора

Тензором типа (p, q) , или p раз контрвариантным и q раз ковариантным тензором называется полилинейное отображение $t : (V^*)^p \times V^q \rightarrow F$. Все тензоры типа (p, q) образуют линейное пространство над F , обозначение - \mathbb{T}_q^p .

20.1.2 Примеры тензоров

1. Тензор типа $(0, 1)$ - это линейный функционал на V , поэтому $\mathbb{T}_1^0 = V^*$
2. Тензор типа $(1, 0)$ - это элемент пространства V^{**} , поэтому $\mathbb{T}_0^1 = V^{**} \cong V$
3. Тензор типа $(0, 2)$ - это билинейная форма на V , поэтому $\mathcal{B}(V) = \mathbb{T}_2^0$

20.2 Тензорное произведение тензоров

Пусть $t \in \mathbb{T}_q^p, t' \in \mathbb{T}_{q'}^{p'}$. Тогда тензорным произведением тензоров t и t' называется тензор $t \otimes t' \in \mathbb{T}_{q+q'}^{p+p'}$ следующего вида:

$$t \otimes t'(f_1, \dots, f_{p+p'}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{q+q'}) = t(f_1, \dots, f_p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q) \cdot t'(f_{p+1}, \dots, f_{p+p'}, \vec{v}_{q+1}, \dots, \vec{v}_{q+q'})$$

20.3 Координатная запись тензора, изменение координат при замене базиса

20.3.1 Координатная запись тензора

Пусть e и e^* - взаимные базисы V и V^* , $t \in \mathbb{T}_q^p$. Координатами тензора t в базисе e называется набор из следующих величин:

$$T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = t(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}), i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\}$$

Значит, произвольный тензор $t \in \mathbb{T}_q^p$ можно записать в таком виде:

$$t = T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

20.3.2 Изменение координат при замене базиса

Пусть e, e' - базисы в V такие, что $e'_j = a_j^i e_i, e^j = a_i^j e'^i$. Тогда преобразование координат тензора $t \in \mathbb{T}_q^p$ при замене базиса имеет следующий вид:

$$t_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_p} = a_{j'_1}^{j_1} \dots a_{j'_p}^{j_p} b_{i_1}^{i'_1} \dots b_{i_q}^{i'_q} t_{i'_1, \dots, i'_q}^{j'_1, \dots, j'_p}$$