Содержание

1 Метрические пространства

1.1 Определения

Определение 1.1. Метрическим пространством называется множества X с функцией $\rho:\ X^2 \to \mathbb{R}$, обладающей следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in X:\ \rho(x, y) \geqslant 0$, причём $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X:\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X:\ \rho(x, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Функция ρ называется метрикой на множестве X.

Определение 1.2. Топологическим пространством называется множество X с системой $\tau \subseteq 2^X$, обладающей следующими свойствами:

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. $\forall G_1, G_2 \in \tau:\ G_1 \cap G_2 \in \tau$
3. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \tau:\ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha \in \tau$

Система τ называется топологией на множестве X, а элементы системы τ – открытыми множествами.

Определение 1.3. Пусть X – метрическое пространство, $Y \subset X$. Подстранством пространства X называется метрическое пространство Y с метрикой, являющейся сужением метрики на X.

Определение 1.4. Пусть X – метрическое пространство. Множество $Y \subset X$ называется ограниченным, если выполнено условие $\sup_{x,\, y \in Y} \rho(x, y) < +\infty$

Определение 1.5. Пусть X – метрическое пространство, $x \in X, r > 0$:

- Открытым шаром называется множество

$$B(x, r) := \{y \in X \mid \rho(y, x) < r\}$$

- Замкнутым шаром называется множество

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid \rho(y, x) \leqslant r\}$$

Определение 1.6. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества M , если существует $r > 0$ такое, что $B(x, r) \subset M$. Внутренностью множества M называется множество $\operatorname{int} M$ всех его внутренних точек. Множество M называется открытым, если $\operatorname{int} M = M$.

Определение 1.7. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества M, если для любого $r > 0$ выполнено условие $B(x, r) \cap M \neq \varnothing$. Замыканием множества M называется множество $\overline{M}$ всех его точек прикосновения. Множество M называется замкнутым, если $\overline{M} = M$.

Определение 1.8. Пусть X – метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется:

- Плотным в множестве $B \subset X$, если $B \subset \overline{A}$
- Всюду плотным, если $X = \overline{A}$

Определение 1.9. Метрическое пространство X называется сепарабельным, если в X существует не более чем счётное всюду плотное множество.

Определение 1.10. Пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к точке $x \in X$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to +\infty$. Обозначение:

$$x_n \to_X x$$

Определение 1.11. Пусть X, Y – метрические пространства. $f: X \to Y$. Отображение f называется непрерывным в точке $x \in X$, если выполнено одно из следующих условий:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$
2. Для любой $\{x_n\} \subset X$ такой, что $x_n \to_X x$, выполнено $f(x_n) \to_Y f(x)$

1.2 Несложные утверждения

Лемма 1.1. *Неравенство Минсковского.*

Пусть E – измеримое множество, на котором задана мера μ, и пусть $f, g: E \to \mathbb{R}$ – измеримые функции. Тогда выполнено следующее:

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Лемма 1.2. *Неравенство Гёльдера.*

Пусть E измеримое множество, на котором задана мера μ. Тогда для любых $p, q \geqslant 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, если $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$, то $f \cdot g \in L^1$, причём выполнено следующее:

$$\int_E |f(x)g(x)| d\mu \leqslant \left(\int_E |f(x)| d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g(x)| d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Лемма 1.3. *Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Тогда множество M открыто $\Leftrightarrow$ множество $X \setminus M$ замкнуто.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$x \in \overline{X \setminus M} \Leftrightarrow \forall r > 0: \ B(x, r) \cap (X \setminus M) \neq \varnothing \Leftrightarrow x \notin \operatorname{int} M$$

Значит, $\operatorname{int} M = M \Leftrightarrow \overline{X \setminus M} = X \setminus M$. □

Лемма 1.4. *Пусть X – метрическое пространство. Тогда:*

1. *Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $B(x, r)$ – открытое.*
2. *Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $\overline{B}(x, r)$ – замкнутое.*

3. *Для любого множества $M \subset X$ множество int M – открытое, причём наибольшее по включение открытое множество, содержащееся в M.*

4. *Для любого множества $M \subset X$ множество $\overline{M}$ – замкнутое, причём наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее M.*

Доказательство. 1. Пусть $y \in B(x, r)$, тогда, по неравенству треугольника, $B(y, r - \rho(x, y)) \subset B(x, r)$, то есть $y \in \operatorname{int} B(x, r)$.

2. Пусть $y \in \overline{\overline{B}(x, r)}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $B(y, \varepsilon) \cap \overline{B}(x, r) \neq \varnothing$, откуда, по неравенству треугольника, $\rho(x, y) < r + \varepsilon$. В силу произвольности числа ε, получаем, что $\rho(x, y) \leqslant r$, то есть $y \in \overline{B}(x, r)$.

3. Для любого открытого множества $G \subset M$ выполнено $G = \mathrm{int\ G} \subset \mathrm{int\ M}$, поэтому, в частности, множество int M открыто, как объединение всех содержащихся в M открытых множеств.

4. Для любого замкнутого множества $F \supset M$ выполнено $F = \overline{F} \supset \overline{M}$, поэтому, в частности, множество $\overline{M}$ замкнуто, как пересечение всех содержащих M замкнутых множеств.

□

Лемма 1.5. *Пусть X, Y – метрические пространства, $f : X \to Y$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *Отображение f непрерывно.*
- *Для любого открытого множества $G \subset Y$ множество $f^{-1}(G)$ тоже является открытм*

Доказательство. • (1 $\Rightarrow$ 2) Зафиксируем произвольное открытое множество $G \subset Y$. Тогда, поскольку выполнено равенство $f^{-1}(G) = \bigcup_{y \in G} f^{-1}(y)$ и каждое множество $f^{-1}(y)$ является открытым (из определения непрерывности), множество $f^{-1}(G)$ тоже является открытым.

- (2 $\Rightarrow$ 1) Зафиксируем произвольные $x \in X, \varepsilon > 0$. Множество $B(f(x), \varepsilon)$ является открытым, поэтому его прообраз тоже открыт, то есть существует $\delta > 0$ такое, что $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, что и даёт требуемое в силу произвольности выбора точки x и числа ε.

□

2 Полные метрические пространства

2.1 Теорема о вложенных шарах, теорема Бэра

Определение 2.1. Пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется фундаментальной, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geqslant N : \, \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Определение 2.2. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

Теорема 2.1. *О вложенных шарах.*

Пусть X – полное метрическое пространство. $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность вложенных замкнутых шаров такая, что $r_n \to 0$. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x^*\}$ для некоторой точки $x^* \in X$.

Доказательство. В силу вложенности шаров и условия $r_n \to 0$, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Тогда, поскольку пространство X полно, для некоторого $x^* \in X$ выполнено $x_n \to x^*$. Но каждый шар $\overline{B}(x_N, r_N)$ содержит все точки из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, начиная с номера N, тогда, в силу его замкнутости, он также содержит точку x^*.

Значит, $\{x^*\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$. Наконец, в силу условия $r_n \to +0$, других точек в пересечении быть не может. □

Теорема 2.2. *Теорема Бэра.*

Пусть X – полное метрическое пространство. Тогда X нельзя представить в виде $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где множества $M_n \subset X$ – не плотные ни в одном шаре в X (нигде не плотные).

Доказательство. Предположим противное, то есть X имеет такой вид, как в условии. Положим $r_0 := 1$ и выберем произвольный шар $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X$. Поскольку M_1 неплотно в $\overline{B}(x_0, r_0)$, то

$$(X \setminus \overline{M}_1) \cap B(x_0, r_0) \neq \varnothing$$

, поэтому можно выбрать шар

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0) : \ \overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{M}_1 = \varnothing$$

Можно считать, что $r_1 \leqslant \frac{1}{2}$. Повторим данное упражнение счётное количество раз...

Рассмотрим полученную последовательность вложенных шаров $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку $r_n \leqslant \frac{1}{2^n} \to 0$, то, по предыдущей теореме, для некоторой точки $x^* \in X$ выполнено равенство

$$\{x^*\} = \cap_{n=0}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$$

По предположению, $X = \cup M_n$, поэтому $\exists n : \ x^* \in M_n$, но по построению

$$\overline{B}(x^*, r_n) \cap \overline{M}_n = \varnothing$$

противоречие. □

2.2 Принцип сжимающих отображений.

Теорема 2.3. *Теорема Банаха. Принцип сжимающих отображений.*

Пусть X – полное метрическое пространство, $f : X \to X$ – отображение такое, что выполнено следующее условие:

$$\exists \alpha \in (0, 1) \, \forall x, y \in X : \ \rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha \rho(x, y)$$

Тогда

$$\exists ! x^* : \ f(x^*) = x^*$$

Доказательство. Существование. Зафиксируем $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$. Поскольку для $k \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(f(x_k), f(x_{k-1})) \leqslant \alpha\rho(x_k, x_{k-1}) = \alpha\rho(f(x_{k-1}, f(x_{k-2}))) \leqslant \dots \leqslant \alpha^k \rho(x_1, x_0)$$

то по неравенству треугольника получаем

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant (\alpha^{n+p-1} + \dots + \alpha^n)\rho(x_1, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0)$$

Так как $\alpha^n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Значит, из полноты пространства,

$$\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$$

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ и пользуясь непрерывностью f, получаем $f(x^*) = x^*$.

Единственность. Предположим, что

$$\exists y^* \neq x^* : \ f(y^*) = y^* \Rightarrow \rho(x^*, y^*) = \rho(f(x^*), f(y^*)) \leqslant \alpha\rho(x^*, y^*)$$

Это возможно лишь когда $\rho(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$. □

3 Компактные метрические пространства

3.1 Компактность и центрированные системы замкнутых множеств

Определение 3.1. Метрическое пространство X называется компактным, если

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset 2^X : \ \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha = X : \ \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} : \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = X$$

Определение 3.2. Пусть X – метрическое пространство. Система $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset 2^X$ называется центрированной, если

$$\forall \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} : \bigcap_{i=1}^n B_{\alpha_i} \neq \varnothing$$

Теорема 3.1. *Метрическое пространство X компактно $\Leftrightarrow$ любая центрированная система замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Каждой системе открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset 2^X$ можно поставить в соответствие систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} := \{X \setminus G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ и наоборот.

Тогда любая система открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, не содержащая конечного подпокрытия, не является покрытием $\Leftrightarrow$ любая центрированная система замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ имеет непустое пересечение (накиньте на одну из частей утверждения дополнения и поймите, что это одно и то же). □

3.2 Критерий компактности

Определение 3.3. Пусть M – некоторое множество в метрические пространстве R. Тогда множества A из R называется ε-сетью для M, если

$$\forall x \in M \, \exists a \in A : \ \rho(x, a) \leqslant \varepsilon$$

Определение 3.4. Множество M в метрическом пространстве R называется ограниченным, если существует $B_\varepsilon(x_0)$ содержащий M.

Определение 3.5. Множество M в метрическом пространстве R называется вполне ограниченным, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.

Лемма 3.1. *Из вполне ограниченности следует ограниченность.*

Доказательство. Из вполне ограниченности ограниченность следует получается, как объединение конечного числа ограниченных множеств. □

Теорема 3.2. *Критерий компактности.*
Пусть X – метрическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. *X компактно.*
2. *X полно и вполне ограниченно.*
3. *Из любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, ещё говорят, что X – секвенциально компактно.*
4. *Любое бесконечное множество $M \subset X$ имеет предельную точку.*

Доказательство.

- $(1 \Rightarrow 2)$ X вполне ограниченно, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ из открытого покрытия $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$ по определению можно выделить конечное подпокрытие. Центры шаров этого подпокрытия и будут давать требуемую ε-сеть.

  Пусть последовательность $\{x_n\} \subset X$ фундаментальна. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, тогда система $\{\overline{A}_n\}$ является центрированной системой замкнутых множеств. Система центрирована, потому что у любого конечного набора пересечением будет являться хвост, начинающийся с максимального из взятых индексов.

  Поэтому можно выбрать точку $x_0 \in \cap_{n \in \mathbb{N}_+} \overline{A}_n$, причём $x_0 \in X$ по рассмотренному выше критерию компактности. В силу фундаментальности

  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : \ \overline{A}_n \subset \overline{B}(x_N, \varepsilon)$$

  откуда и $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon \Rightarrow x_n \to_X x_0$.

- $(2 \Rightarrow 3)$ Зафиксируем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Поскольку X вполне ограниченно, то

  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists y \in X : \ |\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cap B(y, \varepsilon)| = +\infty$$

  Будем применять это рассуждение сначала для всего пространства X, потом для шаров в X, содержащих бесконечно много точек из $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

- Для $\varepsilon := 1$ выберем $\{x_k^1\} \subset \{x_n\}$ так, что $\{x_k^1\} \subset B(y_1, 1)$
- Для $\varepsilon := \frac{1}{2}$ выберем $\{x_k^2\} \subset \{x_n^1\} \subset B(y_1, 1)$ так, что $\{x_k^2\} \subset B(y_2, \frac{1}{2})$
- ...

Рассмотрим диагональную последовательность $\{x_k^k\} \subset \{x_n\}$. По построению, она является фундаментальной, и в силу полноты пространства X, она сходится.

- $(3 \Rightarrow 1)$ Проверим сначала, что X вполне ограниченно. Предположим противное, то есть

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall \{\overline{B}(y_n, \varepsilon_0)\}_{n=1}^N : \bigcup_{n=1}^N \overline{B}(y_n, \varepsilon_0) \not\supset X$$

Тогда можно выбрать точку $x_1 \in X$, затем точку $x_2 \in (X \setminus B(x_1, \varepsilon_0))$. По предположению, остаток, из которого берём элементы последовательности, никогда не будет пуст, поэтому получим последовательности с попарными расстояниями между точками не меньше ε_0, из которой, очевидно, нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность – противоречие.

Теперь проверим, что X компактно. Предположим противное, то есть

$$\exists \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}, G_\alpha \text{ - открытое} \, \forall \{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N : \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \not\supset X$$

Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in X \, \forall \{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N : \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \not\supset B(x, \varepsilon)$$

(если такого шара нет, то из вполне ограниченности, складывая конечные покрытия конечного числа шаров, получим конечное покрытие всего множества).

Выбирая такую точку x_n для $\varepsilon := \frac{1}{n}$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, получим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, из которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Пусть $x_{n_k} \to_X x_0 \in X$. Тогда существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ такое, что $x_0 \in G_{\alpha_0}$. Но множество G_{α_0} открыто, поэтому оно покрывает некоторую окрестность точки x_0, а значит и все шары $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$, начиная с некоторого номера – противоречие.

- $(3 \Rightarrow 4)$ Зафиксируем бесконечное множество $M \subset X$, тогда, выбирая произвольным образом последовательность $\{x_n\} \subset M$ и выделяя из неё сходящуюся подпоследовательность, получим требуемое.

- $(4 \Rightarrow 3)$ Зафиксируем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Если множество её значений конечно, то в ней можно выделить стационарную подпоследовательность. Если же множество её значений бесконечно, то оно имеет предельную точку $x_0 \in X$, поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \to_X x_0$

$\square$

3.3 Теорема Арцела-Асколи

Определение 3.6. Обозначим за $C(X, Y)$ множество непрерывных функций $f : X \to Y$.

Теорема 3.3. *Теорема Кантора.*

Пусть X – компактное метрическое пространство, и функция $f \in C(X, \mathbb{R})$. Тогда f равномерно непрерывна на X.

Доказательство. Предположим противное, то есть выполнено следующее:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x, y \in X, \rho(x, y) < \delta :\ |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$$

Выбирая $\delta := \frac{1}{n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, получим последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$. Поскольку X компактно, можно выделить из них сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$, причём сходятся они к одной и той же точке $x_0 \in X$ по построению. Однако для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$ – противоречие. □

Теорема 3.4. *Арцела-Асколи.*

Пусть X – компактное метрическое пространство, $M \subset C(X, \mathbb{R})$. Тогда множество M вполне ограниченно $\Leftrightarrow$ множество M ограниченно и выполнено условие равностепенной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 :\ \exists \delta > 0 :\ \forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta :\ \forall f \in M :\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Мы уже доказывали, что из вполне ограниченности следует обычная ограниченность, проверим условие равностепенной непрерывности. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем конечным набор функций $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in C(X, \mathbb{R})$, образующий ε-сеть.

По теореме Кантора, каждая из этих функций равномерно непрерывна. Пусть $\delta_1, \cdots, \delta_n > 0$ – числа, соответствующие выбранному ε в определении равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_k > 0\, \forall x, y\, \rho(x, y) < \delta_k :\ |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| < \varepsilon$$

Тогда для $\delta := \min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$ выполнено требуемое:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| + |\varphi_k(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

($\Leftarrow$) Поскольку множество M ограниченно, то существует $C > 0$ такое, что

$$\forall f \in M :\ \|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leqslant C$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем по нему $\delta > 0$ из условия равностепенной непрерывности.

Разобьём отрезок $[a, b]$ на части длины меньше δ точками

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

, а отрезок $[-C, C]$ – на части длины меньше ε точками

$$-C = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = C$$

и рассмотрим конечное множество L кусочно линейных функций, построенных по всевозможным наборам точек вида

$$\{(x_j, y_{i_k})\}_{j=0}^{n}, i_k \in \overline{0, m}$$

Из такого построению становится очевидно, что

$$\forall f \in M \, \exists \varphi \in L \, \forall i \in \{0, \cdots, n\} : \, |f(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in [a, b]$ и выберем $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ такое, что $x \in [x_i, x_{i+1}]$, тогда:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x) - \varphi(x_i)| < 2\varepsilon + |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$$

Первое слагаемое меньше ε из равностепенной непрерывности, а второе по построению φ. Оценим слагаемое $|\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$ отдельно:

$$|\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| \leqslant |f(x_{i+1}) - \varphi(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| < 3\varepsilon$$

Таким образом, $\sup_{x \in [a,\, b]} |f(x) - \varphi(x)| < 5\varepsilon$. Значит, построенное множество L образует конечную 5ε-сеть для множества M, тогда, в силу произвольности выбора числа ε, множество M вполне ограниченно. □

4 Линейные нормированные пространства

4.1 Теорема Рисса

Определение 4.1. Линейным нормированным пространством над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, называется линейное пространство E над $\mathbb{K}$ с функцией $\| \cdot \| : \, E \to \mathbb{R}$, обладающей следующими свойствами:

1. $\forall x \in E : \, \|x\| \geqslant 0$, причём $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in E \, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\forall x, y \in E : \, \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Функция $\| \cdot \|$ называется нормой на пространстве E.

Лемма 4.1. *Норма непрерывна, как функция $E \to \mathbb{R}_+$*

Доказательство.

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \, x_n \overset{n \to +\infty}{\to} \Rightarrow \rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0$$

Дважды воспользуемся неравенством треугольника:

- $\|x_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$
- $\|x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x_n\|$

Таким образом, $|\|x_n\| - \|x\|| \to 0$, то есть $\|x_n\| \to \|x\|$, что и требовалось. □

Определение 4.2. Пусть E – линейное нормированное пространство. Множество $L \subset E$ называется:

- Линейным многообразием в E, если L замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры из $\mathbb{K}$.

- Подпространством в E, если L является линейным многообразием в E и при этом замкнуто.

Лемма 4.2. *О почти перпендикуляре.*

Пусть E – линейное нормированное пространство, $L \subsetneq E$ – подпространство. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists y \in E\, \|y\| = 1 :\ \rho(y, L) := \inf_{z \in L} \|y - z\| \geqslant 1 - \varepsilon$$

Доказательство. Зафиксируем $y_0 \in E \setminus L$ и положим $d := \rho(y_0, L) > 0$. Выберем вектор $z_0 \in L$ такой, что $d \leqslant \|y_0 - z_0\| \leqslant d(1+\varepsilon)$ и покажем, что подходит вектор $y := \frac{y_0 - z_0}{\|y_0 - z_0\|} := \alpha(y_0 - z_0)$. Действительно, $\|y\| = 1$, и для любого $z \in L$ выполнены неравенства:

$$\|y - z\| = \|\alpha(y_0 - z_0) - z\| = |\alpha|\|y_0 - \left(z_0 + \frac{1}{\alpha} z\right)\| \geqslant |\alpha| d \geqslant \frac{d}{d(1+\varepsilon)} \geqslant 1 - \varepsilon$$

Для осмысления последних переходов вникните в следующее утверждение:

$$\|y_0 - z_0\| \leqslant d(1+\varepsilon) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\|y_0 - z_0\|} \geqslant \frac{1}{d(1+\varepsilon)}$$

А также не забывайте про разложение Тейлора:

$$\frac{1}{1+x} \geqslant 1 - x$$

□

Определение 4.3. Пусть E – линейное нормированное пространство, $M \subset E$. Линейной оболочкой множества M называется множество следующего вида:

$$\langle M \rangle := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_i m_i \mid \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{K}, \{m_i\}_{i=1}^{n} \subset M \right\}$$

Теорема 4.1. *Рисса.*

Пусть E – линейное нормированное пространство. Тогда единичная сфера $S(0,1)$ компактна в $E \Leftrightarrow \dim E < +\infty$

Доказательство. ($\Leftarrow$) По эквивалентности норм конечномерных пространствах (теорема будет далее), все нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны, а относительно евклидовой нормы сфера $S(0,1)$ компактна.

($\Rightarrow$) От противного. Зафисиксируем $\varepsilon > 0$ и построим последовательность $\{x_n\} \subset S(0,1)$ с попарными расстояниями не меньше $1 - \varepsilon$, из чего будет следовать, что сфера $S(0,1)$ не вполне ограничена и потому не компактна:

- Выберем $x_1 \in S(0,1)$ произвольным образом
- По предыдущей лемме выберем $x_2 \in S(0,1) \setminus \langle x_1 \rangle$ такое, что $\rho(x_2, \langle x_1 \rangle) \geqslant 1 - \varepsilon$, причём утверждение применимо, так как линейная оболочка конечномерна, а линейная оболочка конечного числа элементов к тому же замкнута, а значит это действительно подпространство.
- ...

Поскольку $\dim E = +\infty$, то процесс не закончится, и будет получена искомая последовательность $\{x_n\}$. □

4.2 Характеристическое свойство евклидовых пространств...

Определение 4.4. Евклидовым пространством над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, называется линейное пространство E над $\mathbb{K}$ с функцией $(\cdot, \cdot) : E^2 \to \mathbb{K}$, обладающее следующими свойствами:

1. $\forall x \in E : (x, x) \geqslant 0$, причём $(x, x) = 0 \Leftrightarrow$
2. $\forall x, y \in E : (x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $\forall x, y, z \in E : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

Определение 4.5. Полное линейное нормированное пространство E называется банаховым.

Определение 4.6. Полное евклидово пространство H называется гильбертовым.

Теорема 4.2. *Характеристическое свойство Евклидовых пространств.*

Пусть E – линейное нормированное пространство. Тогда норма в E порождается скалярным произведением $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in E : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Распишем квадраты норм, как скалярные произведения элементов самих на себя:

$$\langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

($\Leftarrow$) Без доказательства, очень-очень сложно $\square$

4.3 Эквивалентность норм в конечномерном пространстве...

Определение 4.7. Две нормы $p, q : V \to \mathbb{R}_+$ над пространством V называются эквивалентными, если

$$\exists C_1, C_2 > 0 \, \forall x \in V : C_1 p(x) \leqslant q(x) \leqslant C_2 p(x)$$

Лемма 4.3. *Пусть E – линейное нормированное пространство, и $\dim E < +\infty$. Тогда любые две нормы на E эквивалентны.*

Доказательство. (Доказательство для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Поскольку E конечномерно, то в нём можно выбрать максримальную по включению линейно независимую систему $e = \{e_1, \cdots, e_n\} \subset E$, тогда e будет являться базисом в E. Для произвольного элемента $x \in E$, имеющего в базисе e координатный столбец $\alpha \in \mathbb{R}^n$, зададим его евклидову норму следующим образом:

$$\|x\|_e = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}$$

Зафиксируем произвольную норму $\|\cdot\|$ и докажем, что она эквивалентна норме $\|\cdot\|_e$:

1. Покажем, что $\|\cdot\| < C\|\cdot\|_e$ для некоторого $C > 0$. Для произвольного $x \in E$, имеющего в базисе e координатный столбец $\alpha \in \mathbb{R}^n$, выполнено следующее:

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \|e_k\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\right)$$

Поскольку для любого $k \in \{1, \cdot, n\}$ выполнено $\alpha_k < \|x\|_e$, то достаточно взять число $C := n \cdot \max_{1\leqslant k\leqslant n} \|e_k\|$

2. Покажем теперь, что $\|\cdot\|_e < \tilde{C}\|\cdot\|$ для некоторого $\tilde{C} > 0$. Предположим противное, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in E :\ \|x_n\|_e > n\|x_n\|$$

Можно без ограничения общности считать, что $\|x_n\|_e = 1$ для любого $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x_n\| < \frac{1}{n}$

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ содержится в единичной сфере $S_e(0,1)$ и относительно евклидовой нормы сфера компактна, можно выделить из $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся относительно евклидовой нормы. Тогда

$$\exists x \in S_e(0,1) :\ \|x_{n_k} - x\|_e \stackrel{k\to+\infty}{\to} 0$$

Тогда в силу предыдущего пункта $\|x_{n_k} - x\| \to 0$. Но по построению $\|x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} \stackrel{k\to+\infty}{\to} 0$, поэтому $x = 0$ – противоречие с тем, что $x \in S_e(0,1)$.

□

Следствие. *Пусть E – линейное нормированное пространство $x_1, \cdots, x_n \in E$. Тогда линейная оболочка $L := \langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ образует подпространство в E.*

Доказательство. Заметим, что $\dim L < +\infty$, и по предыдущему утверждению сужение нормы из E на L эквивалентно евклидовой норме. Относительно евклидовой нормы конечномерное пространство полно, поэтому и L полно относительно нормы из E. Следовательно, L замкнуто, как подмножество в E. □

Определение 4.8. Линейным топологическим пространством называется топологическое пространство X с определёнными на нём операциями сложения и умножения на числа из поля $\mathbb{K}$, непрерывными на X.

Пример. Любое линейное нормированное пространство E является линейным топологическим.

4.4 Теорема Рисса о проекции

Определение 4.9. Пусть E – линейное нормированное пространство, $L \subset E$ – линейное нормированное подпространство, $h \in E$. Элементом наилучшего приближения для h называется $x \in L$ такой, что $\|h - x\| = \rho(h, L) = \inf_{y\in L} \|h - y\|$

Лемма 4.4. *Пусть H – гильбертово пространство, $M \subset H$ – подпространство в H. Тогда для любого $h \in H$ существует единственный элемент наилучшего приближения $x \in M$.*

Доказательство. Зафиксируем $h \in H$. Сначала докажем, что элемент наилучшего приближения для h существует.

Положим $d := \rho(h, M)$. Если $d = 0$, то, в силу замкнутости множества M, выполнено $h \in M$, и в качестве элемента наилучшего приближения для h подходит сам h. Иначе выберем $\{x_n\} \subset M$ такую, что $\|h - x_n\| \overset{n\to+\infty}{\to} d$. По равенству параллелограмма,

$$\forall n, n \in \mathbb{N}: \ \|x_n - x_m\| = 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - 4\left\|h - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

Поскольку $\|h - x_n\|^2 \overset{n\to+\infty}{\to} d^2, \|h - x_m\|^2 \overset{m\to+\infty}{\to} d^2$ и выполнено неравенство $\|h - \frac{x_n+x_m}{2}\| \geqslant d^2$, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Поскольку пространство H полно, а M замкнуто, то существует $x \in M$ такой, что $x_n \to_H x$, причём, в силу непрерывности нормы (4.1), $\|h - x\| = d$

Покажем теперь, что элемент наилучшего приближения для h единственен. Пусть для некоторого $y \in M$ тоже выполнено равенство $\|h - y\| = d$, тогда, по равенству параллелограмма, выполнено следующее:

$$4d^2 = 2\|h - x\|^2 + 2\|h - y\|^2 = \|x - y\|^2 + 4\left\|h - \frac{x + y}{2}\right\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 + 4d^2$$

Для данной цепочки мы воспользовались следующими равенствами:

$$h - x + h - y = 2h - x - y = 2(h - \frac{x + y}{2}); \ h - x - h + y = -(x - y)$$

Итак, $\|x - y\| = 0 \Rightarrow x = y$, что и требовалось. □

Определение 4.10. Пусть E – евклидово пространство, $S \subset E$. Аннулятором множества S называется следующее множество:

$$H^\perp := \{y \in E \mid \forall x \in S: \ (x, y) = 0\}$$

Замечание. Легко проверить, что $S^\perp$ является подпространством в E. Кроме того, выполнены равенства

$$S^\perp = \langle S\rangle^\perp = \overline{\langle S\rangle}^\perp$$

Теорема 4.3. *Рисса, о проекции.*

Пусть H – гильбертово пространство, $M \subset H$ – подпространство в H. Тогда $H = M \oplus M^\perp$.

Доказательство. Покажем сначала, что $H = M + M^\perp$ (разложение существует, но м.б. не единственно).

Зафиксируем $h \in H$, и по утверждению о наилучшем приближении, выберем $x \in M$. Положим $y := h - x$ и $d := \|y\|$, тогда для произвольного $m \in M$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ выполнено следующее:

$$d^2 = \|h - x\|^2 \leqslant \|h - (x + \alpha m)\|^2 = d^2 - 2\alpha(h - x, m) + \alpha^2\|m\|^2 \Rightarrow (y, m) \leqslant \frac{\alpha}{2}\|m\|^2$$

В силу произвольности α получаем, что $(y, m) = 0 \Rightarrow y \in M^\perp$, причём $h = x + y$. Значит, выполнено равенство $H = M + M^\perp$.

Проверим теперь, что рассматриваемая сумма действительно прямая. Если $z \in M \cap M^\perp \Rightarrow (z, z) = 0 \Rightarrow z = 0$, что и означает требуемое. □

4.5 Сепарабельные гильбертовы пространства

Определение 4.11. Пусть E – линейное нормированное пространство. Система $\{e_n\} \subset E$ называется базисом Шаудера в E, если

$$\forall x \in E\ \exists! \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}:\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Лемма 4.5. *Неравенство Бесселя.*

Пусть E – евклидово пространство, элементы $\{e_i\} \subset E$ образуют ортонормированную систему. Тогда для любого $x \in E$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу ортонормированности системы $\{e_k\}$ выполнено следующее равенство:

$$0 \leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$$

Поскольку левая часть равенства неотрицательна, то неотрицательна и правая часть, и верно это даже после предельного перехода $n \to +\infty$. □

Лемма 4.6. *Пусть E – евклидово пространство, элементы $e_1, \cdots, e_k \in E$ образуют ортонормированную систему. Тогда*

$$\forall x \in E\ \forall \{\alpha_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{K}:\ \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \geqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right\|$$

Более того, равенство в неравенстве выше достигается тогда и только тогда, когда

$$\forall k \in \overline{1, n}:\ \alpha_k = (x, e_k)$$

Доказательство. В силу ортонормированности системы $\{e_k\}_{k=1}^{n}$, выполнены следующие равенства:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} ((x, e_k) - \alpha_k)^2$$

□

Теорема 4.4. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство,* $\dim H = +\infty$ *и $e = \{e_n\}$ – ортонормированная система. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *e – ортонормированный базис в H*

2. $\overline{\langle e\rangle} = H$*, то есть* e *– полная система.*

3. Для любого $h \in H$ *выполнено равенство Парсеваля:*

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(h, e_n)|^2$$

4. $e^{\perp} = \{0\}$

Доказательство.

- $(1 \Rightarrow 2)$ Очевидно из определения базиса.

- $(2 \Rightarrow 1)$ Зафиксируем произвольный $h \in H$ и произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, существует конечный набор $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ такой, что $\|h - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| < \varepsilon$. Тогда, по предыдущей лемме, выполнено также неравенство $\|h - \sum_{k=1}^{n} (h, e_k) e_k\| < \varepsilon$. Тогда, в силу произвольности числа ε, выполнено равенство $h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n) e_n$.

  Проверим теперь, что разложение элемента h единственно. Пусть для некоторого набор $\{\beta_n\} \subset \mathbb{K}$ выполнено равенство $h = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$, скалярно умножая частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$ на e_k и переходя к пределу, получаем, что $\beta_k = (h, e_k)$, что и означает требуемое.

- $(1 \Leftrightarrow 3)$ Уже было замечено, что для любого $h \in H$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено следующее:

$$\left\| h - \sum_{k=1}^{n} (h, e_k) e_k \right\| = \|h\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(h, e_k)|^2$$

  Значит, $h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n) e_n \Leftrightarrow \|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(h, e_n)|^2$, и единственность разложения элемента h дказывается так же, как и в импликации выше.

- $(2 \Leftrightarrow 4)$ Из теоремы Рисса и равенства $e^{\perp} = \overline{\langle e\rangle}^{\perp} = H^{\perp}$ получаем требуемое.

□