# Содержание

# 1 Метрические пространства

## 1.1 Определения

**Определение 1.1.** Метрическим пространством называется множество $X$ с функцией $\rho:\ X^2 \to \mathbb{R}$, обладающей следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in X:\ \rho(x,y) \geqslant 0$, причём $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X:\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\forall x, y, z \in X:\ \rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Функция $\rho$ называется метрикой на множестве $X$.

**Определение 1.2.** Топологическим пространством называется множество $X$ с системой $\tau \subseteq 2^X$, обладающей следующими свойствами:

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. $\forall G_1, G_2 \in \tau:\ G_1 \cap G_2 \in \tau$
3. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \tau:\ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha \in \tau$

Система $\tau$ называется топологией на множестве $X$, а элементы системы $\tau$ – открытыми множествами.

**Определение 1.3.** Пусть $X$ – метрическое пространство, $Y \subset X$. Подпространством пространства $X$ называется метрическое пространство $Y$ с метрикой, являющейся сужением метрики на $X$.

**Определение 1.4.** Пусть $X$ – метрическое пространство. Множество $Y \subset X$ называется ограниченным, если выполнено условие $\sup_{x,\,y \in Y} \rho(x,y) < +\infty$

**Определение 1.5.** Пусть $X$ – метрическое пространство, $x \in X, r > 0$:

- Открытым шаром называется множество

$$B(x,r) := \{y \in X \mid \rho(y,x) < r\}$$

- Замкнутым шаром называется множество

$$\overline{B}(x,r) := \{y \in X \mid \rho(y,x) \leqslant r\}$$

**Определение 1.6.** Пусть $X$ – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества $M$ , если

$$\exists r > 0:\ B(x,r) \subset M$$

Внутренностью множества $M$ называется множество $\operatorname{int} M$ всех его внутренних точек. Множество $M$ называется открытым, если $\operatorname{int} M = M$.

**Определение 1.7.** Пусть $(X, \rho)$ – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества $M$, если

$$\forall r > 0: \ B(x, r) \cap M \neq \varnothing$$

Замыканием множества $M$ называется множество $\overline{M}$ всех его точек прикосновения. Множество $M$ называется замкнутым, если $\overline{M} = M$.

**Определение 1.8.** Пусть $X$ – метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется:

- Плотным в множестве $B \subset X$, если $B \subset \overline{A}$
- Всюду плотным, если $X = \overline{A}$

**Определение 1.9.** Метрическое пространство $X$ называется сепарабельным, если в $X$ существует не более чем счётное всюду плотное множество.

**Определение 1.10.** Пусть $X$ – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к точке $x \in X$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to +\infty$. Обозначение:

$$x_n \to_X x$$

**Определение 1.11.** Пусть $X, Y$ – метрические пространства. $f: \ X \to Y$. Отображение $f$ называется непрерывным в точке $x \in X$, если выполнено одно из следующих условий:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$
2. Для любой $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ такой, что $x_n \to_X x$, выполнено $f(x_n) \to_Y f(x)$

## 1.2 Несложные утверждения

**Лемма 1.1.** *Неравенство Гёльдера.*

*Пусть $E$ измеримое множество, на котором задана мера $\mu$. Тогда для любых $p, q \geqslant 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, если $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$, то $f \cdot g \in L^1$, причём выполнено следующее:*

$$\int_E |f(x)g(x)| d\mu \leqslant \left( \int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся неравенством Юнга:

$$a, b \geqslant 0, 1 < p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Положим

$$A := \left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}; \quad B := \left( \int_E g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Если $A = 0 \Rightarrow f \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow f \cdot g \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow \int_E f \cdot g d\mu = 0$.

Если же $A = \infty, B > 0$, то $AB = \infty$ и аналогично остальные случаи с бесконечностями.

Если $0 < A, B < \infty \Rightarrow$ по неравенству Юнга имеем:

$$\frac{1}{AB} \int_E f \cdot g d\mu = \int_E \frac{f}{A} \frac{g}{B} d\mu \leqslant \int_E \left( \frac{1}{p} \left( \frac{f}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \frac{g}{B} \right)^q \right) d\mu = \frac{1}{p} \frac{\int_E f^p d\mu}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_E g^q d\mu}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

**Лемма 1.2.** *Неравенство Минсковского.*

*Пусть $E$ – измеримое множество, на котором задана мера $\mu$, и пусть $f, g: E \to \mathbb{R}$ – измеримые функции. Тогда выполнено следующее:*

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

*Доказательство.* Положим

$$A := \left(\int_E f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}; \quad B := \left(\int_E g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}; \quad C := \left(\int_E (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Будем полагать, что $A, B < \infty$. (Иначе неравенство тривиально). Тогда

$$(f+g)^p \leqslant (2\max\{f,g\})^p \leqslant 2^p(f^p+g^p) \Rightarrow C < \infty$$

Тогда введём $q := \frac{p}{p-1}$ и использум неравенство Гёльдера в следующем виде:

$$C^p = \int_E f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f+g)^{p-1} d\mu \overset{\text{Гёльдер}}{\leqslant}$$
$$\left(\int_E f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_E g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$(A+B)\left(\int_E (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = (A+B)C^{p-1}$$

□

**Лемма 1.3.** *Пусть $X$ – метрическое пространство, $M \subset X$. Тогда множество $M$ открыто $\Leftrightarrow$ множество $X \setminus M$ замкнуто.*

*Доказательство.* Достаточно заметить, что

$$x \in \overline{X \setminus M} \Leftrightarrow \forall r > 0: \ B(x,r) \cap (X \setminus M) \neq \varnothing \Leftrightarrow x \notin \operatorname{int} M$$

Значит, $\operatorname{int} M = M \Leftrightarrow \overline{X \setminus M} = X \setminus M$. □

**Лемма 1.4.** *Пусть $X$ – метрическое пространство. Тогда:*

1. *Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $B(x,r)$ – открытое.*
2. *Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $\overline{B}(x,r)$ – замкнутое.*
3. *Для любого множества $M \subset X$ множество int $M$ – открытое, причём наибольшее по включение открытое множество, содержащееся в $M$.*
4. *Для любого множества $M \subset X$ множество $\overline{M}$ – замкнутое, причём наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее $M$.*

*Доказательство.* 1. Пусть $y \in B(x,r)$, тогда, по неравенству треугольника, $B(y, r - \rho(x,y)) \subset B(x,r)$, то есть $y \in \operatorname{int} B(x,r)$.

2. Пусть $y \in \overline{\overline{B}(x,r)}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $B(y,\varepsilon) \cap \overline{B}(x,r) \neq \varnothing$, откуда, по неравенству треугольника, $\rho(x,y) < r + \varepsilon$. В силу произвольности числа $\varepsilon$, получаем, что $\rho(x,y) \leqslant r$, то есть $y \in \overline{B}(x,r)$.

3. Для любого открытого множества $G \subset M$ выполнено $G = \text{int G} \subset \text{int M}$, поэтому, в частности, множество int M открыто, как объединение всех содержащихся в $M$ открытых множеств.

4. Для любого замкнутого множества $F \supset M$ выполнено $F = \overline{F} \supset \overline{M}$, поэтому, в частности, множество $\overline{M}$ замкнуто, как пересечение всех содержащих $M$ замкнутых множеств.

□

**Лемма 1.5.** *Пусть $X, Y$ – метрические пространства, $f : X \to Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *Отображение $f$ непрерывно.*
- *Для любого открытого множества $G \subset Y$ множество $f^{-1}(G)$ тоже является открытм*

*Доказательство.*

- $(1 \Rightarrow 2)$ Зафиксируем произвольное открытое множество $G \subset Y$. Тогда, поскольку выполнено равенство $f^{-1}(G) = \bigcup_{y \in G} f^{-1}(y)$ и каждое множество $f^{-1}(y)$ является открытым (из определения непрерывности), множество $f^{-1}(G)$ тоже является открытым.
- $(2 \Rightarrow 1)$ Зафиксируем произвольные $x \in X, \varepsilon > 0$. Множество $B(f(x),\varepsilon)$ является открытым, поэтому его прообраз тоже открыт, то есть существует $\delta > 0$ такое, что $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$, что и даёт требуемое в силу произвольности выбора точки $x$ и числа $\varepsilon$.

□

# 2 Полные метрические пространства

## 2.1 Теорема о вложенных шарах, теорема Бэра

**Определение 2.1.** Пусть $X$ – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ называется фундаментальной, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} \,\forall n, m \geqslant N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Определение 2.2.** Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

**Теорема 2.1.** *О вложенных шарах.*

*Пусть $X$ – полное метрическое пространство. $\{\overline{B}(x_n,r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность вложенных замкнутых шаров такая, что $r_n \to 0$. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n,r_n) = \{x^*\}$ для некоторой точки $x^* \in X$.*

*Доказательство.* В силу вложенности шаров и условия $r_n \to 0$, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна. Тогда, поскольку пространство $X$ полно, для некоторого $x^* \in X$ выполнено $x_n \to x^*$. Но каждый шар $\overline{B}(x_N, r_N)$ содержит все точки из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, начиная с номера $N$, тогда, в силу его замкнутости, он также содержит точку $x^*$.

Значит, $\{x^*\} \subset \bigcap_{n=1}^\infty \overline{B}(x_n, r_n)$. Наконец, в силу условия $r_n \to +0$, других точек в пересечении быть не может. □

**Теорема 2.2.** *Теорема Бэра.*

*Пусть $X$ – полное метрическое пространство. Тогда $X$ нельзя представить в виде $X = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$, где множества $M_n \subset X$ – не плотные ни в одном шаре в $X$ (нигде не плотные)*

*Доказательство.* Предположим противное, то есть $X$ имеет такой вид, как в условии. Положим $r_0 := 1$ и выберем произвольный шар $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X$. Поскольку $M_1$ неплотно в $\overline{B}(x_0, r_0)$, то

$$(X \setminus \overline{M}_1) \cap \overline{B}(x_0, r_0) \neq \varnothing$$

, поэтому можно выбрать шар

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0) : \ \overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{M}_1 = \varnothing$$

Можно считать, что $r_1 \leqslant \frac{1}{2}$. Повторим данное упражнение счётное количество раз. . .

Рассмотрим полученную последовательность вложенных шаров $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^\infty$. Поскольку $r_n \leqslant \frac{1}{2^n} \to 0$, то, по предыдущей теореме, для некоторой точки $x^* \in X$ выполнено равенство

$$\{x^*\} = \cap_{n=0}^\infty \overline{B}(x_n, r_n)$$

По предположению, $X = \cup M_n$, поэтому $\exists n : \ x^* \in M_n$, но по построению

$$\overline{B}(x^*, r_n) \cap \overline{M}_n = \varnothing$$

противоречие. □

## 2.2 Принцип сжимающих отображений.

**Теорема 2.3.** *Теорема Банаха. Принцип сжимающих отображений.*

*Пусть $X$ – полное метрическое пространство, $f : X \to X$ – отображение такое, что выполнено следующее условие:*

$$\exists \alpha \in (0, 1)\, \forall x, y \in X : \ \rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \rho(x, y)$$

*Тогда*

$$\exists! x^* : \ f(x^*) = x^*$$

*Доказательство.* Существование. Зафиксируем $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, где $x_{n+1} = f(x_n)$. Поскольку для $k \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(f(x_k), f(x_{k-1})) \leqslant \alpha \rho(x_k, x_{k-1}) = \alpha \rho(f(x_{k-1}, f(x_{k-2}))) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^k \rho(x_1, x_0)$$

то по неравенству треугольника получаем

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant (\alpha^{n+p-1} + \cdots + \alpha^n)\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0)$$

Так как $\alpha^n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Значит, из полноты пространства,

$$\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$$

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ и пользуясь непрерывностью $f$, получаем $f(x^*) = x^*$.

Единственность. Предположим, что

$$\exists y^* \neq x^* : \ f(y^*) = y^* \Rightarrow \rho(x^*, y^*) = \rho(f(x^*), f(y^*)) \overset{f \text{ сжим}}{\leqslant} \alpha\rho(x^*, y^*)$$

Это возможно лишь когда $\rho(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$. □

# 3 Компактные метрические пространства

## 3.1 Компактность и центрированные системы замкнутых множеств

**Определение 3.1.** Метрическое пространство $X$ называется компактным, если

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset 2^X, G_\alpha \text{ - открытые} : \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha = X : \ \exists\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} : \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = X$$

**Определение 3.2.** Пусть $X$ – метрическое пространство. Система $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset 2^X$ называется центрированной, если

$$\forall \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} : \bigcap_{i=1}^n B_{\alpha_i} \neq \varnothing$$

**Теорема 3.1.** *Метрическое пространство $X$ компактно $\Leftrightarrow$ любая центрированная система замкнутых множеств в $X$ имеет непустое пересечение.*

*Доказательство.* Каждой системе открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset 2^X$ можно поставить в соответствие систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} := \{X \setminus G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ и наоборот.

Тогда любая система открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, не содержащая конечного подпокрытия, не является покрытием $\Leftrightarrow$ любая центрированная система замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ имеет непустое пересечение (накиньте на одну из частей утверждения дополнения и поймите, что это одно и то же). □

## 3.2 Критерий компактности

**Определение 3.3.** Пусть $M$ – некоторое множество в метрические пространстве $R$. Тогда множества $A$ из $R$ называется $\varepsilon$-сетью для $M$, если

$$\forall x \in M \ \exists a \in A : \ \rho(x, a) \leqslant \varepsilon$$

**Определение 3.4.** Множество $M$ в метрическом пространстве $R$ называется ограниченным, если

$$\exists B(x_0, \varepsilon) \supset M$$

**Определение 3.5.** Множество $M$ в метрическом пространстве $R$ называется вполне ограниченным, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная $\varepsilon$-сеть.

**Лемма 3.1.** *Из вполне ограниченности следует ограниченность.*

*Доказательство.* Из вполне ограниченности ограниченность получается, как объединение конечного числа ограниченных множеств. □

**Теорема 3.2.** *Критерий компактности.*

*Пусть $X$ – метрическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$X$ компактно.*
2. *$X$ полно и вполне ограниченно.*
3. *Из любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, ещё говорят, что $X$ – секвенциально компактно.*
4. *Любое бесконечное множество $M \subset X$ имеет предельную точку.*
5. *Любая непрерывная функция на $X$ является ограниченной.*

*Доказательство.*

- $(1 \Rightarrow 2)$ $X$ вполне ограниченно, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ из открытого покрытия $\{B(x,\varepsilon)\}_{x \in X}$ по определению можно выделить конечное подпокрытие. Центры шаров этого подпокрытия и будут давать требуемую $\varepsilon$-сеть.

  Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ фундаментальна. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, тогда система $\{\overline{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ является центрированной системой замкнутых множеств. Система центрирована, потому что у любого конечного набора пересечением будет являться хвост, начинающийся с максимального из взятых индексов.

  Поэтому можно выбрать точку $x_0 \in \cap_{n \in \mathbb{N}_+} \overline{A}_n$, причём $x_0 \in X$ по рассмотренному выше критерию компактности. В силу фундаментальности

  $$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N:\ \overline{A}_n \subset \overline{B}(x_N, \varepsilon)$$

  откуда и $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon \Rightarrow x_n \to_X x_0$.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Зафиксируем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Поскольку $X$ вполне ограниченно, то

  $$\forall \varepsilon > 0\, \exists y \in X:\ |\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cap B(y,\varepsilon)| = +\infty$$

  По сути просто принцип Дирихле – имеем конечное количество элементов $\varepsilon$-сети и бесконечное количество членов последовательности. Значит в один из шаров попадёт бесконечное число членов.

  Будем применять это рассуждение сначала для всего пространства $X$, потом для шаров в $X$, содержащих бесконечно много точек из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

  – Для $\varepsilon := 1$ выберем $\{x_k^1\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, что $\{x_k^1\}_{k=1}^{\infty} \subset B(y_1, 1)$
  – Для $\varepsilon := \frac{1}{2}$ выберем $\{x_k^2\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n^1\}_{n=1}^{\infty} \subset B(y_1, 1)$ так, что $\{x_k^2\}_{k=1}^{\infty} \subset B(y_2, \frac{1}{2})$

– ...

Рассмотрим диагональную последовательность $\{x_k^k\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$. По построению, она является фундаментальной, и в силу полноты пространства $X$, она сходится.

- $(3 \Rightarrow 1)$ Проверим сначала, что $X$ вполне ограниченно. Предположим противное, то есть
$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall \{\overline{B}(y_n, \varepsilon_0)\}_{n=1}^N :\ \bigcup_{n=1}^N \overline{B}(y_n, \varepsilon_0) \not\supset X$$
Тогда можно выбрать точку $x_1 \in X$, затем точку $x_2 \in (X \setminus B(x_1, \varepsilon_0))$. По предположению, остаток, из которого берём элементы последовательности, никогда не будет пуст, поэтому получим последовательности с попарными расстояниями между точками не меньше $\varepsilon_0$, из которой, очевидно, нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность – противоречие.

  Теперь проверим, что $X$ компактно. Предположим противное, то есть
$$\exists \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}, G_\alpha \text{ - открытое}\, \forall \{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N :\ \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \not\supset X$$
  Значит,
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x \in X\, \forall \{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N :\ \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \not\supset B(x, \varepsilon)$$
(если такого шара нет, то из вполне ограниченности, складывая конечные покрытия конечного числа шаров, получим конечное покрытие всего множества).

  Выбирая такую точку $x_n$ для $\varepsilon := \frac{1}{n}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, получим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, из которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Пусть $x_{n_k} \to_X x_0 \in X$. Тогда существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $x_0 \in G_{\alpha_0}$. Но множество $G_{\alpha_0}$ открыто, поэтому оно покрывает некоторую окрестность точки $x_0$, а значит и все шары $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$, начиная с некоторого номера – противоречие.

- $(3 \Rightarrow 4)$ Зафиксируем бесконечное множество $M \subset X$, тогда, выбирая произвольным образом последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ и выделяя из неё сходящуюся подпоследовательность, получим требуемое.

- $(4 \Rightarrow 3)$ Зафиксируем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Если множество её значений конечно, то в ней можно выделить стационарную подпоследовательность. Если же множество её значений бесконечно, то оно имеет предельную точку $x_0 \in X$, поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ такую, что $x_{n_k} \to_X x_0$

- $(1 \Rightarrow 5)$ Любая непрерывная функция на компакте достигает своего максимума и минимума (по какой-то теореме из матана), поэтому она ограниченная.

- $(5 \Rightarrow 2)$ Пусть $X$ не вполне ограниченное, значит
$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \exists \{x_n\}_{n=1}^\infty\, \forall n \neq m :\ \rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$$

Тогда определим такую функцию

$$f(x) := \begin{cases} n(\frac{\varepsilon_0}{4} - \rho(x, x_n)), x \in B_{\frac{\varepsilon_0}{4}}(x_n) \\ 0, \text{else} \end{cases}$$

Данное определение корректно, так как

$$\forall n, m : \; B_{\frac{\varepsilon_0}{4}}(x_n) \cap B_{\frac{\varepsilon_0}{4}}(x_m) = \varnothing$$

Заметим, что данная функция непрерывна, но не ограничена – противоречие.

Пусть $X$ не полно, тогда

$$\exists y \in \overline{X} \setminus X$$

Определим функцию на $X$:

$$f(x) = \frac{1}{\rho(x, y)}$$

Она, очевидно, непрерывна $\forall x \in X$, однако не является ограниченной – противоречие.

□

## 3.3 Теорема Арцела-Асколи

**Определение 3.6.** Обозначим за $C(X, Y)$ множество непрерывных функций $f : \, X \to Y$.

**Теорема 3.3.** *Теорема Кантора.*

*Пусть $X$ – компактное метрическое пространство, и функция $f \in C(X, \mathbb{R})$. Тогда $f$ равномерно непрерывна на $X$.*

*Доказательство.* Предположим противное, то есть выполнено следующее:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x, y \in X, \rho(x, y) < \delta : \; |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$$

Выбирая $\delta := \frac{1}{n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, получим последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку $X$ компактно, можно выделить из них сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, причём сходятся они к одной и той же точке $x_0 \in X$ по построению. Однако для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$ – противоречие. □

**Теорема 3.4.** *Арцела-Асколи.*

*Пусть $X$ – компактное метрическое пространство, $M \subset C(X, \mathbb{R})$. Тогда множество $M$ вполне ограниченно $\Leftrightarrow$ множество $M$ ограниченно и выполнено условие равностепенной непрерывности:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \; \exists \delta > 0 : \; \forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta : \; \forall f \in M : \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Мы уже доказывали, что из вполне ограниченности следует обычная ограниченность, проверим условие равностепенной непрерывности. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем конечным набор функций $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in C(X, \mathbb{R})$, образующий $\varepsilon$-сеть.

По теореме Кантора, каждая из этих функций равномерно непрерывна. Пусть $\delta_1, \cdots, \delta_n > 0$ – числа, соответствующие выбранному $\varepsilon$ в определении равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_k > 0 \, \forall x, y \, \rho(x, y) < \delta_k : \; |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| < \varepsilon$$

Тогда для $\delta := \min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$ выполнено требуемое:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| + |\varphi_k(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

($\Leftarrow$) Поскольку множество $M$ ограниченно, то существует $C > 0$ такое, что

$$\forall f \in M: \ \|f\| = \sup_{x\in[a,\, b]} |f(x)| \leqslant C$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем по нему $\delta > 0$ из условия равностепенной непрерывности.

Разобьём отрезок $[a, b]$ на части длины меньше $\delta$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

, а отрезок $[-C, C]$ – на части длины меньше $\varepsilon$ точками

$$-C = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = C$$

и рассмотрим конечное множество $L$ кусочно линейных функций, построенных по всевозможным наборам точек вида

$$\{(x_j, y_{i_k})\}_{j=0}^{n}, i_k \in \overline{0, m}$$

Из такого построению становится очевидно, что

$$\forall f \in M \, \exists \varphi \in L \, \forall i \in \{0, \cdots, n\}: \ |f(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in [a, b]$ и выберем $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ такое, что $x \in [x_i, x_{i+1}]$, тогда:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x) - \varphi(x_i)| < 2\varepsilon + |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$$

Первое слагаемое меньше $\varepsilon$ из равностепенной непрерывности, а второе по построению $\varphi$. Оценим слагаемое $|\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$ отдельно:

$$|\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1}) - \varphi(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| < 3\varepsilon$$

Таким образом, $\sup_{x\in[a,\, b]} |f(x) - \varphi(x)| < 5\varepsilon$. Значит, построенное множество $L$ образует конечную $5\varepsilon$-сеть для множества $M$, тогда, в силу произвольности выбора числа $\varepsilon$, множество $M$ вполне ограниченно. $\square$

# 4 Линейные нормированные пространства

## 4.1 Теорема Рисса

**Определение 4.1.** Линейным нормированным пространством над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, называется линейное пространство $E$ над $\mathbb{K}$ с функцией $\|\cdot\| : \ E \to \mathbb{R}$, обладающей следующими свойствами:

1. $\forall x \in E: \ \|x\| \geqslant 0$, причём $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\forall x \in E \, \forall \alpha \in \mathbb{K}: \ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

3. $\forall x, y \in E: \ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Функция $\|\cdot\|$ называется нормой на пространстве $E$.

**Лемма 4.1.** *Норма непрерывна, как функция $E \to \mathbb{R}_+$*

*Доказательство.*

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \ x_n \overset{n\to+\infty}{\to} x \Rightarrow \rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0$$

Дважды воспользуемся неравенством треугольника:

- $\|x_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$
- $\|x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x_n\|$

Таким образом, $|\|x_n\| - \|x\|| \to 0$, то есть $\|x_n\| \to \|x\|$, что и требовалось. □

**Определение 4.2.** Пусть $E$ – линейное нормированное пространство. Множество $L \subset E$ называется:

- Линейным многообразием в $E$, если $L$ замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры из $\mathbb{K}$.
- Подпространством в $E$, если $L$ является линейным многообразием в $E$ и при этом замкнуто.

**Лемма 4.2.** *О почти перпендикуляре.*
*Пусть $E$ – линейное нормированное пространство, $L \subsetneq E$ – подпространство. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in E \ \|y\| = 1: \ \rho(y, L) := \inf_{z \in L} \|y - z\| \geqslant 1 - \varepsilon$$

*Доказательство.* Зафиксируем $y_0 \in E \setminus L$ и положим $d := \rho(y_0, L) > 0$. Выберем вектор $z_0 \in L$ такой, что $d \leqslant \|y_0 - z_0\| \leqslant d(1+\varepsilon)$ и покажем, что подходит вектор $y := \frac{y_0 - z_0}{\|y_0 - z_0\|} := \alpha(y_0 - z_0)$. Действительно, $\|y\| = 1$, и для любого $z \in L$ выполнены неравенства:

$$\|y - z\| = \|\alpha(y_0 - z_0) - z\| = |\alpha| \|y_0 - \left(z_0 + \frac{1}{\alpha} z\right)\| \geqslant |\alpha| d \geqslant \frac{d}{d(1+\varepsilon)} \geqslant 1 - \varepsilon$$

Для осмысления последних переходов вникните в следующее утверждение:

$$\|y_0 - z_0\| \leqslant d(1+\varepsilon) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\|y_0 - z_0\|} \geqslant \frac{1}{d(1+\varepsilon)}$$

А также не забывайте про разложение Тейлора:

$$\frac{1}{1+x} \geqslant 1 - x$$

□

**Определение 4.3.** Пусть $E$ – линейное нормированное пространство, $M \subset E$. Линейной оболочкой множества $M$ называется множество следующего вида:

$$\langle M \rangle := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_i m_i \mid \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{K}, \{m_i\}_{i=1}^{n} \subset M \right\}$$

**Теорема 4.1.** *Рисса.*

*Пусть $E$ – линейное нормированное пространство. Тогда единичная сфера $S(0,1)$ компактна в $E \Leftrightarrow \dim E < +\infty$*

*Доказательство.* ($\Leftarrow$) По эквивалентности норм конечномерных пространствах (теорема будет далее), все нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны, а относительно евклидовой нормы сфера $S(0,1)$ компактна.

($\Rightarrow$) От противного. Зафисиксируем $\varepsilon > 0$ и построим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(0,1)$ с попарными расстояниями не меньше $1-\varepsilon$, из чего будет следовать, что сфера $S(0,1)$ не вполне ограничена и потому не компактна:

- Выберем $x_1 \in S(0,1)$ произвольным образом
- По предыдущей лемме выберем $x_2 \in S(0,1) \setminus \langle x_1 \rangle$ такое, что $\rho(x_2, \langle x_1 \rangle) \geqslant 1-\varepsilon$, причём утверждение применимо, так как линейная оболочка конечномерна, а линейная оболочка конечного числа элементов к тому же замкнута, а значит это действительно подпространство.
- ...

Поскольку $\dim E = +\infty$, то процесс не закончится, и будет получена искомая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

## 4.2 Характеристическое свойство евклидовых пространств...

**Определение 4.4.** Евклидовым пространством над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, называется линейное пространство $E$ над $\mathbb{K}$ с функцией $(\cdot,\cdot) : E^2 \to \mathbb{K}$, обладающее следующими свойствами:

1. $\forall x \in E : (x,x) \geqslant 0$, причём $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x, y \in E : (x,y) = \overline{(y,x)}$
3. $\forall x, y, z \in E : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$

**Определение 4.5.** Полное линейное нормированное пространство $E$ называется банаховым.

**Определение 4.6.** Полное евклидово пространство $H$ называется гильбертовым.

**Теорема 4.2.** *Характеристическое свойство Евклидовых пространств.*

*Пусть $E$ – линейное нормированное пространство. Тогда норма в $E$ порождается скалярным произведением $\Leftrightarrow$*

$$\forall x, y \in E : \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Распишем квадраты норм, как скалярные произведения элементов самих на себя:

$$\langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = \langle x,x \rangle + 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle + \langle x,x \rangle - 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

($\Leftarrow$) Без доказательства, очень-очень сложно □

## 4.3 Эквивалентность норм в конечномерном пространстве...

**Определение 4.7.** Две нормы $p, q : V \to \mathbb{R}_+$ над пространством $V$ называются эквивалентными, если

$$\exists C_1, C_2 > 0 \, \forall x \in V : \; C_1 p(x) \leqslant q(x) \leqslant C_2 p(x)$$

**Лемма 4.3.** *Пусть $E$ – линейное нормированное пространство, и $\dim E < +\infty$. Тогда любые две нормы на $E$ эквивалентны.*

*Доказательство.* (Доказательство для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Поскольку $E$ конечномерно, то в нём можно выбрать максимальную по включению линейно независимую систему $e = \{e_1, \cdots, e_n\} \subset E$, тогда $e$ будет являться базисом в $E$. Для произвольного элемента $x \in E$, имеющего в базисе $e$ координатный столбец $\alpha \in \mathbb{R}^n$, зададим его евклидову норму следующим образом:

$$\|x\|_e = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}$$

Зафиксируем произвольную норму $\|\cdot\|$ и докажем, что она эквивалентна норме $\|\cdot\|_e$:

1. Покажем, что $\|\cdot\| < C\|\cdot\|_e$ для некоторого $C > 0$. Для произвольного $x \in E$, имеющего в базисе $e$ координатный столбец $\alpha \in \mathbb{R}^n$, выполнено следующее:

   $$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|e_k\| \left( \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \right)$$

   Поскольку для любого $k \in \{1, \cdots, n\}$ выполнено $\alpha_k < \|x\|_e$, то достаточно взять число $C := n \cdot \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|e_k\|$

2. Покажем теперь, что $\|\cdot\|_e < \tilde{C}\|\cdot\|$ для некоторого $\tilde{C} > 0$. Предположим противное, тогда

   $$\forall n \in \mathbb{N} \, \exists x_n \in E : \; \|x_n\|_e > n\|x_n\|$$

   Можно без ограничения общности считать, что $\|x_n\|_e = 1$ для любого $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x_n\| < \frac{1}{n}$

   Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержится в единичной сфере $S_e(0,1)$ и относительно евклидовой нормы сфера компактна, можно выделить из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся относительно евклидовой нормы. Тогда

   $$\exists x \in S_e(0,1) : \; \|x_{n_k} - x\|_e \overset{k \to +\infty}{\to} 0$$

   Тогда в силу предыдущего пункта $\|x_{n_k} - x\| \to 0$. Но по построению $\|x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} \overset{k \to +\infty}{\to} 0$, поэтому $x = 0$ – противоречие с тем, что $x \in S_e(0,1)$.

$\square$

**Следствие.** *Пусть $E$ – линейное нормированное пространство $x_1, \cdots, x_n \in E$. Тогда линейная оболочка $L := \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ образует подпространство в $E$.*

*Доказательство.* Заметим, что $\dim L < +\infty$, и по предыдущему утверждению сужение нормы из $E$ на $L$ эквивалентно евклидовой норме. Относительно евклидовой нормы конечномерное пространство полно, поэтому и $L$ полно относительно нормы из $E$. Следовательно, $L$ замкнуто, как подмножество в $E$. $\square$

**Определение 4.8.** Линейным топологическим пространством называется топологическое пространство $X$ с определёнными на нём операциями сложения и умножения на числа из поля $\mathbb{K}$, непрерывными на $X$.

**Пример.** Любое линейное нормированное пространство $E$ является линейным топологическим.

## 4.4 Теорема Рисса о проекции

**Определение 4.9.** Пусть $E$ – линейное нормированное пространство, $L \subset E$ – линейное нормированное подпространство, $h \in E$. Элементом наилучшего приближения для $h$ называется $x \in L$ такой, что $\|h - x\| = \rho(h, L) = \inf_{y \in L} \|h - y\|$

**Лемма 4.4.** *Пусть $H$ – гильбертово пространство, $M \subset H$ – подпространство в $H$. Тогда для любого $h \in H$ существует единственный элемент наилучшего приближения $x \in M$.*

*Доказательство.* Зафиксируем $h \in H$. Сначала докажем, что элемент наилучшего приближения для $h$ существует.

Положим $d := \rho(h, M)$. Если $d = 0$, то, в силу замкнутости множества $M$, выполнено $h \in M$, и в качестве элемента наилучшего приближения для $h$ подходит сам $h$. Иначе выберем $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ такую, что $\|h - x_n\| \overset{n\to+\infty}{\to} d$. По равенству параллелограмма,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: \ \|x_n - x_m\|^2 = 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - 4\left\|h - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

Поскольку $\|h - x_n\|^2 \overset{n\to+\infty}{\to} d^2$, $\|h - x_m\|^2 \overset{m\to+\infty}{\to} d^2$ и выполнено неравенство $\|h - \frac{x_n + x_m}{2}\|^2 \geqslant d^2$ (норма любой разности $h$ и чего-либо из $M$ будет не меньше расстояния) , последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Поскольку пространство $H$ полно, а $M$ замкнуто, то существует $x \in M$ такой, что $x_n \to_H x$, причём, в силу непрерывности нормы (4.1), $\|h - x\| = d$

Покажем теперь, что элемент наилучшего приближения для $h$ единственен. Пусть для некоторого $y \in M$ тоже выполнено равенство $\|h - y\| = d$, тогда, по равенству параллелограмма, выполнено следующее:

$$4d^2 = 2\|h - x\|^2 + 2\|h - y\|^2 = \|x - y\|^2 + 4\left\|h - \frac{x + y}{2}\right\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 + 4d^2$$

Для данной цепочки мы воспользовались следующими равенствами:

$$h - x + h - y = 2h - x - y = 2\left(h - \frac{x + y}{2}\right); \ h - x - h + y = -(x - y)$$

Итак, $\|x - y\| = 0 \Rightarrow x = y$, что и требовалось. $\square$

**Определение 4.10.** Пусть $E$ – евклидово пространство, $S \subset E$. Аннулятором множества $S$ называется следующее множество:

$$S^{\perp} := \{y \in E \mid \forall x \in S:\ (x, y) = 0\}$$

**Замечание.** Легко проверить, что $S^{\perp}$ является подпространством в $E$. Кроме того, выполнены равенства

$$S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp} = \overline{\langle S \rangle}^{\perp}$$

**Теорема 4.3.** *Рисса, о проекции.*

*Пусть $H$ – гильбертово пространство, $M \subset H$ – подпространство в $H$. Тогда $H = M \oplus M^{\perp}$.*

*Доказательство.* Покажем сначала, что $H = M + M^{\perp}$ (разложение существует, но м.б. не единственно).

Зафиксируем $h \in H$, и по утверждению о наилучшем приближении, выберем $x \in M$. Положим $y := h - x$ и $d := \|y\|$, тогда для произвольного $m \in M$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ выполнено следующее:

$$d^2 = \|h - x\|^2 \leqslant \|h - (x + \alpha m)\|^2 = d^2 - 2\alpha(h - x, m) + \alpha^2 \|m\|^2 \Rightarrow (y, m) \leqslant \frac{\alpha}{2}\|m\|^2$$

В силу произвольности $\alpha$ получаем, что $(y, m) = 0 \Rightarrow y \in M^{\perp}$, причём $h = x + y$. Значит, выполнено равенство $H = M + M^{\perp}$.

Проверим теперь, что рассматриваемая сумма действительно прямая. Если $z \in M \cap M^{\perp} \Rightarrow (z, z) = 0 \Rightarrow z = 0$, что и означает требуемое. $\square$

## 4.5 Сепарабельные гильбертовы пространства

**Определение 4.11.** Пусть $E$ – линейное нормированное пространство. Система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ называется базисом Шаудера в $E$, если

$$\forall x \in E\ \exists! \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}:\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

**Лемма 4.5.** *Неравенство Бесселя.*

*Пусть $E$ – евклидово пространство, элементы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$ образуют ортонормированную систему. Тогда для любого $x \in E$ выполнено следующее неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

*Доказательство.* Достаточно заметить, что в силу ортонормированности системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполнено следующее равенство:

$$0 \leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$$

Поскольку левая часть равенства неотрицательна, то неотрицательна и правая часть, и верно это даже после предельного перехода $n \to +\infty$. $\square$

**Лемма 4.6.** *Пусть $E$ – евклидово пространство, элементы $e_1, \cdots, e_k \in E$ образуют ортонормированную систему. Тогда*

$$\forall x \in E\, \forall \{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{K} : \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| \geqslant \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right\|$$

*Более того, равенство в неравенстве выше достигается тогда и только тогда, когда*

$$\forall k \in \overline{1, n} : \ \alpha_k = (x, e_k)$$

*Доказательство.* В силу ортонормированности системы $\{e_k\}_{k=1}^n$, выполнены следующие равенства:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| = \left( x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^n \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n ((x, e_k) - \alpha_k)^2$$

□

**Теорема 4.4.** *Пусть $H$ – сепарабельное гильбертово пространство,* $\dim H = +\infty$ *и $e = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная система. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$e$ – ортонормированный базис в $H$*
2. *$\overline{\langle e \rangle} = H$, то есть $e$ – полная система.*
3. *Для любого $h \in H$ выполнено равенство Парсеваля:*

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(h, e_n)|^2$$

4. *$e^\perp = \{0\}$*

*Доказательство.*
- $(1 \Rightarrow 2)$ Очевидно из определения базиса.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Зафиксируем произвольный $h \in H$ и произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, существует конечный набор $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ такой, что $\|h - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\| < \varepsilon$. Тогда, по предыдущей лемме, выполнено также неравенство $\|h - \sum_{k=1}^n (h, e_k) e_k\| < \varepsilon$. Тогда, в силу произвольности числа $\varepsilon$, выполнено равенство $h = \sum_{n=1}^\infty (h, e_n) e_n$.

  Проверим теперь, что разложение элемента $h$ единственно. Пусть для некоторого набора $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}$ выполнено равенство $h = \sum_{n=1}^\infty \beta_n e_n$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$, скалярно умножая частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^\infty \beta_n e_n$ на $e_k$ и переходя к пределу, получаем, что $\beta_k = (h, e_k)$, что и означает требуемое.

- $(1 \Leftrightarrow 3)$ Уже было замечено, что для любого $h \in H$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено следующее:

$$\left\| h - \sum_{k=1}^n (h, e_k) e_k \right\| = \|h\|^2 - \sum_{k=1}^n |(h, e_k)|^2$$

  Значит, $h = \sum_{n=1}^\infty (h, e_n) e_n \Leftrightarrow \|h\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(h, e_n)|^2$, и единственность разложения элемента $h$ дказывается так же, как и в импликации выше.

- (2 $\Leftrightarrow$ 4) Из теоремы Рисса (о проекции) и равенства $e^{\perp} = \overline{\langle e \rangle}^{\perp} = H^{\perp}$ получаем требуемое.

$\square$

# 5 Линейные ограниченные операторы в линейных нормированных пространствах

## 5.1 Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора

**Определение 5.1.** Пусть $E_1, E_2$ – линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Тогда $A:\ E_1 \to E_2$ будем называть оператором, а $f:\ E \to \mathbb{K}$ – функционалом.

**Определение 5.2.** Оператор $A$ называется ограниченным, если для любого ограниченного $M \subset E_1$ образ $A(M)$ ограничен в $E_2$.

**Определение 5.3.** Для линейных операторов можно ввести следующие определения:

- Образ оператора:
$$\operatorname{Im} A = \{y \in E_2 \mid \exists x \in E_1:\ Ax = y\}$$
- Ядро оператора:
$$\ker A = \{x \in E_1 \mid Ax = 0\}$$

**Определение 5.4.** Линейный оператор $A$ называется непрерывным, если для любой последовательности $x_n \to x$ выполнено $Ax_n \to Ax$.

**Теорема 5.1.** *Пусть $E_1, E_2$ – линейные нормированные пространства. $A:\ E_1 \to E_2$ – линейный оператор. Тогда $A$ – ограниченный тогда и только тогда, когда $A$ – непрерывный.*

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Как мы знаем, $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$. Тогда

$$\|Ax_n - Ax\|_{E_2} = \|A(x_n - x)\|_{E_2} \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x\|_{E_1} \to 0$$

($\Leftarrow$) Предположим противное, то есть $A$ не является ограниченным:

$$\forall K \exists x:\ \|Ax\|_{E_2} > K\|x\|_{E_1}$$

Пусть $K$ пробегает все натуральные числа, тогда образуется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\|Ax_n\|_{E_2} > n\|x_n\|_{E_1}$. Все $x_n$, очевидно, ненулевые. Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|_{E_1}} \to 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ \|Ay_n\|_{E_2} = \frac{\|Ax_n\|_{E_2}}{n\|x_n\|_{E_1}} > 1$$

Но из-за непрерывности оператора $Ay_n \to A0 = 0$. Противоречие. $\square$

## 5.2 Топологии и сходимости в пространстве операторов...

**Лемма 5.1.** *Если $A$ – линейный оператор, то следующие условия эквивалентны:*

1. *$A$ – ограниченный*
2. *$\exists K : \|Ax\|_{E_2} \leqslant K\|x\|_{E_1}$*
3. *Образ единичного шара под действием оператора $A$ ограничен*

*Доказательство.* $(1 \Rightarrow 2)$ Если $A$ – ограниченный, то образ любого ограниченного множества ограничен. В частности, образ единичного шара $B$ ограничен. То есть

$$\exists K \, \forall x \neq 0 : \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_{E_1}}\right) \right\|_{E_2} \leqslant K$$

В силу линейности оператора:

$$\exists K \, \forall x \neq 0 : \|Ax\|_{E_2} \leqslant K\|x\|_{E_1}$$

$(2 \Rightarrow 3)$ Если

$$\exists K : \|Ax\|_{E_2} \leqslant K\|x\|_{E_1}$$

, то $\forall x : \|x\|_{E_1} \leqslant 1$ получаем, что $\|Ax\|_{E_2} \leqslant K$. То есть образ единичного шара ограничен.
$(3 \Rightarrow 1)$

$$\exists K \, \forall x, \|x\|_{E_1} = 1 : \|Ax\|_{E_2} \leqslant K$$

Пусть $M \subset E_1$ ограничено, то есть лежит в шаре радиуса $R$. Далее считаем, что $x \neq 0$:

$$\forall x \in M : \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_{E_1}}\right) \right\| \leqslant K \Rightarrow \forall x \in M : \|Ax\|_{E_2} \leqslant K\|x\|_{E_1} \leqslant K \cdot R$$

□

**Определение 5.5.** Нормой линейного ограниченного оператора $A$ называется

$$\|A\| = \inf\{K \mid \forall x : \|Ax\|_{E_2} \leqslant K\|x\|_{E_1}\}$$

**Определение 5.6.** $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из $E_1$ в $E_2$. Оно образует линейное пространство над $\mathbb{K}$.

**Определение 5.7.** Двойственное или сопряжённое пространство – это

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $E$ – линейное нормированное пространство.

**Теорема 5.2.** *Пусть $E_1, E_2$ – линейные нормированные пространства. Тогда*

1. *$\mathcal{L}(E_1, E_2)$ – линейное нормированное пространство с нормой $\|A\|$.*
2. *Если $E_2$ – банахово, то $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ – банахово.*

*Доказательство.* 1. Линейность данного пространства очевидна. Проверим неравенство треугольника для нормы:

$$\|A_1+A_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_1+A_2)x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \{\|A_1x\|+\|A_2x\|\} \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|A_1x\|+\sup_{\|x\|=1} \|A_2x\| = \|A_1\|+\|A_2\|$$

2. Покажем, что $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ – полное, если $E_2$ – полное.

   Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ – фундаментальна, то есть

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n, m \geqslant N : \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

   Заметим, что

   $$\forall x \in S_{E_1}(0,1)\, \|A_nx - A_mx\| = \|(A_n - A_m)x\| \leqslant \|A_n - A_m\|\|x\|_{E_1} < \varepsilon$$

   Получается, что $\forall x \in S_{E_1}(0,1)$ последовательность $\{A_nx\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Так как $E_2$ – полное, то эта последовательность сходится. Обозначим её предел через $Ax$. $A$, очевидно, линейный оператор. Покажем, что он ограничен.

   Так как $\|\cdot\|$ – непрерывная функция, то $\|A_nx\|_{E_2} \to \|Ax\|_{E_2}$. Воспользуемся тем, что $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена (из-за фундаментальности), то есть

   $$\exists K\, \forall n : \|A_n\| \leqslant K \Rightarrow \|A_nx\|_{E_2} \leqslant \|A_n\|\|x\|_{E_1} \leqslant K\|x\|_{E_1}$$

   Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем, что $\|Ax\| \leqslant K\|x\|_{E_1}$. Таким образом, $A$ является ограниченным линейным оператором и лежит в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Осталось показать, что $A_n \to A$.

   Вспомним фундаментальность:

   $$\forall x \in S_{E_1}(0,1) : \|A_nx - A_mx\|_{E_2} < \varepsilon$$

   Зафиксируем номер $n$ и устремим $m$ к бесконечности. Тогда

   $$\forall x \in S_{E_1}(0,1) : \|A_nx - Ax\| \leqslant \varepsilon$$

   А значит

   $$\sup_{\|x\|=1} \|A_nx - Ax\| \leqslant \varepsilon$$

   Это и означает, что $\|A_n - A\| \to 0$, то есть $A_n \to A$.

□

**Следствие.** *Если $E$ – линейное нормированное пространство, то $E^*$ всегда полное.*

## 5.3 Задача о продолжении непрерывного отображения

**Теорема 5.3.** *Пусть $E_1$ – линейное нормированное пространство, $E_2$ – банахово пространство и $A$ – линейный ограниченный оператор: $A : D(A) \to E_2$, где $D(A)$ – линейное многообразие в $E_1 = \overline{D(A)}$. Тогда $\exists! \tilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$:*

1. *$\tilde{A}|_{D(A)} = A$*

2. $\|\tilde{A}\| = \|A\|$

*Доказательство.* Единственность.

Пусть есть $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2$. Из замкнутости $E_1$:

$$\forall x \in E_1\ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) :\ x_n \to x$$

При этом, $\tilde{A}^1 x = \lim_{n\to+\infty} Ax_n = \tilde{A}^2 x$. Значит, $\tilde{A}^1 = \tilde{A}^2$.

Существование.

Определим оператор $\tilde{A}$ по формуле $\tilde{A}x = \lim_{n\to+\infty} Ax_n$. Для коректности необходимо показать:

- Предел $\lim_{n\to+\infty} Ax_n$ существует
- Предел не зависит от выбора $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
- Действительно $\tilde{A}|_{D(A)} = A$

Покажем:

- Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, она фундаментальна, значит последовательность $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_2$ фундаментальна. Пространство $E_2$ банахово, поэтому предел $\lim_{n\to+\infty} Ax_n$ существует.
- Пусть есть две последовательности $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n''\}_{n=1}^{\infty}$, сходящиеся к одному и тому же $x \in E_1$, но пусть пределы $\lim_{n\to+\infty} Ax_n'$, $\lim_{n\to+\infty} Ax_n''$ разные. Тогда возьмём последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, полученную чередованием элементов $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n''\}_{n=1}^{\infty}$. Но получим, что $\{Ay_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится. Противоречие предыдущему пункту.
- Возьмём константную последовательность $\{x\}_{n=1}^{\infty}, x \in D(A)$. Очевидно, что $\lim_{n\to+\infty} Ax = Ax$. По предыдущему пункту $\lim_{n\to+\infty} Ax_n$ не зависит от выбора последовательности, значит $\tilde{A}|_{D(A)} = A$.

Осталось показать, что $\tilde{A}$ – линейный ограниченный оператор. Линейность очевидна из линейности $A$ и предела.

Ограниченность (а значит и непрерывность) очевидна из непрерывности нормы:

$$\tilde{A}x = \lim_{n\to+\infty} Ax_n \Leftrightarrow \|Ax_n\| \to \|\tilde{A}x\|$$

□

## 5.4 Теорема Банаха-Штейнгауза

**Теорема 5.4.** *Теорема Банаха-Штейнгауза.*

*Пусть $X, Y$ – линейные нормированные пространства, причём $X$ полно. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ – семейство линейных непрерывных операторов. Тогда*

$$\forall x \in X :\ \sup\{\|Ax\|_Y \mid A \in \mathcal{A}\} < +\infty \Rightarrow \sup\{\|A\| \mid A \in \mathcal{A}\} < +\infty$$

*То есть, из поточечной ограниченности следует равномерная ограниченность.*

*Доказательство.* Пусть

$$X_n = \{x \in X \mid \sup_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\|_Y \leqslant n\} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \{x \in X \mid \|Ax\|_Y \leqslant n\}$$

Для любого $A \in \mathcal{A}$ множество $\{x \in X \mid \|Ax\|_Y \leqslant n\}$ замкнуто, как образ замкнутого шара $\overline{B}(0, n) \subset Y$ под действием непрерывного отображения $A$, а пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто.

Так как $\cup_{n=1}^{\infty} X_n = X$, то по теореме Бэра ($X$ полное, а значит все $X_n$ не могут быть не плотными ни в одном шаре, а значит найдётся $m$ и какой-то шар, в котором $X_m$ плотно):

$$\exists m \, \exists \overline{B}(x_0, \varepsilon) : \, \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq X_m$$

Пусть $u \in X, \|u\|_X = 1$. Тогда рассмотрим $A \in \mathcal{A}$:

$$\|Au\|_Y = \frac{1}{\varepsilon}\|A[\varepsilon u] + Ax_0 - Ax_0\|_Y = \frac{1}{\varepsilon}\|A[x_0 + \varepsilon u] - Ax_0\|_Y \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\|A[x_0 + \varepsilon u]\|_Y + \|Ax_0\|_Y\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(m + m)$$

Последнее неравенство верно из-за того, что $x_0 \in X_m, x_0 + \varepsilon u \in \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset X_m$. В неравенстве сверху можно перейти к супремуму по $u$ и получить, что

$$\forall A \in \mathcal{A} : \, \|A\| \leqslant \frac{2m}{\varepsilon} < +\infty$$

□

## 5.5 Полнота пространства. . .

**Теорема 5.5.** *Полнота $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ относительно поточечной сходимости.*

*Пусть $E_1, E_2$ – банаховы пространства, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, причём $\forall x \in E_1$ : $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная в $E_2$. Тогда*

$$\exists A \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \, \forall x \in E_1 : \, \lim_{n \to +\infty} A_n x = Ax$$

*Доказательство.* Так как $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в банаховом $E_2$, то $\exists \lim_{n \to +\infty} A_n x, Ax := \lim_{n \to +\infty} A_n x$.

Осталось показать, что определённый таким образом оператор – линейный непрерывный. Линейность очевидна из линейности предела и каждого $A_n$.

Так как $\forall x \in E_1 : \, \{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно ограничена и по теореме Банаха-Штейнгауза ограничена равномерна:

$$\exists M \, \forall n \in \mathbb{N} : \, \|A_n\| \leqslant M$$

Тогда

$$\|A_n x\| \leqslant \|A_n\| \cdot \|x\| \leqslant M\|x\|, \|A_n x\| \to \|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \leqslant M\|x\|$$

То есть оператор ограничен и непрерывен, а значит $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. □

**Теорема 5.6.** *Критерий поточечной сходимости операторов из $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.*

*Пусть $E_1$ – банахово, $E_2$ – линейное нормированное пространство. Верно, что $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$:*

$$A_n \overset{\text{поточечно}}{\to} A \Leftrightarrow \begin{cases} \exists M \, \forall n : \, \|A_n\| \leqslant M \\ \forall s \in S, E_1 =: \overline{\langle S \rangle} : \, A_n s \to As \end{cases}$$

*Доказательство.* ($\Rightarrow$) Пункт 2 очевиден. Из поточечной сходимости $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ следует поточечная ограниченность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$. Значит, по теорема Банаха-Штейнгауза последовательность $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

($\Leftarrow$) Так как множество $\langle S \rangle$ всюду плотно в $E_1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in E_1 \, \exists y \in \langle S \rangle : \, \|x - y\| < \varepsilon$$

Тогда для $y$ (благодаря п.2) верно:

$$\exists N(\varepsilon, y) \, \forall n > N : \, \|A_n y - Ay\| < \varepsilon$$

Перейдём к $x \in E_1$:

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|Ax - Ay\| + \|A_n y - Ay\| + \|A_n y - A_n x\| \leqslant \varepsilon\|A\| + \varepsilon + \varepsilon\|A_n\| \leqslant \varepsilon(\|A\| + M + 1)$$

Значит $A_n$ поточечно сходится к $A$ на $E_1$. $\square$

# 6 Сопряжённое пространство...

## 6.1 Рисса-Фреше

**Теорема 6.1.** *Теорема Рисса-Фреше.*

*Пусть существуют гильбертово пространство $H$ и линейный ограниченный функционал $f \in H^*$ в пространстве $H$. Тогда*

$$\exists! y \in H \, \forall x \in H : \, f(x) = (y, x)$$

*При том $\|f\| = \|y\|$.*

*Доказательство.* Существование.

Пусть $f \equiv 0$, тогда $y = 0$. Требуемые свойства, очевидно, выполняются.

Теперь пусть $f \not\equiv 0$, тогда $\ker f \neq H$, а значит

$$\exists b \in (\ker f)^{\perp}, b \neq 0 : \, f(b) \neq 0$$

Для $x \in H$ рассмотрим $p_x := x - \frac{f(x)}{f(b)} b$. Для него

$$f(p_x) = f(x) - \frac{f(x)}{f(b)} f(b) = 0 \Rightarrow p_x \in \ker f, (b, p_x) = 0$$

Раскроем последнее выражение:

$$0 = \left(b, x - \frac{f(x)}{f(b)} b\right) = (b, x) - \frac{f(x)}{f(b)} \|b\|^2 \Rightarrow f(x) = \frac{f(b)}{\|b\|^2}(b, x) = \left(\frac{f(b)}{\|b\|^2} b, x\right)$$

Обозначим первый член скалярного произведения, как $y$. Как мы видим, он удовлетворяет требованию выразимости из формулировки теоремы.

Единственность.

Предположим, что

$$\exists z\, \forall x \in H:\ f(x) = (z, x)$$

Тогда, в силу линейности скалярного произведения

$$\forall x \in H:\ (y - z, x) = 0$$

Подставим подходящий вектор

$$y - z \in H \Rightarrow 0 = (y - z, y - z) = \|y - z\|^2$$

Значит $y - z = 0$ и $z = y$.

Равенство норм. Из КБШ имеем

$$\forall x \in H:\ |f(x)| = |(y, x)| \leqslant \|y\| \cdot \|x\|$$

откуда по определению нормы функционала получаем $\|f\| \leqslant \|y\|$. Также, так как $y \in H$, то

$$\|y\|^2 = (y, y) = f(y) = |f(y)| \leqslant \|f\| \cdot \|y\|$$

Значит, $\|y\| \leqslant \|f\|$. Что в итоге даёт нам $\|y\| = \|f\|$. $\square$

## 6.2 Теорема Хана-Банаха и её следствия

**Теорема 6.2.** *Теорема Хана-Банаха.*

*Пусть $E$ – ЛНП. $M \subset E$ – линейное многообразие, $f$ – линейный ограниченный функционал на $M$. Тогда $\exists \tilde{f} \in E^*$:*

$$\begin{cases} \tilde{f}|_M = f \\ \|\tilde{f}\| = \|f\| \end{cases}$$

**Замечание.** Ниже приведено доказательство для сепарабельных пространств. Теорема верна и для несепарабельных, но там в доказательстве используется трансфинитная идукция.

*Доказательство.* Будем доопределять $f$: раз $M \neq E \Rightarrow \exists x_0 \notin M$.

Тогда рассмотрим $M_1 = M \oplus [x_0]$. Продолжим $f$ на $M_1$ с сохранением нормы:

$$\forall x \in M, \alpha \in \mathbb{R}:\ y = x + \alpha x_0 \in M_1 \Rightarrow f_1(y) = f_1(x) + \alpha f_1(x_0) = f_1(x) + \alpha a$$

Существует ли $a$ такое, что $\|f_1\| = \|f\|$?

Очевидно, что $\|f_1\| \geqslant \|f\|$, тогда осталось показать существование такого $a$, что $\|f_1\| \leqslant \|f\|$

$$\exists a\, \forall y \in M_1:\ |f(x) + \alpha a| = |f_1(y)| \leqslant \|f\| \cdot \|y\| = \|f\| \cdot \|x + \alpha x_0\|$$

Если $\alpha = 0$, то мы попали на $M$ и неравенство выполнено. Если это не так, то исходное неравенство эквивалентно

$$\left| f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + a \right| \leqslant \|f\| \cdot \left\| \frac{x}{\alpha} + x_0 \right\|$$

Обозначим $z := \frac{x}{\alpha}$. Тогда хочется доказать, что

$$-\|f\| \cdot \|z + x_0\| \leqslant f(z) + a \leqslant \|f\| \cdot \|z + x_0\| \Leftrightarrow$$
$$-f(z) - \|f\| \cdot \|z + x_0\| \leqslant a \leqslant -f(z) + \|f\| \cdot \|z + x_0\|$$

Нам достаточно, чтобы sup левой части по всем $z$ был меньше inf правой части неравенства по всем $z$. Тогда на самом деле нам достаточно показать, что

$$\forall z_1, z_2 : \; -f(z_1) - \|f\| \cdot \|z_1 + x_0\| \leqslant -f(z_2) + \|f\| \cdot \|z_2 + x_0\|$$

Преобразуем, следующее должно быть верно:

$$f(z_2) - f(z_1) \leqslant \|f\| \cdot (\|z_1 + x_0\| + \|z_2 + x_0\|)$$

Это верно, если будет выполнено более сильное утверждение:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant \|f\| \cdot (\|z_1 + x_0\| + \|z_2 + x_0\|)$$

Но мы знаем, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| = |f(z_2 - z_1)| \leqslant \|f\| \cdot \|z_2 - z_1\| = \|f\| \cdot \|z_2 + x_0 - x_0 - z_1\| \leqslant \|f\| \cdot (\|z_1 + x_0\| + \|z_2 + x_0\|)$$

Мы победили, так как это значит, что для любого $z$ действительно можно выбрать такое число $a$.

Теперь мы готовы запустить индукцию: предположим, что $E$ – сепарабельное. Тогда пусть

$$X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} : \; \overline{X} = E; \quad M_0 = M, x_0 \notin M_0$$

Берём $x_{n-1}$ и получаем $M_n = M_{n-1} + \langle x_{n-1} \rangle, x_n \notin M_n$. Введём $M_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ – линейное многообразие.

Введём

$$f_\infty|_{M_n} := f_n \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{M}_\infty$$

По теореме о продолжении $f_\infty$ единственным образом продолжается до $\tilde{f} \in E^*$ $\square$

**Следствие.** *Пусть $E$ – линейное нормированное пространство, $M \subsetneq E$ – линейное многообразие, $x_0 \notin \overline{M}$. Тогда $\exists f \in E^*$ такой, что*

$$\begin{cases} f|_M = 0 \\ f(x_0) = 1 \\ \|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, M)} \end{cases}$$

*Доказательство.* Рассмотрим $M_1 = M \oplus \langle x_0 \rangle, y = x + \alpha x_0$. Тогда

$$f_1(y) = f(x) + \alpha f(x_0) = 0 + \alpha \cdot 1 = \alpha$$

По теореме Хана-Банаха

$$\exists f \in E^* : \; f|_{M_1} = f_1, \|f\|_{E^*} = \|f_1\|_{M_1^*}$$

Осталось показать, что $\|f_1\| = \frac{1}{\rho(x_0, M)}$

1. $\forall y \in M_1:\ y = x + \alpha x_0, x \in M, \alpha \in \mathbb{K}$. Тогда

$$\frac{|f_1(y)|}{\|y\|} = \frac{|\alpha|}{\|y\|} = \frac{1}{\|\frac{x}{\alpha} + x_0\|} \leqslant \frac{1}{\rho(x_0, M)}$$

2. $\exists$ максимиризирующая последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M:\ \|y_n := [x_n + x_0]\| \to \rho$$

Тогда, очевидно

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f_1(y_n)|}{\|y_n\|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\|x_n + x_0\|} = \frac{1}{\rho}$$

□

**Следствие.** *Если* $x \in E$, *то* $\exists f \in E^*$:

$$\begin{cases} \|f\| = 1 \\ f(x) = \|x\| \end{cases}$$

*Доказательство.* Возьмём для предыдущего следствия $M := \{0\}, x_0 := \frac{x}{\|x\|}$. Тогда $\exists f$, обладающий всеми нужными свойствами:

1. $f|_{\{0\}} = 0$
2. $f(x) = \|x\|$
3. $\|f\| = \frac{1}{\rho(\frac{x}{\|x\|}, 0)} = 1$

□

**Следствие.** *Выполняются следующие утверждения:*

- *Если* $\forall f \in E^*:\ f(x) = f(y)$, *то* $x = y$.
- *Если* $\forall f \in E^*:\ f(x) = 0$, *то* $x = 0$

*Доказательство.* Очевидно, что эти два утверждения эквивалентны (можно перенести в одну сторону равенства и воспользоваться линейностью), поэтому будем доказывать только второе.

От противного: пусть

$$\exists x \neq 0\ \forall f \in E^*:\ f(x) = 0$$

Но тогда по предыдущему следствию

$$\exists f \in E^*:\ f(x) = \|x\| \neq 0$$

Противоречие! □

**Следствие.** $\forall x \in E$ *его норма может быть выражена, как*

$$\|x\| = \sup_{f\in E^*,\, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

*Доказательство.* Оценка сверху очевидна:

$$\sup_{f\in E^*,\,\|f\|_{E^*}=1} |f(x)| \leqslant \sup_{f\in E^*,\,\|f\|_{E^*}=1} \|f\|\cdot\|x\| = \|x\|$$

Для неравенства в другую сторону зафиксируем $x$. Если $x=0$, то всё тривиально. Иначе

$$\sup_{f\in E^*,\,\|f\|_{E^*}=1} |f(x)| \geqslant |f_x(x)| = \|x\|$$

где $f_x(x)$ – функция из одного из предыдущих следствий. □