Содержание

ДМ Гос (ИВТ: Матлог + ДС)

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

1. Математическая логика

1.1. Включение и равенство множеств. Основные способы задания множеств. Операции и основные тождества алгебры множеств. Упорядоченные пары и декартово произведение.

Определение 1.1.1: Множество A **включено** $\subseteq$ в множество $B \Leftrightarrow$

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Определение 1.1.2: Множество A **равно** множеству $B \Leftrightarrow$

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Лемма 1.1.1 (Свойства включения):
- $A \subseteq A$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Лемма 1.1.2 (Свойства равенства):
- $A = A$
- $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$
- $A = B \Rightarrow B = A$

Замечание 1.1.1 (Основные способы задания множеств):
- Назвать все его элементы, когда число этих элементов конечно и все они уже определены
- Выделение всех элементов какого-нибудь уже определённого множества A, обладающих некоторым точно определённым свойством φ
- Рассмотреть **множество всех подмножеств** множества A. Такое множество обозначают выражением $\mathcal{P}(A)$
- Располагая каким-нибудь множеством X, рассмотреть его объединение, обозначаемое $\cup X$ и состоящее из всевозможных элементов множеств, принадлежащих X

Определение 1.1.3: **Объединением** множеств A и B называется множество $A \cup B$:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Определение 1.1.4: **Пересечением** множеств A и B называется множество $A \cap B$:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Определение 1.1.5: **Разностью** множеств A и B называется множество $A \setminus B$:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

Определение 1.1.6: Нередвко все рассматриваемые множества оказываются подмножествами какого-нибудь множества U.

Такое U называют тогда **универсумом**.

Для каждого подмножества A заданного универсума U определено **дополнение**

$$\overline{A} = U \setminus A$$

Теорема 1.1.1 (Основные тождества алгебры множеств): $\forall A, B, C$ и любого включающего их универсума U верно:
- $A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap A = A; A \cup A = A$
- $A \cap (A \cup B) = A; A \cup (A \cap B) = A$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cap \emptyset = \emptyset; A \cup \emptyset = A; A \cap U = A; A \cup U = U; \overline{\emptyset} = U; \overline{U} = \emptyset$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset; A \cup \overline{A} = U$

Определение 1.1.7: Для произвольных множеств a и b символом (a, b) обозначают множество $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, называемое **упорядоченной парой** множеств a и b

Определение 1.1.8: **Декартовым (или прямым)** произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A : \exists b \in B : z = (a, b)\}$$

1.2. Бинарные отношения; композиция и обращение. Функции. Равномощность и вложение. Теорема Кантора; тождества в смысле равномощности для множеств $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, (A \times B)^C$ и C^{B^A}. Теорема Кантора–Бернштейна–Шрёдера (без доказательства) с примером применения.

Определение 1.2.1: Множество R называется **бинарным отношением**, если каждый его элемент является упорядоченной парой множеств.

Определение 1.2.2: Назовём **областью определения** отношения R множество

$$\operatorname{dom} R = \{a \in \cup \cup R \mid \exists b : (a, b) \in R\}$$

и **областью значений** отношения R – множество

$$\operatorname{rng} R = \{b \in \cup \cup R \mid \exists a : (a, b) \in R\}$$

Определение 1.2.3: Для любых отношений P и Q определена **композиция** отношений P и Q:

$$Q \circ P = \{(a, c) \in \operatorname{dom} P \times \operatorname{rng} Q \mid \exists b : (a, b) \in P \wedge (b, c) \in Q\}$$

Определение 1.2.4: Пусть R – бинарное отношение. **Обратным отношением** к R называется отношение

$$R^{-1} = \{(b, a) \in \operatorname{rng} R \times \operatorname{dom} R \mid (a, b) \in R\}$$

Определение 1.2.5: Пусть R – бинарное отношение и X – некоторое множество.

Мы называем **образом под действием отношения $\boldsymbol{R}$ множества $\boldsymbol{X}$** множество

$$R[X] = \{b \in \operatorname{rng} R \mid \exists a \in X : aRb\}$$

Определение 1.2.6: Бинарное отношение R называется:

- **Функциональным**, если $\forall x : \forall y : \forall z : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$
- **Инъективным**, если $\forall x : \forall y : \forall z : xRy \wedge zRy \Rightarrow x = z$
- **Тотальным** для множества Z, если $\forall x \in Z : \exists y : (x, y) \in R$
- **Сюръективным** для множества Z, если $\forall y \in Z : \exists x : (x, y) \in R$

Определение 1.2.7: Функциональное отношение $f \subseteq A \times B$ называется **частичной функцией на множестве A во множество B**. В таком случае пишем $f : A \overset{p}{\to} B$.

Если, помимо того, отношение является тотальным для множества A, то оно называется **функцией на множестве A во множество B**. В таком случае пишем $f : A \to B$.

Определение 1.2.8: Множество
$$\{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f : A \to B\}$$
всех функций из A в B обозначается символом B^A

Определение 1.2.9: Если функция $f : A \to B$ инъективна, она называется **инъекцией из A в B**.

Определение 1.2.10: Если функция $f : A \to B$ сюръективна, она называется **сюръекцией из A в B**.

Определение 1.2.11: Если функция $f : A \to B$ инъективна и сюръективна, она называется **биекцией из A в B**.

Определение 1.2.12: Будем писать $A \overset{p}{\sim} B$, если $f : A \to B$ есть биекция.

Скажем, что множество A **равномощно** множеству B, если существует f, такая что $A \overset{f}{\sim} B$. Тогда пишем $A \sim B$.

Определение 1.2.13: Множество A **не превосходит по мощности (вкладывается во)** множество B, если существует инъекция $f : A \to B$. Тогда пишем $A \overset{f}{\lesssim} B$ и $A \lesssim B$

Теорема 1.2.1 (Кантора): Ни для какого множества A невозможно $\mathcal{P}(A) \lesssim A$

Доказательство: Пусть не так. Рассмотрим произвольную инъекцию $f : \mathcal{P}(A) \to A$. Положим
$$Y = \{a \in A \mid \forall X \in \mathcal{P}(A) : a = f(X) \Rightarrow a \notin X\}$$
Очевидно, $Y \in \mathcal{P}(A)$. По определению Y следует, что $f(Y) \notin Y$.

Рассмотрим произвольное $X \in \mathcal{P}(A) : f(Y) = f(X)$. В силу инъективности f имеем $X = Y$. Но тогда $f(Y) \notin X$ для всех таких X.

По определению множества Y получаем $f(Y) \in Y$. Противоречие. $\square$

Утверждение 1.2.1: Убедимся, что
$$\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$$

Доказательство: Положим
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 : f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$$

Докажем инъективность, если $f(m, n) = f(m', n')$, то
$$2^m(2n + 1) = 2^{m'}(2n' + 1)$$

Допустим, что $m \neq m'$ и БОО $m < m'$. Тогда
$$2n + 1 = 2^{m'-m}(2n' + 1)$$

Причём второе число чётно, а первое – нет. Противоречие показывает, что $m = m'$, но тогда $2n + 1 = 2n' + 1 \Rightarrow n' = n$. Инъективность доказана.

Докажем сюръективность. Пусть некоторое положительное натуральное число не имеет вида $2^m(2n + 1)$. Тогда найдётся наименьшее такое число k.

Это число чётно (иначе оно имело бы вид $2^0(2n + 1)$). Следовательно $k = 2k'$. Но $k' < k$, а, значит,
$$k' = 2^{m'}(2n' + 1) \text{ для некоторых } m', n' \in \mathbb{N}.$$

Но тогда $k = 2^{m'+1}(2n' + 1)$ – противоречие. Сюръективность, а значит и биективность доказана $\square$

Утверждение 1.2.2:
$$(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$$

Доказательство: Рассмотрим функции-проекторы $\pi_1 : A \times B \to A$ и $\pi_2 : A \times B \to B$.

Положим теперь $\psi : f \mapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$ для всех $f \in (A \times B)^C$.

Это отображения является биекцией, доказывается очевидной проверкой инъективности и сюръективности. $\square$

Утверждение 1.2.3:
$$C^{B^A} \sim C^{A \times B}$$

Доказательство: Для всех $f \in C^{B^A}$ и $z \in A \times B$ положим
$$\psi(f) : z \mapsto (f(\pi_1(x)))(\pi_2(z))$$

Это отображения является биекцией, доказывается очевидной проверкой инъективности и сюръективности. $\square$

Теорема 1.2.2 (Кантора-Шрёдера-Бернштейна): Для любых множеств A и B, если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$, то $A \sim B$.

Пример: Очевидно, что $\mathbb{N} \lesssim \mathbb{Q}$.

С другой стороны, $\mathbb{Q} \lesssim \mathbb{N}^3$: каждое положительное рациональное число q однозначно представляется несократимой дробью $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда отображение

$$f(q) = \begin{cases} (0,1,0), q=0 \\ (m,n,0), q>0 \\ (m,n,1), q<0 \end{cases}$$

является искомой инъекцией. Осталось вспомнить, что $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Показали инъекцию в обе стороны, а значит по КШБ $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.