Содержание

Функциональный анализ 2.0.

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

1. Слабая сходимость в банаховом пространстве

1.1. Изометричность вложения E в E^{**}. Критерий слабой сходимости последовательности.

Теорема 1.1.1 (Хана Банаха, напоминание): Пусть E – ЛНП. $M \subset E$ – линейное многообразие, f – линейный ограниченный функционал на M. Тогда $\exists \tilde{f} \in E^*$:
1. $\tilde{f}|_M = f$
2. $\|\tilde{f}\| = \|f\|$

Следствие 1.1.1.1:

$$\forall x \in E : \|x\| = \sup_{f \in E, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

Теорема 1.1.2 (Об изометрии): E изометрично E^{**}, через отображение $\pi : E \to E^{**}$, где

$$\pi x = F_x \in E^{**}; \quad F_x(f) = f(x)$$

Доказательство: Нужно доказать, что отображение π не меняет норму.

В силу приведённого выше следствия из теоремы Хана-Банаха:

$$\|F_x\| = \sup_{\|f\|=1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|$$

□

Определение 1.1.1: Пусть E – нормированное пространство. Говорим, что последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **слабо сходится** к x:

$$x_n \overset{w}{\to} x \Leftrightarrow \forall f \in E^* : f(x_n) \to f(x)$$

Теорема 1.1.3 (Критерий поточечной сходимости операторов. Напоминание из прошлого семестра):

Пусть E_1 – банахово, E_2 – ЛНП. Причём $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2), A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда

$$A_n \overset{\text{поточечно}}{\to} A \Leftrightarrow \begin{cases} \exists M\colon \forall n\colon \|A_n\| \le M \\ \exists S\colon [S] = E_1\colon \forall s \in S\colon A_n s \to As \end{cases}$$

Теорема 1.1.4 (Критерий слабой сходимости): Пусть E – ЛНП. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$:

$$x_n \overset{w}{\to} x \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{\|x\|_n\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена} \\ \exists S\colon [S]=E\colon \forall f \in S\colon f(x_n) \to f(x) \end{cases}$$

Доказательство: Перейдём к рассмотрению операторов $F_{x_n}, F_x \in E^{**}$. Тогда слабая сходимость $x_n \overset{w}{\to} x$ по определению является поточечной сходимостью $F_{x_n}(f) \to F_x(f)$.

Из условия:

- $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$
- Пространство E^* всегда полно
- Нормы $\left\|F_{x_n}\right\| = \|x_n\|$ ограничены
- $\exists S : \ [S] = E^* : \ \forall f \in S : \ F_{x_n} f \to F_x f$

Эти условия позволяют нам применить упомянутый выше критерий поточечной сходимости операторов из предыдущего семестра. А поточечная сходимость оператором во всём пространстве соответствует $x_n \overset{w}{\to} x$. □

Замечание 1.1.1: В случае рефлексивного банахова пространства E условие для слабой сходимости множно ослабить. Достаточно потребовать не сходимости $f(x_n) \to f(x)$, а существования предела $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (тем самым, нам не нужно знать конкретный x).

1.2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества.

Теорема 1.2.1 (Слабая сходимость и ограниченные операторы):

Пусть E_1, E_2 – ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_1, x \in E_1$, причём $x_n \overset{w}{\to} x$, а также $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда есть слабая сходимость образов:

$$Ax_n \overset{w}{\to} Ax$$

Доказательство: По определению слабой сходимости, выполняется

$$\forall f \in E_1^* : \ f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$$

В частности, можно рассмотреть функционал $f = g \circ A$ для любого $g \in E_2^*$. Тогда

$$\forall g \in E_2^* : \ g(Ax_n) \underset{n\to\infty}{\to} g(Ax)$$

Это утверждение в точности совпадает с определением слабой сходимости $Ax_n \overset{w}{\to} Ax$. □

Определение 1.2.1: Множество $S \subseteq E$ называется **слабо ограниченным**, если

$$\forall f \in E^* : \ f(S) \text{ - ограниченное множество в } \mathbb{K}$$

Теорема 1.2.2 (Хана): Пусть $S \subseteq E$ – слабо ограниченное множество. Тогда S ограничено.

Доказательство: Предположим противное, то есть S неограничено. Тогда

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ \|x_n\| \geq n^2$$

Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{x_n}{n}$. В силу слабой ограниченности, мы можем сделать следующую оценку на образ $f(y_n), f \in E^*$ (где K_f – константа, ограничивающая образ $f(S)$):

$$\forall f \in E^* : \ |f(y_n)| = \frac{|f(x_n)|}{n} \leq \frac{K_f}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Стало быть, $y_n \overset{w}{\to} 0$. В силу критерия слабой сходимости, $\|y_n\| \leq M$ – есть ограниченность норм. Отсюда

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ M \geq \|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n$$

Противоречие. □

1.3. Замкнутый шар в Гильбертовом пространстве секвенциально компактен (теорема Банаха).

Определение 1.3.1: Множество $S \subseteq E$ называется **слабо секвенциально компактным** (или секвенциально слабо компактным), если из любой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S : \ \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} : \ \exists x \in S : \ x_{n_k} \overset{w}{\to}_{k\to\infty} x$$

Теорема 1.3.1 (Банаха): Пусть H – гильбертово пространство. Тогда $\overline{B}(0, R)$ – слабо секвенциально компактное множество.

Доказательство:

1. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{B}(0, R)$. Хотим показать, что в ней выделяется слабо сходящаяся подпоследовательность $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.
2. Рассмотрим $L = \left[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$. В силу гильбертовости пространства H, мы можем воспользоваться теоремой о проекции. Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$.
3. Выделим такую подпоследовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что есть сходимость для любого скалярного произведения с x_m:

   $$\forall m \in \mathbb{N} : \ \exists \lim_{k\to\infty}(x_m, y_k)$$

   Тогда, в силу критерия слабой сходимости (смотреть замечание после него), y_k будет слабо сходящейся последовательностью в L.

4. Заметим, что из имеющейся сходимости следует слабая сходимость и во всём пространстве H:
$$H = L \oplus L^{\perp} \Rightarrow \forall h = l + l^{\perp} : \ (y_k, h) = (y_k, l) + (y_k, l^{\perp}) = (y_k, l)$$
А (y_k, l) сходится в силу результата предыдущего пункта.

Единственная вещь, требующая пояснения – пункт 3, выделение слабо сходящейся последовательности. Воспользуемся диагональным методом Кантора:
1. Зафиксируем x_m. Тогда $(x_m, x_n) \leq R^2$ и, получается, $\{(x_m, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной последовательностью чисел. По теореме Больцано-Вейерштрасса, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}.
2. Итерируемся по $m \in \mathbb{N}$ (с началом $m = 1$ и последовательностью x_n) и выделяем новую подпоследовательность из той, что была получена на предыдущем шаге. Обозначаем их как $x_{m,n}$
3. Получили искомую последовательность $y_k = x_{k,k}$.

□

2. Обратимый оператор. Обратимость

2.1. Обратимость линейного, ограниченного снизу, оператора

Теорема 2.1.1: Пусть $A \in \mathcal{L}(E)$ – взаимно однозначный оператор $E \to \operatorname{Im} A$. Тогда обратный оператор A^{-1} будет ограничен тогда и только тогда, когда образы A оцениваются снизу:
$$\exists m : \ \forall x \in E : \ \|Ax\| \geq m\|x\|$$

Доказательство: $\Rightarrow$ В силу ограниченности оператора A^{-1}, можно записать следующее:
$$\forall y = Ax : \ \|x\| = \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\|\|y\| = \|A^{-1}\|\|Ax\|$$
Отсюда имеем $\|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$.

$\Leftarrow$ Раз A – биекция, то и A^{-1} тоже. Поэтому вместо x можно подставить соответствующий ему $A^{-1}y, y \in \operatorname{Im} A$:
$$\forall y \in \operatorname{Im} A : \ \|AA^{-1}y\| \geq m\|A^{-1}y\| \Leftrightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$$
А это в точности ограниченность оператора A^{-1}. □

2.2. Обратимость возмущённого оператора

Теорема 2.2.1: Пусть E – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$, причём $\|A\| < 1$. Тогда оператор $(I + A)$ обратим. Более того, справедлива формула
$$(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$$

Доказательство: Нужно доказать, что ряд справа действительно является обратным к оператору $(I + A)$. Обозначим $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A^k$.

1. Покажем, что S_n сходится к некоторому $S \in \mathcal{L}(E)$. Во-первых, $S_n \in \mathcal{L}(E)$ тривиальным образом, а в силу банаховости $\mathcal{E}$, достаточно проверить фундаментальность этой последовательности:
$$\left\|S_{n+p} - S_n\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^k A^k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A\|^k < \varepsilon$$
Последнее неравенство выполняется, начиная с некоторого n, так как $\|A\|, \|A\|^2, ...$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем < 1.
2. Так как многочлены от одного и того же оператора коммутируют, то если мы покажем, что предел
$$\lim_{n\to\infty} S_{n(I+A)} = I \Rightarrow S(I + A) = I = (I + A)S$$
и всё доказано.
Раскроем выражение под пределом:
$$S_n(I + A) = S_n + S_n A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A^k + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} A^k =$$
$$= A^0 + (-1)^n A^{n+1} = I + (-1)^n A^{n+1}$$
Оценим норму последнего слагаемого:
$$\left\|(-1)^n A^{n+1}\right\| \leq \|A\|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$
Стало быть, $\lim_{n\to\infty} S_{n(I+A)} = I + 0$, что и требовалось доказать.

□

Теорема 2.2.2: Пусть E – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$ и $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Также пусть $\Delta A \in \mathcal{L}(E)$, причём $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда $(A + \Delta A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Доказательство: Сведём теорему к предыдущей:
$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$$
Проверим, что норма оператора из скобки удовлетворяет условию на норму:
$$\left\|A^{-1}\Delta A\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta A\| < 1$$

□

2.3. Формулировка теормы Банаха об обратном операторе. Доказательство в случае гильбертова пространства.

Теорема 2.3.1 (Банаха об обратном операторе): Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ – биективный оператор. Тогда $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

Доказательство: Случай, когда $E_1 = E_2 = H$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$.

Основная идея состоит в том, чтобы доказать утверждение теоремы не для A, а для A^*. Запишем 2 разложения пространства H (тема про сопряжённый оператор и разложение будет далее):
$$[\mathrm{Im}\ A] \oplus \mathrm{Ker}\ A^* = H$$
$$[\mathrm{Im}\ A^*] \oplus \mathrm{Ker}\ A = H$$

Так как A биективен, то $\mathrm{Ker}\ A = \{0\}$ и мы сразу получаем $[\mathrm{Im}\ A^*] = H$. С другой стороны, $[\mathrm{Im}\ A] = \mathrm{Im}\ A = H$, а потому $\mathrm{Ker}\ A^* = \{0\}$. □

3. Сопряжённый оператор

3.1. Норма сопряжённого оператора (в ЛНП)

Определение 3.1.1: Пусть $A : E_1 \to E_2$. Тогда **сопряжённым оператором** $A^* : E_2^* \to E_1^*$ называется оператор, удовлетворяющий условию:

$$\forall g \in E_2^* : \forall x \in E_1 : \ (A^* g)x = g(Ax)$$

Определение 3.1.2: Пусть $E_1 = E_2 = H$ – гильбертово пространство. Тогда, если $A \in \mathcal{L}(H)$ и $A^* = A$, то оператор A называется **самосопряжённым**.

Теорема 3.1.1: Пусть $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда $A^* \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$, причём $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство: Покажем неравенства для норм в 2 стороны:

$\leq$ Верна следующая оценка:

$$\forall g \in E_2^* : \forall x \in E_1 : \ |(A^* g)x| = |g(Ax)| \leq \|g\|\|Ax\| \leq \|g\|\|A\|\|x\|$$

Из последнего имеем $\|A^* g\| \leq \|A\|\|g\|$, что означает $\|A^*\| \leq \|A\|$.

$\geq$ Так как $A^* \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$, то можно воспользоваться следствием теоремы Хана-Банаха для нормы элемента Ax:

$$\forall x \in E_1 : \ \|Ax\| = \sup_{\|g\|=1} |g(Ax)| = \sup_{\|g\|=1} |(A^* g)x|$$

При этом $\|(A^* g)x\| \leq \|A^*\| \cdot 1 \cdot \|x\|$, а значит $\|Ax\| \leq \|A^*\|\|x\| \Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\|$.

□

3.2. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Равенство $H = [\mathrm{Im}\ A] \oplus \mathrm{Ker}\ A^*$

Определение 3.2.1: Пусть $E_1 = H_1, E_2 = H_2$ – гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Тогда **эрмитово сопряжённым оператором** $A^* : H_2 \to H_1$ называется оператор, удовлетворяющий условию:

$$\forall x \in E_1 : \forall y \in E_2 : \ (Ax, y)_{H_2} = (x, A^* y)_{H_1}$$

Теорема 3.2.1: Пусть H – гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$. Тогда

$$H = [\mathrm{Im}\ A] \oplus \mathrm{Ker}\ A^*$$

Доказательство:

1. Покажем, что $(\text{Im } A)^{\perp} = \text{Ker } A^*$. Для этого рассмотрим произвольный элемент ортогонального дополнения:
$$\forall y \in (\text{Im } A)^{\perp} : \forall x \in H : \ (Ax, y) = 0$$
Стало быть, для любых x, y выше будет $(x, A^*y) = 0$, а в силу гильбертовости пространства это означает, что $A^*y = 0$, что означает $y \in \text{Ker } A^*$.
2. Заметим, что $(\text{Im } A)^{\perp} = [\text{Im } A]^{\perp}$. Так как последнее является подпространством, то по теореме о проекции получаем требуемое разложение:
$$H = [\text{Im } A] \oplus [\text{Im } A]^{\perp} = [\text{Im } A] \oplus \text{Ker } A^*$$

$\square$