

Содержание

1	Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений	2
1.1	Основные понятия	2
1.2	Простейшие типы уравнений первого порядка	3
1.3	Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель	5
1.4	Методы понижения порядка для некоторых простейших типов дифференциальных уравнений. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной.	7
2	Задача Коши	8
2.1	Прицип сжимающих отображений	8
2.2	Теоремы существования и единственности решения задачи Коши	9
2.3	Теорема о продолжении решения нормальной системы дифференциальных уравнений	12
2.4	Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений	13
2.5	Дифференцируемость и гладкость решения по параметрам, уравнение в вариациях	13

1 Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка.

Определение 1.2. Функция $\varphi(x)$, определённая на I вместе со своими n производными, называется решением уравнения (1), если:

1. φ и все её n производных непрерывны на I .
2. $\forall x \in I : (x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$, где Ω - область определения F .
3. $\forall x \in I : F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$

Определение 1.3. Решение $y = \varphi(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ уравнения (1) называется продолжаемым вправо, если существует такое решение $y = \psi(x)$, $x \in \langle a, b_1 \rangle$, $\langle a, b \rangle \subset \langle a, b_1 \rangle$, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при $x \in \langle a, b \rangle$

Аналогично определяется продолжение решения влево.

Определение 1.4. Решение называется непродолжаемым, если его нельзя продолжить ни вправо, ни влево.

Определение 1.5. Система дифференциальных уравнений называется автономной, если она имеет вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_n); \quad k = 1, \dots, n$$

также очень часто автономные системы записываются в компактном векторном виде:

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \Omega \subseteq E^n \quad (2)$$

Определение 1.6. Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ называется первым интегралом системы (2), если $\forall t \in T : u(x(t)) \equiv \text{const}$ для каждого решения $x(t)$ этой системы.

Определение 1.7. Если поставить в соответствие каждой точке (x, y) некоторого множества $\Omega \subseteq E^2$ вектор с координатным представлением $(1, f(x, y))$, то полученное векторное множество принято называть полем направлений ОДУ первого порядка.

Определение 1.8. Векторное поле - это отображение, которое сопоставляет каждой точке некоторого пространства вектор

Определение 1.9. Пусть $x(t)$ есть частное решение системы (2), тогда вектор-функция $x(t)$, $t \in T$, параметрически задаёт некоторую линию в E^n , называемую фазовой траекторией этой системы.

Определение 1.10. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать фазовым портретом системы (2)

Определение 1.11. График функции $y = \varphi(x)$ можно рассматривать как геометрическое представление частного решения уравнения (1). Этот график обычно называют интегральной кривой уравнения (1).

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.12. Уравнения с разделяющимися переменными - это уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y) \quad f(x) \in C(I_1), g(y) \in C(I_2)$$

или же в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Замечание. Если же $y_k \in I_2$ решение уравнения $g(y) = 0$, то $y \equiv y_k$ - решение дифф. уравнения

Если же $y(x)$ нигде не принимает значение y_k , то $g(y) \neq 0$, а потому мы можем делить на него. Значит, чтобы решить исходное уравнение, необходимо разделить переменные, то есть, привести уравнение к такой форме, чтобы при дифференциале dx стояла функция, зависящая лишь от x , а при дифференциале dy - функция, зависящая от y .

Однородные уравнения

Определение 1.13. Функция двух переменных $f(x, y)$ называется однородной степени m , если для всех t справедливо соотношение:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

Определение 1.14. Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ - однородные функции одной и той же степени m .

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой функции $y(x)$ по формуле:

$$t(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Тогда производная y' и дифференциал dy заменяются по формулам:

$$y' = t'x + t, \quad dy = tdx + xdt$$

Линейные уравнения

Определение 1.15. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции $y(x)$ и её производной, то есть, уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x) \quad a(x), b(x) \in C(I)$$

Функция $b(x)$ называется свободным членом уравнения.

Уравнение

$$y' + a(x)y = 0$$

называется линейным однородным уравнением, соответствующим изначальному линейному уравнению.

Покажем, что однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными

$$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int a(x)dx \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}$$

Объединяя все решения, получаем общее решение:

$$y_0 = C \exp \left[- \int_{x_0}^x a(t)dt \right]$$

Будем искать частное решение исходного линейного уравнения методом вариации постоянной:

$$y_{\text{ч}} = C(x) \cdot \exp \left[- \int_{x_0}^x a(t)dt \right]$$

Уравнение Бернулли

Определение 1.16. Нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^m, \quad m \neq 0, m \neq 1, a, b \in C(I)$$

называется уравнением Бернулли.

Заметим, что $y = 0$ – решение уравнения Бернулли при $m > 0$.

Если $y \neq 0$, то, разделив уравнение на y^m и вводя новую неизвестную функцию $z = y^{1-m}$, относительно функции z получаем линейное уравнение.

Уравнение Рикатти

Определение 1.17. Нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad a, b, c \in C(I)$$

называется уравнением Рикатти

В отличие от всех уравнений, рассматривавшихся ранее, уравнение Рикатти не всегда интегрируется в квадратурах. Чтобы решить его, необходимо знать хотя бы одно частное решение $y = y_1(x)$ этого уравнения. Тогда замена $y = y_1 + z$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли.

Логистическое уравнение Ферхюльста

Замечание. Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

- Скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности при прочих равных условиях
- Скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов при прочих равных условиях.

Определение 1.18. Обозначая через P численность популяции, а время - t , модель можно свести к дифференциальному уравнению

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

где параметр r характеризует скорость роста, а K – максимальную возможную численность популяции.

Замечание. Точным решением является логистическая функция, S-образная кривая:

$$P(t) = \frac{KP_0 e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

где P_0 – начальная популяция, и $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$.

1.3 Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

Уравнения в полных дифференциалах

Определение 1.19. Это уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является дифференциалом некоторой гладкой функции $F(x, y)$. Тогда это уравнение можно переписать в виде $dF(x, y) = 0$, так что его решение будет иметь вид

$$F(x, y) = C$$

Утверждение 1.1. Если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области Ω и имеют в ней непрерывные частные производные по x и по y , то изначальное уравнение будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Интегрирующий множитель

Пусть дано уравнение в дифференциалах, которое не является уравнением в полных дифференциалах.

Определение 1.20. Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем для исходного уравнения, если уравнение

$$\mu(x, y)(M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Отсюда следует, что функция μ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Это равенство даёт уравнение в частных производных первого порядка для $\mu(x, y)$:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$$

Поделив обе части последнего уравнения на μ , перепишем его в виде:

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Точные и замкнутые 1-формы, лемма Пуанкаре

Определение 1.21. Форма ω называется точной, если существует гладкая функция F , такая что $\omega = dF$

Определение 1.22. Форма $\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m$ называется замкнутой, если

$$\forall k, i : \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$$

Определение 1.23. Область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется звёздной, если для некоторой точки $p \in \Omega$ и для любой другой точки $q \in \Omega$ отрезок $[p, q]$ полностью содержится в Ω .

Лемма 1.1. В звёздной области любая замкнутая C^1 -гладкая дифференциальная 1-форма точна.

Доказательство. Будем считать, что точка p из определения звёздной области находится в начале координат. Пусть ω – замкнутая форма, $\omega = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$.

Заметим, что для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ и любой функции $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) - G(0) = \int_{[0, x]} dG = \int_0^1 \left(x_1 \frac{\partial G}{\partial x_1}(tx) + \dots + x_n \frac{\partial G}{\partial x_n}(tx) \right) dt$$

мы параметризовали отрезок $[0, x] \subset \mathbb{R}^n$ параметром t . Пользуясь этим равенством, можно восстановить любую функцию по набору её производных.

Поэтому естественно определить F таким образом:

$$F := \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i A_i(xt) dt$$

Нам осталось проверить, что $\frac{\partial F}{\partial x_s} = A_s$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_s} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_s} \sum_{i=1}^n x_i A_i(xt) dt = \int_0^1 A_s(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_s} A_i(tx) dt = \\ &= \int_0^1 A_s(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_s(tx) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t A_s(tx)) dt = A_s(x) \end{aligned}$$

Итак, $dF = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = \omega$. □

Гамильтоновы векторные поля на плоскости

Определение 1.24. Пусть $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда векторное поле $\vec{v} : \begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$ называется гамильтоновым тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

1.4 Методы понижения порядка для некоторых простейших типов дифференциальных уравнений. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной.

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

1. Пусть $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n+k)}) = 0$

Замена: $z = y^{(k)}$, сводим к уравнению $F(x, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$

2. Пусть F явно не зависит от x : $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

Замена: y – новая независимая переменная, $y' = p = p(y)$, то есть $y''_{xx} = p'_x = p'y' = p'p$

3. Обобщённо-однородное уравнение

Пусть $\exists m, k : \forall \lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^m y, \lambda^{m-1} y', \dots, \lambda^{m-n} y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

Замена: $x = e^y, y = z(t)e^{mt}$

4. Однородные уравнения

Пусть $\exists k : \forall \lambda > 0 : F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

Замена: $y' = z(x)y, y'' = (z(x)y)' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y(z + z^2)$

Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной

Определение 1.25. Уравнение первого порядка, не разрешённое относительно производной – это уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0$$

где $F(x, y, y')$ – заданная непрерывная функция в некоторой непустой окрестности $G \subseteq \mathbb{R}^3_{(x, y, p)}$ с декартовыми прямоугольными координатами x, y, p .

Замечание. В общем случае для решения уравнения применяется метод введения параметра, который позволяет свести решение исходного уравнения к решению некоторого уравнения первого порядка в симметричной форме.

Сам метод: положим $y' = p$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = p dx \end{cases} \quad (3)$$

Утверждение 1.2. Проектирование π поверхности $F(x, y, p) = 0$ на плоскость (x, y) вдоль оси p переводит траектории поля в интегральные кривые системы (3).

В тех точках поверхности, где производная $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, отображение π является локальным диффеоморфизмом.

Определение 1.26. Точки поверхности $F(x, y, p) = 0$, в которых производная $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, называются особыми точками уравнения (3).

Определение 1.27. Множество всех особых точек называется кривантой, а её проекция на плоскость (x, y) – дискриминантной кривой уравнения (3).

Определение 1.28. Решение уравнения (3) называется особым, если его интегральная кривая является дискриминантной кривой.

Замечание. Решение уравнения (3) можно трактовать, как траектории движения по этой поверхности, задаваемого векторным полем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial p} \\ \dot{y} = p \frac{\partial F}{\partial p} \\ \dot{p} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (4)$$

Определение 1.29. Другой важной кривой является кривая перегибов, состоящая из всех точек поверхности $F(x, y, p) = 0$, в которых третья компонента поля (4) обращается в нуль.

Утверждение 1.3. Криванта и кривая перегибов связаны некоторым двойственным соотношением: преобразование Лежандра $(x, y, p) \rightarrow (p, xp - y, x)$ переводит всякую интегральную кривую γ уравнения (3) в интегральную кривую γ^* сопряжённого уравнения $F(p, xp - y, x) = 0$

2 Задача Коши

2.1 Принцип сжимающих отображений

Определение 2.1. Точка $x^* \in X$ называется неподвижной точкой отображения Φ , если $\Phi(x^*) = x^*$.

Определение 2.2. Оператор Φ называется сжимающим на множестве X , если $\exists q \in (0, 1)$, такое что $\forall x_1, x_2 \in X \mapsto \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leq q \|x_2 - x_1\|$.

Число q – коэффициент сжатия.

Определение 2.3. Открытый шар $U_\varepsilon(a) = \{x \in L : \|x - a\| < \varepsilon\}$. Замкнутый: $\bar{U}_\varepsilon(a) = \{x \in L : \|x - a\| \leq \varepsilon\}$

Теорема 2.1. Теорема Банаха о неподвижной точке (принцип сжимающих отображений).

Пусть $\Phi : \bar{U}_\varepsilon(x_0) \rightarrow L$, причём Φ является сжимающим на $\bar{U}_r(x_0)$ с некоторым коэффициентом q . Тогда если выполнено условие $\|\Phi(x_0) - x_0\| \leq (1 - q)r$, то в $\bar{U}_r(x_0)$ существует единственная неподвижная точка отображения.

Доказательство. Покажем, что $\Phi(\bar{U}_r(x_0)) \subseteq \bar{U}_r(x_0)$. Пусть $x \in \bar{U}_r(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - x_0\| &= \|\Phi(x) - \Phi(x_0) + \Phi(x_0) - x_0\| \leq \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| + \|\Phi(x_0) - x_0\| \leq \\ &q \|x - x_0\| + (1 - q)r \leq qr + (1 - qr) = r \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subseteq \bar{U}_r(x_0)$, такую что $x_n = \Phi(x_{n-1})$ при $n \geq 1$. Также для удобства обозначим $\rho = \|\Phi(x_0) - x_0\| = \|x_1 - x_0\|$. Покажем, что эта последовательность фундаментальная:

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)\| \leq q\|x_1 - x_0\| \Rightarrow \dots \Rightarrow \|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \rho$$

Используем полученную оценку для того, чтобы оценить модули в сумме:

$$\forall p: \|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=1}^p \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leq \rho \sum_{i=1}^p q^{n+i-1} = \frac{\rho q^n (1 - q^p)}{1 - q} < \frac{\rho q^n}{1 - q} \rightarrow 0$$

А так как мы в банаховом пространстве, то из фундаментальности получили сходящуюся последовательность, т.е. $\exists x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. А так как $\bar{U}_r(x_0)$ – замкнутый шар, значит $x^* \in \bar{U}_r(x_0)$.

Докажем, что x^* является неподвижной точкой оператора Φ . Воспользуемся тем, что сжимающее отображение является непрерывным.

В $x_n = \Phi(x_{n-1})$ перейдём к пределу: $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \Phi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = \Phi(x^*)$.

Докажем единственность неподвижной точки. Допустим, что существует $x^{**} \in \bar{U}_r(x_0) : x^{**} = \Phi(x^{**})$, такое, что $x^{**} \neq x^*$.

Тогда $\|x^* - x^{**}\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(x^{**})\| \leq q\|x^* - x^{**}\|$, где $q < 1$. Получили противоречие. \square

2.2 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Определение 2.4. Пусть $n \geq 2, f_1, \dots, f_n$ – непрерывные функции, определённые на $G \subseteq \mathbb{R}_{(x, \vec{y})}^{n+1}$. Назовём нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка следующую систему:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = f_n(x, \vec{y}) \end{cases} \quad (5)$$

Определение 2.5. Вектор-функция $\vec{\varphi}(x)$ называется решением нормальной системы (5) на некотором промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, если:

1. $\vec{\varphi}(x) \in C^1(I)$
2. $\forall x \in I : (x, \vec{\varphi}(x)) \in G$
3. $\forall x \in I : \vec{\varphi}'(x) = \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))$

График решения $\vec{\varphi}(x)$ в пространстве \mathbb{R}^{n+1} – это интегральная кривая

Определение 2.6. Задача Коши – это

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Определение 2.7. Вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$, определённая в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ называется удовлетворяющей условию Липшица относительно \vec{y} равномерно по x , если $\exists L > 0 : \forall (x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) : |\vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2)| \leq L|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|$.

Лемма 2.1. Вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица по \vec{y} равномерно по x при выполнении следующих условий:

1. G – выпуклая область в \mathbb{R}^{n+1}
2. $\vec{f}(x, \vec{y}) \in C_n(G)$, то есть непрерывна от n аргументов и $\forall i, j = \overline{1, n} : \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(G)$
3. $\exists K > 0 : \forall i, j = \overline{1, n} : \forall (x, \vec{y}) \in G : \|\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial y_j}(x, \vec{y})\| \leq K$

Доказательство. Фиксируем $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим (x, \vec{y}_1) , где $\vec{y}_1 = (y_1^1, \dots, y_n^1)$, а также $\vec{y}_2 = (y_1^2, \dots, y_n^2)$.

$$|f_i(x, \vec{y}_1) - f_i(x, \vec{y}_2)| = \|f_i(x, \vec{y}_2 + \theta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2))\|_{\theta=1}^{\theta=2} = \left\| \int_0^1 \left[\frac{d}{d\theta} f_i(x, \vec{y}_2 + \theta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2)) \right] d\theta \right\| =$$

$$\left\| \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x, \vec{y}_2 + \theta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2))}{\partial y_j} (y_j^1 - y_j^2) d\theta \right\| \leq n \cdot K \cdot |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|$$

□

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы уравнений n -го порядка в нормальной форме

Теорема 2.2. Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в области G вместе со своими производными по $y_j (j = \overline{1, n})$, точка (x_0, \vec{y}_0) тоже лежит в G . Тогда задача Коши локально разрешима единственным образом:

1. $\exists \delta > 0$, такое что на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ решение задачи Коши существует.
2. Решение единственно в следующем смысле:

Если $\vec{y}_1 \equiv \vec{\varphi}(x)$ – решение задачи Коши в δ_1 -окрестности точки x_0 , а $\vec{y}_2 \equiv \vec{\psi}(x)$ – решение задачи Коши в δ_2 -окрестности точки x_0 , то в окрестности точки x_0 с радиусом $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) : \vec{\varphi}(x) \equiv \vec{\psi}(x)$

Доказательство. Рассмотрим множество $\overline{H_{\delta, r}}(x_0, \vec{y}_0) = \{(x, \vec{y}) \in G : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \wedge \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq r\}$. Заметим, что в силу компактности этого множества применима теорема Вейерштрасса:

$$\exists M > 0 : \forall (x, \vec{y}) \in \overline{H_{\delta, r}} : |\vec{f}(x, \vec{y})| \leq M, \forall i, j = \overline{1, n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq M$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt \Leftrightarrow \vec{y} = \Phi(\vec{y})$$

Рассмотрим в $C_n[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ замкнутый шар $\overline{D_{\delta, r}}(\vec{y}_0) = \{\vec{y} \in C_n[x_0 - \delta, x_0 + \delta] : \|\vec{y} - \vec{y}_0\|_{C_n} \leq r\}$, где $\|\vec{y}\|_{C_n} = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{|x - x_0| < \delta} |y_i(x)|$.

Докажем, что существуют δ и r такие, что

- Φ является сжимающим
- Отображает шар $\overline{D_{\delta,r}}$ в себя

Тогда мы сможем применить теорему Банаха о сжимающем отображении. Получим единственную неподвижную точку отображения \Leftrightarrow интегральное уравнение имеет единственное решение \Leftrightarrow задача Коши имеет единственное решение.

Докажем, что Φ является сжимающим. Рассмотрим $\vec{y}, \vec{z} \in \overline{D_{\delta,r}}$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\vec{y}) - \Phi(\vec{z})\| &= \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{|x-x_0| < \delta} \left| \int_{x_0}^x (f(\tau, \vec{y}(\tau)) - f(\tau, \vec{z}(\tau))) d\tau \right| \leq \sup_{|x-x_0| < \delta} \int_{x_0}^x L |\vec{y}(\tau) - \vec{z}(\tau)| d\tau \leq \\ &\sup_{|x-x_0| < \delta} \int_{x_0}^x L \|\vec{y} - \vec{z}\|_{C_n} d\tau \leq \delta L \|\vec{y} - \vec{z}\|_{C_n} \end{aligned}$$

Положив $\delta = \frac{q}{L}$, получим требуемое.

Теперь докажем вторую часть:

$$\|\Phi(\vec{y}_0) - \vec{y}_0\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{|x-x_0| < \delta} \left| \int_{x_0}^x f_i(\tau, \vec{y}_0) d\tau \right| \leq \int_{x_0}^x \|\vec{f}(\tau, \vec{y}_0)\|_{C_n} d\tau \leq \delta M := (1-q)r$$

Получили, что

$$\begin{cases} q = \delta L \\ (1-q)r = \delta M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r - rq = \delta \\ r = \delta Lr + \delta M \end{cases} \Rightarrow \delta_r := \frac{r}{M + Lr}$$

□

Определение 2.8. Нормальный вид уравнения с ЗК, разрешённого относительно старшей производной выглядит так:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде

Теорема 2.3. Пусть функция $f(x, y, p_1, \dots, p_{n-1})$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по переменным y, p_1, \dots, p_{n-1} в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, и точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда существует замкнутая δ -окрестность точки x_0 , в которой существует единственное решение задачи Коши.

2.3 Теорема о продолжении решения нормальной системы дифференциальных уравнений

Теорема 2.4. Пусть $\vec{f}(x, \vec{y})$ определена и удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши на замыкании ограниченной области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, тогда любое решение задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

можно продолжить в обе стороны до выхода $\Gamma = \partial G$, то есть можно доопределить $\vec{y}(x)$ на некоторый $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b]$, причём $(a, \vec{y}(a)), (b, \vec{y}(b)) \in \Gamma$

Доказательство.

$$\overline{H}_r(x_0, \vec{y}_0) := \{(x, \vec{y}) \in G : x \in [x_0 - \delta_r, x_0 + \delta_r] \wedge \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq r\} \subseteq G$$

$$\rho((x_1, \vec{y}_1), (x_2, \vec{y}_2)) := \max(|x_1 - x_2|, \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|)$$

Введём также расстояние от точки p до множества M : $\rho(p, M) = \inf_{q \in M} \rho(p, q)$

Наконец, определим δ_0, r_0 как значения δ_r и r для точки $p_0 = (x_0, \vec{y}_0)$, для которых выполнено $\max(\delta_0, r_0) = \rho(p_0, \Gamma)$.

Рассмотрим $x_1 = x_0 + \delta_0$ и $\vec{y}_1 = \vec{y}(x_1)$. Обозначим $p_1 = (x_1, \vec{y}_1)$

- Если $p_1 \in \Gamma$, то продолжение вправо не требуется
- Если $p_1 \notin \Gamma$, то p_1 – внутренняя точка, а значит, в ней $\exists!$ решение ЗК, причём оно совпадает с решением для p_0 на $[x_0, x_0 + \delta_0] \cap [x_1 - \delta_1, x_1]$. Аналогично определяем p_2 и т.д.

Полученная последовательность $\{p_k\}$ монотонно возрастает по x и ограничена точками из Γ . Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует $b = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$. Объединение решений задач Коши является функцией, определённой на $\bigcup_{k=1}^{\infty} [x_0, x_k] = [x_0, b)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\alpha, \beta \in [b - \varepsilon, b)$. Заметим, что

$$\|\vec{y}(\beta) - \vec{y}(\alpha)\| = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))| d\tau \leq M\varepsilon$$

Значит, по критерию Коши существует $y^* = \lim_{x \rightarrow b-0} \vec{y}(x)$. Пусть $p^* = (b, \vec{y}^*)$.

$$0 \leq \rho(p_k, \Gamma) = \max(\delta_k, r_k) \rightarrow 0$$

Значит $\rho(p^*, \Gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(p_k, \Gamma) = 0 \Rightarrow p^* \in \Gamma$

$$\frac{\vec{y}(b) - \vec{y}(b - \varepsilon)}{\varepsilon} = \int_{b-\varepsilon}^b \frac{\vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))}{\varepsilon} d\tau = \frac{\vec{f}(\xi, \vec{y}(\xi)) \cdot \varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \vec{f}(b, \vec{y}(b))$$

\vec{f} непрерывна вплоть до $\Gamma \Rightarrow f \in C(p^*)$. Тогда можем сделать второй переход по интегральной теореме о среднем, где $\xi \in [b - \varepsilon, b]$.

Таким образом, мы успешно продлили вправо, аналогично можно продлить и влево. \square

2.4 Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Замечание. Дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы, всегда содержат некоторые параметры. Эти параметры в реальных задачах никогда не могут быть измерены абсолютно точно, то есть всегда измеряются с некоторой погрешностью, так что сами дифференциальные уравнения известны лишь с некоторой степенью точности. Поэтому, для того чтобы уравнения могли описывать реальные процессы, необходимо, чтобы их решения непрерывно зависели от параметров, то есть чтобы они мало менялись при малых изменениях параметров.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений в векторном виде, то есть $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu}) \quad \vec{y}(x_0, \vec{\mu}) = \vec{y}_0(\vec{\mu}) \quad (6)$$

Теорема 2.5. Пусть $\vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu})$ – непрерывна и удовлетворяет условию Липшица равномерно по x и $\vec{\mu}$, $\forall (x, \vec{y}) \in G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и всех $\vec{\mu}$, таких, что $|\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \leq \delta$. Пусть, кроме того, $(x_0, \vec{y}_0) \in G$.

Тогда $\exists h > 0 \mapsto$ решение $\vec{y}(x, \vec{\mu})$ задачи Коши непрерывно по совокупности переменных $(x, \vec{\mu})$ в некоторой области $|x - x_0| \leq h, |\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \leq \delta$.

2.5 Дифференцируемость и гладкость решения по параметрам, уравнение в вариациях

Лемма 2.2. Лемма Адамара.

Пусть $F(x, u) : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_u^m \rightarrow \mathbb{R}^1$. $F \in C^p(D), p \geq 1, D$ – область в \mathbb{R}^{n+m} . Тогда $\exists H_i(x, u, z) \in C^{p-1}(D), i = \overline{1, m}$:

$$F(x, \hat{u}) - F(x, u) = \sum_{i=1}^m H_i(x, u, \hat{u}) \cdot (\hat{u}_i - u_i)$$

Теорема 2.6. Если при $(x, y) \in G$ и $|\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \leq \delta$ функции

$$f(x, y, \vec{\mu}) \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial \mu_i}$$

непрерывны, а также $(x_0, y_0) \in G$, то $\exists h > 0$, что при $|x - x_0| \leq h, |\vec{\mu} - \vec{\mu}_0| \leq \delta$ для решения $y = \varphi(x, \vec{\mu})$ задачи Коши с параметров верно следующее:

1. $z_i(x, \vec{\mu}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_i}$ непрерывны для указанных x и $\vec{\mu}$.
2. Смешанные производные $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \mu_i}$ непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования.
3. Частные производные z_i удовлетворяют уравнениям в вариациях по параметру $\vec{\mu}$:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \varphi(x, \vec{\mu}), \vec{\mu})}{\partial x} \cdot z_i + \frac{\partial f(x, \varphi(x, \vec{\mu}), \vec{\mu})}{\partial \mu_i}$$

и начальным условиям $z_i(x_0, \vec{\mu}) = 0$

Доказательство. Для $\mu \in \mathbb{R}^1$.

$\exists \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} : \varphi(x, \mu)$ – решение (6), $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ – решение (6), где $\mu \mapsto \mu + \Delta\mu$. Введём $\psi(x, \mu, \Delta\mu) := \frac{\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)}{\Delta\mu}, \forall \Delta\mu \neq 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{1}{\Delta\mu} [f(x, \varphi(x, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(x, \varphi(x, \mu), \mu)] \stackrel{\text{п. Ада.}}{=} \\ \frac{1}{\Delta\mu} \left[\sum_{i=1}^n h_i(x, u, \hat{u})(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)) + h_{n+1}(x, u, \hat{u})\Delta\mu \right] &= \\ \sum_{i=1}^n h_i(x, u, \hat{u})\psi(x, \mu, \Delta\mu) + h_{n+1}(x, u, \hat{u}) & \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \psi' = H_1(x, \mu, \Delta\mu) \cdot \psi + \hat{H}_2(x, \mu, \Delta\mu) \\ \psi(x_0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Значит $\exists! \psi(x, \mu, \Delta\mu) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \in C$

□

Определение 2.9. Уравнение (7) называют уравнением в вариациях для решения φ .