

# Содержание

<b>1</b>	<b>Метрические пространства</b>	<b>2</b>
1.1	Определения . . . . .	2
1.2	Несложные утверждения . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Полные метрические пространства</b>	<b>5</b>
2.1	Теорема о вложенных шарах, теорема Бэра . . . . .	5
2.2	Принцип сжимающих отображений. . . . .	6
<b>3</b>	<b>Компактные метрические пространства</b>	<b>7</b>
3.1	Компактность и центрированные системы замкнутых множеств . . . . .	7
3.2	Критерий компактности . . . . .	7
3.3	Теорема Арцела-Асколи . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Линейные нормированные пространства</b>	<b>11</b>
4.1	Теорема Рисса . . . . .	11
4.2	Характеристическое свойство евклидовых пространств. . . . .	12
4.3	Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. . . . .	13
4.4	Теорема Рисса о проекции . . . . .	14
4.5	Сепарабельные гильбертовы пространства . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Линейные ограниченные операторы в линейных нормированных пространствах</b>	<b>17</b>
5.1	Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора . . . . .	17
5.2	Топологии и сходимости в пространстве операторов. . . . .	18
5.3	Задача о продолжении непрерывного отображения . . . . .	20
5.4	Теорема Банаха-Штейнгауза . . . . .	21
5.5	Полнота пространства. . . . .	21
<b>6</b>	<b>Сопряжённое пространство. . . . .</b>	<b>22</b>
6.1	Рисса-Фреше . . . . .	22
6.2	Теорема Хана-Банаха и её следствия . . . . .	23

# 1 Метрические пространства

## 1.1 Определения

**Определение 1.1.** Метрическим пространством называется множества  $X$  с функцией  $\rho : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающей следующими свойствами:

1.  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) \geq 0$ , причём  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (неравенство треугольника).

Функция  $\rho$  называется метрикой на множестве  $X$ .

**Определение 1.2.** Топологическим пространством называется множество  $X$  с системой  $\tau \subseteq 2^X$ , обладающей следующими свойствами:

1.  $\emptyset, X \in \tau$
2.  $\forall G_1, G_2 \in \tau : G_1 \cap G_2 \in \tau$
3.  $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau : \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$

Система  $\tau$  называется топологией на множестве  $X$ , а элементы системы  $\tau$  – открытыми множествами.

**Определение 1.3.** Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $Y \subset X$ . Подпространством пространства  $X$  называется метрическое пространство  $Y$  с метрикой, являющейся сужением метрики на  $X$ .

**Определение 1.4.** Пусть  $X$  – метрическое пространство. Множество  $Y \subset X$  называется ограниченным, если выполнено условие  $\sup_{x, y \in Y} \rho(x, y) < +\infty$

**Определение 1.5.** Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $x \in X, r > 0$ :

- Открытым шаром называется множество

$$B(x, r) := \{y \in X \mid \rho(y, x) < r\}$$

- Замкнутым шаром называется множество

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X \mid \rho(y, x) \leq r\}$$

**Определение 1.6.** Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $M \subset X$ . Точка  $x \in X$  называется внутренней точкой множества  $M$ , если

$$\exists r > 0 : B(x, r) \subset M$$

Внутренностью множества  $M$  называется множество  $\text{int } M$  всех его внутренних точек. Множество  $M$  называется открытым, если  $\text{int } M = M$ .

**Определение 1.7.** Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $M \subset X$ . Точка  $x \in X$  называется точкой прикосновения множества  $M$ , если

$$\forall r > 0 : B(x, r) \cap M \neq \emptyset$$

Замыканием множества  $M$  называется множество  $\overline{M}$  всех его точек прикосновения. Множество  $M$  называется замкнутым, если  $\overline{M} = M$ .

**Определение 1.8.** Пусть  $X$  – метрическое пространство. Множество  $A \subset X$  называется:

- Плотным в множестве  $B \subset X$ , если  $B \subset \overline{A}$
- Всюду плотным, если  $X = \overline{A}$

**Определение 1.9.** Метрическое пространство  $X$  называется сепарабельным, если в  $X$  существует не более чем счётное всюду плотное множество.

**Определение 1.10.** Пусть  $X$  – метрическое пространство. Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  сходится к точке  $x \in X$ , если  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Обозначение:

$$x_n \rightarrow_X x$$

**Определение 1.11.** Пусть  $X, Y$  – метрические пространства.  $f : X \rightarrow Y$ . Отображение  $f$  называется непрерывным в точке  $x \in X$ , если выполнено одно из следующих условий:

1. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что  $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$
2. Для любой  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  такой, что  $x_n \rightarrow_X x$ , выполнено  $f(x_n) \rightarrow_Y f(x)$

## 1.2 Несложные утверждения

**Лемма 1.1.** *Неравенство Гёльдера.*

Пусть  $E$  измеримое множество, на котором задана мера  $\mu$ . Тогда для любых  $p, q \geq 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , если  $f \in L^p(E)$ ,  $g \in L^q(E)$ , то  $f \cdot g \in L^1$ , причём выполнено следующее:

$$\int_E |f(x)g(x)|d\mu \leq \left( \int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся неравенством Юнга:

$$a, b \geq 0, 1 < p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Положим

$$A := \left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}; \quad B := \left( \int_E g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Если  $A = 0 \Rightarrow f \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow f \cdot g \stackrel{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow \int_E f \cdot g d\mu = 0$ .

Если же  $A = \infty, B > 0$ , то  $AB = \infty$  и аналогично остальные случаи с бесконечностями.

Если  $0 < A, B < \infty \Rightarrow$  по неравенству Юнга имеем:

$$\frac{1}{AB} \int_E f \cdot g d\mu = \int_E \frac{f}{A} \frac{g}{B} d\mu \leq \int_E \left( \frac{1}{p} \left( \frac{f}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \frac{g}{B} \right)^q \right) d\mu = \frac{1}{p} \frac{\int_E f^p d\mu}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_E g^q d\mu}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

**Лемма 1.2.** *Неравенство Минковского.*

Пусть  $E$  – измеримое множество, на котором задана мера  $\mu$ , и пусть  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримые функции. Тогда выполнено следующее:

$$\left( \int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Доказательство.* Положим

$$A := \left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}; \quad B := \left( \int_E g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}; \quad C := \left( \int_E (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Будем полагать, что  $A, B < \infty$ . (Иначе неравенство тривиально). Тогда

$$(f + g)^p \leq (2 \max f, g)^p \leq 2^p (f^p + g^p) \Rightarrow C < \infty$$

Тогда введём  $q := \frac{p}{p-1}$  и используем неравенство Гёльдера в следующем виде:

$$\begin{aligned} C^p &= \int_E f(f + g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f + g)^{p-1} d\mu \stackrel{\text{Гёльдер}}{\leq} \\ &= \left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E (f + g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_E g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E (f + g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= (A + B) \left( \int_E (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = (A + B) C^{p-1} \end{aligned}$$

□

**Лемма 1.3.** Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $M \subset X$ . Тогда множество  $M$  открыто  $\Leftrightarrow$  множество  $X \setminus M$  замкнуто.

*Доказательство.* Достаточно заметить, что

$$x \in \overline{X \setminus M} \Leftrightarrow \forall r > 0 : B(x, r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \notin \text{int } M$$

Значит,  $\text{int } M = M \Leftrightarrow \overline{X \setminus M} = X \setminus M$ .

□

**Лемма 1.4.** Пусть  $X$  – метрическое пространство. Тогда:

1. Для любого  $x \in X$  и  $r > 0$  множество  $B(x, r)$  – открытое.
2. Для любого  $x \in X$  и  $r > 0$  множество  $\overline{B}(x, r)$  – замкнутое.
3. Для любого множества  $M \subset X$  множество  $\text{int } M$  – открытое, причём наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в  $M$ .
4. Для любого множества  $M \subset X$  множество  $\overline{M}$  – замкнутое, причём наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее  $M$ .

*Доказательство.* 1. Пусть  $y \in B(x, r)$ , тогда, по неравенству треугольника,  $B(y, r - \rho(x, y)) \subset B(x, r)$ , то есть  $y \in \text{int } B(x, r)$ .

2. Пусть  $y \in \overline{B(x, r)}$ , тогда для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено  $B(y, \varepsilon) \cap \overline{B(x, r)} \neq \emptyset$ , откуда, по неравенству треугольника,  $\rho(x, y) < r + \varepsilon$ . В силу произвольности числа  $\varepsilon$ , получаем, что  $\rho(x, y) \leq r$ , то есть  $y \in \overline{B(x, r)}$ .
3. Для любого открытого множества  $G \subset M$  выполнено  $G = \text{int } G \subset \text{int } M$ , поэтому, в частности, множество  $\text{int } M$  открыто, как объединение всех содержащихся в  $M$  открытых множеств.
4. Для любого замкнутого множества  $F \subset M$  выполнено  $F = \overline{F} \supset \overline{M}$ , поэтому, в частности, множество  $\overline{M}$  замкнуто, как пересечение всех содержащих  $M$  замкнутых множеств.

□

**Лемма 1.5.** Пусть  $X, Y$  – метрические пространства,  $f : X \rightarrow Y$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- *Отображение  $f$  непрерывно.*
- *Для любого открытого множества  $G \subset Y$  множество  $f^{-1}(G)$  тоже является открытым*

*Доказательство.* •  $(1 \Rightarrow 2)$  Зафиксируем произвольное открытое множество  $G \subset Y$ . Тогда, поскольку выполнено равенство  $f^{-1}(G) = \bigcup_{y \in G} f^{-1}(y)$  и каждое множество  $f^{-1}(y)$  является открытым (из определения непрерывности), множество  $f^{-1}(G)$  тоже является открытым.

- $(2 \Rightarrow 1)$  Зафиксируем произвольные  $x \in X, \varepsilon > 0$ . Множество  $B(f(x), \varepsilon)$  является открытым, поэтому его прообраз тоже открыт, то есть существует  $\delta > 0$  такое, что  $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ , что и даёт требуемое в силу произвольности выбора точки  $x$  и числа  $\varepsilon$ .

□

## 2 Полные метрические пространства

### 2.1 Теорема о вложенных шарах, теорема Бэра

**Определение 2.1.** Пусть  $X$  – метрическое пространство. Последовательность  $\{x_n\} \subset X$  называется фундаментальной, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Определение 2.2.** Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

**Теорема 2.1.** *О вложенных шарах.*

Пусть  $X$  – полное метрическое пространство.  $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$  – последовательность вложенных замкнутых шаров такая, что  $r_n \rightarrow 0$ . Тогда  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x^*\}$  для некоторой точки  $x^* \in X$ .

*Доказательство.* В силу вложенности шаров и условия  $r_n \rightarrow 0$ , последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна. Тогда, поскольку пространство  $X$  полно, для некоторого  $x^* \in X$  выполнено  $x_n \rightarrow x^*$ . Но каждый шар  $\overline{B}(x_N, r_N)$  содержит все точки из последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , начиная с номера  $N$ , тогда, в силу его замкнутости, он также содержит точку  $x^*$ .

Значит,  $\{x^*\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$ . Наконец, в силу условия  $r_n \rightarrow +0$ , других точек в пересечении быть не может.  $\square$

**Теорема 2.2.** *Теорема Бэра.*

Пусть  $X$  – полное метрическое пространство. Тогда  $X$  нельзя представить в виде  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ , где множества  $M_n \subset X$  – не плотные ни в одном шаре в  $X$  (нигде не плотные).

*Доказательство.* Предположим противное, то есть  $X$  имеет такой вид, как в условии. Положим  $r_0 := 1$  и выберем произвольный шар  $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X$ . Поскольку  $M_1$  неплотен в  $\overline{B}(x_0, r_0)$ , то

$$(X \setminus \overline{M}_1) \cap \overline{B}(x_0, r_0) \neq \emptyset$$

, поэтому можно выбрать шар

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0) : \overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{M}_1 = \emptyset$$

Можно считать, что  $r_1 \leq \frac{1}{2}$ . Повторим данное упражнение счётное количество раз...

Рассмотрим полученную последовательность вложенных шаров  $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ . Поскольку  $r_n \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ , то, по предыдущей теореме, для некоторой точки  $x^* \in X$  выполнено равенство

$$\{x^*\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$$

По предположению,  $X = \bigcup M_n$ , поэтому  $\exists n : x^* \in M_n$ , но по построению

$$\overline{B}(x^*, r_n) \cap \overline{M}_n = \emptyset$$

противоречие.  $\square$

## 2.2 Принцип сжимающих отображений.

**Теорема 2.3.** *Теорема Банаха. Принцип сжимающих отображений.*

Пусть  $X$  – полное метрическое пространство,  $f : X \rightarrow X$  – отображение такое, что выполнено следующее условие:

$$\exists \alpha \in (0, 1) \forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$$

Тогда

$$\exists! x^* : f(x^*) = x^*$$

*Доказательство.* Существование. Зафиксируем  $x_0 \in X$  и рассмотрим последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Поскольку для  $k \in \mathbb{N}$  выполнено:

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq \alpha \rho(x_k, x_{k-1}) = \alpha \rho(f(x_{k-1}), f(x_{k-2})) \leq \dots \leq \alpha^k \rho(x_1, x_0)$$

то по неравенству треугольника получаем

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq (\alpha^{n+p-1} + \dots + \alpha^n) \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0)$$

Так как  $\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , то  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна. Значит, из полноты пространства,

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$$

Переходя к пределу в равенстве  $x_{n+1} = f(x_n)$  и пользуясь непрерывностью  $f$ , получаем  $f(x^*) = x^*$ .

Единственность. Предположим, что

$$\exists y^* \neq x^* : f(y^*) = y^* \Rightarrow \rho(x^*, y^*) = \rho(f(x^*), f(y^*)) \stackrel{f \text{ сжим}}{\leq} \alpha \rho(x^*, y^*)$$

Это возможно лишь когда  $\rho(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$ . □

### 3 Компактные метрические пространства

#### 3.1 Компактность и центрированные системы замкнутых множеств

**Определение 3.1.** Метрическое пространство  $X$  называется компактным, если

$$\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X, G_\alpha - \text{открытые} : \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha = X : \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} : \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = X$$

**Определение 3.2.** Пусть  $X$  – метрическое пространство. Система  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$  называется центрированной, если

$$\forall \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A} : \bigcap_{i=1}^n B_{\alpha_i} \neq \emptyset$$

**Теорема 3.1.** Метрическое пространство  $X$  компактно  $\Leftrightarrow$  любая центрированная система замкнутых множеств в  $X$  имеет непустое пересечение.

*Доказательство.* Каждой системе открытых множеств  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset 2^X$  можно поставить в соответствие систему замкнутых множеств  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} := \{X \setminus G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  и наоборот.

Тогда любая система открытых множеств  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , не содержащая конечного подпокрытия, не является покрытием  $\Leftrightarrow$  любая центрированная система замкнутых множеств  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  имеет непустое пересечение (накиньте на одну из частей утверждения дополнения и поймите, что это одно и то же). □

#### 3.2 Критерий компактности

**Определение 3.3.** Пусть  $M$  – некоторое множество в метрическом пространстве  $R$ . Тогда множества  $A$  из  $R$  называется  $\varepsilon$ -сетью для  $M$ , если

$$\forall x \in M \exists a \in A : \rho(x, a) \leq \varepsilon$$

**Определение 3.4.** Множество  $M$  в метрическом пространстве  $R$  называется ограниченным, если

$$\exists B(x_0, \varepsilon) \supset M$$

**Определение 3.5.** Множество  $M$  в метрическом пространстве  $R$  называется вполне ограниченным, если для него при любом  $\varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

**Лемма 3.1.** Из вполне ограниченности следует ограниченность.

*Доказательство.* Из вполне ограниченности ограниченность следует получается, как объединение конечного числа ограниченных множеств.  $\square$

**Теорема 3.2.** Критерий компактности.

Пусть  $X$  – метрическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $X$  компактно.
2.  $X$  полно и вполне ограничено.
3. Из любой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , ещё говорят, что  $X$  – секвенциально компактно.
4. Любое бесконечное множество  $M \subset X$  имеет предельную точку.

*Доказательство.* •  $(1 \Rightarrow 2)$   $X$  вполне ограничено, поскольку для любого  $\varepsilon > 0$  из открытого покрытия  $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$  по определению можно выделить конечное подпокрытие. Центры шаров этого подпокрытия и будут давать требуемую  $\varepsilon$ -сеть.

Пусть последовательность  $\{x_n\} \subset X$  фундаментальна. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  положим  $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ , тогда система  $\{\overline{A_n}\}$  является центрированной системой замкнутых множеств. Система центрирована, потому что у любого конечного набора пересечением будет являться хвост, начинающийся с максимального из взятых индексов.

Поэтому можно выбрать точку  $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \overline{A_n}$ , причём  $x_0 \in X$  по рассмотренному выше критерию компактности. В силу фундаментальности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : \overline{A_n} \subset \overline{B}(x_N, \varepsilon)$$

откуда и  $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow_X x_0$ .

- $(2 \Rightarrow 3)$  Зафиксируем произвольную последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ . Поскольку  $X$  вполне ограничено, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in X : |\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cap B(y, \varepsilon)| = +\infty$$

Будем применять это рассуждение сначала для всего пространства  $X$ , потом для шаров в  $X$ , содержащих бесконечно много точек из  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

- Для  $\varepsilon := 1$  выберем  $\{x_k^1\} \subset \{x_n\}$  так, что  $\{x_k^1\} \subset B(y_1, 1)$
- Для  $\varepsilon := \frac{1}{2}$  выберем  $\{x_k^2\} \subset \{x_n^1\} \subset B(y_1, 1)$  так, что  $\{x_k^2\} \subset B(y_2, \frac{1}{2})$
- ...

Рассмотрим диагональную последовательность  $\{x_k^k\} \subset \{x_n\}$ . По построению, она является фундаментальной, и в силу полноты пространства  $X$ , она сходится.



- $(3 \Rightarrow 1)$  Проверим сначала, что  $X$  вполне ограничено. Предположим противное, то есть

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \{\overline{B}(y_n, \varepsilon_0)\}_{n=1}^N : \bigcup_{n=1}^N \overline{B}(y_n, \varepsilon_0) \not\supset X$$

Тогда можно выбрать точку  $x_1 \in X$ , затем точку  $x_2 \in (X \setminus B(x_1, \varepsilon_0))$ . По предположению, остаток, из которого берём элементы последовательности, никогда не будет пуст, поэтому получим последовательности с попарными расстояниями между точками не меньше  $\varepsilon_0$ , из которой, очевидно, нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность – противоречие.

Теперь проверим, что  $X$  компактно. Предположим противное, то есть

$$\exists \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}, G_\alpha - \text{открытое} \forall \{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N : \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \not\supset X$$

Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X \forall \{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^N : \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i} \not\supset B(x, \varepsilon)$$

(если такого шара нет, то из вполне ограниченности, складывая конечные покрытия конечного числа шаров, получим конечное покрытие всего множества).

Выбирая такую точку  $x_n$  для  $\varepsilon := \frac{1}{n}$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ , получим последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , из которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ . Пусть  $x_{n_k} \rightarrow_X x_0 \in X$ . Тогда существует  $\alpha_0 \in \mathcal{A}$  такое, что  $x_0 \in G_{\alpha_0}$ . Но множество  $G_{\alpha_0}$  открыто, поэтому оно покрывает некоторую окрестность точки  $x_0$ , а значит и все шары  $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k})$ , начиная с некоторого номера – противоречие.

- $(3 \Rightarrow 4)$  Зафиксируем бесконечное множество  $M \subset X$ , тогда, выбирая произвольным образом последовательность  $\{x_n\} \subset M$  и выделяя из неё сходящуюся подпоследовательность, получим требуемое.
- $(4 \Rightarrow 3)$  Зафиксируем последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Если множество её значений конечно, то в ней можно выделить стационарную подпоследовательность. Если же множество её значений бесконечно, то оно имеет предельную точку  $x_0 \in X$ , поэтому можно выбрать подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  такую, что  $x_{n_k} \rightarrow_X x_0$

□

### 3.3 Теорема Арцела-Асколи

**Определение 3.6.** Обозначим за  $C(X, Y)$  множество непрерывных функций  $f : X \rightarrow Y$ .

**Теорема 3.3.** *Теорема Кантора.*

Пусть  $X$  – компактное метрическое пространство, и функция  $f \in C(X, \mathbb{R})$ . Тогда  $f$  равномерно непрерывна на  $X$ .

*Доказательство.* Предположим противное, то есть выполнено следующее:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in X, \rho(x, y) < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Выбирая  $\delta := \frac{1}{n}$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ , получим последовательности  $\{x_n\}, \{y_n\}$ . Поскольку  $X$  компактно, можно выделить из них сходящиеся подпоследовательности  $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$ , причём сходятся они к одной и той же точке  $x_0 \in X$  по построению. Однако для любого  $k \in \mathbb{N}$  выполнено  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$  – противоречие.  $\square$

**Теорема 3.4. Арцела-Асколи.**

Пусть  $X$  – компактное метрическое пространство,  $M \subset C(X, \mathbb{R})$ . Тогда множество  $M$  вполне ограничено  $\Leftrightarrow$  множество  $M$  ограничено и выполнено условие равностепенной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta : \forall f \in M : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

*Доказательство.*  $(\Rightarrow)$  Мы уже доказывали, что из вполне ограниченности следует обычная ограниченность, проверим условие равностепенной непрерывности. Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и выберем конечным набор функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(X, \mathbb{R})$ , образующий  $\varepsilon$ -сеть.

По теореме Кантора, каждая из этих функций равномерно непрерывна. Пусть  $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$  – числа, соответствующие выбранному  $\varepsilon$  в определении равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_k > 0 \forall x, y \rho(x, y) < \delta_k : |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| < \varepsilon$$

Тогда для  $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$  выполнено требуемое:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| + |\varphi_k(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

$(\Leftarrow)$  Поскольку множество  $M$  ограничено, то существует  $C > 0$  такое, что

$$\forall f \in M : \|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq C$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и выберем по нему  $\delta > 0$  из условия равностепенной непрерывности.

Разобьём отрезок  $[a, b]$  на части длины меньше  $\delta$  точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

, а отрезок  $[-C, C]$  – на части длины меньше  $\varepsilon$  точками

$$-C = y_0 < y_1 < \dots < y_m = C$$

и рассмотрим конечное множество  $L$  кусочно линейных функций, построенных по всевозможным наборам точек вида

$$\{(x_j, y_{i_k})\}_{j=0}^n, i_k \in \overline{0, m}$$

Из такого построению становится очевидно, что

$$\forall f \in M \exists \varphi \in L \forall i \in \{0, \dots, n\} : |f(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon$$

Рассмотрим произвольную точку  $x \in [a, b]$  и выберем  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  такое, что  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , тогда:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x) - \varphi(x_i)| < 2\varepsilon + |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$$

Первое слагаемое меньше  $\varepsilon$  из равностепенной непрерывности, а второе по построению  $\varphi$ . Оценим слагаемое  $|\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$  отдельно:

$$|\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - \varphi(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| < 3\varepsilon$$

Таким образом,  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| < 5\varepsilon$ . Значит, построенное множество  $L$  образует конечную  $5\varepsilon$ -сеть для множества  $M$ , тогда, в силу произвольности выбора числа  $\varepsilon$ , множество  $M$  вполне ограничено.  $\square$

## 4 Линейные нормированные пространства

### 4.1 Теорема Рисса

**Определение 4.1.** Линейным нормированным пространством над полем  $\mathbb{K}$ , где  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , называется линейное пространство  $E$  над  $\mathbb{K}$  с функцией  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающей следующими свойствами:

1.  $\forall x \in E : \|x\| \geq 0$ , причём  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\forall x \in E \forall \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3.  $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника)

Функция  $\|\cdot\|$  называется нормой на пространстве  $E$ .

**Лемма 4.1.** Норма непрерывна, как функция  $E \rightarrow \mathbb{R}_+$

*Доказательство.*

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \Rightarrow \rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \rightarrow 0$$

Дважды воспользуемся неравенством треугольника:

- $\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$
- $\|x\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n\|$

Таким образом,  $|\|x_n\| - \|x\|| \rightarrow 0$ , то есть  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ , что и требовалось.  $\square$

**Определение 4.2.** Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство. Множество  $L \subset E$  называется:

- Линейным многообразием в  $E$ , если  $L$  замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры из  $\mathbb{K}$ .
- Подпространством в  $E$ , если  $L$  является линейным многообразием в  $E$  и при этом замкнуто.

**Лемма 4.2.** О почти перпендикулярности.

Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство,  $L \subsetneq E$  – подпространство. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in E \|y\| = 1 : \rho(y, L) := \inf_{z \in L} \|y - z\| \geq 1 - \varepsilon$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $y_0 \in E \setminus L$  и положим  $d := \rho(y_0, L) > 0$ . Выберем вектор  $z_0 \in L$  такой, что  $d \leq \|y_0 - z_0\| \leq d(1 + \varepsilon)$  и покажем, что подходит вектор  $y := \frac{y_0 - z_0}{\|y_0 - z_0\|} := \alpha(y_0 - z_0)$ . Действительно,  $\|y\| = 1$ , и для любого  $z \in L$  выполнены неравенства:

$$\|y - z\| = \|\alpha(y_0 - z_0) - z\| = |\alpha| \|y_0 - \left(z_0 + \frac{1}{\alpha} z\right)\| \geq |\alpha| d \geq \frac{d}{d(1 + \varepsilon)} \geq 1 - \varepsilon$$

Для осмысления последних переходов вникните в следующее утверждение:

$$\|y_0 - z_0\| \leq d(1 + \varepsilon) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\|y_0 - z_0\|} \geq \frac{1}{d(1 + \varepsilon)}$$

А также не забывайте про разложение Тейлора:

$$\frac{1}{1+x} \geq 1-x$$

□

**Определение 4.3.** Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство,  $M \subset E$ . Линейной оболочкой множества  $M$  называется множество следующего вида:

$$\langle M \rangle := \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k m_k \mid \{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{K}, \{m_k\}_{k=1}^n \subset M \right\}$$

**Теорема 4.1.** *Рисса.*

Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство. Тогда единичная сфера  $S(0, 1)$  компактна в  $E \Leftrightarrow \dim E < +\infty$

*Доказательство.* ( $\Leftarrow$ ) По эквивалентности норм конечномерных пространствах (теорема будет далее), все нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны, а относительно евклидовой нормы сфера  $S(0, 1)$  компактна.

( $\Rightarrow$ ) От противного. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и построим последовательность  $\{x_n\} \subset S(0, 1)$  с попарными расстояниями не меньше  $1 - \varepsilon$ , из чего будет следовать, что сфера  $S(0, 1)$  не вполне ограничена и потому не компактна:

- Выберем  $x_1 \in S(0, 1)$  произвольным образом
- По предыдущей лемме выберем  $x_2 \in S(0, 1) \setminus \langle x_1 \rangle$  такое, что  $\rho(x_2, \langle x_1 \rangle) \geq 1 - \varepsilon$ , причём утверждение применимо, так как линейная оболочка конечномерна, а линейная оболочка конечного числа элементов к тому же замкнута, а значит это действительно подпространство.
- ...

Поскольку  $\dim E = +\infty$ , то процесс не закончится, и будет получена искомая последовательность  $\{x_n\}$ . □

## 4.2 Характеристическое свойство евклидовых пространств...

**Определение 4.4.** Евклидовым пространством над полем  $\mathbb{K}$ , где  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , называется линейное пространство  $E$  над  $\mathbb{K}$  с функцией  $(\cdot, \cdot) : E^2 \rightarrow \mathbb{K}$ , обладающее следующими свойствами:

1.  $\forall x \in E : (x, x) \geq 0$ , причём  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\forall x, y \in E : (x, y) = \overline{(y, x)}$
3.  $\forall x, y, z \in E : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$

**Определение 4.5.** Полное линейное нормированное пространство  $E$  называется банаховым.

**Определение 4.6.** Полное евклидово пространство  $H$  называется гильбертовым.

**Теорема 4.2.** *Характеристическое свойство Евклидовых пространств.*

Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство. Тогда норма в  $E$  порождается скалярным произведением  $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in E : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) Распишем квадраты норм, как скалярные произведения элементов самих на себя:

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Без доказательства, очень-очень сложно □

### 4.3 Эквивалентность норм в конечномерном пространстве...

**Определение 4.7.** Две нормы  $p, q : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  над пространством  $V$  называются эквивалентными, если

$$\exists C_1, C_2 > 0 \forall x \in V : C_1 p(x) \leq q(x) \leq C_2 p(x)$$

**Лемма 4.3.** Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство, и  $\dim E < +\infty$ . Тогда любые две нормы на  $E$  эквивалентны.

*Доказательство.* (Доказательство для  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )

Поскольку  $E$  конечномерно, то в нём можно выбрать максимальную по включению линейно независимую систему  $e = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ , тогда  $e$  будет являться базисом в  $E$ . Для произвольного элемента  $x \in E$ , имеющего в базисе  $e$  координатный столбец  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , зададим его евклидову норму следующим образом:

$$\|x\|_e = \sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k^2}$$

Зафиксируем произвольную норму  $\|\cdot\|$  и докажем, что она эквивалентна норме  $\|\cdot\|_e$ :

1. Покажем, что  $\|\cdot\| < C\|\cdot\|_e$  для некоторого  $C > 0$ . Для произвольного  $x \in E$ , имеющего в базисе  $e$  координатный столбец  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , выполнено следующее:

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\| \left( \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \right)$$

Поскольку для любого  $k \in \{1, \dots, n\}$  выполнено  $\alpha_k < \|x\|_e$ , то достаточно взять число  $C := n \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\|$

2. Покажем теперь, что  $\|\cdot\|_e < \tilde{C}\|\cdot\|$  для некоторого  $\tilde{C} > 0$ . Предположим противное, тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in E : \|x_n\|_e > n\|x_n\|$$

Можно без ограничения общности считать, что  $\|x_n\|_e = 1$  для любого  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x_n\| < \frac{1}{n}$

Поскольку последовательность  $\{x_n\}$  содержится в единичной сфере  $S_e(0, 1)$  и относительно евклидовой нормы сфера компактна, можно выделить из  $\{x_n\}$  подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , сходящуюся относительно евклидовой нормы. Тогда

$$\exists x \in S_e(0, 1) : \|x_{n_k} - x\|_e \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Тогда в силу предыдущего пункта  $\|x_{n_k} - x\| \rightarrow 0$ . Но по построению  $\|x_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ , поэтому  $x = 0$  – противоречие с тем, что  $x \in S_e(0, 1)$ .

□

**Следствие.** Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство  $x_1, \dots, x_n \in E$ . Тогда линейная оболочка  $L := \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  образует подпространство в  $E$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\dim L < +\infty$ , и по предыдущему утверждению сужение нормы из  $E$  на  $L$  эквивалентно евклидовой норме. Относительно евклидовой нормы конечномерное пространство полно, поэтому и  $L$  полно относительно нормы из  $E$ . Следовательно,  $L$  замкнуто, как подмножество в  $E$ .

□

**Определение 4.8.** Линейным топологическим пространством называется топологическое пространство  $X$  с определёнными на нём операциями сложения и умножения на числа из поля  $\mathbb{K}$ , непрерывными на  $X$ .

**Пример.** Любое линейное нормированное пространство  $E$  является линейным топологическим.

## 4.4 Теорема Рисса о проекции

**Определение 4.9.** Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство,  $L \subset E$  – линейное нормированное подпространство,  $h \in E$ . Элементом наилучшего приближения для  $h$  называется  $x \in L$  такой, что  $\|h - x\| = \rho(h, L) = \inf_{y \in L} \|h - y\|$

**Лемма 4.4.** Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $M \subset H$  – подпространство в  $H$ . Тогда для любого  $h \in H$  существует единственный элемент наилучшего приближения  $x \in M$ .

*Доказательство.* Зафиксируем  $h \in H$ . Сначала докажем, что элемент наилучшего приближения для  $h$  существует.

Положим  $d := \rho(h, M)$ . Если  $d = 0$ , то, в силу замкнутости множества  $M$ , выполнено  $h \in M$ , и в качестве элемента наилучшего приближения для  $h$  подходит сам  $h$ . Иначе выберем  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M$  такую, что  $\|h - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$ . По равенству параллелограмма,

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\|^2 = 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - 4 \left\| h - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2$$

Поскольку  $\|h - x_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d^2$ ,  $\|h - x_m\|^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} d^2$  и выполнено неравенство  $\|h - \frac{x_n + x_m}{2}\| \geq d$ , последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна. Поскольку пространство  $H$  полно, а  $M$  замкнуто, то существует  $x \in M$  такой, что  $x_n \rightarrow_H x$ , причём, в силу непрерывности нормы (4.1),  $\|h - x\| = d$

Покажем теперь, что элемент наилучшего приближения для  $h$  единственен. Пусть для некоторого  $y \in M$  тоже выполнено равенство  $\|h - y\| = d$ , тогда, по равенству параллелограмма, выполнено следующее:

$$4d^2 = 2\|h - x\|^2 + 2\|h - y\|^2 = \|x - y\|^2 + 4\left\|h - \frac{x + y}{2}\right\|^2 \geq \|x - y\|^2 + 4d^2$$

Для данной цепочки мы воспользовались следующими равенствами:

$$h - x + h - y = 2h - x - y = 2\left(h - \frac{x + y}{2}\right); \quad h - x - h + y = -(x - y)$$

Итак,  $\|x - y\| = 0 \Rightarrow x = y$ , что и требовалось.  $\square$

**Определение 4.10.** Пусть  $E$  – евклидово пространство,  $S \subset E$ . Аннулятором множества  $S$  называется следующее множество:

$$S^\perp := \{y \in E \mid \forall x \in S : (x, y) = 0\}$$

**Замечание.** Легко проверить, что  $S^\perp$  является подпространством в  $E$ . Кроме того, выполнены равенства

$$S^\perp = \langle S \rangle^\perp = \overline{\langle S \rangle}^\perp$$

**Теорема 4.3.** *Рисса, о проекции.*

Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $M \subset H$  – подпространство в  $H$ . Тогда  $H = M \oplus M^\perp$ .

*Доказательство.* Покажем сначала, что  $H = M + M^\perp$  (разложение существует, но м.б. не единственно).

Зафиксируем  $h \in H$ , и по утверждению о наилучшем приближении, выберем  $x \in M$ . Положим  $y := h - x$  и  $d := \|y\|$ , тогда для произвольного  $m \in M$  и произвольного  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  выполнено следующее:

$$d^2 = \|h - x\|^2 \leq \|h - (x + \alpha m)\|^2 = d^2 - 2\alpha(h - x, m) + \alpha^2\|m\|^2 \Rightarrow (y, m) \leq \frac{\alpha}{2}\|m\|^2$$

В силу произвольности  $\alpha$  получаем, что  $(y, m) = 0 \Rightarrow y \in M^\perp$ , причём  $h = x + y$ . Значит, выполнено равенство  $H = M + M^\perp$ .

Проверим теперь, что рассматриваемая сумма действительно прямая. Если  $z \in M \cap M^\perp \Rightarrow (z, z) = 0 \Rightarrow z = 0$ , что и означает требуемое.  $\square$

## 4.5 Сепарабельные гильбертовы пространства

**Определение 4.11.** Пусть  $E$  – линейное нормированное пространство. Система  $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset E$  называется базисом Шаудера в  $E$ , если

$$\forall x \in E \exists \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K} : x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n$$

**Лемма 4.5.** *Неравенство Бесселя.*

Пусть  $E$  – евклидово пространство, элементы  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset E$  образуют ортонормированную систему. Тогда для любого  $x \in E$  выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

*Доказательство.* Достаточно заметить, что в силу ортонормированности системы  $\{e_k\}$  выполнено следующее равенство:

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2$$

Поскольку левая часть равенства неотрицательна, то неотрицательна и правая часть, и верно это даже после предельного перехода  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Лемма 4.6.** Пусть  $E$  – евклидово пространство, элементы  $e_1, \dots, e_k \in E$  образуют ортонормированную систему. Тогда

$$\forall x \in E \forall \{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{K} : \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| \geq \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right\|$$

Более того, равенство в неравенстве выше достигается тогда и только тогда, когда

$$\forall k \in \overline{1, n} : \alpha_k = (x, e_k)$$

*Доказательство.* В силу ортонормированности системы  $\{e_k\}_{k=1}^n$ , выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 &= \left( x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n ((x, e_k) - \alpha_k)^2 \end{aligned}$$

$\square$

**Теорема 4.4.** Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство,  $\dim H = +\infty$  и  $e = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  – ортонормированная система. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $e$  – ортонормированный базис в  $H$
2.  $\overline{\langle e \rangle} = H$ , то есть  $e$  – полная система.
3. Для любого  $h \in H$  выполнено равенство Парсеваля:

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(h, e_n)|^2$$

4.  $e^{\perp} = \{0\}$



*Доказательство.* • (1  $\Rightarrow$  2) Очевидно из определения базиса.

- (2  $\Rightarrow$  1) Зафиксируем произвольный  $h \in H$  и произвольное  $\varepsilon > 0$ . По условию, существует конечный набор  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  такой, что  $\|h - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\| < \varepsilon$ . Тогда, по предыдущей лемме, выполнено также неравенство  $\|h - \sum_{k=1}^n (h, e_k) e_k\| < \varepsilon$ . Тогда, в силу произвольности числа  $\varepsilon$ , выполнено равенство  $h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n) e_n$ .

Проверим теперь, что разложение элемента  $h$  единственно. Пусть для некоторого набора  $\{\beta_n\} \subset \mathbb{K}$  выполнено равенство  $h = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$ . Тогда для любого  $k \in \mathbb{N}$ , скалярно умножая частичную сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$  на  $e_k$  и переходя к пределу, получаем, что  $\beta_k = (h, e_k)$ , что и означает требуемое.

- (1  $\Leftrightarrow$  3) Уже было замечено, что для любого  $h \in H$  и любого  $k \in \mathbb{N}$  выполнено следующее:

$$\left\| h - \sum_{k=1}^n (h, e_k) e_k \right\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{k=1}^n |(h, e_k)|^2$$

Значит,  $h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n) e_n \Leftrightarrow \|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(h, e_n)|^2$ , и единственность разложения элемента  $h$  доказывается так же, как и в импликации выше.

- (2  $\Leftrightarrow$  4) Из теоремы Рисса и равенства  $e^\perp = \overline{\langle e \rangle}^\perp = H^\perp$  получаем требуемое. □

## 5 Линейные ограниченные операторы в линейных нормированных пространствах

### 5.1 Связь непрерывности и ограниченности линейного оператора

**Определение 5.1.** Пусть  $E_1, E_2$  – линейные нормированные пространства над полем  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ). Тогда  $A : E_1 \rightarrow E_2$  будем называть оператором, а  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  – функционалом.

**Определение 5.2.** Оператор  $A$  называется ограниченным, если для любого ограниченного  $M \subset E_1$  образ  $A(M)$  ограничен в  $E_2$ .

**Определение 5.3.** Для линейных операторов можно ввести следующие определения:

- Образ оператора:

$$\text{Im } A = \{y \in E_2 \mid \exists x \in E_1 : Ax = y\}$$

- Ядро оператора:

$$\ker A = \{x \in E_1 \mid Ax = 0\}$$

**Определение 5.4.** Линейный оператор  $A$  называется непрерывным, если для любой последовательности  $x_n \rightarrow x$  выполнено  $Ax_n \rightarrow Ax$ .

**Теорема 5.1.** Пусть  $E_1, E_2$  – линейные нормированные пространства.  $A : E_1 \rightarrow E_2$  – линейный оператор. Тогда  $A$  – ограниченный тогда и только тогда, когда  $A$  – непрерывный.

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ ) Как мы знаем,  $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$ . Тогда

$$\|Ax_n - Ax\|_{E_2} = \|A(x_n - x)\|_{E_2} \leq \|A\| \cdot \|x_n - x\|_{E_1} \rightarrow 0$$

( $\Leftarrow$ ) Предположим противное, то есть  $A$  не является ограниченным:

$$\forall K \exists x : \|Ax\|_{E_2} > K\|x\|_{E_1}$$

Пусть  $K$  пробегает все натуральные числа, тогда образуется последовательность  $\{x_n\}$  такая, что  $\|Ax_n\|_{E_2} > n\|x_n\|_{E_1}$ . Все  $x_n$ , очевидно, ненулевые. Рассмотрим последовательность  $y_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|_{E_1}} \rightarrow 0$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|Ay_n\|_{E_2} = \frac{\|Ax_n\|_{E_2}}{n\|x_n\|_{E_1}} > 1$$

Но из-за непрерывности оператора  $Ay_n \rightarrow A0 = 0$ . Противоречие.  $\square$

## 5.2 Топологии и сходимости в пространстве операторов...

**Лемма 5.1.** Если  $A$  – линейный оператор, то следующие условия эквивалентны:

1.  $A$  – ограниченный
2.  $\exists K : \|Ax\|_{E_2} \leq K\|x\|_{E_1}$
3. Образ единичного шара под действием оператора  $A$  ограничен

*Доказательство.* ( $1 \Rightarrow 2$ ) Если  $A$  – ограниченный, то образ любого ограниченного множества ограничен. В частности, образ единичного шара  $B$  ограничен. То есть

$$\exists K \forall x \neq 0 : \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|_{E_1}} \right) \right\|_{E_2} \leq K$$

В силу линейности оператора:

$$\exists K \forall x \neq 0 : \|Ax\|_{E_2} \leq K\|x\|_{E_1}$$

( $2 \Rightarrow 3$ ) Если

$$\exists K : \|Ax\|_{E_2} \leq K\|x\|_{E_1}$$

, то  $\forall x : \|x\|_{E_1} \leq 1$  получаем, что  $\|Ax\|_{E_2} \leq K$ . То есть образ единичного шара ограничен.

( $3 \Rightarrow 1$ )

$$\exists K \forall x, \|x\|_{E_1} = 1 : \|Ax\|_{E_2} \leq K$$

Пусть  $M \subset E_1$  ограничено, то есть лежит в шаре радиуса  $R$ . Далее считаем, что  $x \neq 0$ :

$$\forall x \in M : \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|_{E_1}} \right) \right\| \leq K \Rightarrow \forall x \in M : \|Ax\|_{E_2} \leq K\|x\|_{E_1} \leq K \cdot R$$

$\square$

**Определение 5.5.** Нормой линейного ограниченного оператора  $A$  называется

$$\|A\| = \inf \{ K \mid \forall x : \|Ax\|_{E_2} \leq K\|x\|_{E_1} \}$$

**Определение 5.6.**  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из  $E_1$  в  $E_2$ . Оно образует линейное пространство над  $\mathbb{K}$ .

**Определение 5.7.** Двойственное или сопряжённое пространство – это

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

где  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ,  $E$  – линейное нормированное пространство.

**Теорема 5.2.** Пусть  $E_1, E_2$  – линейные нормированные пространства. Тогда

1.  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  – линейное нормированное пространство с нормой  $\|A\|$ .
2. Если  $E_2$  – банахово, то  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  – банахово.

*Доказательство.* 1. Линейность данного пространства очевидна. Проверим неравенство треугольника для нормы:

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|(A_1 + A_2)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \{\|A_1x\| + \|A_2x\|\} \leq \sup_{\|x\|=1} \|A_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|A_2x\| = \|A_1\| + \|A_2\|$$

2. Покажем, что  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  – полное, если  $E_2$  – полное.

Пусть  $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$  – фундаментальна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m \geq N : \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

Заметим, что

$$\forall x \in S_{E_1}(0, 1) \|A_nx - A_mx\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\|_{E_1} < \varepsilon$$

Получается, что  $\forall x \in S_{E_1}(0, 1)$  последовательность  $\{A_nx\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна. Так как  $E_2$  – полное, то эта последовательность сходится. Обозначим её предел через  $Ax$ .  $A$ , очевидно, линейный оператор. Покажем, что он ограничен.

Так как  $\|\cdot\|$  – непрерывная функция, то  $\|A_nx\|_{E_2} \rightarrow \|Ax\|_{E_2}$ . Воспользуемся тем, что  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  ограничена (из-за фундаментальности), то есть

$$\exists K \forall n : \|A_n\| \leq K \Rightarrow \|A_nx\|_{E_2} \leq \|A_n\| \|x\|_{E_1} \leq K \|x\|_{E_1}$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем, что  $\|Ax\| \leq K \|x\|_{E_1}$ . Таким образом,  $A$  является ограниченным линейным оператором и лежит в  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Осталось показать, что  $A_n \rightarrow A$ .

Вспомним фундаментальность:

$$\forall x \in S_{E_1}(0, 1) : \|A_nx - A_mx\|_{E_2} < \varepsilon$$

Зафиксируем номер  $n$  и устремим  $m$  к бесконечности. Тогда

$$\forall x \in S_{E_1}(0, 1) : \|A_nx - Ax\| \leq \varepsilon$$

$A$  значит

$$\sup_{\|x\|=1} \|A_nx - Ax\| \leq \varepsilon$$

Это и означает, что  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ , то есть  $A_n \rightarrow A$ .

□

**Следствие.** Если  $E$  – линейное нормированное пространство, то  $E^*$  всегда полное.

### 5.3 Задача о продолжении непрерывного отображения

**Теорема 5.3.** Пусть  $E_1$  – линейное нормированное пространство,  $E_2$  – банахово пространство и  $A$  – линейный ограниченный оператор:  $A : D(A) \rightarrow E_2$ , где  $D(A)$  – линейное многообразие в  $E_1 = \overline{D(A)}$ . Тогда  $\exists! \tilde{A} \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ :

1.  $\tilde{A}|_{D(A)} = A$
2.  $\|\tilde{A}\| = \|A\|$

*Доказательство.* Единственность.

Пусть есть  $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2$ . Из замкнутости  $E_1$ :

$$\forall x \in E_1 \exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D(A) : x_n \rightarrow x$$

При этом,  $\tilde{A}^1 x = \lim_{n \rightarrow +\infty} A x_n = \tilde{A}^2 x$ . Значит,  $\tilde{A}^1 = \tilde{A}^2$ .

Существование.

Определим оператор  $\tilde{A}$  по формуле  $\tilde{A}x = \lim_{n \rightarrow +\infty} A x_n$ . Для корректности необходимо показать:

- Предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A x_n$  существует
- Предел не зависит от выбора  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$
- Действительно  $\tilde{A}|_{D(A)} = A$

Покажем:

- Так как  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  сходится, она фундаментальна, значит последовательность  $\{A x_n\}_{n=1}^\infty \subset E_2$  фундаментальна. Пространство  $E_2$  банахово, поэтому предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A x_n$  существует.
- Пусть есть две последовательности  $\{x'_n\}_{n=1}^\infty, \{x''_n\}_{n=1}^\infty$ , сходящиеся к одному и тому же  $x \in E_1$ , но пусть пределы  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A x'_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} A x''_n$  разные. Тогда возьмём последовательность  $\{y_n\}$ , полученную чередованием элементов  $\{x'_n\}_{n=1}^\infty, \{x''_n\}_{n=1}^\infty$ . Но получим, что  $\{A y_n\}_{n=1}^\infty$  расходится. Противоречие предыдущему пункту.
- Возьмём константную последовательность  $\{x\}_{n=1}^\infty, x \in D(A)$ . Очевидно, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A x = A x$ . По предыдущему пункту  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A x_n$  не зависит от выбора последовательности, значит  $\tilde{A}|_{D(A)} = A$ .

Осталось показать, что  $\tilde{A}$  – линейный ограниченный оператор. Линейность очевидна из линейности  $A$  и предела.

Ограниченность (а значит и непрерывность) очевидна из непрерывности нормы:

$$\tilde{A}x = \lim_{n \rightarrow +\infty} A x_n \Leftrightarrow \|A x_n\| \rightarrow \|\tilde{A}x\|$$

□

## 5.4 Теорема Банаха-Штейнгауза

**Теорема 5.4.** *Теорема Банаха-Штейнгауза.*

Пусть  $X, Y$  – линейные нормированные пространства, причём  $X$  полно. Пусть  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  – семейство линейных непрерывных операторов. Тогда

$$\forall x \in X : \sup\{\|Ax\|_Y \mid A \in \mathcal{A}\} < +\infty \Rightarrow \sup\{\|A\| \mid A \in \mathcal{A}\} < +\infty$$

То есть, из поточечной ограниченности следует равномерная ограниченность.

*Доказательство.* Пусть

$$X_n = \{x \in X \mid \sup_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\|_Y \leq n\} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \{x \in X \mid \|Ax\|_Y \leq n\}$$

Для любого  $A \in \mathcal{A}$  множество  $\{x \in X \mid \|Ax\|_Y \leq n\}$  замкнуто, как прообраз замкнутого шара  $\overline{B}(0, n) \subset Y$  под действием непрерывного отображения  $A$ , а пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто.

Так как  $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ , то по теореме Бэра ( $X$  полное, а значит все  $X_n$  не могут быть не плотными ни в одном шаре, а значит найдётся  $m$  и какой-то шар, в котором  $X_m$  плотно):

$$\exists m \exists \overline{B}(x_0, \varepsilon) : \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq X_m$$

Пусть  $u \in X, \|u\|_X = 1$ . Тогда рассмотрим  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} \|Au\|_Y &= \frac{1}{\varepsilon} \|A[\varepsilon u] + Ax_0 - Ax_0\|_Y = \frac{1}{\varepsilon} \|A[x_0 + \varepsilon u] - Ax_0\|_Y \leq \\ &\frac{1}{\varepsilon} (\|A[x_0 + \varepsilon u]\|_Y + \|Ax_0\|_Y) \leq \frac{1}{\varepsilon} (m + m) \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно из-за того, что  $x_0 \in X_m, x_0 + \varepsilon u \in \overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset X_m$ . В неравенстве сверху можно перейти к супремуму по  $u$  и получить, что

$$\forall A \in \mathcal{A} : \|A\| \leq \frac{2m}{\varepsilon} < +\infty$$

□

## 5.5 Полнота пространства...

**Теорема 5.5.** *Полнота  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$  относительно поточечной сходимости.*

Пусть  $E_1, E_2$  – банаховы пространства,  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ , причём  $\forall x \in E_1 : \{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$  – фундаментальная в  $E_2$ . Тогда

$$\exists A \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \forall x \in E_1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x = Ax$$

*Доказательство.* Так как  $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна в банаховом  $E_2$ , то  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x, Ax := \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x$ .

Осталось показать, что определённый таким образом оператор – линейный непрерывный. Линейность очевидна из линейности предела и каждого  $A_n$ .

Так как  $\forall x \in E_1 : \{A_n x\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна, то  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  поточечно ограничена и по теореме Банаха-Штейнгауза ограничена равномерно:

$$\exists M \forall n \in \mathbb{N} : \|A_n\| \leq M$$

Тогда

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|x\| \leq M \|x\|, \|A_n x\| \rightarrow \|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \leq M \|x\|$$

То есть оператор ограничен и непрерывен, а значит  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ .  $\square$

**Теорема 5.6.** Критерий поточечной сходимости операторов из  $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ .

Пусть  $E_1$  – банахово,  $E_2$  – линейное нормированное пространство. Верно, что  $\forall \{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ,  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ :

$$A_n \xrightarrow{\text{поточечно}} A \Leftrightarrow \begin{cases} \exists M \forall n : \|A_n\| \leq M \\ \forall s \in S, E_1 =: \overline{\langle S \rangle} : A_n s \rightarrow A s \end{cases}$$

*Доказательство.*  $(\Rightarrow)$  Пункт 2 очевиден. Из поточечной сходимости  $\{A_n x\}$  следует поточечная ограниченность  $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$ . Значит, по теореме Банаха-Штейнгауза последовательность  $\{\|A_n\|\}_{n=1}^\infty$  ограничена.

$(\Leftarrow)$  Так как множество  $\langle S \rangle$  всюду плотно в  $E_1$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in E_1 \exists y \in \langle S \rangle : \|x - y\| < \varepsilon$$

Тогда для  $y$  (благодаря п.2) верно:

$$\exists N(\varepsilon, y) \forall n > N : \|A_n y - A y\| < \varepsilon$$

Перейдём к  $x \in E_1$ :

$$\|A_n x - A x\| \leq \|A x - A y\| + \|A_n y - A y\| + \|A_n y - A_n x\| \leq \varepsilon \|A\| + \varepsilon + \varepsilon \|A_n\| \leq \varepsilon (\|A\| + M + 1)$$

Значит  $A_n$  поточечно сходится к  $A$  на  $E_1$ .  $\square$

## 6 Сопряжённое пространство...

### 6.1 Рисса-Фреше

**Теорема 6.1.** Теорема Рисса-Фреше.

Пусть существуют гильбертово пространство  $H$  и линейный ограниченный функционал  $f \in H^*$  в пространстве  $H$ . Тогда

$$\exists! y \in H \forall x \in H : f(x) = (y, x)$$

При том  $\|f\| = \|y\|$ .

*Доказательство.* Существование.

Пусть  $f \equiv 0$ , тогда  $y = 0$ . Требуемые свойства, очевидно, выполняются.

Теперь пусть  $f \not\equiv 0$ , тогда  $\ker f \neq H$ , а значит

$$\exists b \in (\ker f)^\perp, b \neq 0 : f(b) \neq 0$$

Для  $x \in H$  рассмотрим  $p_x := x - \frac{f(x)}{f(b)}b$ . Для него

$$f(p_x) = f(x) - \frac{f(x)}{f(b)}f(b) = 0 \Rightarrow p_x \in \ker f, (b, p_x) = 0$$

Раскроем последнее выражение:

$$0 = \left(b, x - \frac{f(x)}{f(b)}b\right) = (b, x) - \frac{f(x)}{f(b)}\|b\|^2 \Rightarrow f(x) = \frac{f(b)}{\|b\|^2}(b, x) = \left(\frac{f(b)}{\|b\|^2}b, x\right)$$

Обозначим первый член скалярного произведения, как  $y$ . Как мы видим, он удовлетворяет требованию выразимости из формулировки теоремы.

Единственность.

Предположим, что

$$\exists z \forall x \in H : f(x) = (z, x)$$

Тогда, в силу линейности скалярного произведения

$$\forall x \in H : (y - z, x) = 0$$

Подставим подходящий вектор

$$y - z \in H \Rightarrow 0 = (y - z, y - z) = \|y - z\|^2$$

Значит  $y - z = 0$  и  $z = y$ .

Равенство норм. Из КБШ имеем

$$\forall x \in H : |f(x)| = |(y, x)| \leq \|y\| \cdot \|x\|$$

откуда по определению нормы функционала получаем  $\|f\| \leq \|y\|$ . Также, так как  $y \in H$ , то

$$\|y\|^2 = (y, y) = f(y) = |f(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\|$$

Значит,  $\|y\| \leq \|f\|$ . Что в итоге даёт нам  $\|y\| = \|f\|$ . □

## 6.2 Теорема Хана-Банаха и её следствия

**Теорема 6.2.** *Теорема Хана-Банаха.*

*Пусть  $E$  – ЛНП.  $M \subset E$  – линейное многообразие,  $f$  – линейный ограниченный функционал на  $M$ . Тогда  $\exists \tilde{f} \in E^*$ :*

$$\begin{cases} \tilde{f}|_M = f \\ \|\tilde{f}\| = \|f\| \end{cases}$$

**Замечание.** Ниже приведено доказательство для сепарабельных пространств. Теорема верна и для несепарабельных, но там в доказательстве используется трансфинитная индукция.

*Доказательство.* Будем доопределять  $f$ : раз  $M \neq E \Rightarrow \exists x_0 \notin M$ .

Тогда рассмотрим  $M_1 = M \oplus [x_0]$ . Продолжим  $f$  на  $M_1$  с сохранением нормы:

$$\forall x \in M, \alpha \in \mathbb{R} : y = x + \alpha x_0 \in M_1 \Rightarrow f_1(y) = f_1(x) + \alpha f_1(x_0) + \alpha \alpha$$

Существует ли  $a$  такое, что  $\|f_1\| = \|f\|$ ?

Очевидно, что  $\|f_1\| \geq \|f\|$ , тогда осталось показать существование такого  $a$ , что  $\|f_1\| \leq \|f\|$

$$\exists a \forall y \in M_1 : |f(x) + \alpha a| = |f_1(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\| = \|f\| \cdot \|x + \alpha x_0\|$$

Если  $\alpha = 0$ , то мы попали на  $M$  и неравенство выполнено. Если это не так, то исходное неравенство эквивалентно

$$\left| f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + a \right| \leq \|f\| \cdot \left\| \frac{x}{\alpha} + x_0 \right\|$$

Обозначим  $z := \frac{x}{\alpha}$ . Тогда хочется доказать, что

$$\begin{aligned} -\|f\| \cdot \|z + x_0\| &\leq f(z) + a \leq \|f\| \cdot \|z + x_0\| \Leftrightarrow \\ -f(z) - \|f\| \cdot \|z + x_0\| &\leq a \leq -f(z) + \|f\| \cdot \|z + x_0\| \end{aligned}$$

Нам достаточно, чтобы  $\sup$  левой части по всем  $z$  был меньше  $\inf$  правой части неравенства по всем  $z$ . Тогда на самом деле нам достаточно показать, что

$$\forall z_1, z_2 : -f(z_1) - \|f\| \cdot \|z_1 + x_0\| \leq -f(z_2) + \|f\| \cdot \|z_2 + x_0\|$$

Преобразуем, следующее должно быть верно:

$$f(z_2) - f(z_1) \leq \|f\| \cdot (\|z_1 + x_0\| + \|z_2 + x_0\|)$$

Это верно, если будет выполнено более сильное утверждение:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq \|f\| \cdot (\|z_1 + x_0\| + \|z_2 + x_0\|)$$

Но мы знаем, что

$$|f(z_2) - f(z_1)| = |f(z_2 - z_1)| \leq \|f\| \cdot \|z_2 - z_1\| = \|f\| \cdot \|z_2 + x_0 - x_0 - z_1\| \leq \|f\| \cdot (\|z_1 + x_0\| + \|z_2 + x_0\|)$$

Мы победили, так как это значит, что для любого  $z$  действительно можно выбрать такое число  $a$ .

Теперь мы готовы запустить индукцию: предположим, что  $E$  — сепарабельное. Тогда пусть

$$X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} : \overline{X} = E; \quad M_0 = M, x_0 \notin M$$

Берём  $x_{n-1}$  и получаем  $M_n = M_{n-1} + \langle x_{n-1} \rangle, x_n \notin M_n$ . Введём  $M_{\infty} = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$  — линейное многообразие.

Введём

$$f_{\infty}|_{M_n} := f_n \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{M_{\infty}}$$

По теореме о продолжении  $f_{\infty}$  единственным образом продолжается до  $\tilde{f} \in E^*$  □

**Следствие.** Пусть  $E$  — линейное нормированное пространство,  $M \subsetneq E$  — линейное многообразие,  $x_0 \notin \overline{M}$ . Тогда  $\exists f \in E^*$  такой, что

$$\begin{cases} f|_M = 0 \\ f(x_0) = 1 \\ \|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, M)} \end{cases}$$



*Доказательство.* Рассмотрим  $M_1 = M \oplus \langle x_0 \rangle, y = x + \alpha x_0$ . Тогда

$$f_1(y) = f(x) + \alpha f(x_0) = 0 + \alpha \cdot 1 = \alpha$$

По теореме Хана-Банаха

$$\exists f \in E^* : f|_{M_1} = f_1, \|f\|_{E^*} = \|f_1\|_{M_1^*}$$

Осталось показать, что  $\|f_1\| = \frac{1}{\rho(x_0, M)}$

1.  $\forall y \in M_1 : y = x + \alpha x_0, x \in M, \alpha \in \mathbb{K}$ . Тогда

$$\frac{|f_1(y)|}{\|y\|} = \frac{|\alpha|}{\|y\|} = \frac{1}{\|\frac{x}{\alpha} + x_0\|} \leq \frac{1}{\rho(x_0, M)}$$

2.  $\exists$  максимизирующая последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M : \|y_n := [x_n + x_0]\| \rightarrow \rho$$

Тогда, очевидно

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_1(y_n)|}{\|y_n\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|x_n + x_0\|} = \frac{1}{\rho}$$

□

**Следствие.** Если  $x \in E$ , то  $\exists f \in E^* :$

$$\begin{cases} \|f\| = 1 \\ f(x) = \|x\| \end{cases}$$

*Доказательство.* Возьмём для предыдущего следствия  $M := \{0\}, x_0 := \frac{x}{\|x\|}$ . Тогда  $\exists f$ , обладающий всеми нужными свойствами:

1.  $f|_{\{0\}} = 0$
2.  $f(x) = \|x\|$
3.  $\|f\| = \frac{1}{\rho(\frac{x}{\|x\|}, 0)} = 1$

□

**Следствие.** Выполняются следующие утверждения:

- Если  $\forall f \in E^* : f(x) = f(y)$ , то  $x = y$ .
- Если  $\forall f \in E^* : f(x) = 0$ , то  $x = 0$

*Доказательство.* Очевидно, что эти два утверждения эквивалентны (можно перенести в одну сторону равенства и воспользоваться линейностью), поэтому будем доказывать только второе.

От противного: пусть

$$\exists x \neq 0 \forall f \in E^* : f(x) = 0$$

Но тогда по предыдущему следствию

$$\exists f \in E^* : f(x) = \|x\| \neq 0$$

Противоречие!

□

**Следствие.**  $\forall x \in E$  его норма может быть выражена, как

$$\|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

*Доказательство.* Оценка сверху очевидна:

$$\sup_{f \in E^*, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)| \leq \sup_{f \in E^*, \|f\|_{E^*}=1} \|f\| \cdot \|x\| = \|x\|$$

Для неравенства в другую сторону зафиксируем  $x$ . Если  $x = 0$ , то всё тривиально. Иначе

$$\sup_{f \in E^*, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)| \geq |f_x(x)| = \|x\|$$

где  $f_x(x)$  – функция из одного из предыдущих следствий. □