

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Дифференциальные уравнения»
2 курс, 2022-23 уч. г.
ФПМИ(ФИБТ), поток А. О. Ремизова

1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.

Основные понятия: решение, непродолжаемое решение, первый интеграл, поле направлений, векторное поле, фазовые и интегральные кривые. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения Бернулли и Риккати, *логистическое уравнение Ферхюльста*¹.

Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, *точные и замкнутые 1-формы, лемма Пуанкаре для 1-форм (д-во для звездной области), гамильтоновы векторные поля на плоскости.*

Методы понижения порядка для некоторых простейших типов дифференциальных уравнений. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной: *криминанта* и дискриминантная кривая, особые и неособые решения, *точки возврата (каспы), использование преобразования Лежандра.*

2. Задача Коши.

Принцип сжимающих отображений. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n -го порядка в нормальном виде (д-во для одного уравнения первого порядка). Теорема о продолжении решения нормальной системы дифференциальных уравнений (о выходе за границу компакта). Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений (без доказательства). Дифференцируемость и гладкость решения по параметрам, уравнение в вариациях (д-во для одного уравнения первого порядка).

3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения n -го порядка. Линейное неоднородное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера–Коши.

Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений. Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем.

4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши и продолжимости решения для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n -го порядка. Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем.

Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n -го порядка.

Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n -го порядка.

Краевая задача для линейного уравнения второго порядка, теорема об альтернативе.

Теорема Штурма и следствия из нее.

¹Далее всё, выделенное курсивом, только для групп Б05-131,132,133

5. Автономные системы дифференциальных уравнений.

Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейной автономной системы второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерной автономной нелинейной системы. Теорема о выпрямлении фазовых кривых и фазового потока.

Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Три теоремы об устойчивости/неустойчивости положения равновесия: с помощью функции Ляпунова, с помощью функции Четаева, по первому приближению.

Предельные множества, предельные циклы, теорема Пуанкаре–Бендиксона о предельных множества траекторий в ограниченной области (без д-ва).

6. Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.

Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов в окрестности неособой точки системы. Примеры использования первых интегралов для исследования фазового портрета автономных систем, примеры систем с особыми точками, обладающих и не обладающих первыми интегралами. Уравнение математического маятника, построение его фазового портрета.

Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. Элементы вариационного исчисления.

Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие слабого экстремума. Задача со одним и двумя свободными концами, необходимое условие слабого экстремума. Задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков.

Изопериметрическая задача.

Геодезические как экстремали функционалов длины и действия, связь между этими функционалами и их экстремалими.