Содержание

1 Основные понятия, простейшие типы дифф. уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Определение 1.2. Функция $\varphi(x)$, определённая на I вместе со своими n производными, называется решением уравнения (1), если:

1. φ и все её n производных непрерывны на I.
2. $\forall x \in I: \ (x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$, где Ω - область определения F.
3. $\forall x \in I: \ F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}) = 0$

Определение 1.3. Решение $y = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle$ уравнения (1) называется продолжаемым вправо, если существует такое решение $y = \psi(x), x \in \langle a, b_1\rangle, \langle a, b\rangle \subset \langle a, b_1\rangle$, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при $x \in \langle a, b\rangle$

Аналогично определяется продолжение решения влево.

Определение 1.4. Решение называется непродолжаемым, если его нельзя продолжить ни вправо, ни влево.

Определение 1.5. Система дифференциальных уравнений называется автономной, если она имеет вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \ldots, x_n); \ k = 1, \ldots, n$$

также очень часто автономные системы записываются в компактном векторном виде:

$$\dot{x} = F(x), x \in \Omega \subseteq E^n \tag{2}$$

Определение 1.6. Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ называется первым интегралом системы (2), если $\forall t \in T: \ u(x(t)) \equiv const$ для каждого решения $x(t)$ этой системы.

Определение 1.7. Если поставить в соответствие каждой точке (x, y) некоторого множества $\Omega \subseteq E^2$ вектор с координатными представлением $(1, f(x, y))$, то полученное векторное множество принято называть полем направлений ОДУ первого порядка.

Определение 1.8. Векторное поле - это отображение, которое сопоставляет каждой точке некоторого пространства вектор

Определение 1.9. Пусть $x(t)$ есть частное решение системы (2), тогда вектор-функция $x(t), t \in T$, параметрически задаёт некоторую линию в E^n, называемую фазовой траекторией этой системы.

Определение 1.10. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать фазовым портретом системы (2)

Определение 1.11. График функции $y = \varphi(x)$ можно рассматривать как геометрическое представление частного решения уравнения (1). Этот график обычно называют интегральной кривой уравнения (1).

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.12. Уравнения с разделяющимися переменными - это уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y) \; f(x) \in C(I_1), g(y) \in C(I_2)$$

или же в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Замечание. Если же $y_k \in C(I_2)$ решение уравнения $g(y) = 0$, то $y \equiv y_k$ – решение дифф. уравнения

Если же $y(x)$ нигде не принимает значение y_k, то $g(y) \neq 0$, а потому мы можем делить на него. Значит, чтобы решить исходное уравнение, необходимо разделить переменные, то есть, привести уравнение к такой форме, чтобы при дифференциале dx стояла функция, зависящая лишь от x, а при дифференциале dy – функция, зависящая от y.

Однородные уравнения

Определение 1.13. Функция двух переменных $f(x, y)$ называется однородной степени m, если для всех t справедливо соотношение:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

Определение 1.14. Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одной и той же степени m.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой функции $y(x)$ по формуле:

$$t(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Тогда производная y' и дифференциал dy заменяются по формулам:

$$y' = t'x + t, \; dy = tdx + xdt$$

Линейные уравнения

Определение 1.15. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции $y(x)$ и её производной, то есть, уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x) \quad a(x), b(x) \in C(I)$$

Функция $b(x)$ называется свободным членом уравнения.

Уравнение

$$y' + a(x)y = 0$$

называется линейным однородным уравнением, соответствующим изначальному линейному уравнению.

Покажем, что однородное уравнение является уравнением с разделяющимися перменными

$$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

Объединяя все решения, получаем общее решение:

$$y_0 = C \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right]$$

Будем искать частное решение исходного линейного уравнения методом вариации постоянной:

$$y_{\text{ч}} = C(x) \cdot \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right]$$

Уравнение Бернулли

Определение 1.16. Нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^m, \quad m \neq 0, m \neq 1, a, b \in C(I)$$

называется уравнением Бернулли.

Заметим, что $y = 0$ – решение уравнения Бернулли при $m > 0$.

Если $y \neq 0$, то, разделив уравнение на y^m и вводя новую неизвестную функцию $z = y^{1-m}$, относительно функции z получаем линейное уравнение.

Уравнение Рикатти

Определение 1.17. Нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad a, b\ c \in C(I)$$

называется уравнением Рикатти

В отличие от всех уравнений, рассматривавшихся ранее, уравнение Рикатти не всегда интегрируется в квадратурах. Чтобы решить его, необходимо знать хотя бы одно частное решение $y = y_1(x)$ этого уравнения. Тогда замена $y = y_1 + z$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли.

Логистическое уравнение Ферхюльста

Замечание. Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядит следующим образом:

- Скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности при прочих равных условиях
- Скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов при прочих равных условиях.

Определение 1.18. Обозначая через N численность популяции, а время – t, модель можно свести к дифференциальному уравнению

$$\frac{dN}{dt} = rN \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

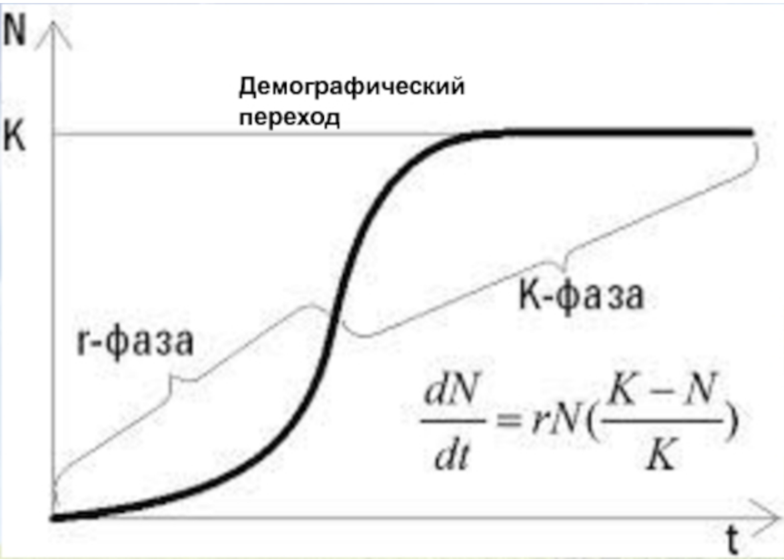
где параметр r характеризует скорость роста, а K – максимальную возможную численность популяции.

Замечание. Точным решения является логистическая функция, S-образная кривая:

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

где N_0 – начальная популяция, и $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = K$.

Его график выглядит так:



1.3 Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

Уравнения в полных дифференциалах

Определение 1.19. Это уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является дифференциалом некоторой гладкой функции $F(x, y)$. Тогда это уравнение можно переписать в виде $dF(x, y) = 0$, так что его решение будет иметь вид

$$F(x, y) = C$$

Утверждение 1.1. *Если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области Ω и имеют в ней непрерывные частные производные по x и по y, то изначальное уравнение будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется тождество*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Интегрирующий множитель

Пусть дано уравнение в дифференциалах, которое не является уравнением в полных дифференциалах.

Определение 1.20. Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем для исходного уравнения, если уравнение

$$\mu(x, y)(M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Отсюда следует, что функция μ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Это равенство даёт уравнение в частных производных первого порядка для $\mu(x, y)$:

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

Поделив обе части последнего уравнения на μ, перепишем его в виде:

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Точные и замкнутые 1-формы, лемма Пуанкаре

Определение 1.21. Форма ω называется точной, если существует гладкая функция F, такая что $\omega = dF$

Определение 1.22. Форма $\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m$ называется замкнутой, если

$$\forall k, i: \ \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$$

Определение 1.23. Область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется звёздной, если для некоторой точки $p \in \Omega$ и для любой другой точки $q \in \Omega$ отрезок $[p, q]$ полностью содержится в Ω.

Лемма 1.1. *В звёздной области любая замкнутая C^1-гладкая дифференциальная 1-форма точна.*

Доказательство. Будем считать, что точка p из определения звёздной области находится в начале координат. Пусть ω – замкнутая форма, $\omega = A_1 dx_1 + \dots A_n dx_n$.

Заметим, что для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ и любой функции $G: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$G(x) - G(0) = \int_{[0,\, x]} dG = \int_0^1 \left(x_1 \frac{\partial G}{\partial x_1}(tx) + \dots + x_n \frac{\partial G}{\partial x_n}(tx) \right) dt$$

мы параметризовали отрезок $[0, x] \subset \mathbb{R}^n$ параметром t. Пользуясь этим равенством, можно восстановить любую функцию по набору её производных.

Поэтому естественно определить F таким образом:

$$F := \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i A_i(xt) dt$$

Нам осталось проверить, что $\frac{\partial F}{\partial x_s} = A_s$. Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_s} \sum_{i=1}^n x_i A_i(xt) \right] dt = \int_0^1 \left[A_s(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_s} A_i(tx) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[A_s(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_s(tx) \right] dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tA_s(tx))dt = 1 \cdot A_s(1 \cdot x) - 0 \cdot A_s(0 \cdot x) = A_s(x)$$

В третьем переходе мы воспользовались свойством замкнутых форм: $\frac{\partial A_i}{\partial x_s} = \frac{\partial A_s}{\partial x_i}$

Итак, $dF = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = \omega$. □

Гамильтоновые векторные поля на плоскости

Определение 1.24. Пусть $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда векторное поле $\vec{v} : \begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$ называется гамильтоновым тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Функция H называется гамильтонианом.

1.4 Методы понижения порядка для некоторых простейших типов дифференциальных уравнений. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной.

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

1. Пусть $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n+k)}) = 0$

   Замена: $z = y^{(k)}$, сводим к уравнению $F(x, z, z', \dots, z^{(n)}) = 0$

2. Пусть F явно не зависит от x: $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

   Замена: y – новая независимая переменная, $y' = p = p(y)$, то есть $y''_{xx} = p'_x = p'y' = p'p$

3. Обобщённо-однородное уравнение

   Пусть $\exists m, k : \forall \lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^m y, \lambda^{m-1} y', \dots, \lambda^{m-n} y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

   Замена: $x = e^t, y = z(t)e^{mt}$

4. Однородные уравнения

   Пусть $\exists k : \forall \lambda > 0 : F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

   Замена: $y' = z(x)y, y'' = (z(x)y)' = z'y + zy' = z'y + z^2 y = y(z' + z^2)$

Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной

Определение 1.25. Уравнение первого порядка, не разрешённое относительно производной – это уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0$$

где $F(x, y, y')$ – заданная непрерывная функция в некоторой непустой окрестности $G \subseteq \mathbb{R}^3_{(x,\,y,\,p)}$ с декартовыми прямоугольными координатами x, y, p.

Замечание. В общем случае для решения уравнения применяется метод введения параметра, который позволяет свести решение исходного уравнения к решению некоторого уравнения первого порядка в симметричной форме.

Сам метод: положим $y' = p$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases} \tag{3}$$

Утверждение 1.2. *Проектирование π поверхности $F(x, y, p) = 0$ на плоскость (x, y) вдоль оси p переводит траектории поля в интегральные кривые системы (3).*

В тех точках поверхности, где производная $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, отображение π является локальным диффеоморфизмом.

Определение 1.26. Точки поверхности $F(x, y, p) = 0$, в которых производная $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, называются особыми точками уравнения (3).

Определение 1.27. Множество всех особых точек называется криминантой, а её проекция на плоскость (x, y) – дискриминантной кривой уравнения (3).

Определение 1.28. Решение уравнения (3) называется особым, если его интегральная кривая принадлежит дискриминантной кривой, то есть все его точки – особые.

Замечание. Решение уравнения (3) можно трактовать, как траектории движения по этой поверхности, задаваемого векторным полем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial p} \\ \dot{y} = p\frac{\partial F}{\partial p} \\ \dot{p} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{4}$$

Определение 1.29. Другой важной кривой является кривая перегибов, состоящая из всех точек поверхности $F(x, y, p) = 0$, в которых третья компонента поля (4) обращается в нуль.

Утверждение 1.3. *Криминанта и кривая перегибов связаны некоторым двойственным соотношением: преобразование Лежандра $(x, y, p) \to (p, xp - y, x)$ переводит всякую интегральную кривую γ уравнения (3) в интегральную кривую γ^* сопряжённого уравнения* $F(p, xp - y, x) = 0$

Пример. Уравнение Клеро.

$$y = xy' + \psi(y')$$

Сведём к указанной выше системе

$$\begin{cases} xp - y + \psi(p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases}$$

Применим преобразование Лежандра

$$\begin{cases} \hat{y} + \psi(\hat{x}) = 0 \\ d\hat{y} = \hat{p}d\hat{x} \end{cases}$$

Взяв дифференциал первого уравнения, и подставив известное соотношение для $d\hat{y}$, получим:

$$d\hat{y} = -\psi'(\hat{x})d\hat{x} = \hat{p}d\hat{x} \Rightarrow \left[\begin{aligned} \hat{x} &= C \\ \hat{p} &= -\psi'(\hat{x}) \end{aligned}\right.$$

Подставив полученные соотношение в сопряжённое уравнение и произведя обратное преобразование Лежандра, получим интегральные кривые исходного уравнения.

2 Задача Коши

2.1 Прицип сжимающих отображений

Определение 2.1. Точка $x^* \in X$ называется неподвижной точкой отображения Φ, если $\Phi(x^*) = x^*$.

Определение 2.2. Оператор Φ называется сжимающим на множестве X, если $\exists q \in (0, 1)$, такое что $\forall x_1, x_2 \in X \mapsto \|\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\| \leqslant q\|x_2 - x_1\|$.

Число q – коэффициент сжатия.

Определение 2.3. Открытый шар $U_\varepsilon(a) = \{x \in L : \|x - a\| < \varepsilon\}$. Замкнутый: $\overline{U}_\varepsilon(a) = \{x \in L : \|x - a\| \leqslant \varepsilon\}$

Теорема 2.1. *Теорема Банаха о неподвижной точке (принцип сижмающих отображений).*

Пусть $\Phi : \overline{U}_r(x_0) \to L$, причём Φ является сжимающим на $\overline{U}_r(x_0)$ с некоторым коэффициентом q. Тогда если выполнено условие $\|\Phi(x_0) - x_0\| \leqslant (1 - q)r$, то в $\overline{U}_r(x_0)$ существует единственная неподвижная точка отображения.

Доказательство. Покажем, что $\Phi(\overline{U}_r(x_0)) \subseteq \overline{U}_r(x_0)$. Пусть $x \in \overline{U}_r(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - x_0\| = \|\Phi(x) - \Phi(x_0) + \Phi(x_0) - x_0\| \leqslant \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| + \|\Phi(x_0) - x_0\| \leqslant \\ q\|x - x_0\| + (1 - q)r \leqslant qr + (r - qr) = r \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subseteq \overline{U}_r(x_0)$, такую что $x_n = \Phi(x_{n-1})$ при $n \geqslant 1$. Также для удобства обозначим $\rho = \|\Phi(x_0) - x_0\| = \|x_1 - x_0\|$. Покажем, что эта последовательность фундаментальная:

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)\| \leqslant q\|x_1 - x_0\| = q\rho \Rightarrow \ldots \Rightarrow \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant q^n\rho$$

Используем полученную оценку для того, чтобы оценить модули в сумме:

$$\forall p : \|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leqslant \rho \sum_{i=1}^{p} q^{n+i-1} = \frac{\rho q^n(1 - q^p)}{1 - q} < \frac{\rho q^n}{1 - q} \to 0$$

А так как мы в банаховом пространстве, то из фундаментальности получили сходящуюся последовательность, т.е. $\exists x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. А так как $\overline{U}_r(x_0)$ – замкнутый шар, значит $x^* \in \overline{U}_r(x_0)$.

Докажем, что x^* является неподвижной точкой оператора Φ. Воспользуемся тем, что сжимающее отображение является непрерывным.

В $x_n = \Phi(x_{n-1})$ перейдём к пределу: $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Phi\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \Phi(x^*)$.

Докажем единственность неподвижной точки. Допустим, что существует $x^{**} \in \overline{U}_r(x_0)$: $x^{**} = \Phi(x^{**})$, такое, что $x^{**} \neq x^*$.

Тогда $\|x^* - x^{**}\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(x^{**})\| \leqslant q\|x^* - x^{**}\|$, где $q < 1$. Получили противоречие. $\square$

2.2 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Определение 2.4. Пусть $n \geqslant 2, f_1, \ldots, f_n$ – непрерывные функции, определённые на $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{(x,\vec{y})}$. Назовём нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка следующую систему:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) = f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) = f_n(x, \vec{y}) \end{cases} \tag{5}$$

Определение 2.5. Вектор-функция $\vec{\varphi}(x)$ называется решением нормальной системы (5) на некотором промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, если:

1. $\vec{\varphi}(x) \in C^1(I)$
2. $\forall x \in I : \ (x, \vec{\varphi}(x)) \in G$
3. $\forall x \in I : \ \vec{\varphi}'(x) = \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))$

График решения $\vec{\varphi}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ – это интегральная кривая

Определение 2.6. Задача Коши – это

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Определение 2.7. Вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$, определённая в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ называется удовлетворяющей условию Липшица относительно $\vec{y}$ равномерно по x, если $\exists L > 0$: $\forall (x, \vec{y_1}), (x, \vec{y_2}) : \ |\vec{f}(x, \vec{y_1}) - \vec{f}(x, \vec{y_2})| \leqslant L|\vec{y_1} - \vec{y_2}|$.

Лемма 2.1. *Вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{y}$ равномерно по x при выполнении следующих условий:*

1. *G – выпуклая область в $\mathbb{R}^{n+1}$*
2. *$\vec{f}(x, \vec{y}) \in C_n(G)$, то есть непрерывна от n аргументов и $\forall i, j = \overline{1, n} : \ \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(G)$*
3. *$\exists K > 0 : \ \forall i, j = \overline{1, n} : \ \forall (x, \vec{y}) \in G : \ \|\frac{\partial \vec{f}_i}{\partial y_j}(x, \vec{y})\| \leqslant K$*

Доказательство. Фиксируем $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим $(x, \vec{y_1})$, где $\vec{y_1} = (y_1^1, \ldots, y_n^1)$, а также $\vec{y_2} = (y_1^2, \ldots, y_n^2)$.

$$|f_i(x, \vec{y_1}) - f_i(x, \vec{y_2})| = \left\| |f_i(x, \vec{y_2} + \theta(\vec{y_1} - \vec{y_2})|_{\theta=0}^{\theta=1} \right\| = \left\| \int_0^1 \left[\frac{d}{d\theta} f_i(x, \vec{y_2} + \theta(\vec{y_1} - \vec{y_2})) \right] d\theta \right\| =$$

$$\left\| \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \vec{y_2} + \theta(\vec{y_1} - \vec{y_2}))}{\partial y_j} (y_j^1 - y_j^2) d\theta \right\| \leqslant n \cdot K \cdot \|\vec{y_1} - \vec{y_2}\|$$

□

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы уравнений n-го порядка в нормальной форме

Теорема 2.2. *Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в области G вместе со своими производными по $y_j (j = \overline{1, n})$, точка $(x_0, \vec{y_0})$ тоже лежит в G. Тогда задача Коши локально разрешима единственным образом:*

1. *$\exists \delta > 0$, такое что на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ решение задачи Коши существует.*
2. *Решение единственно в следующем смысле:*

   Если $\vec{y_1} \equiv \vec{\varphi}(x)$ – решение задачи Коши в δ_1-окрестности точки x_0, а $\vec{y_2} \equiv \vec{\psi}(x)$ – решение задачи Коши в δ_2-окрестности точки x_0, то в окрестности точки x_0 с радиусом $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) : \vec{\varphi}(x) \equiv \vec{\psi}(x)$

Доказательство. Рассмотрим множество $\overline{H_{\delta, r}}(x_0, \vec{y_0}) = \{(x, \vec{y}) \in G : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \wedge \|\vec{y} - \vec{y_0}\| \leqslant r\}$. Заметим, что в силу компактности этого множества применима теорема Вейерштрасса:

$$\exists M > 0 : \forall (x, \vec{y}) \in \overline{H_{\delta, r}} : |\vec{f}(x, \vec{y})| \leqslant M, \forall i, j = \overline{1, n} : \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leqslant M$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\vec{y}(x) = \vec{y_0} + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt \Leftrightarrow \vec{y} = \Phi(\vec{y})$$

Рассмотрим в $C_n[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ замкнутый шар $\overline{D_{\delta, r}}(\vec{y_0}) = \{\vec{y} \in C_n[x_0 - \delta, x_0 + \delta] : \|\vec{y} - \vec{y_0}\|_{C_n} \leqslant r\}$, где $\|\vec{y}\|_{C_n} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup\limits_{|x - x_0| < \delta} |y_i(x)|$.

Докажем, что существуют δ и r такие, что

- Φ является сжимающим
- Отображает шар $\overline{D_{\delta, r}}$ в себя

Тогда мы сможем применить теорему Банаха о сжимающем отображении. Получим единственную неподвижную точку отображения $\Leftrightarrow$ интегральное уравнение имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ задача Коши имеет единственное решение.

Докажем, что Φ является сжимающим. Рассмотрим $\vec{y}, \vec{z} \in \overline{D_{\delta,r}}$:

$$\|\Phi(\vec{y}) - \Phi(\vec{z})\|_{C_n} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{|x-x_0|<\delta} \left| \int_{x_0}^{x} (f(\tau, \vec{y}(\tau)) - f(\tau, \vec{z}(\tau)))d\tau \right|_i \leqslant \sup_{|x-x_0|<\delta} \int_{x_0}^{x} L|\vec{y}(\tau) - \vec{z}(\tau)|d\tau \leqslant$$
$$\sup_{|x-x_0|<\delta} \int_{x_0}^{x} L\|\vec{y} - \vec{z}\|_{C_n} d\tau \leqslant \delta L\|\vec{y} - \vec{z}\|_{C_n}$$

Положив $q := \delta L$, получим требуемое.

Теперь докажем вторую часть:

$$\|\Phi(\vec{y_0}) - \vec{y_0}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{|x-x_0|<\delta} \left| \int_{x_0}^{x} f_i(\tau, \vec{y_0})d\tau \right|_i \leqslant \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(\tau, \vec{y_0})\|_{C_n} d\tau \leqslant \delta M =: (1-q)r$$

Получили, что

$$\begin{cases} q = \delta L \\ (1-q)r = \delta M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r - rq = \delta \\ r = \delta L r + \delta M \end{cases} \Rightarrow \delta_r := \frac{r}{M + Lr}$$

□

Определение 2.8. Нормальный вид уравнения с ЗК, разрешённого относительно старшей производной выглядит так:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде

Теорема 2.3. *Пусть функция $f(x, y, p_1, \ldots, p_{n-1})$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по переменным $y, p_1, \ldots, p_{n-1}$ в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, и точка $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда существует замкнутая δ-окрестность точки x_0, в которой существует единственное решение задачи Коши.*

2.3 Теорема о продолжении решения нормальной системы дифференциальных уравнений

Теорема 2.4. *Пусть $\vec{f}(x, \vec{y})$ определена и удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши на замыкании ограниченной области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, тогда любое решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \vec{y'} = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y_0} \end{cases}$$

можно продолжить в обе стороны до выхода $\Gamma = \partial G$, то есть можно доопределить $\vec{y}(x)$ на некоторый $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b]$, причём $(a, \vec{y}(a)), (b, \vec{y}(b)) \in \Gamma$

Доказательство.

$$\overline{H_r}(x_0, \vec{y_0}) := \{(x, \vec{y}) \in G : \ x \in [x_0 - \delta_r, x_0 + \delta_r] \wedge \|\vec{y} - \vec{y_0}\| \leqslant r\} \subseteq G$$

$$\rho((x_1, \vec{y_1}), (x_2, \vec{y_2})) := \max(|x_1 - x_2|, \|\vec{y_1} - \vec{y_2}\|)$$

Введём также расстояние от точки ρ до множества M : $\rho(p, M) = \inf\limits_{q \in M} \rho(p, q)$

Наконец, определим δ_0, r_0 как значения δ_r и r для точки $p_0 = (x_0, \vec{y_0})$, для которых выполнено $\max(\delta_0, r_0) = \rho(p_0, \Gamma)$.

Рассмотрим $x_1 = x_0 + \delta_0$ и $\vec{y_1} = \vec{y}(x_1)$. Обозначим $p_1 = (x_1, \vec{y_1})$

- Если $p_1 \in \Gamma$, то продолжение вправо не требуется
- Если $p_1 \notin \Gamma$, то p_1 – внутренняя точка, а значит, в ней $\exists!$ решение ЗК, причём оно совпадает с решением для p_0 на $[x_0, x_0 + \delta_0] \cap [x_1 - \delta_1, x_1]$. Аналогично определяем p_2 и т.д.

Полученная последовательность $\{p_k\}$ монотонно возрастает по x и ограничена точками из Γ. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует $b = \lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k$. Объединение решений задач Коши является функцией, определённой на $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [x_0, x_k] = [x_0, b)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\alpha, \beta \in [b - \varepsilon, b)$. Заметим, что

$$\|\vec{y}(\beta) - \vec{y}(\alpha)\| = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \right\| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))| d\tau \leqslant M\varepsilon$$

Значит, по критерию Коши существует $y^* = \lim\limits_{x \to b-0} \vec{y}(x)$. Пусть $p^* = (b, \vec{y^*})$.

$$0 \leqslant \rho(p_k, \Gamma) = \max(\delta_k, r_k) \to 0$$

Значит $\rho(p^*, \Gamma) = \lim\limits_{k \to \infty} \rho(p_k, \Gamma) = 0 \Rightarrow p^* \in \Gamma$

$$\frac{\vec{y}(b) - \vec{y}(b - \varepsilon)}{\varepsilon} = \int_{b-\varepsilon}^{b} \frac{\vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))}{\varepsilon} d\tau = \frac{\vec{f}(\xi, \vec{y}(\xi)) \cdot \varepsilon}{\varepsilon} \to \vec{f}(b, \vec{y}(b))$$

$\vec{f}$ непрерывна вплоть до $\Gamma \Rightarrow f \in C(p^*)$. Тогда можем сделать второй переход по интегральной теореме о среднем, где $\xi \in [b - \varepsilon, b]$.

Таким образом, мы успешно продлили вправо, аналогично можно продлить и влево. □

2.4 Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Замечание. Дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы, всегда содержат некоторые параметры. Эти параметры в реальных задачах никогда не могут быть измерены абсолютно точно, то есть всегда измеряются с некоторой погрешностью, так что сами дифференциальные уравнения известны лишь с некоторой степенью точности. Поэтому, для того чтобы уравнения могли описывать реальные процессы, необходимо, чтобы их решения непрерывно зависели от параметров, то есть чтобы они мало менялись при малых изменениях параметров.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений в векторном виде, то есть $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu}) \\ \vec{y}(x_0, \vec{\mu}) = \vec{y_0}(\vec{\mu}) \end{cases} , \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^m \tag{6}$$

Теорема 2.5. *Пусть $\vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu})$ – непрерывна и удовлетворяет условию Липшица равномерно по x и $\vec{\mu}$, $\forall (x, \vec{y}) \in G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и всех $\vec{\mu}$, таких, что $|\vec{\mu} - \vec{\mu_0}| \leqslant \delta$. Пусть, кроме того, $(x_0, \vec{y_0}) \in G$.*

Тогда $\exists h > 0 \mapsto$ решение $\vec{y}(x, \vec{\mu})$ задачи Коши непрерывно по совокупности переменных $(x, \vec{\mu})$ в некоторой области $|x - x_0| \leqslant h, |\vec{\mu} - \vec{\mu_0}| \leqslant \delta$.

2.5 Дифференцируемость и гладкость решения по параметрам, уравнение в вариациях

Лемма 2.2. *Лемма Адамара.*

Пусть $f(x, u) : \mathbb{R}^s_x \times \mathbb{R}^n_u \to \mathbb{R}^1$ или $f(x, u) : (U \subseteq \mathbb{R}^s_x \times \mathbb{R}^n_u) \to \mathbb{R}^1$, где U – область, выпуклая по u; $f \in C^k, k \geqslant 1$.

Тогда $\exists h_i(x, u, \tilde{u}) \in C^{k-1}, i = \overline{1, n}$, где $(x, u), (x, \tilde{u}) \in U$, что:

$$f(x, \tilde{u}) - f(x, u) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x, u, \tilde{u})(\tilde{u}_i - u_i)$$

Доказательство. При фиксированном x рассмотрим

$$\Phi(t) = f(x, t\tilde{u} + (1 - t)u) \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, t\tilde{u} + (1 - t)u)(\tilde{u}_i - u_i) \Rightarrow$$

$$f(x, \tilde{u}) - f(x, u) = \Phi(t)|_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \frac{d\Phi}{dt} dt = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{u}_i - u_i) \cdot \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, t\tilde{u} + (1 - t)u)dt \Rightarrow$$

$$h_i(x, u, \tilde{u}) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, t\tilde{u} + (1 - t)u)dt, h_i \in C^{k-1}$$

□

Теорема 2.6. *Пусть в (6): $f \in C^k(U), U$ – область в $\mathbb{R}^{1+n+m}, k \geqslant 1$. Тогда решение этой задачи Коши $y = \varphi(x, \mu) \in C^k$*

Доказательство. Для $n = m = 1$, для произвольных размерностей обобщается тривиально.

Докажем, что $\exists \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} :$ $\varphi(x, \mu)$ – решение (6), $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ – решение (6), где $\mu \mapsto \mu + \Delta\mu$. Введём

$$\psi(x, \mu, \Delta\mu) := \frac{\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)}{\Delta\mu}, \forall \Delta\mu \neq 0$$

Тогда

$$\psi' = \frac{1}{\Delta\mu}\left[f(x, \varphi(x, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(x, \varphi(x, \mu), \mu)\right] \overset{\text{л. Ада.}}{=}$$

$$\frac{1}{\Delta\mu}\left[H_1(x, u_1(\mu, \Delta\mu), \hat{u}_1(\mu, \Delta\mu))(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)) + H_2(x, u_2(\mu, \Delta\mu), \hat{u}_2(\mu, \Delta\mu))\Delta\mu\right] =$$

$$H_1(x, u_1, \hat{u}_1)\psi(x, \mu, \Delta\mu) + H_2(x, u_2, \hat{u}_2)$$

Таким образом,
$$\begin{cases} \psi' = \hat{H}_1(x,\mu,\Delta\mu)\cdot\psi + \hat{H}_2(x,\mu,\Delta\mu) \\ \psi(x_0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$
Значит $\exists! \psi(x,\mu,\Delta\mu) = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \in C^{k-1}$ □

Определение 2.9. Уравнение (7) называют уравнением в вариациях для решения φ.

3 Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.1 Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка

Факты ниже перекликаются со следующим разделом

Определение 3.1. Вектор-функция $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_k}(x)$, определённые на промежутке I, называются линейно зависимыми, если
$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \exists i : \alpha_i \neq 0 : \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{y_j}(x) \equiv 0$$

Определение 3.2. Пусть $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ – вектор-функции с n компонентнами. Функция
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \ldots & y_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \ldots & y_n^n \end{vmatrix}$$
называется определителем Вронского для заданных вектор-функций.

Лемма 3.1. *Если вронскиан системы $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке, то все эти функции линейно независимы.*

Доказательство. Пусть эти функции линейно зависимы, тогда векторы $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ линейно зависимы в каждой точке x_0, а значит, определитель матрицы, составленной из векторов, равен нулю. □

Лемма 3.2. *Если вектор-функции $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ – решения некоторой системы линейных однородных уравнений на промежутке I и $\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$, то $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ линейно зависимы на I.*

Доказательство. В точке x_0 векторы $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ линейно зависимы, значит, существует их линейная комбинация, которая обращается в ноль в точке x_0 : $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \vec{y_i}(x_0) = 0$.

Рассмотрим n задач Коши для $\vec{y}(x_0) = \vec{y_i}(x_0)$. Рассмотрим функцию $\vec{y}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \vec{y_i}(x)$ на I. $\vec{y}$ – также решение, как линейная комбинация решений (по принципу суперпозиции).

$\vec{y}(x_0) = 0 \Rightarrow$ Так как $\vec{y_1} \equiv 0$ также решение исходной системы, то из равенства $\vec{y}$ и $\vec{y_1}$ в точке x_0 по теореме о существовании и единственности следует $\vec{y} \equiv \vec{y_1} \equiv 0$ □

Определение 3.3. Фундаментальная система решений для СЛДУ – набор n линейно независимых решений системы.

Лемма 3.3. *Для любой СЛДУ существует ФСР.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$ и $\{\vec{y_0^i}\}_{i=1}^n$ – набор числовых линейно независимых векторов. Для каждого из числовых векторов составим соответствующую задачу Коши и получим $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$ – решения этих задач, тогда их вронскиан равен определителю матрицы, составленной из $\{\vec{y_0^i}\}_{i=1}^n$, следовательно, он не равен нулю, и ФСР существует. □

Лемма 3.4. *Любое решение СЛДУ единственным образом представимо в виде линейной комбинации векторов ФСР.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b], \vec{y}$ – решение системы, и $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}$ – ФСР, тогда

$\vec{y_1}(x_0), \ldots, \vec{y_n}(x_0)$ линейно независимы, и $\vec{y}(x_0)$ единственным образом выражается через них. В силу единственности решения задачи Коши коэффициенты линейной комбинации окажутся одними и теми же для всех точек отрезка. □

Линейные однородные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 3.4. Линейным однородным ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Замечание. Введём $\vec{y} = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Используя результаты уравнения $L(y)$ и тем, что $\vec{y_i'} = \vec{y}_{i+1}$ получим систему:

$$\begin{cases} \vec{y'}_1 = \vec{y_2} \\ \vec{y'}_2 = \vec{y_3} \\ \ldots \\ \vec{y'}_n = \frac{-1}{a_0}(a_n \vec{y_1} + a_{n-1}\vec{y_2} + \cdots + a_1 \vec{y_n}) \end{cases}$$

Тогда задача Коши для исходного уравнения

$$y(x_0) = y_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

сводится к задаче Коши для новой системы:

$$\vec{y}(x_0) = (y_0, \cdots, y_0^{(n-1)})$$

После введения данной системы существование и единственность решения исходного уравнения очевидна. (Однако более подробное доказательство этого факта для линейных систем вы можете прочитать в следующей главе).

Для исходного уравнения можно определить вронскиан, равный вронскиану написанной выше системы.

Замечание. Найдём решение системы 1 в виде $y = e^{\lambda x}$

$$M(\lambda) = a_0 \lambda^n + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$$L(e^{\lambda x}) = M(\lambda) e^{\lambda x} = 0$$

Поскольку экспонента никогда не обнуляется, то единственный возможный вариант – это $M(\lambda) = 0$. Уравнение $M(\lambda) = 0$ называется характеристическим, как и многочлен в его в левой части.

Утверждение 3.1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – однократные корни $M(\lambda)$, тогда решения $y_i = e^{\lambda_i x}$ линейно независимы.*

Доказательство.

$$W(e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Получившийся определитель – определитель Вандермонда, не будет равен нулю в силу того, что все λ_i различны.

Если все $a_i \in \mathbb{R}$, то все комплексные корни $M(\lambda)$ разбиваются на пары сопряжённых между собой комплексных чисел. Мнимая и действительная части решений, соответствующих таким корням, сами являются решениями:

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$$

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad \overline{y_1} = e^{\overline{\lambda} x}$$

$$z_1 = \frac{y_1 + \overline{y_1}}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad z_2 = \frac{y_1 - \overline{y_1}}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Замена $y_1, \overline{y_1}$ на z_1, z_2 является корректным переходом в другой базис, а потому линейная оболочка не изменится. □

Утверждение 3.2. *Пусть λ – корень $M(\lambda)$ кратности l, тогда функции*

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{l-1} e^{\lambda x}$$

являются решениями.

Лемма 3.5. *Пусть $y = x^s e^{\lambda x}$, где λ – корень характеристического уравнения кратности l, тогда*

$$L(x^s e^{\lambda x}) = \begin{cases} 0, s < l \\ (b_0 x^{s-l} + b_1 x^{s-l-1} + \cdots + b_{s-l}) e^{\lambda x}, x \geqslant l \end{cases}$$

Доказательство. Пусть z, λ – комплексные числа. Сначала докажем, что $(z^s e^{\lambda z})_z^{(p)} = (\lambda^p e^{\lambda z})_\lambda^{(s)}$. Здесь мы используем операцию формального дифференцирования.

Докажем наше утверждение:

$$(z^s e^{\lambda z})_z^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k (z^s)_z^{(k)} (e^{\lambda z})_z^{(p-k)} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k s(s-1)\ldots(s-(k-1)) z^{s-k} \lambda^{p-k} e^{\lambda z} =$$

$$\sum_{k=0}^{\min(p,\, s)} C_p^k C_s^k k! z^{s-k} \lambda^{p-k} e^{\lambda z}$$

Заметим, что $(\lambda^p e^{\lambda z})_\lambda^{(s)}$ раскроется в такое же выражение ввиду структурной симметрии.

Найдём:

$$L(x^s e^{\lambda x}) = a_0(x^s e^{\lambda x})^{(n)}_x + a_1(x^s e^{\lambda x})^{(n-1)}_x + \cdots + a_n(x^s e^{\lambda x}) =$$
$$a_0((e^{\lambda x})^{(s)}_\lambda)^{(n)}_x + \cdots + a_n(e^{\lambda x})^{(s)}_\lambda = a_0((e^{\lambda x})^{(n)}_x)^{(s)}_\lambda + \cdots + a_n(e^{\lambda x})^{(s)}_\lambda =$$
$$(a_0(e^{\lambda x})^{(n)}_x + \cdots + a_n e^{\lambda x})^{(s)}_\lambda = (e^{\lambda x} M(\lambda))^{(s)}_\lambda = \sum_{k=0}^{s} C^k_s (M(\lambda))^{(k)}_\lambda (e^{\lambda x})^{(s-k)}_\lambda =$$
$$\sum_{k=l}^{s} C^k_s (M(\lambda))^{(k)}_\lambda (e^{\lambda x})^{(s-k)}_\lambda$$

Следовательно, $b_i = C^k_s (M(\lambda))^{(k)}_\lambda (e^{\lambda x})^{(s-k)}_\lambda$

Исходное утверждение выводится из леммы применением того факта, что корень кратности s многочлена $P(x)$ является корнем $P, P', \cdots, P^{(s-1)}$ □

Определение 3.5. Квазимногочлен – произведение многочлена на экспоненту с линейной функцией в показателе.

Утверждение 3.3. $(P_m(x)e^{\lambda x})'_x = Q_m(x)e^{\lambda x}$

Теорема 3.1. *О структуры ФСР.*

Пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ корни характеристического многочлена $M(\lambda)$ кратности $l_1, \cdots, l_k$. Тогда набор функций $x^s e^{\lambda_i x}$, где $s = 0, \cdots, l_i - 1, i = 1, \cdots, k$ является ФСР для исходного уравнения.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть ЛЗ, то есть

$$\exists \{c_i\}^n_{i=1} \neq 0 : \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \equiv 0$$

Сгруппируем слагаемые при одинаковых $e^{\lambda_i x}$: $\sum\limits_{i=1}^{k} e^{\lambda_i x} p_i(x) \equiv 0$. Значит, хотя бы один из многочленов $p_i(x) \neq 0$. Б.О.О. примем $p_1(x) \neq 0$, домножим равенство на $e^{-\lambda_k x}$:

$$e^{x(\lambda_1 - \lambda_k)} p_1(x) + e^{x(\lambda_2 - \lambda_k)} p_2(x) + \cdots + p_k(x) = 0$$

Продифференцируем l_k раз:

$$e^{x(\lambda_1 - \lambda_k)} Q_1(x) + e^{x(\lambda_2 - \lambda_k)} Q_2(x) + \cdots + e^{x(\lambda_{k-1} - \lambda_k)} Q_{k-1}(x) = 0$$

Разделим на $e^{x(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}$ и будем повторять процедуру, пока не дойдём до

$$e^{x(\lambda_1 - \lambda_2)} R(x) = 0$$

Откуда $R(x) = 0$, но тогда $p_1(x) = 0$. Противоречие. □

3.2 Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью квазимногочленом

Определение 3.6. Эти уравнения имеют вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x)$$

где $f(x)$ квазимногочлен: $f(x) = e^{\mu x} P_m(x), \mu \in \mathbb{C}, P_m(x)$ – заданный многочлен степени m с комплексными коэффициентами.

Определение 3.7. Характеристическим многочленом $L(x)$ назовём многочлен

$$L(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

Замечание. Аналогично однородному случаю, существование и единственность следуют из таковых для системы

$$\begin{cases} \vec{y'}_1 = \vec{y}_2 \\ \vec{y'}_2 = \vec{y}_3 \\ \dots \\ \vec{y'}_{n-1} = \vec{y}_n \\ \vec{y'}_n = f - a_1 y_1 - a_2 y_2 - \dots - a_n y_n \end{cases}$$

Определение 3.8. Если число μ является корнем характеристического уравнения

$$L(\lambda) = 0$$

то говорят, что в уравнении резонансный случай. Если же μ не является корнем, то имеем нерезонансный случай.

Определение 3.9. Дифференциальным оператором D назовём оператор

$$D = \frac{d}{dx}$$

Замечание. $D^n y = y^{(n)}$

Определение 3.10. Дифференциальным многочленом назовём многочлен вида

$$L(D) = (D - \lambda_1)^{k_1}(D - \lambda_2)^{k_2} \cdots (D - \lambda_s)^{k_s}$$

где k_i соответствует кратности корней характеристического уравнения, а D – оператор формального дифференцирования.

Пример. Рассмотрим уравнение $2y'' + 7y' + 4y = 42x$.
Для него $L(\lambda) = 2\lambda^2 + 7\lambda + 4$. $L(D) = 2\frac{d^2}{dx^2} + 7\frac{d}{dx} + 4$.
Подействовав $L(D)$ на y, получим $f(x) = 42x$:

$$L(D)y = \left(2\frac{d^2}{dx^2} + 7\frac{d}{dx} + 4\right) y = 2y'' + 7y' + 4y \overset{\text{по усл.}}{=} 42x$$

Замечание. Рассмотрим ЛОУ. Покажем, что если известно некоторое решение $y_0(x)$ ЛНУ, то замена $y = z + y_0$ приводит уравнение к ЛОУ. Воспользуемся представлением левой части через дифференциальный многочлен:

$$L(D)y = L(D)(z + y_0) = L(D)z + L(D)y_0 = L(D)z + f(x) = f(x)$$

Отсюда следует, что решение исходного уравнения сводится к нахождению z, такого что $L(D)z = 0$.

Рассмотрим $L(D)y(x) = e^{\mu x} P_m(x)$

Утверждение 3.4. $(P_m(x)e^{\lambda x})'_x = Q_m(x)e^{\lambda x}$

Теорема 3.2. *О структуре решения ЛНУ с правой частью в виде квазимногочлена.*

Для рассматриваемого уравнения существует и единственно решение вида

$$y(x) = x^k e^{\mu x} Q_m(x)$$

где $Q_m(x)$ – многочлен одинаковой с $P_m(x)$ степени m, а число k равно кратности корня μ в уравнении $L(\lambda) = 0$ в резонансном случае и $k = 0$ в нерезонансном.

Доказательство. Если $\mu \neq 0$, то заменой $y = ze^{\mu x}$ всегда можно избавиться от $e^{\mu x}$ в правой части. В самом деле, по формуле сдвига после замены имеем, что

$$L(D)y = L(D)(e^{\mu x}z) = e^{\mu x}L(\mu)z + e^{\mu x}L(D)z = e^{\mu x}L(D+\mu)z = e^{\mu x}P_m(x)$$

откуда $L(D+\mu)z = P_m(x)$.

Таким образом, доказательство теоремы осталось провести для уравнения вида (для удобства считаем, что $\mu = 0$)

$$L(D)y = P_m(x)$$

1. Нерезонансный случай: $L(\mu) \neq 0$. Пусть

   $$P_m(x) = p_m x^m + \cdots + p_0 \quad Q_m(x) = q_m x^m + \cdots q_0$$

   Если подставить и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x, получим линейную алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $q_0, \cdots, q_m$. Матрица системы треугольная с числами $a_n = L(\mu) \neq 0$, таким образом, все коэффициенты определяются из неё однозначно.

2. В резонансном случае имеем

   $$L(\lambda) = \lambda^k(\lambda^{n-k} + a_1\lambda^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k})$$

   Следовательно,

   $$L(D) = \begin{cases} D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-k}D^k, k < n \\ D^n, k = n \end{cases}$$

   В первом случае замена $D^k y = z$ приводит уравнение к уравнению с нерезонансным случаем. Рассмотрим уравнение

   $$D^k y = \begin{cases} R_m(x), k < n \\ P_m(x), k = n \end{cases}$$

   Взяв нулевые начальные условия для этого уравнения

   $$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(k-1)}(0) = 0$$

   получим единственное решение вида

   $$y(x) = x^k Q_m(x)$$

$\square$

3.3 Уравнение Эйлера-Коши

Определение 3.11. Уравнением Эйлера называется уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

Утверждение 3.5. *Данное уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами при замене $x = e^t$ при $x > 0$ и $x = -e^t$ при $x < 0$.*

Доказательство. Докажем индукцией по порядку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = e^{-t} y_t' \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-2t}(y_t'' - y_t') \quad \frac{d^n y}{dx^n} = e^{-nt} \varphi(y_t^{(n)}, y_t^{(n-1)}, \cdots, y_t')$$

Подставим найденные выражения в определение и получим уравнение вида, где $y^{(n)}$ зависит от нового параметра t:

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1} y' + b_n = 0$$

□

3.4 Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений

Определение 3.12. Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной.

Нормальная линейная однородная система уравнений выглядит так

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^T \quad A_{n \times n} = (a_{ij}) \quad \dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

Теорема 3.3. *Если $\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_n$ – базис из собственных векторов матрицы A, то $\vec{x}_i = e^{\lambda_i t} \vec{h}_i$ – ФСР для исходной однородной системыю*

Доказательство. Заметим, что $A(e^{\lambda t}\vec{h}) = e^{\lambda t}(A\vec{h}) = e^{\lambda t}\lambda\vec{h} = (e^{\lambda t}\vec{h})'$, значит собственный вектор является решением. Их линейная независимость следует из того, что, что их вронскиан в точке $t = 0$ равен определителю из координатных столбцов этого базиса, а значит не равен нулю. □

3.5 Матричная экспонентна, её свойства и применение к решению нормальных линейных систем

Определение 3.13. Пусть t – действительная переменная, $A_{n \times n}$ – комплекснозначная квадратная матрица. Матричной экспонентой называется ряд:

$$e^{tA} = E_{n \times n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Введём обозначение частичных сумм:

$$S_m = E_{n \times n} + \sum_{k=1}^{m} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Определение 3.14. Матричный ряд

$$e^{tA} = E_{n\times n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

называется сходящимся при $t_0 \in \mathbb{R}$, если степенной ряд

$$(e^{tA})_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}$$

сходится для всех i, j.

Лемма 3.6. $\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *верно, что ряд* $e^{tA} = E + \sum \frac{t^k}{k!} A^k$ *сходится абсолютно.*

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$

Докажем по индукции: $|a_{ij}^{(k)}| \leqslant n^{k-1} M^k$

1. База $|a_{ij}^{(1)}| \leqslant n^0 M$

2. $|a_{ij}^{(k)}| = |\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(1)} a_{lj}^{(k-1)}| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |a_{il}^{(1)} a_{lj}^{(k-1)}| \leqslant n \cdot M n^0 \cdot M^{k-1} n^{k-2} = n^{k-1} M^k$

Рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} n^{i-1} M^i$$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{nM}{k+1} = 0 \Rightarrow$ рассматриваемый ряд сходится по признаку Даламбера и мажорирует каждый компонентный ряд. $\square$

Лемма 3.7. *Формула матричного бинома.*

Если A и B перестановочны, то $\forall n \in \mathbb{N}: \ (A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^i B^{n-i}$

Лемма 3.8. *Если A и B перестановочны, то* $\forall t \in \mathbb{R}$*:*

$$e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA} = e^{t(A+B)}$$

Доказательство.

$$e^{t(A+B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} \overset{\text{абс.сход.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} = e^{tB} e^{tA} = e^{tA} e^{tB}$$

$\square$

Лемма 3.9. *Свойства матричной экспонетны.*

1. *Если S – невырожденная и $A = SBS^{-1}$, то* $e^{tA} = S e^{tB} S^{-1}, \forall t \in \mathbb{R}$

2. $(e^{tA})'_t = A e^{tA} = e^{tA} A$

Доказательство. 1. Заметим, что $A^k = SB^kS^{-1}$:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k\right) S^{-1} = Se^{tB}S^{-1}$$

2.

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = Ae^{tA}$$

□

Теорема 3.4. *Матричная экспонентна для ФСР.*

Матрица e^{tA} является фундаментальной матрицей для системы линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

Доказательство. $(e^{tA})' = Ae^{tA}$, следовательно, каждый столбец матрицы e^{tA} является решением исходной системы. Поскольку $\det e^{tA} \neq 0, \forall t$, то e^{tA} фундаментальна. □

Замечание. Общее решение системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ – это $e^{tA}\vec{c}$, где $\vec{c}$ – вектор констант.

Теорема 3.5. *Общее решение системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ задаётся следующей формулой:*

$$\vec{x} = e^{tA}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)d\tau + \vec{c_0}\right)$$

Доказательство. Метод вариации постоянных:

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= e^{tA}\vec{c}(t) \Rightarrow \\
(e^{tA}\vec{c}(t))' = Ae^{tA}\vec{c}(t) + e^{tA}\dot{\vec{c}}(t) &= Ae^{tA}\vec{c}(t) + \vec{f}(t) \Rightarrow \\
e^{tA}\dot{\vec{c}}(t) &= \vec{f}(t) \Rightarrow \\
\dot{\vec{c}}(t) &= e^{-tA}\vec{f}(t) \Rightarrow \\
\vec{c}(t) &= \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)d\tau + \vec{c_0}
\end{aligned}$$

□

4 Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Замечание. Линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами порядка n называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

Решение этого уравнение всегда можно свести к решению системы линейных уравнений порядка n аналогично случаю с постоянными коэффициентами.

4.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка

Теорема 4.1. *Существования и единственности для системы.*

Зададим начальное условие $y(x_0) = y_0$*, где* $x \in I$ *и* y_0 *– заданный* n*-мерный вектор. Пусть матрица* $A(x)$ *и* $\vec{f}(x)$ *непрерывны на* I*. Тогда на всём* I *решение задачи Коши существует и единственно.*

Доказательство. Эта система является частным случаем уже рассмотренной задачи Коши в нормальном виде с

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + \vec{f_i}(x), \quad i = \overline{1, n}$$

Эти функции f_i определены и непрерывны при $x \in I, (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица с постоянной

$$L = \max_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \max_{x \in I} |a_{ij}(x)|$$

Следовательно, требуемые условия выполнены и она имеет единственное решение на I. □

Теорема 4.2. *Существования и единственности для уравнения.*

Пусть все функции $a_i(x), i = \overline{1, n}$ *и* $f(x)$ *– непрерывны на* I *и пусть* $x_0 \in I$*.*

Тогда при произвольных начальных значениях $y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}$ *решение задачи Коши*

$$y(x_0) = y_1^0, y'(x_0) = y_2^0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0$$

существует и единственно на всём I*.*

Доказательство. Данное уравнение также является частным случаем уже рассмотренного общего случая с функцией

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = f(x) - a_n(x)y - a_{n-1}(x)y' - \cdots - a_1(x)y^{(n-1)}$$

Эта функция F определена и непрерывна при $x \in I, (y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной

$$L = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \max_{x \in I} |a_i(x)|$$

Следовательно, для задачи Коши выполнены условия теоремы и её решение существует и единственно на I. □

4.2 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Замечание. Теперь мы рассматриваем однородную систему

$$\vec{y'} = A(x)\vec{y}(x)$$

где $x \in I$ и $A(x)$ – непрерывны на I. Комплекснозначная матрица $A(x)$ порядка n. Решением будет являться комплекснозначная вектор-функция y.

Лемма 4.1. *Принцип суперпозиции.*

Если $y_1(x), y_2(x)$ – решение данной системы, то линейная комбинация $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ также решение.

Определение 4.1. Вектор-функции $y_1, \cdots, y_k$ называются линейно зависимыми на промежутке I, если найдутся числа $c_1, \cdots, c_k$ одновременно неравные нулю, что

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_ky_k(x) \equiv 0, \forall x \in I$$

В противном случае функции называются линейно независимыми

Лемма 4.2. *Если $y_1, \cdots, y_k$ линейно зависимы на промежутке I, то числовые вектора*

$$y_1(x), \cdots, y_k(x), \forall x \in I$$

линейно зависимы. Обратное утверждение неверно.

Теорема 4.3. *Пусть $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ – решения данной однородной системы. Эти решения линейно независимы на I тогда и только тогда, когда*

$$\forall x_0 \in I: \; y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$$

линейно независимы как числовые векторы.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ – линейно независимые решения линейной однородной системы. Если существует $x_0 \in I$, что $y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$ линейно зависимы, то найдётся нетривиальная линейная комбинация, что $y = \sum c_iy_i(x_0) = 0$

Вектор-функция y является решением данной системы по принципу суперпозиции и также удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = 0$. Но тогда $y(x) \equiv 0$ на I по теореме о существовании и единственности. Но тогда $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ линейно зависимы. Противоречие.

$\Leftarrow$ Пусть $\forall x_0 \in I: \; y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$ линейно независимы на I. Пусть $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ линейно зависимы, тогда по предыдущей лемме $y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$ также линейно зависимы. Противоречие. □

Теорема 4.4. *Для данной системы фундаментальная система существует и их бесконечное число.*

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in I$ и n линейно независимых числовых векторов $y_1^0, \cdots, y_n^0$ с n компонентами. Обозначим через $\varphi_j(x)$ решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $y_j(x_0) = y_j^0$. По теореме о существовании и единственности каждое такое решение существует и единственно на I. Но тогда система решений $\varphi_j(x)$ образует фундаментальную систему решений, так как она была построена из линейно независимых числовых векторов:

Допустим, решения получились ЛЗ, несмотря на то, что построены из ЛНЗ векторов. Тогда, в силу отрицания (а не обратного, что можно легко перепутать) леммы (4.2) получаем, что во всех точках вектора ЛЗ, а это противоречие с точкой x_0.

Точку $x_0 \in I$ и векторы можно выбирать бесконечным числом способов. □

Теорема 4.5. *Если $\varphi_1^0, \cdots, \varphi_n^0$ – фундаментальная система решений данной системы, то любое решение представимо в виде линейной комбинации членов фундаментальной системы.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in I, y$ – некоторое решение системы. Тогда $\varphi_1^0(x_0), \cdots, \varphi_n^0(x_0)$ линейно независимы по определению и числовой вектор единственным образом выражается через линейную комбинацию этих векторов. В силу единственности задачи Коши, коэффициенты линейной комбинации окажутся одними и теми же для всех точек отрезка. □

Определение 4.2. Матрица $\Phi(x)$, у которой столбцы образуют фундаментальную систему решений, называется фундаментальной матрицей данной системы.

Лемма 4.3. *Если $Y_1(x), Y_2(x)$ – фундаментальные матрицы одной системы, то существует невырожденная числовая матрица C, что $Y_1 \equiv Y_2 C$*

4.3 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Теорема 4.6. *О структуре решения неоднородной системы.*

Пусть $y_0(x)$ – некоторое частное решение неоднородной системы и $\Phi(x)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы.

Тогда все решения исходной системы задаются формулой

$$\vec{y}(x) = \vec{y_0} + \Phi(x)\vec{C}$$

где $\vec{C}$ – произвольный числовой вектор размерности n.

Доказательство. В исходной системе сделаем замену

$$\vec{y}(x) = \vec{z}(x) + \vec{y_0}(x)$$

Тогда получим, что $\vec{z}(x)$ удовлетворяет соответствующей однородной системе. Общее решение однородной системы записывается, как

$$\vec{z}(x) = \Phi(x)\vec{C}$$

Из замены следует утверждение теоремы. □

4.4 Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского.

Теорема 4.7. *Лиувилля-Остроградского.*

Пусть $W(x)$ – вронскиан решений $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ системы $y'(x) = A(x)y(x)$ на промежутке I и $x_0 \in I$, тогда $\forall x \in I$ имеет место формула Лиувилля-Остроградского:

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} trA(t)dt\right)$$

Доказательство. Докажем, что $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W'(x) = \mathrm{tr}A(x) \cdot W(x) \quad x \in I$$

Пусть $y_{ij}(x), i = \overline{1,n}$ компоненты решения $y_j(x), j = \overline{1,n}$. Тогда $W(x)$ является функцией всех этих компонент:

$$W(x) = W[y_{11}(x), y_{21}(x), \cdots, y_{nn}(x)]$$

По формуле производной сложной функции получаем, что

$$W'(x) = \sum_{p,\,q=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial y_{pq}}(x) y'_{pq}(x)$$

Если $W_{pr}(x)$ – алгебраическое дополнение $y_{pr}(x)$ в $W(x)$, то разложение $W(x)$ по p-й строке даёт

$$W(x) = \sum_{r=1}^{n} y_{pr}(x) W_{pr}(x)$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial W}{\partial y_{pq}}(x) = W_{pq}(x)$$

Каждая вектор-функция удовлетворяет системе $y'(x) = A(x)y(x)$, то есть

$$y'_q(x) = A(x)y_q(x), \quad q = \overline{1,n}, x \in I$$

Отсюда находим, что

$$y'_{pq}(x) = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x)$$

Подставляя найденные выражения в формулу $W'(x)$ получим, что

$$W'(x) = \sum_{p,\,q=1}^{n} W_{pq}(x) \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x) = \sum_{p,\,r=1}^{n} a_{pr}(x) \sum_{q=1}^{n} y_{rq}(x) W_{pq}(x)$$

Но по свойствам определителя мы знаем, что $\sum_{q=1}^{n} y_{rq}(x) W_{pq}(x) = \delta_{pr} W(x) \Rightarrow$

$$W'(x) = W(x) \sum_{p,\,r=1}^{n} a_{pr}(x)\delta_{pr} = W(x) \sum_{p=1}^{n} a_{pp}(x) = W(x) \mathrm{tr} A(x)$$

Интегрирование этого линейного однородного уравнения первого порядка даёт искомую формулу. $\square$

Замечание. Формула Лиувилля-Остроградского для однородного уравнения n-го порядка:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$$

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \dots - a_1 y_n \end{cases} \Rightarrow \mathrm{tr} A(x) = -a_1(x) \Rightarrow W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(t) dt \right)$$

4.5 Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n-го порядка

Как мы уже поняли, все уравнения n-го порядка сводятся к системам, поэтому достаточно показать для системы.

1. Найти ФСР однородной системы (и фундаментальную матрицу Y).

2. Продифференцировать вектор-функцию $\vec{y}(x) = Y(x)\vec{C}(x)$, где $\vec{C}(x)$ – вектор-функция:

$$\vec{y'} = Y'\vec{C} + Y\vec{C'} = AYC + f$$

3. Выразить и проинтегрировать $\vec{C'}$, после чего выразить частное решение неоднородной системы:

$$Y\vec{C'} = f \Rightarrow \vec{C'} = Y^{-1}f \Rightarrow \vec{C} = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)dt + \vec{C_0}$$

$$\vec{y}(x) = Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)dt + Y(x)\vec{C_0}$$

4.6 Краевая задача, теорема об альтернативе

Определение 4.3. Задача нахождения функции $y = y(x), y \in C^2[a, b]$ из условий

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ \gamma_1 y'(a) + \gamma_2 y(a) + \gamma_3 y'(b) + \gamma_4 y(b) = 0 \\ \delta_1 y'(a) + \delta_2 y(a) + \delta_3 y'(b) + \delta_4 y(b) = 0 \end{cases}$$

где $\gamma_{1,2,3,4}, \delta_{1,2,3,4}$ – некоторые числа такие, что

$$\exists i, j : \gamma_i \cdot \delta_j \neq 0$$

называется **краевой задачей** для ОДУ. Второе и третье равенства называются **краевыми условиями**.

Теорема 4.8. *Об альтернативе.*

Для линейного неоднородного уравнения n-го порядка с n линейными краевыми условиями возможны только два случая:

1. *Задача имеет единственное решение при любых правых частях в уравнении и краевых условиях.*

2. *Однородная задача имеет бесконечно много решений, а неоднородная задача при некоторых правых частях имеет бесконечно много решений, а при всех других – не имеет решений.*

Доказательство. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + y_0(x)$$

где $y_1, \cdots, y_n$ – линейно независимые решения однородного уравнения, $y_0(x)$ – частное решение. Подставляя это общее решениев в краевые условия и перенося $y_0(x)$ в правую часть, получаем систему n линейных алгебраических уравнений относительно $c_1, \cdots, c_n$. Коэффициенты системы зависят только от значений $y, y', \cdots$ в заданных точках и не зависят от правых частей уравнения и краевых условий. Если данная задача однородна, то правые части алгебраических уравнений равны нулю.

Возможны только два следующих случая:

1. Если детерминант не равен нулю, то система имеет единственное решение $c_1, \cdots, c_n$ при любых правых частях. Подставляя эти значения в общее решение, получаем единственное решение краевой задачи.

2. Если детерминант системы равен нулю, то однородная система имеет бесконечно много решений относительно $c_1, \cdots, c_n$, а неоднородная система имеет решение не при любых правых частях. Если она имеет решение, то она имеет бесконечно много решений, так как к этому решению можно прибавить любое решение однородной системы, умноженное на любую константу.

□

4.7 Теорема Штурма и следствия из неё

Будем рассматривать уравнение второго порядка:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

где $a(x), b(x)$ – действительно-значные функции, заданные на $I \subseteq \mathbb{R}, a(x), b(x) \in C^1(I)$.

Определение 4.4. Решение называется нетривиальным на I, если оно не равно нулю хотя бы в одной точке $x_0 \in I$.

Определение 4.5. Решение, имеющее более одного нуля на I, называется колеблющимся.

Определение 4.6. Значение x_0 называется простым нулём функции $f(x)$, определённой и дифференцируемой в точке x_0, если $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) \neq 0$. Если производная равна 0, то такое значение называется кратным нулём.

Выполним в изначальном уравнении замену $y(x) = u(x) \cdot z(x)$, так как хотим понизить порядок. Приэтом $z(x)$ – неизвестная функция, а $u(x)$ подберём так, как нам нужно.

$$y' = u'z + uz' \quad y'' = u''z + 2u'z' + uz''$$

Подставляем в изначальное уравнение:

$$uz'' + (2u' + au)z' + (u'' + au' + bu)z = 0$$

Возьмём $u(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right]$, чтобы коэффициент перед z' сократился. Заметим, что $u(x)$ в ноль никогда не обращается. Подставим $u(x)$ в полученное выше уравнение:

$$z''(x) + q(x)z = 0 \qquad q(x) = \frac{u'' + au' + bu}{u}$$

Полученное уравнение называется приведённым. (К такому уравнению можно привести всегда.)

Лемма 4.4. *Если $z(x)$ – нетривиальное решение приведённого уравнения, то каждый его нуль на промежутке I является простым.*

Доказательство. Пусть это не так, то есть $x_0 \in I$ – кратный нуль:

$$\begin{cases} z''(x) + q(x)z = 0 \\ z(x_0) = 0 \\ z'(x_0) = 0 \end{cases}$$

решение полученной ЗК единственно. Более того, оно равно нулю на всём I – противоречие. □

Лемма 4.5. *Нули любого нетривиального решениея приведённого уравнения не имеют конечной предельной точки на I.*

Доказательство. Пусть это не так, то есть существует $\{x_n\}$ – последовательность нулей $z(x)$, которая сходится к $x_0 \in I$. В силу непрерывности $z(x)$ имеем $\lim_{x \to x_0} z(x) = z(x_0) = \lim_{n \to \infty} z(x_n) = 0$. Значит x_0 – тоже нуль функции $z(x)$. Далее, по определению

$$z'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{z(x_n) - z(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

таким образом, x_0 оказался кратным нулём, что противоречит предыдущей лемме. □

Следствие. *Любое нетривиальное на $[\alpha, \beta] \subseteq I$ решение данного уравнения имеет не более конечного числа нулей на этом отрезке.*

Доказательство. От противного. Если их счётное количество, то для них получаем предельную точку нулей по теореме Больцано-Вейерштрасса, отсюда противоречие предыдущей лемме. □

Теорема 4.9. *Теорема Штурма.*

Рассмотрим $y'' + q(x)y = 0$ и $y'' + Q(x)y = 0$. Пусть $\forall x \in I: \ q(x) \leqslant Q(x)$ и пусть $y(x), z(x)$ – нетривиальные решения соответствующих уравнений. Если $x_1 \leqslant x_2$ – последовательные нули $y(x)$, то

- *Либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$*
- *Либо существует хотя бы одна точка $x_0 \in (x_1, x_2)$, для которого выполнено $z(x_0) = 0$*

Доказательство. Будем действовать от противного: предположим, что $z(x) \neq 0$ на (x_1, x_2), то есть, например, $z(x) > 0$. Без потери общности предположим, что $y(x) > 0$ на (x_1, x_2). Из условия теоремы: $y(x_1) = y(x_2) = 0$. Тогда

$$y'(x_1) = \lim_{x \to x_1 + 0} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \geqslant 0 \qquad y'(x_2) = \lim_{x \to x_2 - 0} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2} \leqslant 0$$

Но поскольку x_1, x_2 – простые нули, то $y'(x_1) > 0, y'(x_2) < 0$. Посчитаем $(y'' + q(x)y)z - (z'' + Q(x)z)y = 0$:

$$y''z - z''y = (Q - q)yz$$

Вычислим интеграл левой части:

$$\int_{x_1}^{x_2} (y''z - z''y)dx = \int_{x_1}^{x_2} zdy' - \int_{x_1}^{x_2} ydz' =$$
$$(zy')|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} y'dz - (yz')|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} z'dy =$$

При этом верно: $dz = z'dx, dy = y'dx$. Поэтому полученные интегралы совпадают и сокращаются.

$$= (zy')|_{x_1}^{x_2} - (yz')|_{x_1}^{x_2} = (zy')|_{x_1}^{x_2}$$

Тогда исходная разность принимает вид:

$$z(x_2)y'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (Q - q)yzdx \geqslant 0$$

Далее возможны следующие варианты:

- $z > 0$ на $[x_1, x_2]$
- $z > 0$ на $[x_1, x_2)$, и $z(x_2) = 0$
- $z > 0$ на $(x_1, x_2]$, и $z(x_1) = 0$

Заметим, что левая часть полученного выражения во всех случаях отрицательная $\Rightarrow$ противоречие. □

Следствие. *Если $q(x) \leqslant 0$, то любое нетривиальное решение уравнения $y'' + q(x)y = 0$ имеет не более одного нуля.*

Доказательство. Предположим, что есть нетривиальное решение $y(x)$, у которого есть 2 последовательных нуля.

Тогда пусть $Q(x) \equiv 0$, то есть $z'' = 0 \Rightarrow z = ax + b \neq 0$.

Возьмём $z \equiv 42$. Но эта функция не имеет ни одного нуля $\Rightarrow$ противоречие с теоремой Штурма. □

Следствие. *Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения $y''+q(x)y = 0$. Если x_1, x_2 – последовательные нули y_1, то между ними имеется ровно один нуль y_2.*

Доказательство. Положим $q(x) \equiv Q(x)$. Заметим, что y_1, y_2 не обращаются одновременно в нуль в x_1, x_2 (ввиду линейной независимости). Если предположить, что между x_1, x_2 лежит хотя бы два нуля y_2, то аналогичным образом получается, что между этими нулями есть хотя бы ещё один корень y_1. □

Следствие. *Если некоторое нетривиальное решение уравнения $y''+q(x)y = 0$ имеет бесконечно много нулей, то и любое другое решение также имеет бесконечно много нулей.*

5 Автономные системы дифференциальных уравнений

5.1 Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий.

Определение 5.1. Нормальной автономной системой дифференциальных уравнений порядка n называется система

$$\dot{x}(t) = f(x)$$

где $f(x)$ – заданная действительная вектор-функция с n компонентами определённая в некоторой области (называемой фазовым пространством автономной системы) Ω евклидового пространства $\mathbb{R}^n_x$ с фиксированной прямоугольной декартовой системой координат $x_1, \cdots, x_n$.

Определение 5.2. В автономной системе t – независимая переменная, которую принято называть временем и считать лежащей в $\mathbb{R}^1_t$, а $x(t)$ – неизвестная действительная вектор-функция с n компонентами.

Замечание. В дальнейшем будем предполагать, что $f(x)$ удовлетворяет в области Ω условию Липшица. Это гарантирует существование непродолжимого автономного решения автономной системы при начальном условии

$$x(t_0) = x_0, x_0 \in \Omega$$

на некотором промежутке $I(t_0, x_0)$ оси t, содержащей точку t_0.

Замечание. Произвольная нормальная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x, t)$$

всегда сводится к автономной системе путём увеличения числа неизвестных функций на единицу. Если положить $t = x_{n+1}$, то получаем автономную системы с $n+1$ неизвестными функциями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, x_{n+1}) \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases}$$

Замечание. Таким образом, автономная система отличается от любой другой системы тем, что правая часть не содержит переменной t.

Определение 5.3. Если $x = \varphi(t)$ – решение автономной системы на промежутке $I \subseteq R^1_t$, то оно определяет параметрически заданную кривую в области Ω, то есть множество точек $\{\varphi(t)\} \in \Omega$ при всех $t \in I$. Эта кривая в Ω называется фазовой траекторией автономной системы.

Определение 5.4. Интегральные кривые представляют собой графики решений $x = \varphi(t)$ автономной системы в бесконечном цилиндре

$$G = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}_{(x,t)\colon x \in \Omega,\, t \in \mathbb{R}^1_t}\right\}$$

Замечание. Следовательно, фазовая траектория автономной системы является проекцией её интегральной кривой параллельно оси t. На траектории стрелкой указывают её ориентацию, то есть направление движения по ней в сторону возрастания t.

Свойства фазовых траекторий

Теорема 5.1. *Если $x(t) = \varphi(t)$ решение автономной системы при $t \in (\alpha, \beta)$ и $C \in \mathbb{R}$, то $x(t) = \varphi(t + C)$ – решение при $t \in (\alpha - C, \beta - C)$.*

Доказательство. Преобразованием $t \mapsto t + C$ мы сдвигаем интегральную кривую параллельно оси t, значит её проекция на x вдоль оси t не изменитс. □

Теорема 5.2. *Если две фазовых траектории $x(t) = \varphi(t), t \in I_1$ и $x(t) = \psi(t), t \in I_2$ – решения автономной системы и*

$$x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$$

то $\psi(t) \equiv \varphi(t + t_1 - t_2)$ для всех t, для которых определены обе части тождества.

Доказательство. Рассмотрим $y = \varphi_1(t) = \varphi(t + t_1 - t_2), t + t_1 - t_2 \in I_1$, тогда $\varphi_1(t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$. Из этого следует, что $\varphi_1(t_2) = x_0$. Но тогда по теореме о существовании и единственности, для всех t, для которых определены обе части тождества, получаем необходимое тождество. □

Определение 5.5. Решение автономной системы $x(t) = \varphi(t) \equiv x_0 \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}^1_t$ называется положением равновесия или точкой покоя системы.

Теорема 5.3. *Точка $x_0 \in \Omega$ является положением равновесия автономной системы тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $x = x_0$ – положение равновесия. Тогда $\dot{x} = f(x_0) = 0$.
$\Leftarrow$ Пусть $f(x_0) = 0$. Тогда $\dot{x} = 0$ и $x = x_0$. □

Определение 5.6. Если решение автономной системы $x = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}^1_t$ и является периодической вектор-функцией с периодом T, то соответствующая ему фазовая траектория называется циклом системы.

Теорема 5.4. *Все фазовые траектории автономной системы принадлежат одному из трёх классов:*

1. *Положение равновесия*
2. *Замкнутая траектория (цикл)*
3. *Траектория без самопересечений*

5.2 Классификация положений равновесия линейной автономной системы второго порядка

Замечание. Линейная автономная система второго порядка записывается так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 2 \end{cases}$$

также удобно обозначить $x = x_1, y = x_2$. Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – заданные действительные числа, $t \in \mathbb{R}^1_t$. Введём матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определение 5.7. Линейная автономная система называется простой, если матрица A – невырожденна. В противном случае система называется сложной.

Замечание. Если задано автономное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

с действительными коэффициентами a, b, то его положения равновесия называются положения равновесия автономной системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -bx - ay \end{cases}$$

Рассмотрим различные случаи. Далее, λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы A, а h_1, h_2 – соответствующие собственные векторы.

Случай простой системы

1. Случай действительных λ_1, λ_2.

   Если они различны, то существует базис из собственных векторов. Все действительные решения задаются формулой

   $$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$$

   в базисе из собственных векторов координаты решения $x(t)$ этой системы имеют вид

   $$\zeta_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \zeta_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

   В силу симметрии, достаточно исследовать систему при $\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0$.

   - Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ и $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.
     Тогда:
     - $c_1 = c_2 = 0$ даёт положение равновесия $x = 0$
     - $c_1 > 0, c_2 = 0$, причём $\zeta_1 \to +0, t \to +\infty$
     - $c_1 = 0, c_2 > 0$, причём $\zeta_2 \to +0, t \to +\infty$
     - $c_1 > 0, c_2 > 0$, то

       $$\left(\frac{\zeta_2}{c_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}} = e^t = \left(\frac{\zeta_1}{c_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \Rightarrow \zeta_2 = c\zeta_1^{\alpha},\ c = c_2 \cdot c_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},\ \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$$

       В этом случае траектории являются кривыми типа ветвей параболы, касающихся в пределе при $t \to +\infty$ оси ζ_1 в начале координат

     В целом, в этом случае получаем семейство фазовых траекторий типа ветвей параболы и пять специальных траекторий: положение равновесия $x = 0$ и четыре полуоси осей координат ζ_1, ζ_2. В этом случае положение равновесия $x = 0$ называется **устойчивым узлом** системы.

   - Пусть $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ и $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.
     Меняется лишь направление движения по траекториям. В данном случае положение равновесия называется **неустойчивым узлом**.

- Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.
  Тогда:
  - $c_1 = c_2 = 0$ даёт положение равновесия $x = 0$
  - $c_1 > 0, c_2 = 0$ даёт полуось $\zeta_1 > 0$, причём $\zeta_1 \to +0, t \to +\infty$
  - $c_1 = 0, c_2 > 0$ даёт полуось $\zeta_2 > 0$, причём $\zeta_2 \to +\infty, t \to +\infty$
  - $c_1 > 0, c_2 > 0$, то
    $$\zeta_2 = c\zeta_1^\alpha, \; c = c_2 \cdot c_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \; \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$$
    В этом случае траектории являются кривыми типа гипербол.

  В целом в этом случае получаем семейство фазовых траекторий типа гипербол и пять специальных траекторий: положение равновесия $x = 0$ и четыре полуоси осей координат ζ_1, ζ_2. Эти полуоси служат асимптотами для гипербол и называются **сепаратисами**.

  Положение равновесия $x = 0$ в этом случае называется **седлом**.

- Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и существует базис плоскости из собственных векторов h_1, h_2. Все действительные решения задаются формулой
  $$x(t) = e^{\lambda t}(c_1 h_1 + c_2 h_2) \Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{c_1 h_{11} + c_2 h_{12}}{c_1 h_{21} + c_2 h_{22}}$$
  Поэтому каждое такое решение описывает луч, выходящий, из начала координат, причём движение по лучу при $t \to +\infty$ идёт к нулю при $\lambda < 0$ и от нуля при $\lambda > 0$.

  При $\lambda < 0$ положение равновесия $x = 0$ называется **устойчивыми дикритическим узлом**, а при $\lambda > 0$ **неустойчивым дикритическим узлом**.

- Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и существует базис плоскости из собственного вектора h_1 и присоединённого к нему h_{12}. Все действительные решения задаются формулой
  $$x(t) = c_1 e^{\lambda t} h_1 + c_2 e^{\lambda t}(h_{12} + t h_1)$$
  В базисе из собственных векторов координаты решения $x(t)$ имеют вид
  $$\zeta_1 = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \quad \zeta_2 = c_2 e^{\lambda t}$$
  Для $\lambda < 0$ получаем:
  - При $c_1 = c_2 = 0$ положение равновесия $x = 0$
  - При $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ две полуоси $\zeta_1 < 0, \zeta_1 > 0$ причём при $t \to +\infty$ идёт к нулю
  - При $c_2 \neq 0$ выносим t за скобки
    $$x(t) = t\left(c_2 h_1 e^{\lambda t} + \frac{1}{t}(c_1 h_1 e^{\lambda t} + c_2 h_{12} e^{\lambda t})\right) = (t c_2 h_1 + o(1))e^{\lambda t}, t \to +\infty$$
    Отсюда получаем, что $x(t)||h_1$. При переходе в базис, в котором мы работали это значит $x(t)||\zeta_1$. Множитель $t > 0$ при $t \to +\infty$ и $t < 0$ при $t \to -\infty$. Значит, траектория разворачивается в противоположном направлении.

В случае $\lambda < 0$ положение $x = 0$ называется **устойчивым вырожденным узлом**.

В случае $\lambda > 0$ траектории получаются из описанных выше путём зеркального отображения относительно оси ζ_2, а движение по ним при $t \to +\infty$ идёт от начала координат. В этом случае положение равновесия $x = 0$ называется **неустойчивым узлом**.

2. Случай комплексных λ_1, λ_2.

Если $\lambda_1 = \mu + i\nu$, где $\nu > 0$, то в силу действительности A имеем $\lambda_2 = \mu - i\nu$. Обозначим через $h = h_1 - ih_2$ – собственный вектор A для λ_1, где h_1, h_2 – действительные векторы. Тогда $\overline{h} = h_1 + ih_2$ является собственным вектором для λ_2. Общее действительное решение в этом случае имеет вид

$$x(t) = ce^{\lambda_1 t}h + \overline{c}e^{\overline{\lambda}_1 t}\overline{h}$$

где c – произвольная комплексная константа.

Если положить

$$c = |c|e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

то $\overline{c} = |c|e^{-i\varphi}$ и общее решение преобразуется к виду

$$x(t) = 2|c|e^{\mu t}(h_1 \cos(\varphi + \nu t) + h_2 \sin(\varphi + \nu t))$$

Так как h_1, h_2 – линейно независимы, то взяв их в качестве нового базиса плоскости координаты решения в этом базисе будут иметь вид

$$\zeta_1(t) = 2|c|e^{\mu t}\cos(\varphi + \nu t), \quad \zeta_2(t) = 2|c|e^{\mu t}\sin(\varphi + \nu t)$$

Положив $r(t) = 2|c|e^{\mu t}, \psi(t) = \varphi + \nu t$, отсюда получим уравнение траекторий в полярных координатах r, ψ:

$$r(\psi) = 2|c| \exp\left(\mu \frac{\psi - \varphi}{\nu}\right)$$

При $c \neq 0, \mu \neq 0$ фазовые траектории представляют собой кривые типа логарифмических спиралей, а при $\mu = 0$ – кривые типа эллипсов

- Пусть $\mu < 0$

  Тогда при $c = 0$ получаем положение равновесия $x = 0$, а при $c \neq 0$ фазовая точка по спирали движется к $x = 0$ при $t \to +\infty$, так как $r(t) \to +0, \psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

  Направление закручивания определяется направлением фазовой скорости. Например, можно рассмотреть точку $(0, 1)$ и тогда $f(x)$ будет иметь компоненты a_{12}, a_{22}.

  Положение равновесия $x = 0$ в этом случае называется **устойчивым фокусом**.

- Пусть $\mu > 0$

  Тогда при $c = 0$ получаем положение равновесия $x = 0$, а при $c \neq 0$ фазовая точка по спирали удаляется от $x = 0$ при $t \to +\infty$, так как $r(t) \to +\infty, \psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

  В этом случае положение равновесия $x = 0$ называется **неустойчивым фокусом** системы.

- Пусть $\mu = 0$.

  Тогда в произвольном базисе h_1, h_2 при $c \neq 0$ траектории – кривые типа эллипса, а при $c = 0$ – положение равновесие $x = 0$. В этом случае положение равновесия называется **центром** для системы.

Случай сложной системы

1. Пусть $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

   Тогда $\zeta_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \zeta_2(t) = c_2$. Отсюда ясно, что все точки прямой $\zeta_1 = 0$ являются положениями равновесия и что оба луча каждой прямой $\zeta_2(t) = c_2$ являются траекториями.

   В зависимости от знака λ_1 движение по ним при $t \to +\infty$ идёт либо к прямой $\zeta_1 = 0$, либо от неё.

2. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

   Если матрица A нулевая, то каждая точка плоскости является положением равновесия.

   Если же A ненулевая, то существует базис плоскости из собственного вектора h_1 и присоединённого к нему h_{12}. В этом базисе решение имеет координаты

   $$\zeta_1(t) = c_1 + c_2 t \quad \zeta_2(t) = c_2$$

   Отсюда ясно, что все точки прямой $\zeta_2 = 0$ являются положениями равновесия. Каждая из прямых $\zeta_2 = c$ является траекторией и при $t \to +\infty$ движение по ним идёт слева направо при $\zeta_2 > 0$ и справа налево при $\zeta_2 < 0$

5.3 Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерной автономной нелинейной системы. Теорема о выпрямлении фазовых кривых и фазового потока.

Замечание. Нелинейная автономная система задаётся

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

где f_1, f_2 – действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области Ω.

Определение 5.8. Две определённые на областях Ω_1, Ω_2 системы будем называть качественно эквивалентными, если существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение F области Ω_1 на Ω_2, при котором каждая фазовая траектория первой системы с **сохранением ориентации** переходит в некую фазовую траекторию второй системы и наоборот. Если F непрерывно дифференцируемо, то системы называются дифференцируемо эквивалентными.

Определение 5.9. Пусть положение равновесия $x = 0$. Разложим f_1, f_2 в окрестности положения равновесия по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + o(|x|), |x| \to 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + o(|x|), |x| \to 0$$

Тогда, линейная однородная система:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

называется линеаризацией исходной системы в начале координат.

Теорема 5.5. *Если линеаризация нелинейной системы в начале координат $x = 0$ является простой автономной системой и $x = 0$ не является центром для системы, то в окрестности $x = 0$ нелинейная система и её линеаризация качественно эквивалентны.*

Теорема 5.6. *В малой окрестности точки $a \in \Omega \subseteq E^n$, не являющейся положением равновесия автономной системы может быть приведена к виду*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = 0 \\ \cdots \\ \dot{y}_{n-1} = 0 \\ \dot{y}_n = 1 \end{cases}$$

некоторой гладкой обратимой заменой $x = g(y)$.

Доказательство. Поскольку a не является положением равновесия для автономной системы, то существует $\Omega \subseteq E^n$ – некоторая окрестность точки a, в которой $f(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$.

Б.О.О. можно считать, что вектор $f(x)$ имеет хотя бы одну ненулевую компоненту, и у этой компоненты индекс равен n.

Рассмотрим для этой системы задачу Коши с начальным условием вида $x(t_0) = a$. Пусть непрерывно дифференцируемая вектор-функция $x = \varphi(t)$ есть решение этой задачи Коши.

Далее мы будем использовать компоненты вектора a с индексами $\overline{1, n-1}$ как произвольные константы со значениями $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$, а n-ую компоненту вектора x будем рассматривать в качестве u – новой (вместо t) независимой переменной.

Покажем, что искомая замена $x = g(y)$ может быть определена равенствами:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \varphi_1(t(u)) + a_1 \\ x_2 - \varphi_2(t(u)) + a_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} - \varphi_{n-1}(t(u)) + a_{n-1} \\ u \end{pmatrix}$$

где функция $t(u)$, есть решение вспомогательной задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dt}{du} = \frac{1}{f_n(a_1, \cdots, a_{n-1}, u)} \\ t(a_n) = t_0 \end{cases}$$

которое в сделанных предположениях существует и единственно.

Найдём теперь вид системы в новых переменных y_i.

Будут справедливы равенства:

$$\frac{dy_k}{du} = \left(\frac{dx_k}{dt} - \frac{d\varphi_k}{dt}\right)\frac{dt}{du} = (\dot{\varphi}_k(t) - f_k(\varphi(t)))\,\frac{1}{f_n(x)} \equiv 0$$

Кроме того, из условия $y_n(u) = u$ получаем $\frac{dy_n}{du} = 1$. Значит, система после замены имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Теперь остаётся доказать, что замена g гладкая и обратимая. Для этого достаточно установить факт невырожденности матрицы Якоби.

Запишем соотношение в немного другом виде, заменив u на x_n:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \varphi_1(t(x_n)) + a_1 \\ x_2 - \varphi_2(t(x_n)) + a_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} - \varphi_{n-1}(t(x_n)) + a_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

В данном случае якобиан замены переменных

$$\{x_i\}_{i=1}^n \mapsto \{y_i\}_{i=1}^n$$

в силу предыдущих соотношений, $f_n(x) \neq 0$ и соотношений

$$\frac{dy_k}{dx_n} = -\frac{d\varphi_k(t(x_n))}{dt} \cdot \frac{dt}{dx_n} = -\frac{f_k(x)}{f_n(x)}, \forall k = \overline{1, n-1}$$

равен

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{f_1(x)}{f_n(x)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{f_2(x)}{f_n(x)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{f_3(x)}{f_n(x)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Таким образом, гладкая и обратимая замена переменных приводит систему к виду, указанному в формулировке теоремы. $\square$

5.4 Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Три теоремы об устойчивости/неустойчивости.

Замечание. Пусть задана автономная система

$$\dot{x}(t) = f(x)$$

где $t \in \mathbb{R}_t^1$ и $f(x)$ – заданная непрерывно дифференцируемая вектор-функция с n компонентами в некоторой области Ω.

Зададим начальное условие

$$x(0) = x_0 \in \Omega$$

и обозначим решение задачи Коши через $x(t, x_0)$. Пусть $a \in \Omega$ является положением равновесия. Будем считать, что $a = 0$, в противном случае простой заменой сводится к этому случаю.

В дальнейшем считаем, что $\exists r > 0$ такое, что при $\forall x_0 \in \Omega, |x_0| < r : \ \forall t > 0 : \ \exists x(t, x_0)$

Определение 5.10. Устойчивость по Ляпунову.

Положение равновесия $x = 0$ автономной системы называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta \in (0, r) : \ \forall t \, (\forall |x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, x_0)| < \varepsilon)$$

В противном случае положение равновесия называется неустойчивым положением равновесия автономной системы.

Определение 5.11. Асимптотическая устойчивость.

Устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x = 0$ автономной системы называется асимптотически устойчивым, если

$$\exists r_1 \; 0 < r_1 \leqslant r : \ \forall |x_0| < r_1 \ \lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = 0$$

Определение 5.12. Пусть $c = a + bi \in \mathbb{C}$. Тогда определим для c:

$$\Re c = a \quad \Im c = b$$

Очевидно, $\forall r \in \mathbb{R}$:

$$\Re r = r \quad \Im r = 0$$

Теорема 5.7. *Об устойчивости нулевого решения линейных систем с постоянными коэффициентами.*

1. *Если* $\exists \lambda_k : \ \Re \lambda_k > 0 \Rightarrow x \equiv 0$ *неустойчив.*
2. *Если* $\forall \lambda_k : \ \Re \lambda_k < 0 \Rightarrow x \equiv 0$ *асимптотически устойчиво.*
3. *Если* $\exists \lambda_k : \ \Re \lambda_k = 0$*, то*
   - $x \equiv 0$ *устойчиво по Ляпунову, если все Жордановы блоки размера* 1.
   - $x \equiv 0$ *неустойчиво, если* $\exists$ *блок размера, большего* 1.

Доказательство. Для линейных систем с постоянными коэффициенты мы можем найти их решение в явном виде $\Rightarrow$ очевидными рассуждениями получаются утверждения теоремы. □

Определение 5.13. Производной в силу автономной системы с функцией $f(x)$ от функции $\Phi(x)$ называется выражение

$$\mathring{\Phi}(x) = \|\text{grad } \Phi(x)\|^T \|f(x)\| = \langle \text{grad } \Phi(x), f(x) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x) f_j(x)$$

Теорема 5.8. *Ляпунова об устойчивости.*

Если существует функция $V(x) \in C^1(U)$, определённо положительная в окрестности U положения равновесия $x = 0$, а её производная по времени, вычисленная в силу системы, неположительна, то $x = 0$ – устойчивое положение равновесия.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что шар $K_\varepsilon : |x| \leqslant \varepsilon$ лежит в окрестности U точки $x = 0$.

Пусть S_ε – граница шара. Так как S_ε – замкнутое ограниченное множество, функция $V(x)$ непрерывна и $V(x) > 0$ на S_ε, то $\min_{x \in S_\varepsilon} V(x) = k > 0$.

Рассмотрим шар $K_\delta : \ |x| \leqslant \delta$, содержащийся в U. Так как $V(0) = 0$, то $\delta > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\forall x \in K_\delta : \ V(x) < k$, в силу непрерывности $V(x)$.

Покажем, что если $|x_0| \leqslant \delta$, то $|x(t, x_0)| \leqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant t < +\infty$. Так как $\mathring{V}(x) \leqslant 0$ в области U и $V(x_0) < k$, то $V(x) < k$ при $0 \leqslant t < +\infty$ вдоль фазовой траектории $x = x(t, x_0)$. Следовательно, траектория, которая начинается в шаре K_δ, не может пересечь границы шара $K_\varepsilon : \ V(x) \geqslant k$ на S_ε; $V(x) < k$ на траектории. □

Определение 5.14. Функции $V(x)$, удовлетворяющие условиям предыдущей теоремы, называются функциями Ляпунова для соответствующего положения равновесия.

Теорема 5.9. *Четаева о неустойчивости.*

Если существует функция $V(x) \in C^1(U_1)$ такая, что

$$\mathring{V}(x) > 0, \forall x \in U_1 \qquad U := \{x \in U_1 \, | V(x) > 0\}$$

где все точки $x^* \in U_1$, в которых $V(x^*) = 0$ – граничные точки U, то положение равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in U, \gamma$ – фазовая траектория, выходящая из точки x_0, её уравнение имеет вид $x = x(t, x_0)$. Покажем, что траектория γ не может пересечь ту часть границы области U, которая лежит внутри U_1.

Рассмотрим функцию $V(x)$ вдоль γ: $w(t) = V(x(t, x_0))$. Так как $w(0) > 0$ и $w'(t) = \mathring{V}(x) > 0$, пока γ содержится в U и траектория не может пересечь ту часть границы области U, на которой $V(x) = 0$. Следовательно, траектория γ должна покинуть U. Так как U содержит точки, сколь угодно близкие к $x = 0$, то это положение равновесие неустойчиво. □

Определение 5.15. Функция f называется k-плоской в точке x_0, если все её производные порядка $\overline{0, k}$ в точке x_0 равны нулю.

Теорема 5.10. *Об устойчивости по первому приближению.*

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + \omega(x)$$

где $\omega \in C^2(D)$, ω – 1-плоская в $x = 0$.

1. *Если матрица A имеет все $\Re\lambda_j < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*

2. *Если матрица A имеет хотя бы одно λ с $\Re\lambda > 0$, то нулевое решение неустойчиво.*

3. *В "критическом"случае, то есть когда* $\max \Re\lambda_j = 0$, *наличие устойчивости или неустойчивости зависит не только от матрицы* A, *но и от функции* $\omega(x)$.

Доказательство. Для $n = 2$:

Будем считать, что A уже приведена к жордановой форме:

- Пусть $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \omega_1(x, y) \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \omega_2(x, y) \end{cases}$

  1. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

     Возьмём в качестве функции Ляпунова $F(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Её производная в силу данной системы равна:

     $$\mathring{F}(x, y) = x(\lambda_1 x + \omega_1(x, y)) + y(\lambda_2 y + \omega_2(x, y)) = \\ = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \Omega(x, y), \Omega = x\omega_1 + y\omega_2$$

     Очевидно, что $\Omega \in C^2(D), \Omega$ – 2-плоская в $x = 0, y = 0$. Тогда, пользуясь теоремой из матана, $x = 0, y = 0$ – строгий локальный максимум. Значит, условие теоремы Ляпунова выполняется и положение равновесия устойчиво.

  2. – $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

       Возьмём в качестве функции Четаева $F(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. $G = \{F(x, y) > 0\}$ – непустое, открытое, $0 \in \partial G$. Её производная в силу системы будет положительно определена. Все условия теоремы Четаева соблюдены $\Rightarrow x = 0$ – неустойчиво

     – Б.О.О. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

       Возьмём в качестве функции Четаева $F(x, y) = \frac{x^2-y^2}{2}$. $G = \{F(x, y) > 0\} = \{(x, y) : |x| > |y|\}$ – непустое, открытое, $0 \in \partial G$.

       Её производная в силу данной системы равна:

       $$\mathring{F}(x, y) = x(\lambda_1 x + \omega_1(x, y)) - y(\lambda_2 y + \omega_2(x, y)) = \\ = \lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 + \Omega(x, y), \Omega = x\omega_1 - y\omega_2$$

       Все условия теоремы Четаева соблюдены $\Rightarrow x = 0$ – неустойчиво

- Пусть $A = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda, \varepsilon \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda x + \varepsilon y + \omega_1(x, y) \\ \dot{y} = \lambda y + \omega_2(x, y) \end{cases}$

  1. $\lambda < 0, \varepsilon > 0$

     Возьмём в качестве функции Ляпунова $F(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Её производная в силу данной системы равна:

     $$\mathring{F}(x, y) = x(\lambda x + \varepsilon y + \omega_1(x, y)) + y(\lambda y + \omega_2(x, y)) = \\ = \lambda x^2 + \varepsilon xy + \lambda y^2 + \Omega(x, y), \Omega = x\omega_1 + y\omega_2$$

     Очевидно, что $\Omega \in C^2(D), \Omega$ – 2-плоская в $x = 0, y = 0$.

     Пользуясь критерием Сильвестра, получаем ограничение на $\lambda :\ \lambda^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} > 0$, но так как $\lambda < 0$, то мы можем отделить его от нуля некой константой $\lambda < \varepsilon_0 < 0$.

     Опять пользуемся теоремой из анализа, снова получаем, что $x = 0, y = 0$ – строгий локальный максимум.

2. $\lambda > 0, \varepsilon > 0$ Возьмём в качестве функции Четаева $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Рассуждения аналогичны.

- Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \omega_1(x,y) \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y + \omega_2(x,y) \end{cases}$

1. $\alpha < 0$

   Возьмём в качестве функции Ляпунова $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Рассуждения в данном пункте аналогичны.

2. $\alpha > 0$ Возьмём в качестве функции Четаева $F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Рассуждения аналогичны.

Для доказательства третьего пункта достаточно привести пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \omega_1(x,y) \\ \dot{y} = -x + \omega_2(x,y) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \lambda^2 + 1 = 0$$

Произведём полярную замену координат, новый вид системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\omega_1 + y\omega_2}{r} \\ \dot{\varphi} = -1 + \frac{x\omega_2 - y\omega_1}{r^2} \end{cases}$$

Пусть $f(r^2)$ – какая-то подходящая нам функция, тогда определим $\omega_2 = yf, \omega_1 = xf$.

- $f \equiv 0$

  Получим систему
  $$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases}$$
  Для которой $x = 0$, очевидно, является устойчивым по Ляпунову положением равновесия. Так как это получился центр.

- $f > 0$

  Получим систему
  $$\begin{cases} \dot{r} = rf(r^2) \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases}$$
  Для которой $x = 0$, очевидно, не является устойчивым положением равновесия. Так как получились логарифмические спирали, $r \to +\infty, t \to +\infty$.

- $f < 0$

  Получим систему
  $$\begin{cases} \dot{r} = rf(r^2) \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases}$$
  Для которой $x = 0$, очевидно, является асимптотически устойчивым положением равновесия. Так как получились логарифмические спирали, $r \to +0, t \to +\infty$.

$\square$

5.5 Предельные множества, теорема Пуанкаре-Бендиксона

Определение 5.16. Предельным циклом системы называется такая замкнутая траектория, которая изолирована от остальных замкнутых траекторий.

Определение 5.17. Точка $x \in \Omega$ называется ω-предельной точкой траектории $\varphi(t)$, определённой при всех $t \geqslant 0$, если существует последовательность

$$\{t_n\}_{n=1}^{\infty},\ \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty:\ \lim_{n\to+\infty} \varphi(t_n) = x$$

Определение 5.18. Множество ω-предельных точек называется ω-предельным.

Определение 5.19. Если в определении ω-предельных точек $t_n < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$, то такие точки называются α-предельными.

Определение 5.20. Если с обеих сторон есть стремление к циклу (как множеству предельных точек), то он называется устойчивым.

Определение 5.21. Если для одного типа траекторий цикл ω-предельный, а для другого α-предельный, то цикл называется полуустойчивым.

Теорема 5.11. *Пуанкаре-Бендиксона.*

Пусть $\dot{x} = v(x), x \in \mathbb{R}^2, v \in C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^2$. Пусть траектория γ входит в область $G \subset D$, G - ограниченная, в ней может быть лишь конечное число особых точек поля $v(x)$. Тогда ω-предельное множество точек γ – это либо особая точка, либо цикл, либо полицикл.

6 Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.

6.1 Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

Определение 6.1. Непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ называется первым интегралом автономной системы, если $u[\varphi(t)] = const$ для каждого решения $x = \varphi(t), t \in I$.

Таким образом, значение $u[\varphi(t)]$ зависит лишь от выбора траектории системы и не зависит от переменной t.

Теорема 6.1. *Критерий первого интеграла.*

Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ является первым интегралом системы в том и только том случае, когда $\mathring{u}(x) = 0$ для всех $x \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $x = \varphi(t), t \in I$, некоторое решение системы и пусть $v(t) = u[\varphi(t)], t \in I$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем, что для всех $t \in I$:

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u[\varphi(t)]}{\partial x_j} \dot{\varphi}_j(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} = \mathring{u}(x)$$

Если $u(x)$ – первый интеграл, то по определению $v(t) = const$ эквивалентно условию, что $\mathring{u}(x) = 0$ для каждого $x = \varphi(t), t \in I$. Так как по теореме существования и единственности решения задачи Коши через каждую точку $x \in \Omega$ проходит некоторая траектория, то $\mathring{u}(x) = 0, \forall x \in \Omega$. Наоборот, если $\mathring{u}(x) = 0$ в Ω, то $\dot{v}(t) = 0$ и, значит, $u(x)$ – первый интеграл системы. □

Теорема 6.2. *Об инвариантности первого интеграла.*

Непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ является первым интегралом системы тогда и только тогда, когда функция $v(y) = u[g(y)]$ – первый интеграл системы, полученной из изначальной, заменой $x = g(y)$, в области $\hat{\Omega}$.

Доказательство. Достаточно установить, что при гладкой обратимой замене $x = g(y)$ производная в силу системы инвариантна, то есть $\mathring{v}(y) = \mathring{u}(x)$, поскольку тогда из предыдущей теоремы получаем, что $\mathring{u}(x) = 0$ в том и только том случае, когда $\mathring{v}(y) = 0$.

При гладкой замене $x = g(y)$ находим, что:

$$\mathring{v}(y) = \langle \text{grad } v(y), f_1(y)\rangle = \langle [g'(y)]^T \cdot \text{grad } u[g(y)], [g'(y)]^{-1} \cdot f[g(y)]\rangle =$$
$$\langle \text{grad } u[g(y)], [g'(y)] \cdot [g'(y)]^{-1} \cdot f[g(y)]\rangle = \langle \text{grad } u(x), f(x)\rangle = \mathring{u}(x)$$

□

Определение 6.2. Первые интегралы $u_1(x), \cdots, u_k(x), k = \overline{1, n}$ автономной системы, определённые в некоторой окрестности $a \in \Omega$, называются независимыми в точке $a \in \Omega$, если ранг матрицы Якоби $u'(a) = \|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\|, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}$ равен k.

Теорема 6.3. *Пусть точка $a \in \Omega$ не является положением равновесия автономной системы. Тогда в некоторой окрестности $\Omega_a \subseteq \Omega$ точки a существуют $(n-1)$ независимых в точке a первых интегралов $u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)$ этой автономной системы. Кроме того, если $u(x)$ – какой-либо первый интеграл системы в окрестности Ω_a, то найдётся такая непрерывно дифференцируемая функция $F(\zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1})$, что*

$$u(x) = F[u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)], \forall x \in \Omega_a$$

Доказательство. Так как $a \in G$ – не положение равновесия, то по теореме о выпрямлении траекторий для системы найдутся окрестность Ω_a точки и гладкая обратимая замена переменных в ней $x = g(y)$ такие, что система примет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_i = 0, i = \overline{1, n-1} \\ \dot{y}_n = 1 \end{cases}$$

Поскольку при такой замене траектории системы задаются уравнениями $y_i = c_i, i = \overline{1, n-1}$; $y_n = t$, то, очевидно, функции $v_i(y) = y_i, i = \overline{1, n-1}$ – независимые первые интегралы новой системы.

По предыдущей теореме функции $u_i(x) = g_i^{-1}(x), i = \overline{1, n-1}$ – первые интегралы исходной системы в окрестности Ω_a. Поскольку якобиан

$$\det[g^{-1}(a)]' = \frac{1}{g'(a)} \neq 0$$

то $u_1, \cdots, u_{n-1}$ – независимые в точке a первые интегралы.

Всякий первый интеграл преобразованной системы, очевидно, имеет вид

$$v(y) = F(y_1, \cdots, y_{n-1}) = F[v_1(y), \cdots, v_{n-1}(y)]$$

где F – произвольная непрерывно дифференцируемая функция $y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n-1}$. Тогда в силу предыдущей теоремы при $x = g(y)$

$$u(x) = u[g(y)] = v(y) = v[g^{-1}(x)] = F[g_1^{-1}(x), \cdots, g_{n-1}^{-1}(x)] = F[u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)]$$

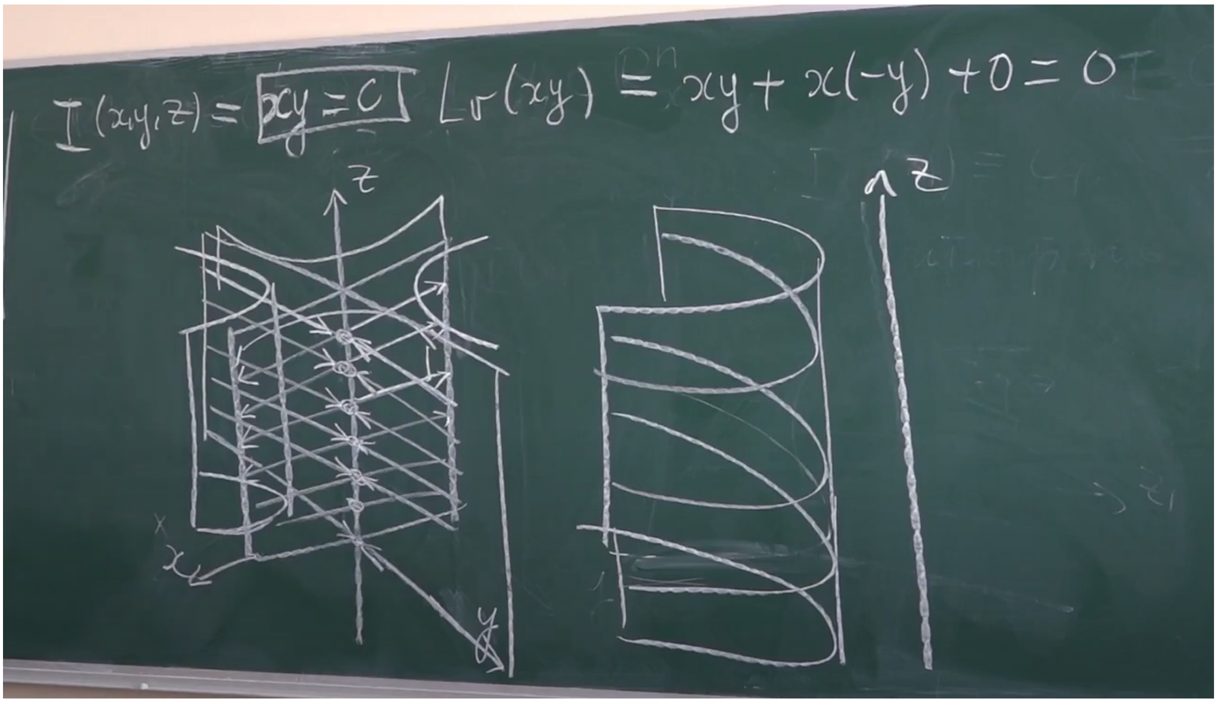
общий вид первого интеграла исходной системы в окрестности Ω_a. $\square$

6.2 Примеры использования первых интегралов. Уравнение математического маятника.

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = xy \end{cases}$$

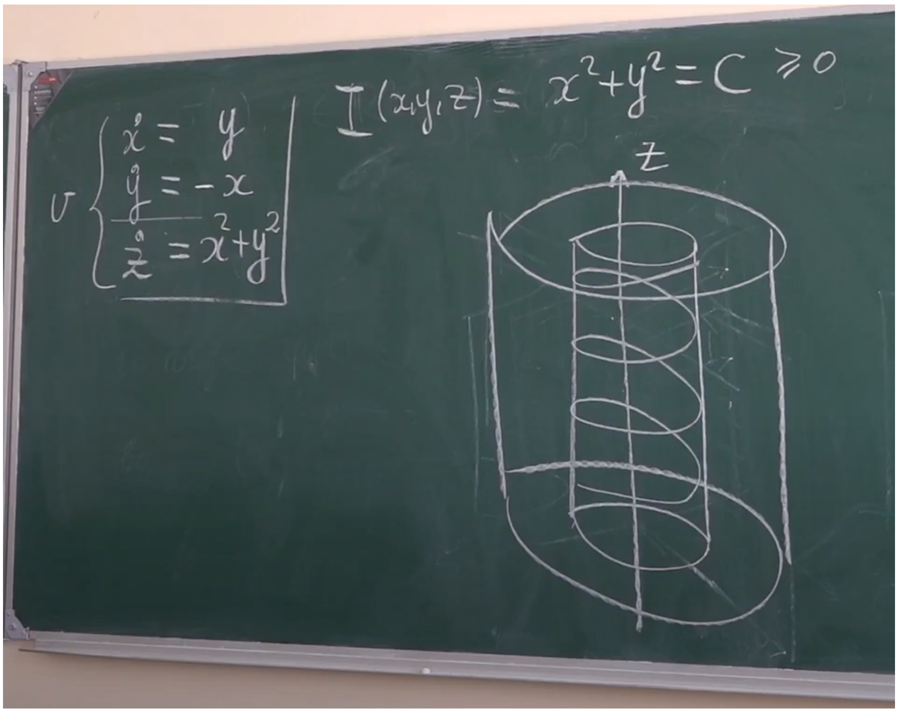
Одним из первых интегралов этой системы будет $I(x, y, z) = xy = c$. Даже зная всего один первый интеграл мы с лёгкостью можем исследовать фазовый портрет этой системы:



Пример.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Одним из первых интегралов этой системы будет $I(x, y, z) = x^2 + y^2 = c \geqslant 0$. Аналогично, исслледуем фазовый портрет, используя этот ПИ.



Пример. Математический маятник.

Используя закон сохранения энергии, получим один из первых интегралов системы, соответствующей движению математического маятника:

$$\frac{m(l\dot{x})^2}{2} + mgl(1-\cos x) = const$$

Поделим на ml^2, продифференцируем по t и получим уравнение математического маятника:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

При достаточно малых колебаниях x, можно использовать линеаризованное уравнение:

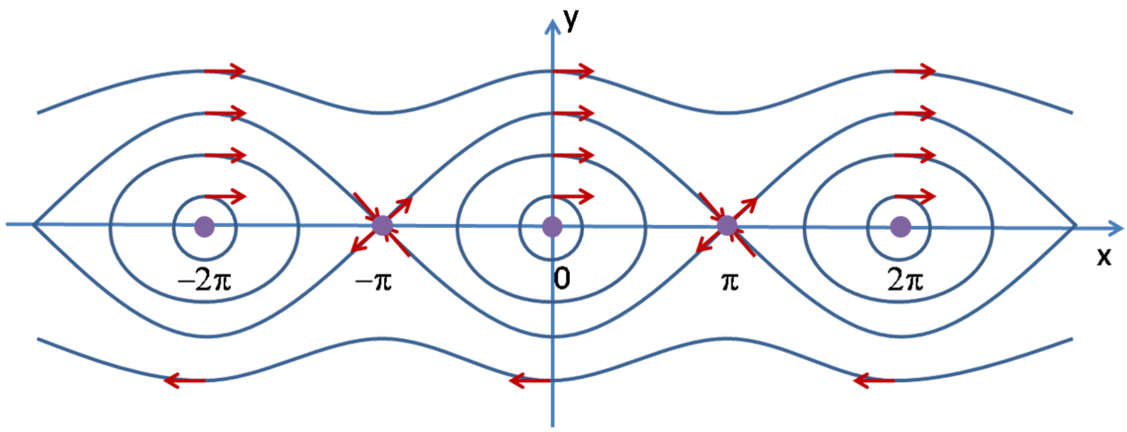
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Это уравнение называется гармонический осцилятор, которое также является уравнением, соответствующим закону Гука и ещё много чему. Это уравнение сводится к системе:

$$\begin{cases} \dot{y} = -\omega^2 x \\ \dot{x} = y \end{cases}$$

Первым интегралом для линеаризованной системы является $I(x,y) = y^2 + \omega^2 x^2 = const$. Для нелинеаризованного же маятника первым интегралом будет $I(x,y) = y^2 - \omega^2 \cos x = const$.

С помощью этого первого интеграла мы теперь можем построить фазовый портрет математического маятника.



6.3 Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Определение 6.3. Уравнение вида

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

где $n \geqslant 2, F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ – заданная действительная непрерывно дифференцируемая функция в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ и в каждой точке G:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0$$

называется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка относительно неизвестной функции $u = u(x_1, \cdots, x_n)$.

Определение 6.4. Функция $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$, заданная в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_{(x_1, \cdots, x_n)}$ называется решением уравнения в частных производных, если:

1. $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция в Ω.
2. Для всех точек $(x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ точка $(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}) \in G$.
3. $F(x_1, \cdots, x_n, \varphi(x_1, \cdots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}) \equiv 0, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$.

Определение 6.5. Решение уравнения в частных производных в $(n+1)$-мерном пространстве задаёт некоторую гладкую поверхность размерности n (гиперповерхность), которая называется интегральной поверхностью этого уравнения.

Определение 6.6. Уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

называется линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка.

Замечание. Если ввести вектор-функцию $a(x)$ с компонентами $a_1(x), \cdots, a_n(x)$, то уравнение в частных производных сокращённо можно записать с помощью скалярного произведения в следующем виде:

$$(a(x), \text{grad } u(x)) = 0$$

Определение 6.7. Автономная система

$$\dot{x}(t) = a(x)$$

называется характеристической системой уравнения в частных производных, а траектории системы называются характеристиками исходного уравнения.

Замечание. Пусть $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n_x, n \geqslant 2$. В области Ω рассмотрим линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$$

где $a_i(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые в Ω функции, для которых

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$$

Это условие значит, что область Ω не содержит положений равновесия характеристической системы уравнения.

Теорема 6.4. *В некоторой окрестности каждой точки $b \in \Omega$ все решения уравнения имеют вид*

$$u(x) = F[u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)]$$

где $u_j(x), j = \overline{1, n-1}$ – независимые в точке b первые интегралы характеристической системы, а $F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство. По критерию первого интеграла все решения уравнения в частных производных являются первыми интегралами характеристической системы, так как исходное уравнение равносильно тому, что производная в силу системы равна нулю в области Ω.

По теореме о количестве первых интегралов, в некоторой окрестности $V \subseteq \Omega$ точки $b \in \Omega$ существуют $(n-1)$ независимых в точке b первых интегралов $u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)$ характеристической системы и любой первый интеграл имеет вид, требуемый в условии этой теоремы. □

Определение 6.8. Функция $u(x) = F[u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)]$, где F – произвольная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, называется общим решением уравнения в частных производных в окрестности V точки $b \in \Omega$.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что характеристики являются линиями уровня интегральной поверхности уравнения в частных производных.

Пусть уравнение $g(x) = 0$ задаёт в области Ω гладкую $(n-1)$-мерную поверхность γ. Эта поверхность называется начальной поверхностью, пусть, кроме того, на поверхности γ задана некоторая непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$.

Зададим начальное условие

$$u(x)|_{x \in \gamma} = \varphi(x)$$

Функция $\varphi(x)$ называется начальным значением $u(x)$.

Задача Коши для уравнения в частных производных: найти такое решение уравнения, которое удовлетворяет начальному условию.

Геометрический смысл

При $n = 2$ задача Коши (1), (6) имеет наглядный геометрический смысл. Уравнение $g(x_1, x_2) = 0$ задает в плоской области Ω гладкую кривую γ, а начальное условие (6) в пространстве $R^3_{x_1,x_2,u}$ определяет пространственную гладкую кривую Γ. Поэтому при $n = 2$ задача Коши (1), (5) геометрически означает нахождение интегральной поверхности уравнения (1), проходящей через заданную кривую Γ (см. рис. 1)

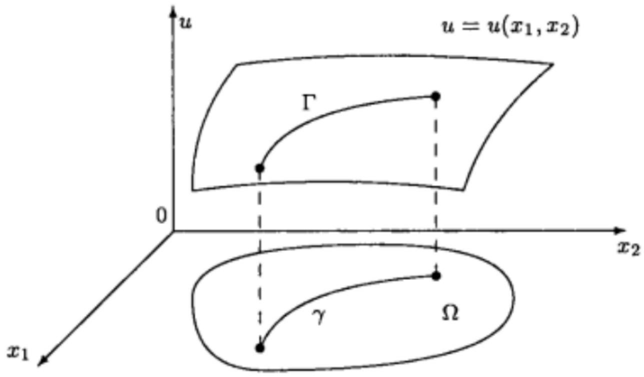


Рис. 1

Определение 6.9. Всякая точка $M_0 \in \gamma$, для которой

$$\mathring{g}(M_0) = (a(M_0), \operatorname{grad} g(M_0)) = 0$$

называется характеристической точкой уравнения в частных производных.

Замечание. Тот факт, что $M_0 \in \gamma$ является характеристической точкой уравнения, геометрически означает, что вектор $a(M_0)$ касается поверхности γ в точке M_0 или, что то же самое, касается характеристик в точке M_0. В частности, положения равновесия характеристической системы и особые точки поверхности γ являются характеристическими точками уравнения. Если при $n = 2$ кривая γ является характеристикой уравнения, то каждая точка γ является характеристической точкой.

Теорема 6.5. *Если $M_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой уравнения, то в некоторой окрестности $V \subseteq \Omega$ точки M_0 решение задачи Коши в частных производных существует и единственно.*

Доказательство. Так как M_0 не характеристическая точка, то $a(M_0) \neq 0$, значит в некоторой окрестности V точки M_0 существуют $(n-1)$ независимых в точке M_0 первых интегралов $u_i(x), i = \overline{1, n-1}$, характеристической системы. По теореме в окрестности V общее решение имеет вид

$$u(x) = F[u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)]$$

где F – непрерывно дифференцируемая функция.

Покажем, что начальное условие однозначно определяет вид функции F. С этой целью в окрестности V рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_i(x) = u_i, i = \overline{1, n-1} \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Покажем, что эту систему можно однозначно разрешить относительно x в окрестности V. Проверим для системы выполнение условий теоремы о системе неявных функций.

Все функции в системе непрерывно дифференцируемы в окрестности V. Осталось показать, что якобиан

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_{n-1}, g)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0$$

Рассуждаем от противного, пусть якобиан равен нулю. Так как первые $(n-1)$ строк якобиана линейно независимы, то в таком случае последняя его строка линейно зависит от его первых $(n-1)$ строк. Следовательно, найдутся числа $c_i, i = \overline{1, n-1}$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$\frac{\partial g(M_0)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \frac{\partial u_i(M_0)}{\partial x_j}, \forall j = \overline{1, n}$$

Поэтому

$$\mathring{g}(M_0) = \sum_{j=1}^{n} a_j(M_0) \frac{\partial g(M_0)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j(M_0) \sum_{i=1}^{n-1} c_i \frac{\partial u_i(M_0)}{\partial x_j} =$$
$$\sum_{i=n-1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n-1} a_j(M_0) \frac{\partial u_i(M_0)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \mathring{u}_i(M_0) = 0$$

С другой стороны, $\mathring{g}(M_0) \neq 0$, так как по условию теоремы $M_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой уравнения. Противоречие.

Поэтому в окрестности V выполнены все условия теоремы о неявной функции и система уравнений допускает в окрестности V единственное непрерывно дифференцируемое решение $x = \omega(u_1, \cdots, u_{n-1})$.

Для всех $x \in \gamma \cap V$ функция

$$\varphi(x) = \varphi[\omega(u_1, \cdots, u_{n-1})] = \Phi(u_1, \cdots, u_{n-1})$$

является известной непрерывно дифференцируемой функцией. По построению отсюда следует, что

$$u(x) = \Phi[u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)]$$

является искомым и единственным решением задачи Коши в окрестности V. □

7 Элементы вариационного исчисления

7.1 Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие слабого эстремума

Нормы для некоторых пространств

- $$\|f(x)\|_{C[a,\, b]} = \sup_{x \in [a,\, b]} |f(x)|$$

- $$\|f(x)\|_{C^k[a,b]} = \sum_{i=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|$$

Определение 7.1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $M \subset X$. Отображение $F : M \to \mathbb{R}$ называется функционалом с областью определения M.

Пусть $F(x, y, p)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b] \times \mathbb{R}^2$. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

определённый на множестве $M = \{y(x) \in C^1[a, b] : \ y(a) = A, y(b) = B\}$

Определение 7.2. Функция $\hat{y}(x) \in M$ называется слабым локальным минимумом (максимумом) функционала J, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall y(x) \in M : \ \|\hat{y} - y\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon \Rightarrow J(y) \geqslant (\leqslant) J(\hat{y})$$

Определение 7.3. Задача на отыскание слабого локального экстремума функционала J называется простейшей вариационной задачей или задачей с закреплёнными концами.

Рассмотрим две функции $y_1(x), y_2(x) \in M$ и определим $\eta(x) := y_1(x) - y_2(x)$. Так как концы у функций $y_1(x), y_2(x)$ фиксированы, то $\eta(a) = 0, \eta(b) = 0$. Назовём функцию η вариацией и введём обозначение для множества допустимых вариаций:

$$\dot{C}^1[a, b] := \{y(x) \in C^1[a, b] : \ y(a) = 0, y(b) = 0\}$$

Пусть $y(x) \in M, \eta(x) \in \dot{C}^1[a, b]$. Рассмотрим семейство функций $y_\alpha(x) = y(x) + \alpha\eta(x), \alpha \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\forall \alpha : \ y_\alpha(x) \in M$. Мы хотим ввести понятие, аналогичное производной по направлению для числовых функций.

$$J(y + \alpha\eta) = \int_a^b F[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)]dx$$

При фиксированных y, η эта функция зависит только от числового аргумента α.

Определение 7.4. Выражение $\frac{d}{d\alpha} J(y + \alpha\eta)|_{\alpha=0}$, где $\eta \in \dot{C}^1[a, b]$ называется первой вариацией функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ и обозначается $\partial J[y, \eta(x)]$.

Теорема 7.1. *Если $\hat{y}(x) \in M$ является решением простейшей вариационной задачи, то*

$$\forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a, b] \ \partial J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$$

Доказательство. Пусть, без ограничения общности, $\hat{y}$ – слабый локальный минимум $J(y)$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall y(x) \in M : \ \|\hat{y} - y\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon J(y) \geqslant J(\hat{y})$$

Зафиксировав $\eta(x)$, подберём $\alpha_0 : \ \|\alpha_0\eta\|_{C^1} < \varepsilon$. Тогда $\forall \alpha : \ |\alpha| < \alpha_0 \ \|\alpha\eta\| < \varepsilon$.

Рассмотрим числовую функцию $\Phi(\alpha) := J(\hat{y} + \alpha\eta)$. Так как $\hat{y}$ – слабый локальный экстремум $J(y)$, то

$$\Phi(\alpha) = J(\hat{y} + \alpha\eta) \geqslant J(\hat{y}) = \Phi(0)$$

Получается, что функция $\Phi(\alpha)$ имеет минимум в точке $\alpha = 0$, а значит $\Phi'(0) = 0$. Это и означает, что $\forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a, b] : \ \partial J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$ □

Теорема 7.2. *Лемма Лагранжа (основная лемма вариационного исчисления)*

Если $f(x) \in C[a,b]$ и $\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a,b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство. Предположим, что $f(x) \not\equiv 0$ на $[a,b]$. Тогда $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) \neq 0$. Б.О.О. $f(x_0) > 0$. Так как функция f непрерывна, то $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) : f(x) > 0$.

Теперь выберем $\eta(x)$ следующим образом:

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-(x_0-\varepsilon))^2(x-(x_0+\varepsilon))^2, x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \\ 0, x \notin (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \end{cases}$$

Функция $\eta(x)$ имеет вид шапочки на $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ и гладким образом спускается к нулю, поэтому $\eta \in \dot{C}^1[a,b]$.

Так как на $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ и $f(x) > 0$, и $\eta(x) > 0$, то

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\eta(x)dx > 0$$

Получилось противоречие с условием $\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \forall \eta \in \dot{C}^1[a,b]$, а значит $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$. □

Теорема 7.3. *Необходимое условие слабого локального экстремума.*

Пусть $F(x,y,p)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция $\forall (x,y,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$. Если непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}$ является решением простейшей вариационной задачи для J, то эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

на $[a,b]$.

Доказательство. Распишем $\partial J[y,\eta(x)]$:

$$\partial J[y,\eta(x)] = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_a^b F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')dx\right]|_{\alpha=0} =$$

$$\left[\int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')}{\partial y}\eta + \frac{\partial F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')}{\partial y'}\eta'\right)dx\right]_{\alpha=0} =$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\eta + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta'\right)dx$$

Проинтегрируем второе подынтегральное слагаемое по частям:

$$\int_a^b \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta' dx = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\eta dx$$

Первое слагаемое равно нулю в силу ограничений на допустимое приращение η.

$$\partial J[y,\eta(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\right)\eta dx$$

Так как y – локальный экстремум, то по предыдущей теореме $\forall \eta \in \dot{C}^1[a,b] : \partial J[y,\eta(x)] = 0$:

$$\forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a,b] : \int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\right)\eta dx = 0$$

Теперь по лемме Лагранжа получаем требуемое. □

Определение 7.5. Решение уравнения Эйлера называется экстремалью функционала J. Если экстремаль удовлетворяет условиям $y(a) = A, y(b) = B$, то она называется допустимой.

7.2 Задача со свободными концами, необходимое условие слабого экстремума

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

определённый на множестве $M = \{y(x) \in C^1[a,b] : \; y(a) = A\}$, где $F(x, y, p)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b] \times \mathbb{R}^2$. Задача отличается от простейшей вариационной задачи только тем, что один из концов не зафиксирован.

Определение 7.6. Задача нахождения слабого локального экстремума функционала J называется задачей со свободным концом.

Теорема 7.4. *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x) \in M$ даёт слабый локальный экстремум функционала, то на $[a,b]$ $\hat{y}$ удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

и при $x = b$:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}[x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)]|_{x=b} = 0$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное допустимое приращение $\eta(x) \in C^1[a,b] : \eta(a) = 0$.

Пусть $\Phi(a) = J(y + \alpha\eta), \alpha \in \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция аргумента α; При $\alpha = 0$ $\Phi(\alpha)$ имеет экстремум. Следовательно,

$$0 = \Phi'(0) = \frac{d}{d\alpha}J(y + \alpha\eta)|_{\alpha=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\eta + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta'\right) dx$$

Проинтегрировав второе слагаемое по частям:

$$\int_a^b \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta' dx = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}(b)\eta(b) - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\eta dx$$

Тогда $\Phi'(0)$ запишется следующий образом:

$$\Phi'(0) = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}(b)\eta(b) + \int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)dx$$

Это выполняется для любого $\eta(x) \in C^1[a,b] : \; \eta(a) = 0$. Что, в частности, верно и для $\eta_1(x) \in C^1[a,b] : \; \eta(a) = 0, \eta(b) = 0$. При подставлении $\eta_1(x)$ получим, что

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)dx = 0$$

Используя основную лемму вариационного исчисления, получим первое условие теоремы. Это означает, что второе слагаемое в $\Phi'(0)$ всегда равно нулю. Получаем, что для всех $\eta(x) \in C^1[a,b]: \ \eta(a) = 0$

$$\Phi'(0) = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}(b)\eta(b) = 0$$

Так как можно подобрать вариацию, такую что $\eta(b) \neq 0$, то необходимым условием слабого локального экстремума является второе условие теоремы. □

Определение 7.7. Решение уравнения Эйлера называется экстремалью задачи со свободным концом. Решение уравнения Эйлера, которое удовлетворяет условию $y(a) = A$ и второму условию предыдущей теоремы, называется допустимой экстремалью.

Теорема 7.5. *Рассмотрим функционал*

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$$

где $y(x) \in C^1[a,b]$ (то есть оба конца не закреплены) и $F(x,y,p)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b] \times \mathbb{R}^2$.

Если $\hat{y}(x) \in C^1[a,b]$ даёт слабый локальный экстремум функционала $J(y)$, то $\hat{y}(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=a} = \frac{\partial F}{\partial y'}|_{x=b} = 0$$

Доказательство. Аналогично доказательству задачи с одним закреплённым концом. □

7.3 Задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков

Замечание. Функционалы, зависящие от нескольких неизвестных функций, можно интерпретировать как функционалы, зависящие от вектор-функции.

Пусть $C^1_n[a,b]$ – множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций с компонентами $y_1(x), \cdots, y_n(x)$, определёнными на множестве $[a,b]$. Норма на этом пространстве вводится следующим образом:

$$\|\vec{y}(x)\|_{C^1_n[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|y(x)| + \max_{x\in[a,b]}|y'(x)|$$

Функционалы для вектор-функций определяются аналогично:

$$J(\vec{y}) = \int_a^b F[x,\vec{y}(x),\vec{y}'(x)]dx$$

где $F[x,\vec{y}(x),\vec{y}'(x)]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b] \times \mathbb{R}^{2n}$.

В качестве аргументов функции $J(\vec{y})$ будем рассматривать вектор-функции из множества $M = \{\vec{y}(x) \in C^1_n[a,b] : \ \vec{y}(a) = \vec{A}, \vec{y}(b) = B\}$

Определение 7.8. Функция $\hat{y} \in M$ называется слабым локальным минимумом (максимум) функционала J, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \vec{y} \in M : \|\vec{y} - \hat{\vec{y}}\|_{C^1_n} < \varepsilon \; J(\vec{y}) \geqslant (\leqslant) J(\hat{\vec{y}})$$

Теорема 7.6. *Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{y} \in M$ даёт слабый локальный экстремум функционала J, то $\hat{\vec{y}}$ удовлетворяет на $[a, b]$ системе уравнений Эйлера:*

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0, i = \overline{1, n}$$

Доказательство. Пусть $\hat{\vec{y}} = (y_1(x), \hat{y}_2(x), \cdots, \hat{y}_n(x))$ – первая координата свободная, а остальные зафиксируем. Тогда $J(\vec{y}) = \tilde{J}(y_1)$ – функционал, зависящий от одной переменной. Это является простейшей вариационной задачей, экстремум достигается при $\hat{y}_1(x)$, и необходимым условием является уравнение Эйлера для y_1.

Повторив эти действия для каждой координаты, получаем нужную систему. □

Функционалы, зависящие от производных высших порядков.

В этом разделе мы будем работать с функциями из пространства $C^k[a, b]$. На этом пространстве норму можно ввести следующим образом:

$$\|y\|_{C^k[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| + \sum_{i=1}^{k} \max_{x \in [a,b]} |y^{(i)}(x)|$$

Аналогично простейшей вариационной задаче введём множество допустимых вариаций:

$$\dot{C}^k[a, b] = \{y \in C^k[a, b] : \; y^{(i)}(a) = y^{(i)}(b) = 0, i = \overline{1, k-1}\}$$

Лемма 7.1. *Если $f(x) \in C[a, b]$ и $\forall \eta \in \dot{C}^k[a, b] : \int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.*

Доказательство. Предположим, что $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b]$. Тогда $\exists x_0 \in (a, b) : \; f(x_0) \neq 0$. Б.О.О. $f(x_0) > 0$. Так как $f(x)$ непрерывна, то $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \; f(x) > 0$.

Подберём такую вариацию:

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - (x_0 - \varepsilon))^{2k}(x - (x_0 + \varepsilon))^{2k}, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ 0, else \end{cases}$$

Можно проверить, что $\eta(x) \in \dot{C}^k[a, b]$. Поэтому

$$0 = \int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\eta(x)dx > 0$$

Получили противоречие. Получается, что $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. □

Определение 7.9. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), \cdots, y^{(k)}(x)]dx$$

определённый на множестве $M = \{y(x) \in C^k[a, b] : \; y^{(i)}(a) = A_i, y^{(i)}(b) = B_i, i = \overline{1, k-1}\}$, где F – $(k + 1)$ раз непрерывно дифференцируемая функция.

Определение 7.10. Скажем, что $\hat{y} \in M$ даёт слабый локальный минимум (максимум) функционала J, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) \in M : \|\hat{y} - y\|_{C^k} < \varepsilon \ J(y) \geqslant (\leqslant) J(\hat{y})$$

Пусть $y(x) \in M, \eta(x) \in \dot{C}^k$. При фиксированных $y(x), \eta(x)$ определим $\Phi(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(\alpha) = J(y(x) + \alpha\eta(x)) = \int_a^b F[x, y + \alpha\eta, \cdots, y^{(k)} + \alpha\eta^{(k)}]dx$$

Аналогично простейшей вариационной задаче, если $\hat{y}$ даёт экстремум $J(y)$, то $\Phi(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha = 0$:

$$\Phi'(0) = \frac{dJ(\hat{y} + \alpha\eta)}{d\alpha}|_{\alpha=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \hat{y}}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'}\eta'(x) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \hat{y}^{(k)}}\eta^{(k)}(x)\right] dx$$

Определение 7.11. Выражение $\Phi'(0)$, где $\eta(x) \in \dot{C}^k[a, b]$ называется первой вариацией функционала J и обозначается $\partial J[y, \eta]$.

Теорема 7.7. *Необходимое условие слабого экстремума.*

Пусть $\hat{y} \in M$ является $2k$ дифференцируемой функцией и даёт слабый локальный экстремум функционала J. Тогда на $[a, b]$ $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \cdots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right) = 0$$

Доказательство. Доказательство аналогично случаю с уравнению с производной первого порядка: необходимо проинтегрировать i-ое слагаемое подынтегральной функции первой вариации i раз по частям и получить требуемое. □

7.4 Изопериметрическая задача

Пусть функции $F(x, y, p), G(x, y, p) \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

определённый на множестве

$$M = \left\{y \in C^1[a, b] : \ y(a) = A, y(b) = B, K(y) = \int_a^b G(x, y, y')dx = l\right\}$$

Условие $K(y) = l$ называется условием связи.

Определение 7.12. Функция $\hat{y}(x) \in M$ называется слабым локальным минимумом (максимумом) функционала J, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in M : \|y - \hat{y}\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon \ J(y) \geqslant (\leqslant) J(\hat{y})$$

Определение 7.13. Изопериметрической задачей называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала J.

Замечание. Изопериметрическая задача похожа на задачу поиска условного экстремума числовых функций. Так же, как и для условного экстремума числовых функций, определим лагранжиан:

$$L(x, y, \lambda) = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y'), \lambda \in \mathbb{R}$$

λ называется множителем Лагранжа.

Также при формулировке необходимого условия потребуем, чтобы

$$\partial K(y, \eta) = \int_a^b \left(\frac{\partial G}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial G}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx, \forall \eta \in \dot{C}^1[a, b]$$

не равнялась тождественному нулю, так как иначе экстремум функционала может равняться l, а значит условию связи будет удовлетворять только одна функция, и изопериметрическая задача будет несодержательной.

Теорема 7.8. *Необходимое условие.*

Пусть дважды дифференцируемая функция $\hat{y} \in M$ является решением изопериметрической задачи и пусть $\partial K(\hat{y}, \eta) \not\equiv 0$ для всех $\eta \in \dot{C}^1[a, b]$. Тогда найдётся такое значение $\lambda \in \mathbb{R}$, что на $[a, b]$ функция $\hat{y}$ будет удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $\exists \eta_0(x) \in \dot{C}^1[a, b]$ такая, что $\partial K[\hat{y}, \eta_0(x)] \neq 0$.

Рассмотрим следующие функции:

$$u = \varphi(\alpha, \beta) = J[\hat{y}(x) + \alpha \eta(x) + \beta \eta_0(x)], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$v = \psi(\alpha, \beta) = K[\hat{y}(x) + \alpha \eta(x) + \beta \eta_0(x)], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Используя теоремы о непрерывности и дифференцируемости собственных интегралов, зависящих от параметра, получаем:

$$\varphi(0, 0) = J(\hat{y}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(0, 0) = \partial J[\hat{y}(x), \eta(x)], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}(0, 0) = \partial J[\hat{y}(x), \eta_0(x)]$$

$$\psi(0, 0) = K(\hat{y}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(0, 0) = \partial K[\hat{y}(x), \eta(x)], \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta}(0, 0) = \partial K[\hat{y}(x), \eta_0(x)]$$

Далее можно расписать все первые вариации подобным образом:

$$\partial J[y, \eta(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx$$

Покажем, что якобиан

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} \equiv 0, \forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a, b]$$

Предположим, что $\exists \eta_1(x) \in \dot{C}^1[a, b]$ такое, что $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0$. Это означает, что существует окрестность точки $(0, 0)$, в которой система

$$\begin{cases} u = \varphi(\alpha, \beta) \\ v = \psi(\alpha, \beta) \end{cases}$$

разрешима относительно α, β.

Б.О.О. $\hat{y}$ доставляет минимум функционала. Тогда рассмотрим такую систему:

$$\begin{cases} \varphi(\alpha,\beta) = \varphi(0,0) - \varepsilon, \varepsilon > 0 \\ \psi(\alpha,\beta) = \psi(0,0) \end{cases}$$

По доказанному, решение этой системы существует и единственно – обозначим его $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Тогда у нас выполнено

$$\varphi(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \varphi(0,0) - \varepsilon = J(\hat{y}) - \varepsilon, \quad \psi(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \psi(0,0) = K(\hat{y}) = l$$

Это значит, что существует функция $\hat{y}(x) + \hat{\alpha}\eta_1(x) + \hat{\beta}\eta_0(x)$ такая, что

$$J(\hat{y}(x) + \hat{\alpha}\eta_1(x) + \hat{\beta}\eta_0(x)) = J(\hat{y}) - \varepsilon < J(\hat{y}), \quad K(\hat{y}(x) + \hat{\alpha}\eta_1(x) + \hat{\beta}\eta_0(x)) = l$$

Это противоречит тому, что $\hat{y}$ даёт слабый локальный минимум Таким образом, мы доказали, что

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)} \equiv 0, \forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a,b]$$

Распишем этот якобиан:

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}\Big|_{\alpha=0,\beta=0} = \begin{vmatrix} \partial J(\hat{y},\eta) & \partial K(\hat{y},\eta) \\ \partial J(\hat{y},\eta_0) & \partial K(\hat{y},\eta_0) \end{vmatrix} \equiv 0, \forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a,b]$$

Положим $\lambda = -\frac{\partial J(\hat{y},\eta_0)}{\partial K(\hat{y},\eta_0)}$ (здесь мы пользуемся тем, что $\partial K(\hat{y},\eta_0) \neq 0$). Тогда получим, что

$$\partial J(\hat{y},\eta) + \lambda \cdot \partial K(\hat{y},\eta) \equiv 0, \forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a,b]$$

Расписав первые вариации, получаем:

$$\partial J(y,\eta) + \lambda \cdot \partial K(y,\eta) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) dx + \lambda \int_a^b \left(\frac{\partial G}{\partial y}\eta + \frac{\partial G}{\partial y'}\eta' \right) dx =$$
$$= \int_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y} \right)\eta + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y'} \right)\eta' \right] dx = 0$$

Проинтегрируем слагаемое с η' по частям, воспользовавшись тем, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$ и равенствами $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y'}$:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0, \forall \eta(x) \in \dot{C}^1[a,b]$$

Используя основную лемму вариационного исчисления, получаем уравнение из условия теоремы. □

7.5 Геодезические как экстремали функционалов длины и действия, связь между функционалами и их экстремалями.

Пусть E^n – евклидово n-мерное пространство с прямоугольными координатами $x_1, \cdots, x_n$.

На этом пространстве действует теорема Пифагора:

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$$

$S \subseteq E^n$ – двумерная поверхность, которую можно задать параметрически:

$$X_i = r_i(x, y), i = \overline{1, n}$$

где $r_i \in C^\infty(D), D \subseteq \mathbb{R}^2_{(x,y)}$, а также rg $\|\frac{\partial(r_1, \cdots, r_n)}{\partial(x,y)}\| = 2, \forall (x, y) \in D$.

$\tilde{\gamma} \subseteq \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ – параметрическая кривая:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

где $t \in I \subseteq \mathbb{R}^1$ и rg $\|\frac{\partial(x,y)}{\partial t}\| = 1$.

Тогда, чтобы задать кривую γ на двумерной поверхности S, можно использовать следующую формулу:

$$X_i = r_i(\varphi(t), \psi(t)), i = \overline{1, n}$$

Определение 7.14. Функционалом длины называется функционал вида

$$J_l(\gamma) = \int_\gamma |\vec{v}| d\gamma$$

где $\vec{v}(t) = (v_1(t), \cdots, v_n(t))$ на самом деле равно

$$v_i(t) = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial r_i}{\partial x}\dot{\varphi}(t) + \frac{\partial r_i}{\partial y}\dot{\psi}(t)$$

Преобразуем рассматриваемый функционал:

$$J_l(\gamma) = \int_I \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x}\dot{\varphi}(t) + \frac{\partial r_i}{\partial y}\dot{\psi}(t)\right)^2} dt = \int_I \sqrt{g_{11}\dot{\varphi}^2 + 2g_{12}\dot{\varphi}\dot{\psi} + g_{22}\dot{\psi}^2} dt$$

Где

$$g_{11} = \langle\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial x}\rangle \quad g_{22} = \langle\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y}\rangle \quad g_{12} = g_{21} = \langle\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}\rangle$$

Определение 7.15. Введём понятие $G(\dot{\varphi}, \dot{\psi}) := g_{11}\dot{\varphi}^2 + 2g_{12}\dot{\varphi}\dot{\psi} + g_{22}\dot{\psi}^2$ – первая квадратичная форма поверхности.

Определение 7.16. Геодезические – это экстремали функционала длины

$$J_l(x(t), y(t)) = \int_I \sqrt{G(\dot{x}, \dot{y})} dt$$

Определение 7.17. Функционалом действия называется функционал вида

$$J_a(x(t), y(t)) = \int_I G(\dot{x}, \dot{y}) dt$$

Замечание. Можно сказать, что геодезические – это экстремали функционала действия.

Будет ли это определение совпадать с предыдущим? Не совсем – первое определение инвариантно относительно параметризации кривой, когда второе – нет.

Иными словами, определение через функционал длины покрывает все параметризации экстремалей, когда определение через функционал действия "увидит"только экстремали параметризованные должным образом.