Содержание

1 Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Определение 1.2. Функция $\varphi(x)$, определённая на I вместе со своими n производными, называется решением уравнения (1), если:

1. φ и все её n производных непрерывны на I.
2. $\forall x \in I: \ (x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$, где Ω - область определения F.
3. $\forall x \in I: \ F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}) = 0$

Определение 1.3. Решение $y = \varphi(x), x \in \langle a, b\rangle$ уравнения (1) называется продолжаемым вправо, если существует такое решение $y = \psi(x), x \in \langle a, b_1\rangle, \langle a, b\rangle \subset \langle a, b_1\rangle$, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при $x \in \langle a, b\rangle$

Аналогично определяется продолжение решения влево.

Определение 1.4. Решение называется непродолжаемым, если его нельзя продолжить ни вправо, ни влево.

Определение 1.5. Система дифференциальных уравнений называется автономной, если она имеет вид:

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \ldots, x_n); \ k = 1, \ldots, n$$

также очень часто автономные системы записываются в компактном векторном виде:

$$\dot{x} = F(x), x \in \Omega \subseteq E^n \tag{2}$$

Определение 1.6. Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ называется первым интегралом системы (2), если $\forall t \in T: \ u(x(t)) \equiv const$ для каждого решения $x(t)$ этой системы.

Определение 1.7. Если поставить в соответствие каждой точке (x, y) некоторого множества $\Omega \subseteq E^2$ вектор с координатными представлением $(1, f(x, y))$, то полученное векторное множество принято называть полем направлений ОДУ первого порядка.

Определение 1.8. Векторное поле - это отображение, которое сопоставляет каждой точке некоторого пространства вектор

Определение 1.9. Пусть $x(t)$ есть частное решение системы (2), тогда вектор-функция $x(t), t \in T$, параметрически задаёт некоторую линию в E^n, называемую фазовой траекторией этой системы.

Определение 1.10. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать фазовым портретом системы (2)

Определение 1.11. График функции $y = \varphi(x)$ можно рассматривать как геометрическое представление частного решения уравнения (1). Этот график обычно называют интегральной кривой уравнения (1).

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1.12. Уравнения с разделяющимися переменными - это уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y) \ f(x) \in C(I_1), g(y) \in C(I_2)$$

или же в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Замечание. Если же $y_k \in I_2$ решение уравнения $g(y) = 0$, то $y \equiv y_k$ – решение дифф. уравнения

Если же $y(x)$ нигде не принимает значение y_k, то $g(y) \neq 0$, а потому мы можем делить на него. Значит, чтобы решить исходное уравнение, необходимо разделить переменные, то есть, привести уравнение к такой форме, чтобы при дифференциале dx стояла функция, зависящая лишь от x, а при дифференциале dy – функция, зависящая от y.

Однородные уравнения

Определение 1.13. Функция двух переменных $f(x, y)$ называется однородной степени m, если для всех t справедливо соотношение:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

Определение 1.14. Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одной и той же степени m.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой функции $y(x)$ по формуле:

$$t(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Тогда производная y' и дифференциал dy заменяются по формулам:

$$y' = t'x + t, \ dy = tdx + xdt$$

Линейные уравнения

Определение 1.15. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции $y(x)$ и её производной, то есть, уравнения вида

$$y' + a(x)y = b(x) \quad a(x), b(x) \in C(I)$$

Функция $b(x)$ называется свободным членом уравнения.

Уравнение

$$y' + a(x)y = 0$$

называется линейным однородным уравнением, соответствующим изначальному линейному уравнению.

Покажем, что однородное уравнение является уравнением с разделяющимися перменными

$$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \Rightarrow |y| = e^C \cdot e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}$$

Объединяя все решения, получаем общее решение:

$$y_0 = C \exp\left[-\int_{x_0}^x a(t)dt\right]$$

Будем искать частное решение исходного линейного уравнения методом вариации постоянной:

$$y_{\text{ч}} = C(x) \cdot \exp\left[-\int_{x_0}^x a(t)dt\right]$$

Уравнение Бернулли

Определение 1.16. Нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^m, \quad m \neq 0, m \neq 1, a, b \in C(I)$$

называется уравнением Бернулли.

Заметим, что $y = 0$ – решение уравнения Бернулли при $m > 0$.

Если $y \neq 0$, то, разделив уравнение на y^m и вводя новую неизвестную функцию $z = y^{1-m}$, относительно функции z получаем линейное уравнение.

Уравнение Рикатти

Определение 1.17. Нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad a, b\ c \in C(I)$$

называется уравнением Рикатти

В отличие от всех уравнений, рассматривавшихся ранее, уравнение Рикатти не всегда интегрируется в квадратурах. Чтобы решить его, необходимо знать хотя бы одно частное решение $y = y_1(x)$ этого уравнения. Тогда замена $y = y_1 + z$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли.

Логистическое уравнение Ферхюльста

Замечание. Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядит следующим образом:

- Скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности при прочих равных условиях

- Скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов при прочих равных условиях.

Определение 1.18. Обозначая через P численность популяции, а время - t, модель можно свести к дифференциальному уравнению

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$$

где параметр r характеризует скорость роста, а K – максимальную возможную численность популяции.

Замечание. Точным решения является логистическая функция, S-образная кривая:

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

где P_0 – начальная популяция, и $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = K$.

1.3 Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

Уравнения в полных дифференциалах

Определение 1.19. Это уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является дифференциалом некоторой гладкой функции $F(x, y)$. Тогда это уравнение можно переписать в виде $dF(x, y) = 0$, так что его решение будет иметь вид

$$F(x, y) = C$$

Утверждение 1.1. *Если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области Ω и имеют в ней непрерывные частные производные по x и по y, то изначальное уравнение будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется тождество*

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Интегрирующий множитель

Пусть дано уравнение в дифференциалах, которое не является уравнением в полных дифференциалах.

Определение 1.20. Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем для исходного уравнения, если уравнение

$$\mu(x, y)(M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Отсюда следует, что функция μ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Это равенство даёт уравнение в частных производных первого порядка для $\mu(x, y)$:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

Поделив обе части последнего уравнения на μ, перепишем его в виде:

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Точные и замкнутые 1-формы, лемма Пуанкаре

Определение 1.21. Форма ω называется точной, если существует гладкая функция F, такая что $\omega = dF$

Определение 1.22. Форма $\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_m dx_m$ называется замкнутой, если

$$\forall k, i : \ \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_i}$$

Определение 1.23. Область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется звёздной, если для некоторой точки $p \in \Omega$ и для любой другой точки $q \in \Omega$ отрезок $[p, q]$ полностью содержится в Ω.

Лемма 1.1. *В звёздной области любая замкнутая C^1-гладкая дифференциальная 1-форма точна.*

Доказательство. Будем считать, что точка p из определения звёздной области находится в начале координат. Пусть ω – замкнутая форма, $\omega = A_1 dx_1 + \dots A_n dx_n$.

Заметим, что для любой точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ и любой функции $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$G(x) - G(0) = \int_{[0,x]} dG = \int_0^1 \left(x_1\frac{\partial G}{\partial x_1}(tx) + \dots + x_n\frac{\partial G}{\partial x_n}(tx)\right) dt$$

мы параметризовали отрезок $[0, x] \subset \mathbb{R}^n$ параметром t. Пользуясь этим равенством, можно восстановить любую функцию по набору её производных.

Поэтому естественно определить F таким образом:

$$F := \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i A_i(xt) dt$$

Нам осталось проверить, что $\frac{\partial F}{\partial x_s} = A_s$. Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_s}\sum_{i=1}^n x_i A_i(xt)dt = \int_0^1 A_s(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_s}A_i(tx)dt =$$
$$= \int_0^1 A_s(tx) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}A_s(tx)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tA_s(tx))dt = A_s(x)$$

Итак, $dF = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = \omega$. □

Гамильтоновые векторные поля на плоскости

Определение 1.24. Пусть $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда векторное поле $\vec{v} : \begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$ называется гамильтоновым тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

1.4 Методы понижения порядка для некоторых простейших типов дифференциальных уравнений. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной.

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений.

1. Пусть $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n+k)}) = 0$

   Замена: $z = y^{(k)}$, сводим к уравнению $F(x, z, z', \ldots, z^{(n)}) = 0$

2. Пусть F явно не зависит от x: $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$

   Замена: y – новая независимая переменная, $y' = p = p(y)$, то есть $y''_{xx} = p'_x = p'y' = p'p$

3. Обобщённо-однородное уравнение

   Пусть $\exists m, k : \forall \lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^m y, \lambda^{m-1} y', \ldots, \lambda^{m-n} y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$

   Замена: $x = e^y, y = z(t)e^{mt}$

4. Однородные уравнения

   Пусть $\exists k : \forall \lambda > 0 : F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$

   Замена: $y' = z(x)y, y'' = (z(x)y)' = z'y + zy' = z'y + z^2 y = y(z + z^2)$

Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной

Определение 1.25. Уравнение первого порядка, не разрешённое относительно производной – это уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0$$

где $F(x, y, y')$ – заданная непрерывная функция в некоторой непустой окрестности $G \subseteq \mathbb{R}^3_{(x,\,y,\,p)}$ с декартовыми прямоугольными координатами x, y, p.

Замечание. В общем случае для решения уравнения применяется метод введения параметра, который позволяет свести решение исходного уравнения к решению некоторого уравнения первого порядка в симметричной форме.

Сам метод: положим $y' = p$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases} \tag{3}$$

Утверждение 1.2. *Проектирование π поверхности $F(x, y, p) = 0$ на плоскость (x, y) вдоль оси p переводит траектории поля в интегральные кривые системы (3).*

В тех точках поверхности, где производная $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, отображение π является локальным диффеоморфизмом.

Определение 1.26. Точки поверхности $F(x, y, p) = 0$, в которых производная $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, называются особыми точками уравнения (3).

Определение 1.27. Множество всех особых точек называется криминантой, а её проекция на плоскость (x, y) – дискриминантной кривой уравнения (3).

Определение 1.28. Решение уравнения (3) называется особым, если его интегральная кривая является дискриминантной кривой.

Замечание. Решение уравнения (3) можно трактовать, как траектории движения по этой поверхности, задаваемого векторным полем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial p} \\ \dot{y} = p\frac{\partial F}{\partial p} \\ \dot{p} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{4}$$

Определение 1.29. Другой важной кривой является кривая перегибов, состоящая из всех точек поверхности $F(x, y, p) = 0$, в которых третья компонента поля (4) обращается в нуль.

Утверждение 1.3. *Криминанта и кривая перегибов связаны некоторым двойственным соотношением: преобразование Лежандра $(x, y, p) \to (p, xp - y, x)$ переводит всякую интегральную кривую γ уравнения (3) в интегральную кривую γ^* сопряжённого уравнения $F(p, xp - y, x) = 0$*

2 Задача Коши

2.1 Прицип сжимающих отображений

Определение 2.1. Точка $x^* \in X$ называется неподвижной точкой отображения Φ, если $\Phi(x^*) = x^*$.

Определение 2.2. Оператор Φ называется сжимающим на множестве X, если $\exists q \in (0, 1)$, такое что $\forall x_1, x_2 \in X \mapsto \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leqslant q\|x_2 - x_1\|$.

Число q – коэффициент сжатия.

Определение 2.3. Открытый шар $U_\varepsilon(a) = \{x \in L : \|x - a\| < \varepsilon\}$. Замкнутый: $\overline{U}_\varepsilon(a) = \{x \in L : \|x - a\| \leqslant \varepsilon\}$

Теорема 2.1. *Теорема Банаха о неподвижной точке (принцип сижмающих отображений).*

Пусть $\Phi : \overline{U}_\varepsilon(x_0) \to L$, причём Φ является сжимающим на $\overline{U}_r(x_0)$ с некоторым коэффициентом q. Тогда если выполнено условие $\|\Phi(x_0) - x_0\| \leqslant (1 - q)r$, то в $\overline{U}_r(x_0)$ существует единственная неподвижная точка отображения.

Доказательство. Покажем, что $\Phi(\overline{U}_r(x_0)) \subseteq \overline{U}_r(x_0)$. Пусть $x \in \overline{U}_r(x_0)$. Тогда

$$\|\Phi(x) - x_0\| = \|\Phi(x) - \Phi(x_0) + \Phi(x_0) - x_0\| \leqslant \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| + \|\Phi(x_0) - x_0\| \leqslant$$
$$q\|x - x_0\| + (1 - q)r \leqslant qr + (1 - qr) = r$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subseteq \overline{U}_r(x_0)$, такую что $x_n = \Phi(x_{n-1})$ при $n \geqslant 1$. Также для удобства обозначим $\rho = \|\Phi(x_0) - x_0\| = \|x_1 - x_0\|$. Покажем, что эта последовательность фундаментальная:

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)\| \leqslant q\|x_1 - x_0\| \Rightarrow \ldots \Rightarrow \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant q^n \rho$$

Используем полученную оценку для того, чтобы оценить модули в сумме:

$$\forall p: \ \|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leqslant \rho \sum_{i=1}^{p} q^{n+i-1} = \frac{\rho q^n(1-q^p)}{1-q} < \frac{\rho q^n}{1-q} \to 0$$

А так как мы в банаховом пространстве, то из фундаментальности получили сходящуюся последовательность, т.е. $\exists x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. А так как $\overline{U}_r(x_0)$ – замкнутый шар, значит $x^* \in \overline{U}_r(x_0)$.

Докажем, что x^* является неподвижной точкой оператора Φ. Воспользуемся тем, что сжимающее отображение является непрерывным.

В $x_n = \Phi(x_{n-1})$ перейдём к пределу: $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} = \Phi(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}) = \Phi(x^*)$.

Докажем единственность неподвижной точки. Допустим, что существует $x^{**} \in \overline{U}_r(x_0) :$ $x^{**} = \Phi(x^{**})$, такое, что $x^{**} \neq x^*$.

Тогда $\|x^* - x^{**}\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(x^* *)\| \leqslant q\|x^* - x^{**}\|$, где $q < 1$. Получили противоречие. $\square$

2.2 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши

Определение 2.4. Пусть $n \geqslant 2, f_1, \ldots, f_n$ – непрерывные функции, определённые на $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{(x,\vec{y})}$. Назовём нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка следующую систему:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) = f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) = f_n(x, \vec{y}) \end{cases} \tag{5}$$

Определение 2.5. Вектор-функция $\vec{\varphi}(x)$ называется решением нормальной системы (5) на некотором промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, если:

1. $\vec{\varphi}(x) \in C^1(I)$
2. $\forall x \in I: \ (x, \vec{\varphi}(x)) \in G$
3. $\forall x \in I: \ \vec{\varphi}'(x) = \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))$

График решения $\vec{\varphi}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ – это интегральная кривая

Определение 2.6. Задача Коши – это

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

Определение 2.7. Вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$, определённая в области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ называется удовлетворяющей условию Липшица относительно $\vec{y}$ равномерно по x, если $\exists L > 0 :$ $\forall (x, \vec{y_1}), (x, \vec{y_2}) :\ |\vec{f}(x, \vec{y_1}) - \vec{f}(x, \vec{y_2})| \leqslant L|\vec{y_1} - \vec{y_2}|$.

Лемма 2.1. *Вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{y}$ равномерно по x при выполнении следующих условий:*

1. *G – выпуклая область в $\mathbb{R}^{n+1}$*
2. *$\vec{f}(x, \vec{y}) \in C_n(G)$, то есть непрерывна от n аргументов и $\forall i, j = \overline{1, n} :\ \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \in C(G)$*
3. *$\exists K > 0 :\ \forall i, j = \overline{1, n} :\ \forall (x, \vec{y}) \in G :\ \|\frac{\partial \vec{f_i}}{\partial y_j}(x, \vec{y})\| \leqslant K$*

Доказательство. Фиксируем $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим $(x, \vec{y_1})$, где $\vec{y_1} = (y_1^1, \ldots, y_n^1)$, а также $\vec{y_2} = (y_1^2, \ldots, y_n^2)$.

$$|f_i(x, \vec{y_1}) - f_i(x, \vec{y_2})| = \|\,|f_i(x, \vec{y_2} + \theta(\vec{y_1} - \vec{y_2})|_{\theta=1}^{\theta=2}\| = \|\int_0^1 \left[\frac{d}{d\theta} f_i(x, \vec{y_2} + \theta(\vec{y_1} - \vec{y_2}))\right] d\theta\| =$$

$$\|\int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x, \vec{y_2} + \theta(\vec{y_1} - \vec{y_2}))}{\partial y_j}(y_j^1 - y_j^2) d\theta\| \leqslant n \cdot K \cdot |\vec{y_1} - \vec{y_2}|$$

□

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы уравнений n-го порядка в нормальной форме

Теорема 2.2. *Пусть вектор-функция $\vec{f}(x, \vec{y})$ непрерывна в области G вместе со своими производными по $y_j (j = \overline{1, n})$, точка $(x_0, \vec{y_0})$ тоже лежит в G. Тогда задача Коши локально разрешима единственным образом:*

1. *$\exists \delta > 0$, такое что на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ решение задачи Коши существует.*
2. *Решение единственно в следующем смысле:*

   Если $\vec{y_1} \equiv \vec{\varphi}(x)$ – решение задачи Коши в δ_1-окрестности точки x_0, а $\vec{y_2} \equiv \vec{\psi}(x)$ – решение задачи Коши в δ_2-окрестности точки x_0, то в окрестности точки x_0 с радиусом $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) :\ \vec{\varphi}(x) \equiv \vec{\psi}(x)$

Доказательство. Рассмотрим множество $\overline{H_{\delta, r}}(x_0, \vec{y_0}) = \{(x, \vec{y}) \in G :\ x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \wedge \|\vec{y} - \vec{y_0}\| \leqslant r\}$. Заметим, что в силу компактности этого множества применима теорема Вейерштрасса:

$$\exists M > 0 :\ \forall (x, \vec{y}) \in \overline{H_{\delta, r}} :\ |\vec{f}(x, \vec{y})| \leqslant M, \forall i, j = \overline{1, n}\ |\frac{\partial f_i}{\partial y_j}| \leqslant M$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\vec{y}(x) = \vec{y_0} + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt \Leftrightarrow \vec{y} = \Phi(\vec{y})$$

Рассмотрим в $C_n[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ замкнутый шар $\overline{D_{\delta, r}}(\vec{y_0}) = \{\vec{y} \in C_n[x_0 - \delta, x_0 + \delta] : \|\vec{y} - \vec{y_0}\|_{C_n} \leqslant r\}$, где $\|\vec{y}\|_{C_n} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup\limits_{|x - x_0| < \delta} |y_i(x)|$.

Докажем, что существуют δ и r такие, что

- Φ является сжимающим

- Отображает шар $\overline{D_{\delta,r}}$ в себя

Тогда мы сможем применить теорему Банаха о сжимающем отображении. Получим единственную неподвижную точку отображения $\Leftrightarrow$ интегральное уравнение имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ задача Коши имеет единственное решение.

Докажем, что Φ является сжимающим. Рассмотрим $\vec{y}, \vec{z} \in \overline{D_{\delta,r}}$:

$$\|\Phi(\vec{y}) - \Phi(\vec{z})\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{|x-x_0|<\delta} |\int_{x_0}^{x} (f(\tau, \vec{y}(\tau)) - f(\tau, \vec{z}(\tau)))|\tau \leqslant \sup_{|x-x_0|<\delta} \int_{x_0}^{x} L|\vec{y}(\tau) - \vec{z}(\tau)|d\tau \leqslant$$
$$\sup_{|x-x_0|<\delta} \int_{x_0}^{x} L\|\vec{y} - \vec{z}\|_{C_n} d\tau \leqslant \delta L \|\vec{y} - \vec{z}\|_{C_n}$$

Положив $\delta = \frac{q}{L}$, получим требуемое.

Теперь докажем вторую часть:

$$\|\Phi(\vec{y_0}) - \vec{y_0}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{|x-x_0|<\delta} |\int_{x_0}^{x} f_i(\tau, \vec{y_0}) d\tau| \leqslant \int_{x_0}^{x} \|\vec{f}(\tau, \vec{y_0})\|_{C_n} d\tau \leqslant \delta M := (1-q)r$$

Получили, что

$$\begin{cases} q = \delta L \\ (1-q)r = \delta M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r - rq = \delta \\ r = \delta L r + \delta M \end{cases} \Rightarrow \delta_r := \frac{r}{M + Lr}$$

□

Определение 2.8. Нормальный вид уравнения с ЗК, разрешённого относительно старшей производной выглядит так:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде

Теорема 2.3. *Пусть функция $f(x, y, p_1, \ldots, p_{n-1})$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по переменным $y, p_1, \ldots, p_{n-1}$ в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, и точка $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$. Тогда существует замкнутая δ-окрестность точки x_0, в которой существует единственное решение задачи Коши.*

2.3 Теорема о продолжении решения нормальной системы дифференциальных уравнений

Теорема 2.4. *Пусть $\vec{f}(x,\vec{y})$ определена и удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши на замыкании ограниченной области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, тогда любое решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \vec{y'} = \vec{f}(x,\vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y_0} \end{cases}$$

можно продолжить в обе стороны до выхода $\Gamma = \partial G$, то есть можно доопределить $\vec{y}(x)$ на некоторый $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq [a,b]$, причём $(a,\vec{y}(a)), (b,\vec{y}(b)) \in \Gamma$

Доказательство.

$$\overline{H_r}(x_0,\vec{y_0}) := \{(x,\vec{y}) \in G :\ x \in [x_0-\delta_r, x_0+\delta_r] \wedge \|\vec{y}-\vec{y_0}\| \leqslant r\} \subseteq G$$

$$\rho((x_1,\vec{y_1}),(x_2,\vec{y_2})) := \max(|x_1-x_2|, \|\vec{y_1}-\vec{y_2}\|)$$

Введём также расстояние от точки ρ до множества M : $\rho(p,M) = \inf\limits_{q\in M} \rho(p,q)$

Наконец, определим δ_0, r_0 как значения δ_r и r для точки $p_0 = (x_0,\vec{y_0})$, для которых выполнено $\max(\delta_0,r_0) = \rho(p_0,\Gamma)$.

Рассмотрим $x_1 = x_0+\delta_0$ и $\vec{y_1} = \vec{y}(x_1)$. Обозначим $p_1 = (x_1,\vec{y_1})$

- Если $p_1 \in \Gamma$, то продолжение вправо не требуется
- Если $p_1 \notin \Gamma$, то p_1 – внутренняя точка, а значит, в ней $\exists!$ решение ЗК, причём оно совпадает с решением для p_0 на $[x_0,x_0+\delta_0] \cap [x_1-\delta_1,x_1]$. Аналогично определяем p_2 и т.д.

Полученная последовательность $\{p_k\}$ монотонно возрастает по x и ограничена точками из Γ. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует $b = \lim\limits_{k\ to\infty} x_k = x_0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_k$. Объединение решений задач Коши является функцией, определённой на $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[x_0,x_k] = [x_0,b)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\alpha,\beta \in [b-\varepsilon,b)$. Заметим, что

$$\|\vec{y}(\beta)-\vec{y}(\alpha)\| = \|\int_\alpha^\beta \vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau))d\tau\| \leqslant \int_\alpha^\beta |\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau))d\tau| \leqslant M\varepsilon$$

Значит, по критерию Коши существует $y^* = \lim\limits_{x\to b-0} \vec{y}(x)$. Пусть $p^* = (b,\vec{y^*})$.

$$0 \leqslant \rho(p_k,\Gamma) = \max(\delta_k,r_k) \to 0$$

Значит $\rho(p^*,\Gamma) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(p_k,\Gamma) = 0 \Rightarrow p^* \in \Gamma$

$$\frac{\vec{y}(b)-\vec{y}(b-\varepsilon)}{\varepsilon} = \int_{b-\varepsilon}^{b} \frac{\vec{f}(\tau,\vec{y}(\tau))}{\varepsilon} d\tau = \frac{\vec{f}(\xi,\vec{y}(\xi))\cdot\varepsilon}{\varepsilon} \to \vec{f}(b,\vec{y}(b))$$

$\vec{f}$ непрерывна вплоть до $\Gamma \Rightarrow f \in C(p^*)$. Тогда можем сделать второй переход по интегральной теореме о среднем, где $\xi \in [b-\varepsilon,b]$.

Таким образом, мы успешно продлили вправо, аналогично можно продлить и влево. □

2.4 Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Замечание. Дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы, всегда содержат некоторые параметры. Эти параметры в реальных задачах никогда не могут быть измерены абсолютно точно, то есть всегда измеряются с некоторой погрешностью, так что сами дифференциальные уравнения известны лишь с некоторой степенью точности. Поэтому, для того чтобы уравнения могли описывать реальные процессы, необходимо, чтобы их решения непрерывно зависели от параметров, то есть чтобы они мало менялись при малых изменениях параметров.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений в векторном виде, то есть $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu}) \quad \vec{y}(x_0, \vec{\mu}) = \vec{y_0}(\vec{\mu}) \tag{6}$$

Теорема 2.5. *Пусть $\vec{f}(x, \vec{y}, \vec{\mu})$ – непрерывна и удовлетворяет условию Липшица равномерно по x и $\vec{\mu}$, $\forall (x, \vec{y}) \in G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и всех $\vec{\mu}$, таких, что $|\vec{\mu} - \vec{\mu_0}| \leqslant \delta$. Пусть, кроме того, $(x_0, \vec{y_0}) \in G$.*

Тогда $\exists h > 0 \mapsto$ решение $\vec{y}(x, \vec{\mu})$ задачи Коши непрерывно по совокупности переменных $(x, \vec{\mu})$ в некоторой области $|x - x_0| \leqslant h, |\vec{\mu} - \vec{\mu_0}| \leqslant \delta$.

2.5 Дифференцируемость и гладкость решения по параметрам, уравнение в вариациях

Лемма 2.2. *Лемма Адамара.*

Пусть $F(x, u) : \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_u \to \mathbb{R}^1$. $F \in C^p(D), p \geqslant 1, D$ – область в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда $\exists H_i(x, u, z) \in C^{p-1}(D), i = \overline{1, m}$:

$$F(x, \hat{u}) - F(x, u) = \sum_{i=1}^{m} H_i(x, u, \hat{u}) \cdot (\hat{u}_i - u_i)$$

Теорема 2.6. *Если при $(x, y) \in G$ и $|\vec{\mu} - \vec{\mu_0}| \leqslant \delta$ функции*

$$f(x, y, \vec{\mu}) \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial \mu_i}$$

непрерывны, а также $(x_0, y_0) \in G$, то $\exists h > 0$, что при $|x - x_0| \leqslant h, |\vec{\mu} - \vec{\mu_0}| \leqslant \delta$ для решения $y = \varphi(x, \vec{\mu})$ задачи Коши с параметров верно следующее:

1. *$z_i(x, \vec{\mu}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_i}$ непрерывны для указанных x и $\vec{\mu}$.*
2. *Смешанные производные $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \mu_i}$ непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования.*
3. *Частные производные z_i удовлетворяют уравнениям в вариациях по параметру $\vec{\mu}$:*

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \varphi(x, \vec{\mu}), \vec{\mu})}{\partial x} \cdot z_i + \frac{\partial f(x, \varphi(x, \vec{\mu}), \vec{\mu})}{\partial \mu_i}$$

и начальным условиям $z_i(x_0, \vec{\mu}) = 0$

Доказательство. Для $\mu \in \mathbb{R}^1$.

$\exists \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$: $\varphi(x, \mu)$ – решение (6), $\varphi(x, \mu + \Delta\mu)$ – решение (6), где $\mu \mapsto \mu + \Delta\mu$. Введём $\psi(x, \mu, \Delta\mu) := \frac{\varphi(x, \mu+\Delta\mu)-\varphi(x,\mu)}{\Delta\mu}, \forall \Delta\mu \neq 0$.

Тогда

$$\psi' = \frac{1}{\Delta\mu}\left[f(x, \varphi(x, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(x, \varphi(x, \mu), \mu)\right] \overset{\text{л. Ада.}}{=}$$

$$\frac{1}{\Delta\mu}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i(x, u, \hat{u})(\varphi(x, \mu + \Delta\mu) - \varphi(x, \mu)) + h_{n+1}(x, u, \hat{u})\Delta\mu\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x, u, \hat{u})\psi(x, \mu, \Delta\mu) + h_{n+1}(x, u, \hat{u})$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \psi' = H_1(x, \mu, \Delta\mu) \cdot \psi + \hat{H}_2(x, \mu, \Delta\mu) \\ \psi(x_0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Значит $\exists! \psi(x, \mu, \Delta\mu) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \in C$ □

Определение 2.9. Уравнение (7) называют уравнением в вариациях для решения φ.

3 Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.1 Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка

Факты ниже перекликаются со следующим разделом

Определение 3.1. Вектор-функция $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_k}(x)$, определённые на промежутке I, называются линейно зависимыми, если

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \exists i : \alpha_i \neq 0 : \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{y_j}(x) \equiv 0$$

Определение 3.2. Пусть $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ – вектор-функции с n компонентнами. Функция

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \ldots & y_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \ldots & y_n^n \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского для заданных вектор-функций.

Лемма 3.1. *Если вронскиан системы $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке, то все эти функции линейно независимы.*

Доказательство. Пусть эти функции линейно зависимы, тогда векторы $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ линейно зависимы в каждой точке x_0, а значит, определитель матрицы, составленной из векторов, равен нулю. □

Лемма 3.2. *Если вектор-функции $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ – решения некоторой системы линейных однородных уравнений на промежутке I и $\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$, то $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ линейно зависимы на I.*

Доказательство. В точке x_0 векторы $\vec{y_1}(x), \ldots, \vec{y_n}(x)$ линейно зависимы, значит, существует их линейная комбинация, которая обращается в ноль в точке x_0 : $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\vec{y_i}(x_0) = 0$.

Рассмотрим n задач Коши для $\vec{y}(x_0) = \vec{y_i}(x_0)$. Рассмотрим функцию $\vec{y}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\vec{y_i}(x)$ на I.

$\vec{y}(x_0) = 0 \Rightarrow$ по теореме о существовании и единственности $\vec{y}(x) \equiv 0$. □

Определение 3.3. Фундаментальная система решений для СЛДУ – набор n линейно независимых решений системы.

Лемма 3.3. *Для любой СЛДУ существует ФСР.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$ и $\{\vec{y_0^i}\}_{i=1}^n$ – набор числовых линейно независимых векторов. Для каждого из числовых векторов составим соответствующую задачу Коши и получим $\vec{z_1}, \ldots, \vec{z_n}$ – решения этих задач, тогда их вронскиан равен определителю матрицы, составленной из $\{\vec{y_0^i}\}_{i=1}^n$, следовательно, он не равен нулю, и ФСР существует. □

Лемма 3.4. *Любое решение СЛДУ единственным образом представимо в виде линейной комбинации векторов ФСР.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b], \vec{y}$ – решение системы, и $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}$ – ФСР, тогда

$\vec{y_1}(x_0), \ldots, \vec{y_n}(x_0)$ линейно независимы, и $\vec{y}(x_0)$ единственным образом выражается через них. В силу единственности решения задачи Коши коэффициенты линейной комбинации окажутся одними и теми же для всех точек отрезка. □

Линейные однородные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 3.4. Линейным однородным ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$L(y) = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$$

Замечание. Введём $\vec{y} = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Используя результаты уравнения $L(y)$ и тем, что $\vec{y_i'} = \vec{y_{i+1}}$ получим систему:

$$\begin{cases} \vec{y_1'} = \vec{y_2} \\ \vec{y_2'} = \vec{y_3} \\ \ldots \\ \vec{y_n'} = \frac{-1}{a_0}(a_n\vec{y_1} + a_{n-1}\vec{y_2} + \cdots + a_1\vec{y_n}) \end{cases}$$

После введения данной системы существование и единственность решения исходного уравнения очевидна.

Для исходного уравнения можно определить вронскиан, равный вронскиану написанной выше системы.

Замечание. Найдём решение системы 1 в виде $y = e^{\lambda x}$

$$M(\lambda) = a_0\lambda^n + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$$L(e^{\lambda x}) = M(\Lambda)e^{\lambda x} = 0$$

Поскольку экспонента никогда не обнуляется, то единственный возможный вариант – это $M(\lambda) = 0$. Уравнение $M(\lambda) = 0$ называется характеристическим, как и многочлен в его левой части.

Утверждение 3.1. *Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – однократные корни $M(\lambda)$, тогда решения $y_i = e^{\lambda_i x}$ линейно независимы.*

Доказательство.

$$W(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Получившийся определитель Вандермонда не будет равен нулю в силу того, что все λ_i различны.

Если все $a_i \in \mathbb{R}$, то все комплексные корни $M(\lambda)$ разбиваются на пары сопряжённых между собой комплексных чисел. Мнимая и действительная части решений, соответствующих таким корням, сами являются решениями:

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$$

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad \overline{y_1} = e^{\overline{\lambda} x}$$

$$z_1 = \frac{y_1 + \overline{y_1}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad z_2 = \frac{y_1 - \overline{y_1}}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Замена $y_1, \overline{y_1}$ на z_1, z_2 является корректным переходом в другой базис, а потому линейная оболочка не изменится. □

Утверждение 3.2. *Пусть λ – корень $M(\lambda)$ кратности l, тогда функции*

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{l-1}e^{\lambda x}$$

являются решениями.

Лемма 3.5. *Пусть $y = x^s e^{\lambda x}$, где λ – корень характеристического уравнения кратности l, тогда*

$$L(x^s e^{\lambda x}) = \begin{cases} 0, s < l \\ (b_0 x^{s-l} + b_1 x^{s-l-1} + \dots + b_{s-l})e^{\lambda x}, x \geqslant l \end{cases}$$

Доказательство. Пусть z, λ – комплексные числа. Сначала докажем, что $(z^s e^{\lambda z})_z^{(p)} = (\lambda^p e^{\lambda z})_\lambda^{(s)}$. Здесь мы используем операцию формального дифференцирования.

Докажем наше утверждение:

$$(z^s e^{\lambda z})_z^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k (z^s)_z^{(k)} (e^{\lambda z})_z^{(p-k)} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k s(s-1)\dots(s-(k-1)) z^{s-k} \lambda^{p-k} e^{\lambda z} =$$
$$\sum_{k=0}^{\min(p,\,s)} C_p^k C_s^k k! z^{s-k} \lambda^{p-k} e^{\lambda z}$$

Заметич, что $(\lambda^p e^{\lambda z})_\lambda^{(s)}$ раскроется в такое же выражение ввиду структурной симметрии.

Найдём:

$$L(x^s e^{\lambda x}) = a_0 (x^s e^{\lambda x})_x^{(n)} + a_1 (x^s e^{\lambda x})_x^{(n-1)} + \dots + a_n (x^s e^{\lambda x}) =$$
$$a_0((e^{\lambda x})_\lambda^{(s)})_x^{(n)} + \dots + a_n (e^{\lambda x})_\lambda^{(s)} = a_0((e^{\lambda x})_x^{(n)})_\lambda^{(s)} + \dots + a_n (e^{\lambda x})_\lambda^{(s)} =$$
$$(a_0 (e^{\lambda x})_x^{(n)} + \dots + a_n e^{\lambda x})_\lambda^{(s)} = (e^{\lambda x} M(\lambda))_\lambda^{(s)} = \sum_{k=0}^{s} C_s^k (M(\lambda))_\lambda^{(k)} (e^{\lambda x})_\lambda^{(s-k)} =$$
$$\sum_{k=l}^{s} C_s^k (M(\lambda))_\lambda^{(k)} (e^{\lambda x})_\lambda^{(s-k)}$$

Следовательно, $b_i = C_s^k (M(\lambda))_\lambda^{(k)} (e^{\lambda x})_\lambda^{(s-k)}$

Исходное утверждение выводится из леммы применением того факта, что корень кратности s многочлена $P(x)$ является корнем $P, P', \cdots, P^{(s-1)}$ □

Определение 3.5. Квазимногочлен – произведение многочлена на экспоненту с линейной функцией в показателе.

Утверждение 3.3. $(P_m(x)e^{\lambda x})'_x = Q_m(x)e^{\lambda x}$

Теорема 3.1. *О структуры ФСР.*

Пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ корни характеристического многочлена $M(\lambda)$ кратности $l_1, \cdots, l_k$. Тогда набор функций $x^s e^{\lambda_i x}$, где $s = 0, \cdots, l_i - 1, i = 1, \cdots, k$ является ФСР для исходного уравнения.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть ЛЗ, то есть

$$\exists \{c_i\}_{i=1}^n \neq 0 : \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \equiv 0$$

Сгруппируем слагаемые при одинаковых $e^{\lambda_i x}$: $\sum\limits_{i=1}^{k} e^{\lambda_i x} p_i(x) \equiv 0$. Значит, хотя бы один из многочленов $p_i(x) \neq 0$. Б.О.О. примем $p_1(x) \neq 0$, домножим равенство на $e^{-\lambda_k x}$:

$$e^{x(\lambda_1 - \lambda_k)} p_1(x) + e^{x(\lambda_2 - \lambda_k)} p_2(x) + \dots + p_k(x) = 0$$

Продифференцируем l_k раз:

$$e^{x(\lambda_1 - \lambda_k)} Q_1(x) + e^{x(\lambda_2 - \lambda_k)} Q_2(x) + \dots + e^{x(\lambda_{k-1} - \lambda_k)} Q_{k-1}(x) = 0$$

Разделим на $e^{x(\lambda_{k-1} - \lambda_k}$ и будем повторять процедуру, пока не дойдём до

$$e^{x(\lambda_1 - \lambda_2)} R(x) = 0$$

Откуда $R(x) = 0$, но тогда $p_1(x) = 0$. Противоречие. □

3.2 Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью квазимногочленом

Определение 3.6. Эти уравнения имеют вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

где $f(x)$ квазимногочлен: $f(x) = e^{\mu x} P_m(x), \mu \in \mathbb{C}, P_m(x)$ – заданный многочлен степени m с комплексными коэффициентами.

Определение 3.7. Характеристическим многочленом $L(x)$ назовём многочлен

$$L(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Замечание. Аналогично однородному случаю, существование и единственность следуют из таковых для системы

$$\begin{cases} \vec{y_1'} = \vec{y_2} \\ \vec{y_2'} = \vec{y_3} \\ \dots \\ \vec{y_{n-1}'} = \vec{y_n} \\ \vec{y_n'} = f - a_1 y_1 - a_2 y_2 - \dots - a_n y_n \end{cases}$$

Определение 3.8. Если число μ является корнем характеристического уравнения

$$L(\lambda) = 0$$

то говорят, что в уравнении резонансный случай. Если же μ не является корнем, то имеем нерезонансный случай.

Определение 3.9. Дифференциальным многочленом назовём многочлен вида

$$L(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} (D - \lambda_2)^{k_2} \cdots (D - \lambda_s)^{k_s}$$

где k_i соответствует кратности корней характеристического уравнения, а D – оператор формального дифференцирования.

Замечание. Рассмотрим ЛОУ. Покажем, что если известно некоторое решение $y_0(x)$ ЛНУ, то замена $y = z + y_0$ приводит уравнение к ЛОУ. Воспользуемся представлением левой части через дифференциальный многочлен:

$$L(D)y = L(D)(z + y_0) = L(D)z + L(D)y_0 = L(D)z + f(x) = f(x)$$

Отсюда следует, что $L(D)z = 0$, то есть решение.

Рассмотрим $L(D)y(x) = e^{\mu x} P_m(x)$

Утверждение 3.4. $(P_m(x) e^{\lambda x})'_x = Q_m(x) e^{\lambda x}$

Теорема 3.2. *О структуре решения ЛНУ с правой частью в виде квазимногочлена.*

Для рассматриваемого уравнения существует и единственно решение вида

$$y(x) = x^k e^{\mu x} Q_m(x)$$

где $Q_m(x)$ – многочлен одинаковой с $P_m(x)$ степени m, а число k равно кратности корня μ в уравнении $L(\lambda) = 0$ в резонансном случае и $k = 0$ в нерезонансном.

Доказательство. Если $\mu \neq 0$, то заменой $y = ze^{\mu x}$ всегда можно избавиться от $e^{\mu x}$ в правой части. В самом деле, по формуле сдвига после замены имеем, что

$$L(D)y = L(D)(e^{\mu x}z) = e^{\mu x}L(D+\mu)z = e^{\mu x}P_m(x)$$

откуда $L(D+\mu)z = P_m(x)$.

Таким образом, доказательство теоремы осталось провести для уравнения вида

$$L(D)y = P_m(x)$$

1. Нерезонансный случай: $L(\mu) \neq 0$. Пусть

   $$P_m(x) = p_m x^m + \cdots + p_0 \quad Q_m(x) = q_m x^m + \cdots q_0$$

   Если подставить и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x, получим линейную алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $q_0, \cdots, q_m$. Матрица системы треугольная с числами $a_n = L(0) \neq 0$, таким образом, все коэффициенты определяются из неё однозначно.

2. В резонансном случае имеем

   $$L(\lambda) = \lambda^k(\lambda^{n-k} + a_1\lambda^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k})$$

   Следовательно,

   $$L(D) = \begin{cases} D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-k}D^k, k < n \\ D^n, k = n \end{cases}$$

   В первом случае замена $D^k y = z$ приводит уравнение к уравнению с нерезонансным случаем. Рассмотрим уравнение

   $$D^k y = \begin{cases} R_m(x), k < n \\ P_m(x), k = n \end{cases}$$

   Взяв нулевые начальные условия для этого уравнения

   $$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(k-1)}(0) = 0$$

   получим единственное решение вида

   $$y(x) = x^k Q_m(x)$$

□

3.3 Уравнение Эйлера-Коши

Определение 3.10. Уравнением Эйлера называется уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_n y = 0$$

Утверждение 3.5. *Данное уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами при замене $x = e^t$ при $x > 0$ и $x = -e^t$ при $x < 0$.*

Доказательство. Докажем индукцией по порядку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t}y'_t \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}(y''_t - y'_t) \quad \frac{d^ny}{dx^n} = e^{-nt}\varphi(y_t^{(n)}, y_t^{(n-1)}, \cdots, y'_t)$$

Подставим найденные выражения в определение и получим уравнение вида, где $y^{(n)}$ зависит от нового параметра t:

$$b_0y^{(n)} + b_1y^{(n-1)} + b_2y^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}y' + b_n = 0$$

□

3.4 Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений

Определение 3.11. Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной.

Нормальная линейная однородная система уравнений выглядит так

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^T \quad A_{n\times n} = (a_{ij}) \quad \dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

Теорема 3.3. *Если $\vec{h_1}, \cdots, \vec{h_n}$ – базис из собственных векторов матрицы A, то $\vec{x_i} = e^{\lambda_i t}\vec{h_i}$ – ФСР для исходной однородной системыю*

Доказательство. Заметим, что $A(e^{\lambda t}\vec{h}) = e^{\lambda t}(A\vec{h}) = e^{\lambda t}\lambda\vec{h} = (e^{\lambda t}\vec{h})'$, значит собственный вектор является решением. Их линейная независимость следует из того, что, что их вронскиан в точке $t = 0$ равен определителю из координатных столбцов этого базиса, а значит не равен нулю. □

3.5 Матричная экспонентна, её свойства и применение к решению нормальных линейных систем

Определение 3.12. Пусть t – действительная переменная, $A_{n\times n}$ – комплекснозначная квадратная матрица. Матричной экспонентой называется ряд:

$$e^{tA} = E_{n\times n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$$

Введём обозначение частичных сумм:

$$S_m = E_{n\times n} + \sum_{k=1}^{m} \frac{t^k}{k!}A^k$$

Определение 3.13. Матричный ряд

$$e^{tA} = E_{n\times n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

называется сходящимся при $t_0 \in \mathbb{R}$, если степенной ряд

$$(S_m)_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{(k)}$$

сходится для всех i, j.

Лемма 3.6. $\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *верно, что ряд* $e^{tA} = E + \sum \frac{t^k}{k!} A^k$ *сходится абсолютно.*

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$

Докажем по индукции: $|a_{ij}^{(k)}| \leqslant n^{k-1} M^k$

1. База $|a_{ij}^{(1)}| \leqslant n^0 M$
2. $|a_{ij}^{(k)}| = |\sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(1)} a_{lj}^{(k-1)}| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |a_{il}^{(1)} a_{lj}^{(k-1)}| \leqslant n \cdot M n^0 \cdot M^{k-1} n^{k-2} = n^{k-1} M^k$

Рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} n^{i-1} M^i$$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{nM}{k+1} = 0 \Rightarrow$ рассматриваемый ряд сходится по признаку Даламбера и мажорирует каждый компонентный ряд. $\square$

Лемма 3.7. *Формула матричного бинома.*

Если A и B перестановочны, то $\forall n \in \mathbb{N}:\ (A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^i B^{n-i}$

Лемма 3.8. *Если A и B перестановочны, то $\forall t \in \mathbb{R}$:*

$$e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA} = e^{t(A+B)}$$

Доказательство.

$$e^{t(A+B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} \overset{\text{абс.сход.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \frac{t^m B^m}{m!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m B^m}{m!} = e^{tB} e^{tA} = e^{tA} e^{tB}$$

$\square$

Лемма 3.9. *Свойства матричной экспонетны.*

1. *Если S – невырожденная и $A = SBS^{-1}$, то $e^{tA} = S e^{tB} S^{-1}, \forall t \in \mathbb{R}$*
2. $(e^{tA})'_t = A e^{tA} = e^{tA} A$

Доказательство. 1. Заметим, что $A^k = SB^kS^{-1}$:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \right) S^{-1} = Se^{tB}S^{-1}$$

2.

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = Ae^{tA}$$

□

Теорема 3.4. *Матричная экспонентна для ФСР.*

Матрица e^{tA} является фундаментальной матрицей для системы линейных уравнений $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

Доказательство. $(e^{tA})' = Ae^{tA}$, следовательно, каждый столбец матрицы e^{tA} является решением исходной системы. Поскольку $\det e^{tA} \neq 0, \forall t$, то e^{tA} фундаментальна. □

Замечание. Общее решение системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ – это $e^{tA}\vec{c}$, где $\vec{c}$ – вектор констант.

Теорема 3.5. *Общее решение системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$ задаётся следующей формулой:*

$$\vec{x} = e^{tA} \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\tau A} \vec{f}(\tau) d\tau + \vec{c_0} \right)$$

Доказательство. Метод вариации постоянных:

$$\begin{aligned} \vec{x} = e^{tA}\vec{c}(t) \Rightarrow \\ (e^{tA}\vec{c}(t))' = Ae^{tA}\vec{c}(t) + e^{tA}\dot{\vec{c}}(t) = Ae^{tA}\vec{c}(t) + \vec{f}(t) \Rightarrow \\ e^{tA}\dot{\vec{c}}(t) = \vec{f}(t) \Rightarrow \\ \dot{\vec{c}}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t) \Rightarrow \\ \vec{c}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A} \vec{f}(\tau) d\tau + \vec{c_0} \end{aligned}$$

□

4 Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Замечание. Линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами порядка n называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

Решение этого уравнение всегда можно свести к решению системы линейных уравнений порядка n аналогично случаю с постоянными коэффициентами.

4.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка

Теорема 4.1. *Существования и единственности для системы.*

Зададим начальное условие $y(x_0) = y_0$, где $x \in I$ и y_0 – заданный n-мерный вектор. Пусть матрица $A(x)$ и $\vec{f}(x)$ непрерывны на I. Тогда на всём I решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство. Эта система является частным случаем уже рассмотренной задачи Коши в нормальном виде с

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + \vec{f}_i(x), \quad i = \overline{1, n}$$

Эти функции f_i определены и непрерывны при $x \in I, (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица с постоянной

$$L = \max_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \max_{x \in I} |a_{ij}(x)|$$

Следовательно, требуемые условия выполнены и она имеет единственное решение на I. $\square$

Теорема 4.2. *Существования и единственности для уравнения.*

Пусть все функции $a_i(x), i = \overline{1, n}$ и $f(x)$ – непрерывны на I и пусть $x_0 \in I$.

Тогда при произвольных начальных значениях $y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}$ решение задачи Коши

$$y(x_0) = y_1^0, y'(x_0) = y_2^0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0$$

существует и единственно на всём I.

Доказательство. Данное уравнение также является частным случаем уже рассмотренного общего случая с функцией

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = f(x) - a_n(x)y - a_{n-1}(x)y' - \cdots - a_1(x)y^{(n-1)}$$

Эта функция F определена и непрерывна при $x \in I, (y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной

$$L = \max_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \max_{x \in I} |a_i(x)|$$

Следовательно, для задачи Коши выполнены условия теоремы и её решение существует и единственно на I. $\square$

4.2 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Замечание. Теперь мы рассматриваем однородную систему

$$\vec{y'} = A(x)\vec{y}(x)$$

где $x \in I$ и $A(x)$ – непрерывны на I. Комплекснозначная матрица $A(x)$ порядка n. Решением будет являться комплекснозначная вектор-функция y.

Лемма 4.1. *Принцип суперпозиции.*

Если $y_1(x), y_2(x)$ – решение данной системы, то линейная комбинация $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ также решение.

Определение 4.1. Вектор-функции $y_1, \cdots, y_k$ называются линейно зависимыми на промежутке I, если найдутся числа $c_1, \cdots, c_k$ одновременно неравные нулю, что

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_ky_k(x) \equiv 0, \forall x \in I$$

В противном случае функции называются линейно независимыми

Лемма 4.2. *Если $y_1, \cdots, y_k$ линейно зависимы на промежутке I, то числовые вектора*

$$y_1(x), \cdots, y_k(x), \forall x \in I$$

линейно зависимы. Обратное утверждение неверно.

Теорема 4.3. *Пусть $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ – решения данной однородной системы. Эти решения линейно независимы на I тогда и только тогда, когда*

$$\forall x_0 \in I: \; y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$$

линейно независимы как числовые векторы.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ – линейно независимые решения линейной однородной системы. Если существует $x_0 \in I$, что $y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$ линейно независимы, то найдётся нетривиальная линейная комбинация, что $y = \sum c_iy_i(x_0) = 0$

Вектор-функция y является решением данной системы по принципу суперпозиции и также удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = 0$. Но тогда $y(x) \equiv 0$ на I по теореме о существовании и единственности. Но тогда $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ линейно зависимы. Противоречие.

$\Leftarrow$ Пусть $\forall x_0 \in I: \; y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$ линейно независимы на I. Пусть $y_1(x), \cdots, y_k(x)$ линейно зависимы, тогда по предыдущей лемме $y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$ также линейно зависимы. Противоречие. □

Теорема 4.4. *Для данной системы фундаментальная система существует и их бесконечное число.*

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in I$ и n линейно независимых числовых векторов $y_1^0, \cdots, y_n^0$ с n компонентами. Обозначим через $\varphi_j(x)$ решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $y_j(x_0) = y_j^0$. По теореме о существовании и единственности каждое такое решение существует и единственно на I. Но тогда система решений $\varphi_j(x)$ образует фундаментальную систему решений, так как она была построена из линейно независимых числовых векторов. Точку $x_0 \in I$ и векторы можно выбирать бесконечным числом способов. □

Теорема 4.5. *Если $\varphi_1^0, \cdots, \varphi_n^0$ – фундаментальная система решений данной системы, то любое решение представимо в виде линейной комбинации членов фундаментальной системы.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in I, y$ – некоторое решение системы. Тогда $\varphi_1^0(x_0), \cdots, \varphi_n^0(x_0)$ линейно независимы по определению и числовой вектор единственным образом выражается через линейную комбинацию этих векторов. В силу единственности задачи Коши, коэффициенты линейной комбинации окажутся одними и теми же для всех точек отрезка. □

Определение 4.2. Матрица $\Phi(x)$, у которой столбцы образуют фундаментальную систему решений, называется фундаментальной матрицей данной системы.

Лемма 4.3. *Если $Y_1(x), Y_2(x)$ – фундаментальные матрицы одной системы, то существует невырожденная числовая матрица C, что $Y_1 \equiv Y_2 C$*

4.3 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Теорема 4.6. *О структуре решения неоднородной системы.*

Пусть $y_0(x)$ – некоторое частное решение неоднородной системы и $\Phi(x)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы.

Тогда все решения исходной системы задаются формулой

$$\vec{y}(x) = \vec{y_0} + \Phi(x)\vec{C}$$

где $\vec{C}$ – произвольный числовой вектор размерности n.

Доказательство. В исходной системе сделаем замену

$$\vec{y}(x) = \vec{z}(x) + \vec{y_0}(x)$$

Тогда получим, что $\vec{z}(x)$ удовлетворяет соответствующей однородной системе. Общее решение однородной системы записывается, как

$$\vec{z}(x) = \Phi(x)\vec{C}$$

Из замены следует утверждение теоремы. □

4.4 Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского.

Теорема 4.7. *Лиувилля-Остроградского.*

Пусть $W(x)$ – вронскиан решений $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ системы $y'(x) = A(x)y(x)$ на промежутке I и $x_0 \in I$, тогда $\forall x \in I$ имеет место формула Лиувилля-Остроградского:

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} trA(t)dt\right)$$

Доказательство. Докажем, что $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W'(x) = \mathrm{tr}A(x) \cdot W(x) \quad x \in I$$

Пусть $y_{ij}(x), i = \overline{1,n}$ компоненты решения $y_j(x), j = \overline{1,n}$. Тогда $W(x)$ является функцией всех этих компонент:

$$W(x) = W[y_{11}(x), y_{21}(x), \cdots, y_{nn}(x)]$$

По формуле производной сложной функции получаем, что

$$W'(x) = \sum_{p,\,q=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial y_{pq}}(x) y'_{pq}(x)$$

Если $W_{pr}(x)$ – алгебраическое дополнение $y_{pr}(x)$ в $W(x)$, то разложение $W(x)$ по p-й строке даёт

$$W(x) = \sum_{r=1}^{n} y_{pr}(x) W_{pr}(x)$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial W}{\partial y_{pq}}(x) = W_{pq}(x)$$

Каждая вектор-функция удовлетворяет системе $y'(x) = A(x)y(x)$, то есть

$$y'_q(x) = A(x)y'_q(x), \quad q = \overline{1, n}, x \in I$$

Отсюда находим, что

$$y'_{pq}(x) = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x)$$

Подставляя найденные выражения в формулу $W'(x)$ получим, что

$$W'(x) = \sum_{p,\,q=1}^{n} W_{pq}(x) \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x) = \sum_{p,\,r=1}^{n} a_{pr}(x) \sum_{q=1}^{n} y_{rq}(x) W_{pq}(x)$$

Но по свойствам определителя мы знаем, что $\sum_{q=1}^{n} y_{rq}(x) W_{pq}(x) = \delta_{pr} W(x) \Rightarrow$

$$W'(x) = W(x) \sum_{p,\,r=1}^{n} a_{pr}(x)\delta_{pr} = W(x) \sum_{p=1}^{n} a_{pp}(x) = W(x) \mathrm{tr} A(x)$$

Интегрирование этого линейного однородного уравнения первого порядка даёт искомую формулу. □

Замечание. Формула Лиувилля-Остроградского для однородного уравнения n-го порядка:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$$

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \cdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \dots - a_1 y_n \end{cases} \Rightarrow \mathrm{tr} A(x) = -a_1(x) \Rightarrow W(x) = W(x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} a_1(t) dt \right)$$

4.5 Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n-го порядка

Как мы уже поняли, все уравнения n-го порядка сводятся к системам, поэтому достаточно показать для системы.

1. Найти ФСР однородной системы (и фундаментальную матрицу Y).

2. Продифференцировать вектор-функцию $\vec{y}(x) = Y(x)\vec{C}(x)$, где $\vec{C}(x)$ – вектор-функция:
$$\vec{y'} = Y'\vec{C} + Y\vec{C'} = AYC + f$$

3. Выразить и проинтегрировать $\vec{C'}$, после чего выразить частное решение неоднородной системы:
$$Y\vec{C'} = f \Rightarrow \vec{C'} = Y^{-1}f \Rightarrow \vec{C} = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)dt + \vec{C_0}$$
$$\vec{y}(x) = Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)dt + Y(x)\vec{C_0}$$

4.6 Краевая задача, теорема об альтернативе

Определение 4.3. Задача нахождения функции $y = y(x), y \in C^2[a, b]$ из условий
$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ \gamma_1 y'(a) + \gamma_2 y(a) + \gamma_3 y'(b) + \gamma_4 y(b) = 0 \\ \delta_1 y'(a) + \delta_2 y(a) + \delta_3 y'(b) + \delta_4 y(b) = 0 \end{cases}$$
где $\gamma_{1,2,3,4}, \delta_{1,2,3,4}$ – некоторые числа такие, что
$$\exists i, j : \gamma_i \cdot \delta_j \neq 0$$

Теорема 4.8. *Об альтернативе.*

Для линейного неоднородного уравнения n-го порядка с n линейными краевыми условиями возможны только два случая:

1. *Задача имеет единственное решение при любых правых частях в уравнении и краевых условиях.*

2. *Однородная задача имеет бесконечно много решений, а неоднородная задача при некоторых правых частях имеет бесконечно много решений, а при всех других – не имеет решений.*

Доказательство. Общее решение данного уравнения имеет вид
$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + y_0(x)$$
где $y_1, \cdots, y_n$ – линейно независимые решения однородного уравнения, $y_0(x)$ – частное решение. Подставляя это общее решениев в краевые условия и перенося $y_0(x)$ в правую

часть, получаем систему n линейных алгебраических уравнений относительно $c_1, \cdots, c_n$. Коэффициенты системы зависят только от значений $y, y', \cdots$ в заданных точках и не зависят от правых частей уравнения и краевых условий. Если данная задача однородна, то правые части алгебраических уравнений равны нулю.

Возможны только два следующих случая:

1. Если детерминант не равен нулю, то система имеет единственное решение $c_1, \cdots, c_n$ при любых правых частях. Подставляя эти значения в общее решение, получаем единственное решение краевой задачи.

2. Если детерминант системы равен нулю, то однородная система имеет бесконечно много решений относительно $c_1, \cdots, c_n$, а неоднородная система имеет решение не при любых правых частях. Если она имеет решение, то она имеет бесконечно много решений, так как к этому решению можно прибавить любое решение однородной системы, умноженное на любую константу.

□

4.7 Теорема Штурма и следствия из неё

Будем рассматривать уравнение второго порядка:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

где $a(x), b(x)$ – действительно-значные функции, заданные на $I \subseteq \mathbb{R}, a(x), b(x) \in C^1(I)$.

Определение 4.4. Решение называется нетривиальным на I, если оно не равно нулю хотя бы в одной точке $x_0 \in I$.

Определение 4.5. Решение, имеющее более одного нуля на I, называется колеблющимся.

Определение 4.6. Значение x_0 называется простым нулём функции $f(x)$, определённой и дифференцируемой в точке x_0, если $f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) \neq 0$. Если производная равна 0, то такое значение называется кратным нулём.

Выполним в изначальном уравнении замену $y(x) = u(x) \cdot z(x)$, так как хотим понизить порядок. Приэтом $z(x)$ – неизвестная функция, а $u(x)$ подберём так, как нам нужно.

$$y' = u'z + uz' \quad y'' = u''z + 2u'z' + uz''$$

Подставляем в изначальное уравнение:

$$uz'' + (2u' + au)z' + (u'' + au' + bu)z = 0$$

Возьмём $u(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right]$, чтобы коэффициент перед z' сократился. Заметим, что $u(x)$ в ноль никогда не обращается. Подставим $u(x)$ в полученное выше уравнение:

$$z''(x) + q(x)z = 0 \qquad q(x) = \frac{u'' + au' + bu}{u}$$

Полученное уравнение называется приведённым. (К такому уравнению можно привести всегда.)

Лемма 4.4. *Если $z(x)$ – нетривиальное решение приведённого уравнения, то каждый его нуль на промежутке I является простым.*

Доказательство. Пусть это не так, то есть $x_0 \in I$ – кратный нуль:

$$\begin{cases} z''(x) + q(x)z = 0 \\ z(x_0) = 0 \\ z'(x_0) = 0 \end{cases}$$

решение полученной ЗК единственно. Более того, оно равно нулю на всём I – противоречие. □

Лемма 4.5. *Нули любого нетривиального решениея приведённого уравнения не имеют конечной предельной точки на I.*

Доказательство. Пусть это не так, то есть существует $\{x_n\}$ – последовательность нулей $z(x)$, которая сходится к $x_0 \in I$. В силу непрерывности $z(x)$ имеем $\lim_{x \in x_0} z(x) = z(x_0) = \lim_{n\to\infty} z(x_n) = 0$. Значит x_0 – тоже нуль функции $z(x)$. Далее, по определению

$$z'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{z(x_n) - z(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

таким образом, x_0 оказался кратным нулём, что противоречит предыдущей лемме. □

Следствие. *Любое нетривиальное на $[\alpha, \beta] \subseteq I$ решение данного уравнения имеет не более конечного числа нулей на этом отрезке.*

Доказательство. От противного. Если их счётное количество, то для них получаем предельную точку нулей по теореме Больцано-Вейерштрасса, отсюда противоречие предыдущей лемме. □

Теорема 4.9. *Теорема Штурма.*

Рассмотрим $y'' + q(x)y = 0$ и $y'' + Q(x)y = 0$. Пусть $\forall x \in I: \ q(x) \leqslant Q(x)$ и пусть $y(x), z(x)$ – нетривиальные решения соответствующих уравнений. Если $x_1 \leqslant x_2$ – последовательные нули $y(x)$, то

- *Либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$*
- *Либо существует хотя бы одна точка $x_0 \in (x_1, x_2)$, для которого выполнено $z(x_0) = 0$*

Доказательство. Будем действовать от противного: предположим, что $z(x) \neq 0$ на (x_1, x_2), то есть, например, $z(x) > 0$. Без потери общности предположим, что $y(x) > 0$ на (x_1, x_2). Из условия теоремы: $y(x_1) = y(x_2) = 0$. Тогда

$$y'(x_1) = \lim_{x\to x_1+0} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \geqslant 0 \qquad y'(x_2) = \lim_{x\to x_2-0} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2} \leqslant 0$$

Но поскольку x_1, x_2 – простые нули, то $y'(x_1) > 0, y'(x_2) < 0$. Посчитаем $(y'' + q(x)y)z - (z'' + Q(x)z)y = 0$:

$$y''z - z''y = (Q - q)yz$$

Вычислим интеграл левой части:

$$\int_{x_1}^{x_2} (y''z - z''y)dx = \int_{x_1}^{x_2} zdy' - \int_{x_1}^{x_2} ydz' =$$
$$(zy')|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} y'dz - (yz')|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} z'dy =$$

При этом верно: $dz = z'dx, dy = y'dx$. Поэтому полученные интегралы совпадают и сокращаются.

$$= (zy')|_{x_1}^{x_2} - (yz')|_{x_1}^{x_2} = (zy')|_{x_1}^{x_2}$$

Тогда исходная разность принимает вид:

$$z(x_2)y'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (Q - q)yzdx \geqslant 0$$

Далее возможны следующие варианты:

- $z > 0$ на $[x_1, x_2]$
- $z > 0$ на $[x_1, x_2)$, и $z(x_2) = 0$
- $z > 0$ на $(x_1, x_2]$, и $z(x_1) = 0$

Заметим, что левая часть полученного выражения во всех случаях отрицательная $\Rightarrow$ противоречие. □

Следствие. *Если $q(x) \leqslant 0$, то любое нетривиальное решение уравнения $y'' + q(x)y = 0$ имеет не более одного нуля.*

Доказательство. Предположим, что есть нетривиальное решение $y(x)$, у которого есть 2 последовательных нуля.

Тогда пусть $Q(x) \equiv 0$, то есть $z'' = 0 \Rightarrow z = ax + b \neq 0$.

Возьмём $z \equiv 42$. Но эта функция не имеет ни одного нуля $\Rightarrow$ противоречие с теоремой Штурма. □

Следствие. *Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения $y''+q(x)y = 0$. Если x_1, x_2 – последовательные нули y_1, то между ними имеется ровно один нуль y_2.*

Доказательство. Положим $q(x) \equiv Q(x)$. Заметим, что y_1, y_2 не обращаются одновременно в нуль в x_1, x_2 (ввиду линейной независимости). Если предположить, что между x_1, x_2 лежит хотя бы два нуля y_2, то аналогичным образом получается, что между этими нулями есть хотя бы ещё один корень y_1. □

Следствие. *Если некоторое нетривиальное решение уравнения $y''+q(x)y = 0$ имеет бесконечно много нулей, то и любое другое решение также имеет бесконечно много нулей.*