

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Функциональный анализ»

3 курс, 6 семестр, 2023/2024 уч.г.

(Поток Коновалова С.П.)

I.(§7) Слабая сходимость в банаховом пространстве

1. Изометричность вложения E в E^{**} . Критерий слабой сходимости последовательности.
2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества.
3. Замкнутый шар в гильбертовом пространстве слабо секвенциально компактен (теорема Банаха).

II.(§8) Обратный оператор. Обратимость

1. Обратимость линейного, ограниченного снизу ($\|Ax\| \geq k\|x\|$) оператора.
2. Обратимость возмущённого оператора $A + \Delta A$.
3. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе. Доказательство теоремы Банаха в случае гильбертова пространства.

III.(§9) Сопряженный оператор

1. Норма сопряженного оператора (в линейном нормированном пространстве).
2. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Равенство $H = \overline{Im A} \oplus Ker A^*$.

IV.(§10) Спектр. Резольвента

1. Операторнозначные функции комплексного переменного. Аналитичность резольвенты. Спектральный радиус. Основная теорема о спектре.

V.(§11) Самосопряженные операторы

1. Свойства квадратичной формы (Ax, x) и собственных значений самосопряженного оператора A .
2. Разложение гильбертова пространства $H = \overline{Im(A - \lambda I)} \oplus Ker(A - \lambda I)$, где A – самосопряженный оператор.
3. Критерий принадлежности числа спектру самосопряженного оператора. Вещественность спектра самосопряженного оператора.
4. Теорема о спектре самосопряжённого оператора: $\sigma(A) \subseteq [m_-, m_+]$, $r(A) = \|A\|$.

VI.(§12) Компактные операторы

1. Свойства компактных операторов.
2. Свойства собственных значений компактного оператора.
3. Теорема Фредгольма для компактных самосопряжённых операторов.
4. Теорема Гильберта–Шмидта.

VII.(§13) Элементы нелинейного анализа

1. Производная Фреше, производная Гато. Формула конечных приращений.

VIII.(§14) Преобразование Фурье и свертка в пространствах $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$

1. Определения и основные свойства. Формула умножения. Преобразование Фурье свертки.
2. Операторы Гильберта–Шмидта.

Литература

1. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа.
2. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов