Содержание

1 Метрические пространства

1.1 Определения

Определение 1.1. Метрическим пространством называется множества X с функцией $\rho :\ X^2 \to \mathbb{R}$, обладающей следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in X :\ \rho(x, y) \geqslant 0$, причём $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X :\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X :\ \rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Функция ρ называется метрикой на множестве X.

Определение 1.2. Топологическим пространством называется множество X с системой $\tau \subseteq 2^X$, обладающей следующими свойствами:

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. $\forall G_1, G_2 \in \tau :\ G_1 \cap G_2 \in \tau$
3. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \tau :\ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha \in \tau$

Система τ называется топологией на множестве X, а элементы системы τ – открытыми множествами.

Определение 1.3. Пусть X – метрическое пространство, $Y \subset X$. Подстранством пространства X называется метрическое пространство Y с метрикой, являющейся сужением метрики на X.

Определение 1.4. Пусть X – метрическое пространство. Множество $Y \subset X$ называется ограниченным, если выполнено условие $\sup_{x,\, y \in Y} \rho(x, y) < +\infty$

Определение 1.5. Пусть X – метрическое пространство, $x \in X, r > 0$:

- Открытым шаром называется множество

$$B(x, r) := \{y \in X \mid \rho(y, x) < r\}$$

- Замкнутым шаром называется множество

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid \rho(y, x) \leqslant r\}$$

Определение 1.6. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества M , если существует $r > 0$ такое, что $B(x, r) \subset M$. Внутренностью множества M называется множество $\operatorname{int} M$ всех его внутренних точек. Множество M называется открытым, если $\operatorname{int} M = M$.

Определение 1.7. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества M, если для любого $r > 0$ выполнено условие $B(x, r) \cap M \neq \varnothing$. Замыканием множества M называется множество $\overline{M}$ всех его точек прикосновения. Множество M называется замкнутым, если $\overline{M} = M$.

Определение 1.8. Пусть X – метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется:

- Плотным в множестве $B \subset X$, если $B \subset \overline{A}$
- Всюду плотным, если $X = \overline{A}$

Определение 1.9. Метрическое пространство X называется сепарабельным, если в X существует не более чем счётное всюду плотное множество.

Определение 1.10. Пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к точке $x \in X$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to +\infty$. Обозначение:

$$x_n \to_X x$$

Определение 1.11. Пусть X, Y – метрические пространства. $f : X \to Y$. Отображение f называется непрерывным в точке $x \in X$, если выполнено одно из следующих условий:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$
2. Для любой $\{x_n\} \subset X$ такой, что $x_n \to_X x$, выполнено $f(x_n) \to_Y f(x)$

1.2 Несложные утверждения

Лемма 1.1. *Неравенство Минсковского.*

Пусть E – измеримое множество, на котором задана мера μ, и пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ – измеримые функции. Тогда выполнено следующее:

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Лемма 1.2. *Неравенство Гёльдера.*

Пусть E измеримое множество, на котором задана мера μ. Тогда для любых $p, q \geqslant 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, если $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$, то $f \cdot g \in L^1$, причём выполнено следующее:

$$\int_E |f(x)g(x)| d\mu \leqslant \left(\int_E |f(x)| d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g(x)| d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Лемма 1.3. *Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Тогда множество M открыто $\Leftrightarrow$ множество $X \setminus M$ замкнуто.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$x \in \overline{X \setminus M} \Leftrightarrow \forall r > 0 : \ B(x, r) \cap (X \setminus M) \neq \varnothing \Leftrightarrow x \notin \operatorname{int} M$$

Значит, $\operatorname{int} M = M \Leftrightarrow \overline{X \setminus M} = X \setminus M$. □

Лемма 1.4. *Пусть X – метрическое пространство. Тогда:*

1. *Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $B(x, r)$ – открытое.*
2. *Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $\overline{B}(x, r)$ – замкнутое.*

3. *Для любого множества $M \subset X$ множество int M – открытое, причём наибольшее по включение открытое множество, содержащееся в M.*

4. *Для любого множества $M \subset X$ множество $\overline{M}$ – замкнутое, причём наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее M.*

Доказательство. 1. Пусть $y \in B(x, r)$, тогда, по неравенству треугольника, $B(y, r - \rho(x, y)) \subset B(x, r)$, то есть $y \in \operatorname{int} B(x, r)$.

2. Пусть $y \in \overline{\overline{B}(x, r)}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $B(y, \varepsilon) \cap \overline{B}(x, r) \neq \varnothing$, откуда, по неравенству треугольника, $\rho(x, y) < r + \varepsilon$. В силу произвольности числа ε, получаем, что $\rho(x, y) \leqslant r$, то есть $y \in \overline{B}(x, r)$.

3. Для любого открытого множества $G \subset M$ выполнено $G = \text{int G} \subset \text{int M}$, поэтому, в частности, множество int M открыто, как объединение всех содержащихся в M открытых множеств.

4. Для любого замкнутого множества $F \supset M$ выполнено $F = \overline{F} \supset \overline{M}$, поэтому, в частности, множество $\overline{M}$ замкнуто, как пересечение всех содержащих M замкнутых множеств.

□

Лемма 1.5. *Пусть X, Y – метрические пространства, $f : X \to Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *Отображение f непрерывно.*
- *Для любого открытого множества $G \subset Y$ множество $f^{-1}(G)$ тоже является открытм*

Доказательство.

- ($1 \Rightarrow 2$) Зафиксируем произвольное открытое множество $G \subset Y$. Тогда, поскольку выполнено равенство $f^{-1}(G) = \bigcup_{y \in G} f^{-1}(y)$ и каждое множество $f^{-1}(y)$ является открытым (из определения непрерывности), множество $f^{-1}(G)$ тоже является открытым.

- ($2 \Rightarrow 1$) Зафиксируем произвольные $x \in X, \varepsilon > 0$. Множество $B(f(x), \varepsilon)$ является открытым, поэтому его прообраз тоже открыт, то есть существует $\delta > 0$ такое, что $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, что и даёт требуемое в силу произвольности выбора точки x и числа ε.

□