

Содержание

1	Метрические пространства	2
1.1	Определения	2
1.2	Несложные утверждения	3
2	Полные метрические пространства	4
2.1	Теорема о вложенных шарах, теорема Бэра	4
2.2	Принцип сжимающих отображений.	5
3	Компактные метрические пространства	6
3.1	Компактность и центрированные системы замкнутых множеств	6
3.2	Критерий компактности	7
3.3	Теорема Арцела-Асколи	8

1 Метрические пространства

1.1 Определения

Определение 1.1. Метрическим пространством называется множества X с функцией $\rho : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, обладающей следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$, причём $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Функция ρ называется метрикой на множестве X .

Определение 1.2. Топологическим пространством называется множество X с системой $\tau \subseteq 2^X$, обладающей следующими свойствами:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $\forall G_1, G_2 \in \tau : G_1 \cap G_2 \in \tau$
3. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau : \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$

Система τ называется топологией на множестве X , а элементы системы τ – открытыми множествами.

Определение 1.3. Пусть X – метрическое пространство, $Y \subset X$. Подпространством пространства X называется метрическое пространство Y с метрикой, являющейся сужением метрики на X .

Определение 1.4. Пусть X – метрическое пространство. Множество $Y \subset X$ называется ограниченным, если выполнено условие $\sup_{x, y \in Y} \rho(x, y) < +\infty$

Определение 1.5. Пусть X – метрическое пространство, $x \in X, r > 0$:

- Открытым шаром называется множество

$$B(x, r) := \{y \in X \mid \rho(y, x) < r\}$$

- Замкнутым шаром называется множество

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid \rho(y, x) \leq r\}$$

Определение 1.6. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества M , если существует $r > 0$ такое, что $B(x, r) \subset M$. Внутренностью множества M называется множество $\text{int } M$ всех его внутренних точек. Множество M называется открытым, если $\text{int } M = M$.

Определение 1.7. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества M , если для любого $r > 0$ выполнено условие $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$. Замыканием множества M называется множество \overline{M} всех его точек прикосновения. Множество M называется замкнутым, если $\overline{M} = M$.

Определение 1.8. Пусть X – метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется:

- Плотным в множестве $B \subset X$, если $B \subset \overline{A}$
- Всюду плотным, если $X = \overline{A}$

Определение 1.9. Метрическое пространство X называется сепарабельным, если в X существует не более чем счётное всюду плотное множество.

Определение 1.10. Пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к точке $x \in X$, если $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Обозначение:

$$x_n \rightarrow_X x$$

Определение 1.11. Пусть X, Y – метрические пространства. $f : X \rightarrow Y$. Отображение f называется непрерывным в точке $x \in X$, если выполнено одно из следующих условий:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$
2. Для любой $\{x_n\} \subset X$ такой, что $x_n \rightarrow_X x$, выполнено $f(x_n) \rightarrow_Y f(x)$

1.2 Несложные утверждения

Лемма 1.1. *Неравенство Минковского.*

Пусть E – измеримое множество, на котором задана мера μ , и пусть $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые функции. Тогда выполнено следующее:

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Лемма 1.2. *Неравенство Гёльдера.*

Пусть E измеримое множество, на котором задана мера μ . Тогда для любых $p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, если $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$, то $f \cdot g \in L^1$, причём выполнено следующее:

$$\int_E |f(x)g(x)| d\mu \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Лемма 1.3. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Тогда множество M открыто \Leftrightarrow множество $X \setminus M$ замкнуто.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$x \in \overline{X \setminus M} \Leftrightarrow \forall r > 0 : B(x, r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \notin \text{int } M$$

Значит, $\text{int } M = M \Leftrightarrow \overline{X \setminus M} = X \setminus M$. □

Лемма 1.4. Пусть X – метрическое пространство. Тогда:

1. Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $B(x, r)$ – открытое.
2. Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $\overline{B}(x, r)$ – замкнутое.

3. Для любого множества $M \subset X$ множество $\text{int } M$ – открытое, причём наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в M .
4. Для любого множества $M \subset X$ множество \overline{M} – замкнутое, причём наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее M .

Доказательство. 1. Пусть $y \in B(x, r)$, тогда, по неравенству треугольника, $B(y, r - \rho(x, y)) \subset B(x, r)$, то есть $y \in \text{int } B(x, r)$.

2. Пусть $y \in \overline{B(x, r)}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $B(y, \varepsilon) \cap \overline{B(x, r)} \neq \emptyset$, откуда, по неравенству треугольника, $\rho(x, y) < r + \varepsilon$. В силу произвольности числа ε , получаем, что $\rho(x, y) \leq r$, то есть $y \in \overline{B(x, r)}$.

3. Для любого открытого множества $G \subset M$ выполнено $G = \text{int } G \subset \text{int } M$, поэтому, в частности, множество $\text{int } M$ открыто, как объединение всех содержащихся в M открытых множеств.

4. Для любого замкнутого множества $F \supset M$ выполнено $F = \overline{F} \supset \overline{M}$, поэтому, в частности, множество \overline{M} замкнуто, как пересечение всех содержащих M замкнутых множеств.

□

Лемма 1.5. Пусть X, Y – метрические пространства, $f : X \rightarrow Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- Отображение f непрерывно.
- Для любого открытого множества $G \subset Y$ множество $f^{-1}(G)$ тоже является открытым

Доказательство. • $(1 \Rightarrow 2)$ Зафиксируем произвольное открытое множество $G \subset Y$. Тогда, поскольку выполнено равенство $f^{-1}(G) = \bigcup_{y \in G} f^{-1}(y)$ и каждое множество $f^{-1}(y)$ является открытым (из определения непрерывности), множество $f^{-1}(G)$ тоже является открытым.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Зафиксируем произвольные $x \in X, \varepsilon > 0$. Множество $B(f(x), \varepsilon)$ является открытым, поэтому его прообраз тоже открыт, то есть существует $\delta > 0$ такое, что $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, что и даёт требуемое в силу произвольности выбора точки x и числа ε .

□

2 Полные метрические пространства

2.1 Теорема о вложенных шарах, теорема Бэра

Определение 2.1. Пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется фундаментальной, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Определение 2.2. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

Теорема 2.1. *О вложенных шарах.*

Пусть X – полное метрическое пространство. $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность вложенных замкнутых шаров такая, что $r_n \rightarrow 0$. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x^*\}$ для некоторой точки $x^* \in X$.

Доказательство. В силу вложенности шаров и условия $r_n \rightarrow 0$, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Тогда, поскольку пространство X полно, для некоторого $x^* \in X$ выполнено $x_n \rightarrow x^*$. Но каждый шар $\overline{B}(x_N, r_N)$ содержит все точки из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, начиная с номера N , тогда, в силу его замкнутости, он также содержит точку x^* .

Значит, $\{x^*\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$. Наконец, в силу условия $r_n \rightarrow +0$, других точек в пересечении быть не может. \square

Теорема 2.2. *Теорема Бэра.*

Пусть X – полное метрическое пространство. Тогда X нельзя представить в виде $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где множества $M_n \subset X$ – не плотные ни в одном шаре в X (нигде не плотные).

Доказательство. Предположим противное, то есть X имеет такой вид, как в условии. Положим $r_0 := 1$ и выберем произвольный шар $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X$. Поскольку M_1 неплотен в $\overline{B}(x_0, r_0)$, то

$$(X \setminus \overline{M}_1) \cap \overline{B}(x_0, r_0) \neq \emptyset$$

, поэтому можно выбрать шар

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0) : \overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{M}_1 = \emptyset$$

Можно считать, что $r_1 \leq \frac{1}{2}$. Повторим данное упражнение счётное количество раз...

Рассмотрим полученную последовательность вложенных шаров $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку $r_n \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, то, по предыдущей теореме, для некоторой точки $x^* \in X$ выполнено равенство

$$\{x^*\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$$

По предположению, $X = \bigcup M_n$, поэтому $\exists n : x^* \in M_n$, но по построению

$$\overline{B}(x^*, r_n) \cap \overline{M}_n = \emptyset$$

противоречие. \square

2.2 Принцип сжимающих отображений.

Теорема 2.3. *Теорема Банаха. Принцип сжимающих отображений.*

Пусть X – полное метрическое пространство, $f : X \rightarrow X$ – отображение такое, что выполнено следующее условие:

$$\exists \alpha \in (0, 1) \forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$$

Тогда

$$\exists! x^* : f(x^*) = x^*$$

Доказательство. Существование. Зафиксируем $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, где $x_{n+1} = f(x_n)$. Поскольку для $k \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq \alpha \rho(x_k, x_{k-1}) = \alpha \rho(f(x_{k-1}), f(x_{k-2})) \leq \dots \leq \alpha^k \rho(x_1, x_0)$$

то по неравенству треугольника получаем

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq (\alpha^{n+p-1} + \dots + \alpha^n) \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0)$$

Так как $\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, то $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна. Значит, из полноты пространства,

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$$

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ и пользуясь непрерывностью f , получаем $f(x^*) = x^*$.

Единственность. Предположим, что

$$\exists y^* \neq x^* : f(y^*) = y^* \Rightarrow \rho(x^*, y^*) = \rho(f(x^*), f(y^*)) \leq \alpha \rho(x^*, y^*)$$

Это возможно лишь когда $\rho(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$. □

3 Компактные метрические пространства

3.1 Компактность и центрированные системы замкнутых множеств

Определение 3.1. Метрическое пространство X называется компактным, если

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X : \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha = X : \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} : \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = X$$

Определение 3.2. Пусть X – метрическое пространство. Система $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$ называется центрированной, если

$$\forall \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} : \bigcap_{i=1}^n B_{\alpha_i} \neq \emptyset$$

Теорема 3.1. Метрическое пространство X компактно \Leftrightarrow любая центрированная система замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.

Доказательство. Каждой системе открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$ можно поставить в соответствие систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} := \{X \setminus G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ и наоборот.

Тогда любая система открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, не содержащая конечного подпокрытия, не является покрытием \Leftrightarrow любая центрированная система замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ имеет непустое пересечение (накиньте на одну из частей утверждения дополнения и поймите, что это одно и то же). □

3.2 Критерий компактности

Определение 3.3. Пусть M – некоторое множество в метрическом пространстве R . Тогда множества A из R называются ε -сетью для M , если

$$\forall x \in M \exists a \in A : \rho(x, a) \leq \varepsilon$$

Определение 3.4. Множество M в метрическом пространстве R называется ограниченным, если существует $B_\varepsilon(x_0)$ содержащий M .

Определение 3.5. Множество M в метрическом пространстве R называется вполне ограниченным, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть.

Лемма 3.1. Из вполне ограниченности следует ограниченность.

Доказательство. Из вполне ограниченности ограниченность следует получается, как объединение конечного числа ограниченных множеств. \square

Теорема 3.2. Критерий компактности.

Пусть X – метрическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. X компактно.
2. X полно и вполне ограничено.
3. Из любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, ещё говорят, что X – секвенциально компактно.
4. Любое бесконечное множество $M \subset X$ имеет предельную точку.

Доказательство. • $(1 \Rightarrow 2)$ X вполне ограничено, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ из открытого покрытия $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ по определению можно выделить конечное подпокрытие. Центры шаров этого подпокрытия и будут давать требуемую ε -сеть.

Пусть последовательность $\{x_n\} \subset X$ фундаментальна. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, тогда система $\{\overline{A_n}\}$ является центрированной системой замкнутых множеств. Система центрирована, потому что у любого конечного набора пересечением будет являться хвост, начинающийся с максимального из взятых индексов.

Поэтому можно выбрать точку $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \overline{A_n}$, причём $x_0 \in X$ по рассмотренному выше критерию компактности. В силу фундаментальности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : \overline{A_n} \subset \overline{B}(x_N, \varepsilon)$$

откуда и $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow_X x_0$.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Зафиксируем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Поскольку X вполне ограничено, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in X : |\{x_n\}_{n=1}^\infty \cap B(y, \varepsilon)| = +\infty$$

Будем применять это рассуждение сначала для всего пространства X , потом для шаров в X , содержащих бесконечно много точек из $\{x_n\}_{n=1}^\infty$:

- Для $\varepsilon := 1$ выберем $\{x_k^1\} \subset \{x_n\}$ так, что $\{x_k^1\} \subset B(y_1, 1)$
- Для $\varepsilon := \frac{1}{2}$ выберем $\{x_k^2\} \subset \{x_n^1\} \subset B(y_1, 1)$ так, что $\{x_k^2\} \subset B(y_2, \frac{1}{2})$
- ...

Рассмотрим диагональную последовательность $\{x_k^k\} \subset \{x_n\}$. По построению, она является фундаментальной, и в силу полноты пространства X , она сходится.

- (3 \Rightarrow 1) Проверим сначала, что X вполне ограничено. Предположим противное, то есть

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \{\bar{B}(y_n, \varepsilon_0)\}_{n=1}^N : \bigcup_{n=1}^N \bar{B}(y_n, \varepsilon_0) \not\supset X$$

Тогда можно выбрать точку $x_1 \in X$, затем точку $x_2 \in (X \setminus B(x_1, \varepsilon_0))$. По предположению, остаток, из которого берём элементы последовательности, никогда не будет пуст, поэтому получим последовательности с попарными расстояниями между точками не меньше ε_0 , из которой, очевидно, нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность – противоречие.

Теперь проверим, что X компактно. Предположим противное, то есть

$$\exists \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}, G_\alpha - \text{открытое} \forall \{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N : \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \not\supset X$$

Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X \forall \{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N : \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \not\supset B(x, \varepsilon)$$

(если такого шара нет, то из вполне ограниченности, складывая конечные покрытия конечного числа шаров, получим конечное покрытие всего множества).

Выбирая такую точку x_n для $\varepsilon := \frac{1}{n}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, получим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, из которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Пусть $x_{n_k} \rightarrow_X x_0 \in X$. Тогда существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $x_0 \in G_{\alpha_0}$. Но множество G_{α_0} открыто, поэтому оно покрывает некоторую окрестность точки x_0 , а значит и все шары $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$, начиная с некоторого номера – противоречие.

- (3 \Rightarrow 4) Зафиксируем бесконечное множество $M \subset X$, тогда, выбирая произвольным образом последовательность $\{x_n\} \subset M$ и выделяя из неё сходящуюся подпоследовательность, получим требуемое.
- (4 \Rightarrow 3) Зафиксируем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Если множество её значений конечно, то в ней можно выделить стационарную подпоследовательность. Если же множество её значений бесконечно, то оно имеет предельную точку $x_0 \in X$, поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \rightarrow_X x_0$

□

3.3 Теорема Арцела-Асколи

Определение 3.6. Обозначим за $C(X, Y)$ множество непрерывных функций $f : X \rightarrow Y$.

Теорема 3.3. Теорема Кантора.

Пусть X – компактное метрическое пространство, и функция $f \in C(X, \mathbb{R})$. Тогда f равномерно непрерывна на X .

Доказательство. Предположим противное, то есть выполнено следующее:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in X, \rho(x, y) < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Выбирая $\delta := \frac{1}{n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, получим последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$. Поскольку X компактно, можно выделить из них сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$, причём сходятся они к одной и той же точке $x_0 \in X$ по построению. Однако для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ – противоречие. \square

Теорема 3.4. Арцела-Асколи.

Пусть X – компактное метрическое пространство, $M \subset C(X, \mathbb{R})$. Тогда множество M вполне ограничено \Leftrightarrow множество M ограничено и выполнено условие равностепенной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta : \forall f \in M : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Доказательство. (\Rightarrow) Мы уже доказывали, что из вполне ограниченности следует обычная ограниченность, проверим условие равностепенной непрерывности. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем конечным набор функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(X, \mathbb{R})$, образующий ε -сеть.

По теореме Кантора, каждая из этих функций равномерно непрерывна. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$ – числа, соответствующие выбранному ε в определении равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_k > 0 \forall x, y \rho(x, y) < \delta_k : |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| < \varepsilon$$

Тогда для $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ выполнено требуемое:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| + |\varphi_k(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

(\Leftarrow) Поскольку множество M ограничено, то существует $C > 0$ такое, что

$$\forall f \in M : \|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq C$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем по нему $\delta > 0$ из условия равностепенной непрерывности.

Разобьём отрезок $[a, b]$ на части длины меньше δ точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

, а отрезок $[-C, C]$ – на части длины меньше ε точками

$$-C = y_0 < y_1 < \dots < y_m = C$$

и рассмотрим конечное множество L кусочно линейных функций, построенных по всевозможным наборам точек вида

$$\{(x_j, y_{i_k})\}_{j=0}^n, i_k \in \overline{0, m}$$

Из такого построению становится очевидно, что

$$\forall f \in M \exists \varphi \in L \forall i \in \{0, \dots, n\} : |f(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in [a, b]$ и выберем $i \in \{0, \dots, n-1\}$ такое, что $x \in [x_i, x_{i+1}]$, тогда:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x) - \varphi(x_i)| < 2\varepsilon + |\varphi(x) - \varphi(x_i)|$$

Первое слагаемое меньше ε из равностепенной непрерывности, а второе по построению φ . Оценим слагаемое $|\varphi(x) - \varphi(x_i)|$ отдельно:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - \varphi(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| < 3\varepsilon$$

Таким образом, $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| < 5\varepsilon$. Значит, построенное множество L образует конечную 5ε -сеть для множества M , тогда, в силу произвольности выбора числа ε , множество M вполне ограничено. \square