Содержание

Функциональный анализ 2.0.

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами
Big thanks for клуб Теха Лекций и Максимову Даниилу в частности.

1. Слабая сходимость в банаховом пространстве

1.1. Изометричность вложения E в E^{**}. Критерий слабой сходимости последовательности.

Теорема 1.1.1 (Хана Банаха, напоминание): Пусть E – ЛНП. $M \subset E$ – линейное многообразие, f – линейный ограниченный функционал на M. Тогда $\exists \tilde{f} \in E^*$:
1. $\tilde{f}|_M = f$
2. $\left\|\tilde{f}\right\| = \|f\|$

Следствие 1.1.1.1: Выполняются следующие утверждения:
- $\forall f \in E^* : \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- $\forall f \in E^* : \ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Следствие 1.1.1.2: Если $x \in E$, то
$$\exists f \in E^* : \ \begin{cases} \|f\|=1 \\ f(x)=\|x\| \end{cases}$$

Следствие 1.1.1.3:
$$\forall x \in E : \|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

Теорема 1.1.2 (Об изометрии): E изометрично E^{**}, через отображение $\pi : E \to E^{**}$, где
$$\pi x = F_x \in E^{**}; \quad F_x(f) = f(x)$$

Доказательство: Нужно доказать, что отображение π не меняет норму.

В силу приведённого выше следствия из теоремы Хана-Банаха:
$$\|F_x\| = \sup_{\|f\|=1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|$$
□

Определение 1.1.1: Пусть E – нормированное пространство. Говорим, что последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **слабо сходится** к x:
$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall f \in E^* : f(x_n) \to f(x)$$

Теорема 1.1.3 (Критерий поточечной сходимости операторов. Напоминание из прошлого семестра):

Пусть E_1 – банахово, E_2 – ЛНП. Причём $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2), A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда
$$A_n \overset{\text{поточечно}}{\to} A \Leftrightarrow \begin{cases} \exists M\colon \forall n\colon \|A_n\| \leq M \\ \exists S\colon [\langle S \rangle] = E_1\colon \forall s \in S\colon A_n s \to As \end{cases}$$

Теорема 1.1.4 (Критерий слабой сходимости): Пусть E – ЛНП. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$:
$$x_n \overset{w}{\to} x \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{\|x\|_n\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена} \\ \exists S\colon [\langle S \rangle] = E^*\colon \forall f \in S\colon f(x_n) \to f(x) \end{cases}$$

Доказательство: Перейдём к рассмотрению операторов $F_{x_n}, F_x \in E^{**}$. Тогда слабая сходимость $x_n \overset{w}{\to} x$ по определению является поточечной сходимостью $F_{x_n}(f) \to F_x(f)$.

Из условия:

- $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$
- Пространство E^* всегда полно
- Нормы $\left\|F_{x_n}\right\| = \|x_n\|$ ограничены
- $\exists S : \ [\langle S \rangle] = E^* : \ \forall f \in S : \ F_{x_n} f \to F_x f$

Эти условия позволяют нам применить упомянутый выше критерий поточечной сходимости операторов из предыдущего семестра. А поточечная сходимость операторов во всём пространстве соответствует $x_n \overset{w}{\to} x$. $\square$

Замечание 1.1.1: В случае рефлексивного банахова пространства E условие для слабой сходимости множно ослабить. Достаточно потребовать не сходимости $f(x_n) \to f(x)$, а существования предела $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (тем самым, нам не нужно знать конкретный x).

1.2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества.

Теорема 1.2.1 (Слабая сходимость и ограниченные операторы):

Пусть E_1, E_2 – ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_1, x \in E_1$, причём $x_n \overset{w}{\to} x$, а также $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда есть слабая сходимость образов:
$$Ax_n \overset{w}{\to} Ax$$

Доказательство: По определению слабой сходимости, выполняется
$$\forall f \in E_1^* : \ f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$$

В частности, можно рассмотреть функционал $f = g \circ A$ для любого $g \in E_2^*$. Тогда

$$\forall g \in E_2^* : \ g(Ax_n) \underset{n\to\infty}{\to} g(Ax)$$

Это утверждение в точности совпадает с определением слабой сходимости $Ax_n \overset{w}{\to} Ax$. □

Определение 1.2.1: Множество $S \subseteq E$ называется **слабо ограниченным**, если

$$\forall f \in E^* : \ f(S) \text{ - ограниченное множество в } \mathbb{K}$$

Утверждение 1.2.1: Пусть $S \subseteq E$ – ограниченное множество. Тогда S слабо ограничено.

Доказательство: По определению, если $f \in E^*$, то это линейный ограниченный функционал.

Ограниченный функционал переводит ограниченные множества в ограниченные, по определению.

Поэтому слабая ограниченность S тривиальна. □

Теорема 1.2.2 (Хана): Пусть $S \subseteq E$ – слабо ограниченное множество. Тогда S ограничено.

Доказательство: Предположим противное, то есть S неограничено. Тогда

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ \|x_n\| \geq n^2$$

Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{x_n}{n}$. В силу слабой ограниченности, мы можем сделать следующую оценку на образ $f(y_n), f \in E^*$ (где K_f – константа, ограничивающая образ $f(S)$):

$$\forall f \in E^* : \ |f(y_n)| = \frac{|f(x_n)|}{n} \leq \frac{K_f}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Стало быть, $y_n \overset{w}{\to} 0$. В силу критерия слабой сходимости, $\|y_n\| \leq M$ – есть ограниченность норм. Отсюда

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ M \geq \|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n$$

Противоречие. □

1.3. Замкнутый шар в Гильбертовом пространстве секвенциально компактен (теорема Банаха).

Определение 1.3.1: Множество $S \subseteq E$ называется **слабо секвенциально компактным** (или секвенциально слабо компактным), если из любой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq S : \ \exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{N} : \ \exists x \in S : \ x_{n_k} \overset{w}{\to}_{k\to\infty} x$$

Теорема 1.3.1 (Банаха): Пусть H – гильбертово пространство. Тогда $\overline{B}(0, R)$ – слабо секвенциально компактное множество.

Доказательство:
1. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{B}(0, R)$. Хотим показать, что в ней выделяется слабо сходящаяся подпоследовательность $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.
2. Рассмотрим $L = \left[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$. В силу гильбертовости пространства H, мы можем воспользоваться теоремой о проекции. Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$.
3. Выделим такую подпоследовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что есть сходимость для любого скалярного произведения с x_m:
$$\forall m \in \mathbb{N} : \ \exists \lim_{k \to \infty} (x_m, y_k)$$
Тогда, в силу критерия слабой сходимости (смотреть замечание после него), y_k будет слабо сходящейся последовательностью в L.
4. Заметим, что из имеющейся сходимости следует слабая сходимость и во всём пространстве H:
$$H = L \oplus L^{\perp} \Rightarrow \forall h = l + l^{\perp} : \ (y_k, h) = (y_k, l) + (y_k, l^{\perp}) = (y_k, l)$$
А (y_k, l) сходится в силу результата предыдущего пункта.

Единственная вещь, требующая пояснения – пункт 3, выделение слабо сходящейся последовательности. Воспользуемся диагональным методом Кантора:
1. Зафиксируем x_m. Тогда $(x_m, x_n) \leq R^2$ и, получается, $\{(x_m, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной последовательностью чисел. По теореме Больцано-Вейерштрасса, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}.
2. Итерируемся по $m \in \mathbb{N}$ (с началом $m = 1$ и последовательностью x_n) и выделяем новую подпоследовательность из той, что была получена на предыдущем шаге. Обозначаем их как $x_{m,n}$
3. Получили искомую последовательность $y_k = x_{k,k}$.

□

2. Обратимый оператор. Обратимость

2.1. Обратимость линейного, ограниченного снизу, оператора

Теорема 2.1.1: Пусть $A \in \mathcal{L}(E)$ – взаимно однозначный оператор $E \to \operatorname{Im} A$. Тогда обратный оператор A^{-1} будет ограничен тогда и только тогда, когда образы A оцениваются снизу:
$$\exists m : \ \forall x \in E : \ \|Ax\| \geq m\|x\|$$

Доказательство: $\Rightarrow$ В силу ограниченности оператора A^{-1}, можно записать следующее:

$$\forall y = Ax : \ \|x\| = \left\|A^{-1}y\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\|\|y\| = \left\|A^{-1}\right\|\|Ax\|$$

Отсюда имеем $\|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$.

$\Leftarrow$ Раз A – биекция, то и A^{-1} тоже. Поэтому вместо x можно подставить соответствующий ему $A^{-1}y, y \in \operatorname{Im} A$:

$$\forall y \in \operatorname{Im} A : \ \left\|AA^{-1}y\right\| \geq m\left\|A^{-1}y\right\| \Leftrightarrow \left\|A^{-1}y\right\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$$

А это в точности ограниченность оператора A^{-1}. □

2.2. Обратимость возмущённого оператора

Теорема 2.2.1: Пусть E – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$, причём $\|A\| < 1$. Тогда оператор $(I + A)$ обратим. Более того, справедлива формула

$$(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$$

Замечание 2.2.1: Выписанный ряд называется **рядом Неймана**.

Доказательство: Нужно доказать, что ряд справа действительно является обратным к оператору $(I + A)$. Обозначим $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A^k$.

1. Покажем, что S_n сходится к некоторому $S \in \mathcal{L}(E)$. Во-первых, $S_n \in \mathcal{L}(E)$ тривиальным образом, а в силу банаховости E, достаточно проверить фундаментальность этой последовательности:
$$\left\|S_{n+p} - S_n\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^k A^k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A\|^k < \varepsilon$$
Последнее неравенство выполняется, начиная с некоторого n, так как $\|A\|, \|A\|^2, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем < 1.
2. Так как многочлены от одного и того же оператора коммутируют, то если мы покажем, что предел
$$\lim_{n\to\infty} S_n(I + A) = I \Rightarrow S(I + A) = I = (I + A)S$$
и всё доказано.
Раскроем выражение под пределом:
$$S_n(I + A) = S_n + S_nA = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k A^k + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} A^k =$$
$$= A^0 + (-1)^n A^{n+1} = I + (-1)^n A^{n+1}$$
Оценим норму последнего слагаемого:
$$\left\|(-1)^n A^{n+1}\right\| \leq \|A\|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$
Стало быть, $\lim_{n\to\infty} S_n(I + A) = I + 0$, что и требовалось доказать.

□

Теорема 2.2.2: Пусть E – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$ и $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Также пусть $\Delta A \in \mathcal{L}(E)$, причём $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда $(A + \Delta A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Доказательство: Сведём теорему к предыдущей:

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$$

Проверим, что норма оператора из скобки удовлетворяет условию на норму:

$$\left\|A^{-1}\Delta A\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta A\| < 1$$

□

2.3. Формулировка теормы Банаха об обратном операторе. Доказательство в случае гильбертова пространства.

Теорема 2.3.1 (Банаха об обратном операторе): Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ – биективный оператор. Тогда $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

Доказательство: Случай, когда $E_1 = E_2 = H$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$.

Основная идея состоит в том, чтобы доказать утверждение теоремы не для A, а для A^*. Запишем 2 разложения пространства H (тема про сопряжённый оператор и разложение будет далее):

$$[\mathrm{Im}\ A] \oplus \mathrm{Ker}\ A^* = H$$
$$[\mathrm{Im}\ A^*] \oplus \mathrm{Ker}\ A = H$$

Так как A биективен, то $\mathrm{Ker}\ A = \{0\}$ и мы сразу получаем $[\mathrm{Im}\ A^*] = H$. С другой стороны, $[\mathrm{Im}\ A] = \mathrm{Im}\ A = H$, а потому $\mathrm{Ker}\ A^* = \{0\}$.

Далее вы узнаете, что сопряжённый оператор всегда ограничен снизу, а значит из его сюръективности автоматически следует ограниченность обратного. □

3. Сопряжённый оператор

3.1. Норма сопряжённого оператора (в ЛНП)

Определение 3.1.1: Пусть $A : E_1 \to E_2$. Тогда **сопряжённым оператором** $A^* : E_2^* \to E_1^*$ называется оператор, удовлетворяющий условию:

$$\forall g \in E_2^* : \forall x \in E_1 : \ (A^* g)x = g(Ax)$$

Теорема 3.1.1: Пусть $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда $A^* \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$, причём $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство: Покажем неравенства для норм в 2 стороны:

$\le$ Верна следующая оценка:

$$\forall g \in E_2^* : \forall x \in E_1 : \ |(A^* g)x| = |g(Ax)| \le \|g\|\|Ax\| \le \|g\|\|A\|\|x\|$$

Из последнего имеем $\|A^* g\| \le \|A\|\|g\|$, что означает $\|A^*\| \le \|A\|$.

$\ge$ Так как $A^* \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$, то можно воспользоваться следствием теоремы Хана-Банаха для нормы элемента Ax:

$$\forall x \in E_1 : \ \|Ax\| = \sup_{\|g\|=1}|g(Ax)| = \sup_{\|g\|=1}|(A^*g)x|$$

При этом $\|(A^*g)x\| \le \|A^*\| \cdot 1 \cdot \|x\|$, а значит $\|Ax\| \le \|A^*\|\|x\| \Rightarrow \|A\| \le \|A^*\|$.

□

3.2. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Равенство $H = [\mathrm{Im}\ A] \oplus \mathrm{Ker}\ A^*$

Определение 3.2.1: Пусть $E_1 = H_1, E_2 = H_2$ – гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Тогда **эрмитово сопряжённым оператором** $A^* : H_2 \to H_1$ называется оператор, удовлетворяющий условию:

$$\forall x \in E_1 : \forall y \in E_2 : \ (Ax, y)_{H_2} = (x, A^*y)_{H_1}$$

Теорема 3.2.1: Пусть H – гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$. Тогда

$$H = [\mathrm{Im}\ A] \oplus \mathrm{Ker}\ A^*$$

Доказательство:

1. Покажем, что $(\mathrm{Im}\ A)^\perp = \mathrm{Ker}\ A^*$. Для этого рассмотрим произвольный элемент ортогонального дополнения:
$$\forall y \in (\mathrm{Im}\ A)^\perp : \forall x \in H : \ (Ax, y) = 0$$
Стало быть, для любых x, y выше будет $(x, A^*y) = 0$, а в силу гильбертовости пространства это означает, что $A^*y = 0$, что означает $y \in \mathrm{Ker}\ A^*$.
2. Заметим, что $(\mathrm{Im}\ A)^\perp = [\mathrm{Im}\ A]^\perp$. Так как последнее является подпространством, то по теореме о проекции получаем требуемое разложение:
$$H = [\mathrm{Im}\ A] \oplus [\mathrm{Im}\ A]^\perp = [\mathrm{Im}\ A] \oplus \mathrm{Ker}\ A^*$$

□

Утверждение 3.2.1: Если $A \in \mathcal{L}(H)$, где H – гильбертово, то оператор A^* (эрмитово сопряжённый) ограничен снизу.

Доказательство: Заметим, что свойство ограниченности снизу имеет эквивалентный вариант (в силу линейности):

$$\exists m > 0 : \forall x \in H : \ \|A^*x\| \ge m\|x\| \Leftrightarrow \exists m > 0 : \forall x \in H : \|A^*x\| = 1 : \ \|x\| \le \frac{1}{m}$$

Обозначим рассматриваемое подмножество

$$S := \{x \in H \mid \|A^*x\| = 1\}$$

Таким образом, задача свелась к доказательству ограниченности S.

А как мы знаем, ограниченность эквивалентна слабой ограниченности. Более того, мы находимся в Гильбертовом пространстве H, а значит каждый функционал представляется в виде $(y, \cdot)$:

$$\forall y \in H : \exists K_y \in \mathbb{R}_+ : \ \forall x \in S : |(y, x)| \le K_y$$

Однако, A – сюръекция, а значит для любого $y \in H$ найдётся $z \in H$ такой, что $Az = y$. Отсюда:

$$\forall z \in H : \exists K_z \in \mathbb{R}_+ : \ \forall x \in S : |(Az, x)| = |(z, A^* x)| \leq 1 \cdot \|z\| =: K_z$$

□

Утверждение 3.2.2: Пусть $B \in \mathcal{L}(H)$ и B ограничен снизу. Тогда $[\mathrm{Im}\ B] = \mathrm{Im}\ B$.

Доказательство: Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Im}\ B$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Докажем, что $y \in \mathrm{Im}\ B$.

В силу сходимости есть и фундаментальность:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left\|y_{n+p} - y_n\right\| < \varepsilon$$

Коль скоро $y_n \in \mathrm{Im}\ B$, то можно переписать норму разности следующим образом:

$$\left\|y_{n+p} - y_n\right\| = \left\|Bz_{n+p} - Bz_n\right\| > m\left\|z_{n+p} - z_n\right\|$$

Стало быть, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а в силу полноты H должен существовать предел $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Тогда

$$y = \lim_{n\to\infty} Bz_n = B(\lim_{n\to\infty} z_n) = Bz$$

□

4. Спектр. Резольвента.

4.1. Операторозначные функции комплексного переменного. Аналитичность резольвенты. Спектральный радиус. Основная теорема о спектре

Определение 4.1.1: **Резольвентным множеством** оператора A называется следующее множество:

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\right\}$$

Все $\lambda \in \mathbb{C}$, попадающие в резольвентное множество, называются **регулярными значениями**.

Определение 4.1.2: **Спектром** оператора A называется дополнение к резольвентному множеству:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

Определение 4.1.3: **Резольвентой** оператора A называется любое отображение следующего вида:

$$R_\lambda := R(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$$

Утверждение 4.1.1: $R(\lambda)$ является непрерывной функцией от λ.

Доказательство: Положим $B = A - \lambda_0 I$ и $\Delta B = -\Delta\lambda I$.

Как мы уже доказывали выше, мы можем рассмотреть $\Delta\lambda$ с ограничением $|\Delta\lambda| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$ и тогда $B + \Delta B$ будет обратим.

Для непрерывности, нам нужно оценить норму следующей разности при $\Delta\lambda \to 0$:

$$\|R(\lambda_0 + \Delta\lambda) - R(\lambda_0)\| = \left\|(B + \Delta B)^{-1} - B^{-1}\right\|$$

Распишем $(B + \Delta B)^{-1}$ через ряд Неймана следующим образом:

$$(B + \Delta B)^{-1} = \left(I + B^{-1}\Delta B\right)^{-1} B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(B^{-1}\Delta B\right)^k B^{-1} =$$
$$= B^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(B^{-1}\Delta B\right)^k B^{-1}$$

Отсюда можно вернуться к оценке приращение и уже работать с рядом:

$$\left\|(B + \Delta B)^{-1} - B^{-1}\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(B^{-1}\Delta B\right)^k B^{-1}\right\| \le$$
$$\left\|B^{-1}\right\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\|B^{-1}\right\|\|\Delta B\|\right)^k = \left\|B^{-1}\right\| \cdot \frac{\|B^{-1}\|\|\Delta B\|}{1 - \|B^{-1}\|\|\Delta B\|} \underset{\Delta B \to 0}{\to} 0$$

□

Замечание 4.1.1: Далее будет использоваться обозначение

$$A_\lambda \coloneqq A - \lambda I$$

Утверждение 4.1.2: Пусть $\lambda_0, \lambda \in \rho(A)$. Тогда

$$R_\lambda - R_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}$$

Доказательство:

Рассмотрим следующую тривиальную цепочку равенств:

$$R_\lambda - R_{\lambda_0} = R_\lambda \underbrace{A_{\lambda_0} R_{\lambda_0}}_{I} - \underbrace{A_\lambda R_\lambda}_{I} R_{\lambda_0} =$$
$$R_\lambda \left(A_{\lambda_0} - A_\lambda\right) R_{\lambda_0} = R_\lambda (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}$$

□

Утверждение 4.1.3: $R(\lambda)$ дифференцируема на $\rho(A)$. Более того:

$$R'(\lambda_0) = R_{\lambda_0}^2$$

Доказательство: Запишем дроби из предела производной:

$$\frac{R_\lambda - R_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = R_\lambda R_{\lambda_0} \underset{\lambda \to \lambda_0}{\to} R_{\lambda_0}^2$$

□

Определение 4.1.4: **Спектральным радиусом** оператора A называется радиус окружности с центром в нуле, в которую попадают все элементы спектра:

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Утверждение 4.1.4: Если $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda \in \rho(A)$.

Доказательство: Перепишем A_λ следующим образом:

$$A_\lambda = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)$$

Так как $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\|A\| < 1$, то применима теорема об обратимости возмущённого оператора и, соответственно, этот оператор обратим. Значит $\lambda \in \rho(A)$ по определению. □

Следствие 3.2.1.1: Очевидно следует, что $r(A) \leq \|A\|$.

Утверждение 4.1.5: Радиус сходимости ряда Неймана для $R(\lambda)$ равен спектральному радиусу $r(A)$.

Доказательство: $\leq$ Мы можем говорить о ряде Лорана. Если $|\lambda| > \|A\|$, то тогда имеет место следующее представление резольвенты:

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-k}$$

При этом, ранее было установлено, что $R(\lambda)$ дифференцируема на $\rho(A)$. В частности, это происходит на круге $|\lambda| > r(A)$.

Так как представление функции в виде ряда Лорана в круге единственно, а мы уже его записали выше для некоторой окрестности бесконечности, то тот же самый вид должен быть и в этом круге.

Значит, радиус сходимости ряда Неймана не превосходит $r(A)$.

$\geq$ Пусть $|\lambda_0| < r(A)$. Тогда, предположим, что ряд сходится в этой точке. Это означает, что ряд будет сходится и при всех $|\lambda| > |\lambda_0|$.

Это также означает обратимость A_λ при всех таких λ, но коль скоро $|\lambda_0| < r(A)$, то должен существовать $|\lambda_0| < |\lambda_1| < r(A)$ такой, что $\lambda_1 \in \sigma(A)$ в силу определения спектрального радиуса, а это противоречит определению спектра. □

Утверждение 4.1.6: Если $\lambda \in \sigma(A)$, то $\lambda^n \in \sigma(A^n)$.

Доказательство: Предположим противное, то есть $\lambda^n \in \rho(A^n)$ и $\lambda \in \sigma(A)$. Значит $(A^n - \lambda^n I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Заметим, что мы также можем записать обращаемый оператор в следующем виде:

$$A^n - \lambda^n I = (A - \lambda I)\underbrace{(A^{n-1} + ... + \lambda^{n-1} I)}_{B} \Rightarrow I = (A - \lambda I)B(A^n - \lambda^n I)^{-1}$$

Так как рассматриваемые операторы – многочлены от степеней A, то они коммутируют. С учётом этого имеем, что A_λ обратим, а стало быть $\lambda \in \rho(A)$, противоречие. □

Утверждение 4.1.7: Верна формула для спектрального радиуса:

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

Доказательство: Как мы уже знаем, радиус сходимости ряда Неймана для $R(\lambda)$ совпадает с $r(A)$:

$$r(A) = r_{\text{сх}} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

В силу последнего доказанного утверждения, мы можем связать $r(A)$ и $r(A^n)$ следующим образом:

$$r(A^n) = \sup_{\mu\in\sigma(A^n)} |\mu| \geq \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda^n| = r(A)^n$$

Стало быть, $r(A) \leq \sqrt[n]{r(A^n)}$. При этом, знаем, что $r(A^n) \leq \|A^n\|$.

Получилось, что верхний предел не превосходит любого элемента последовательности $\sqrt[n]{\|A^n\|}$, а это означает, что он не превосходит их нижнего предела. Такое возможно только тогда, когда существует просто предел. □

Теорема 4.1.1 (Основная теорема о спектре): Спектр оператора непуст:

$$\sigma(A) \neq \emptyset$$

Доказательство: Предположим противное. Тогда $\rho(A) = \mathbb{C}$ и, следовательно, $R(\lambda)$ является целой функцией. Оценим норму этого оператора, пользуясь представлением обратного оператора в ряд Неймана:

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|}\|A\|} \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

Коль скоро есть предел $\lim_{\lambda\to\infty} \|R(\lambda)\|$, то норма $R(\lambda)$ ограничена. Стало быть, по теореме Лиувилля $R(\lambda) = \text{const}$. Более того, из-за найденного выше предела $R(\lambda) = 0$. Это противоречит обратимости A_λ при каком-либо λ. □

Определение 4.1.5: Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{L}(E)$. Тогда

- $\sigma_p(A) \coloneqq \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Ker } A_\lambda \neq \{0\}\}$ – **точечный спектр**.

  Причём $v \in \text{Ker } A_\lambda$ называются **собственными векторами** для **собственного значения** λ.
- $\sigma_c(A) \coloneqq \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Ker } A_\lambda = \{0\} \wedge \text{Im } A_\lambda \neq E \wedge [\text{Im } A_\lambda] = E\}$ – **непрерывный спектр**.
- $\sigma_r(A) \coloneqq \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Ker } A_\lambda = \{0\} \wedge [\text{Im } A_\lambda] \neq E\}$ – **остаточный спектр**.

5. Самосопряжённые операторы

5.1. Свойства квадратичной формы (Ax, x) и собственных значений самосопряжённого оператора A.

Определение 5.1.1: Пусть $E_1 = E_2 = H$ – гильбертово пространство. Тогда, если $A \in \mathcal{L}(H)$ и $A^* = A$, то оператор A называется **самосопряжённым**:

$$\forall x, y \in H: \ (Ax, y) = (x, Ay)$$

Определение 5.1.2: **Квадратичной формой** оператора A называется функционал, определённый следующим образом:

$$K(x) = (Ax, x)$$

Утверждение 5.1.1: Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$ – произвольный оператор. Если $\forall x \in H : K(x) = 0$, то $A \equiv 0$.

Доказательство: Рассмотрим произвольные $x, y \in H$. Тогда $x + y, x + iy \in H$.

Запишем по определению квадратичную форму для этих точек:

$$K(x+y) = (A(x+y), x+y) = \underbrace{K(x)}_{0} + \underbrace{K(y)}_{0} + (Ax, y) + (Ay, x)$$

$$K(x+iy) = (A(x+iy), x+iy) = \underbrace{K(x)}_{0} - \underbrace{K(y)}_{0} - i(Ax, y) + i(Ay, x)$$

Отсюда $(Ax, y) = \frac{1}{2}(K(x+y) + iK(x+iy)) = 0$. Если варьировать y по всем возможным значениям, то следствие теоремы Хана-Банаха даст равенство $\forall x \in H : Ax = 0$. □

Теорема 5.1.1:
1. Оператор A самосопряжён тогда и только тогда, когда $\forall x \in H: \ K(x) \in \mathbb{R}$.
2. Если λ – собственное значение самосопряжённого A, то $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – собственные значения самосопряжённого A, а $e_1, e_2 \in H$ – соотстветствующие собственные вектора, то $(e_1, e_2) = 0$.

Доказательство:
1. Проведём доказательство в обе стороны.

   $\Rightarrow$ Скалярное произведение эрмитово, поэтому воспользуемся свойством перестановки аргументов:

   $$K(x) = (Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \Rightarrow K(x) \in \mathbb{R}$$

   $\Leftarrow$ Аналогично первому пункту, имеем

   $$K(x) = (Ax, x) = \overline{(Ax, x)} = (x, Ax)$$

   В то же время, $(Ax, x) = (x, A^*x)$ по определению. Стало быть, квадратичная форма для $A - A^*$ нулевая.

По доказанному утверждению, это возможно лишь в том случае, когда $A - A^* \equiv 0$, что и требовалось.

2. Пусть $Av = \lambda v$. Тогда
$$K(v) = (Av, v) = \lambda(v, v) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$
3. Заметим следующее соотношение:
$$\lambda_1(e_1, e_2) = (Ae_1, e_2) = (e_1, Ae_2) = \lambda_2(e_1, e_2)$$
Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то такое возможно только тогда, когда $(e_1, e_2) = 0$.

□

5.2. Разложение гильбертова пространства $H = [\mathrm{Im}\ A_\lambda] \oplus \mathrm{Ker}\ A_\lambda$, где A – самосопряжённый оператор.

Теорема 5.2.1: Для самосопряжённого A верно равенство
$$\forall \lambda \in \mathbb{C}: \ [\mathrm{Im}\ A_\lambda] \oplus \mathrm{Ker}\ A_\lambda = H$$

Доказательство: Воспользуемся обычной теоремой о разложении для сопряжённых операторов. Тогда
$$[\mathrm{Im}\ A_\lambda] \oplus \mathrm{Ker}\ A^*_\lambda = H$$
При этом $A^*_\lambda = A^* - \overline{\lambda} I = A - \overline{\lambda} I$.

Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то всё доказано. Иначе $\lambda \neq \mathbb{R}$, но это также значит, что $\lambda \notin \sigma_p(A)$, а это эквивалентно $\mathrm{Ker}\ A_\lambda = \{0\}$. То же самое верно и для $\overline{\lambda}$, откуда тоже получаем тривиальное доказательство. □

5.3. Критерий принадлежности числа спектру самосопряжённого оператора. Вещественность спектра самосопряжённого оператора.

Теорема 5.3.1 (Критерий принадлежности спектру самосопряжённого оператора):
1. $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow A_\lambda$ – ограниченный снизу, то есть $\exists m > 0 : \forall x \in H : \ \|A_\lambda x\| \geq m\|x\|$
2. $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H : \|x_n\| = 1 \wedge \lim_{n\to\infty} \|A_\lambda x_n\| = 0$

Доказательство: Второй пункт – отрицание обеих частей первого. Поэтому доказывать будем только первую эквивалентность.

$\Rightarrow$ Раз $\lambda \in \rho(A)$, то A_λ обратим, а значит биективен. По теоереме об ограниченности снизу обратимого оператора всё доказано.

$\Leftarrow$ По той же теореме, должны доказать, что A_λ биективен. Из ограниченности снизу следует $\mathrm{Ker}\ A_\lambda = \{0\}$ (иначе образом ненулевого элемента был бы ноль, что нарушило бы ограниченность), а в силу разложения пространство имеем следующее:
$$[\mathrm{Im}\ A_\lambda] \oplus \mathrm{Ker}\ A_\lambda = H = [\mathrm{Im}\ A_\lambda]$$

Также по лемме о замыкании образа ограниченного снизу оператора, имеем

$$\mathrm{Im}\ A_\lambda = [\mathrm{Im}\ A_\lambda] = H$$

$\square$

Утверждение 5.3.1: Пусть A – самосопряжённый, а $\lambda = \mu + i\nu, \nu \neq 0$. Тогда

$$\|A_\lambda x\|^2 \geq \|\nu\|^2 \|x\|^2$$

Доказательство: Заметим, что $A_\lambda = A - \lambda I = A - (\mu + i\nu)I = A_\mu - i\nu I$.

Так как речь идёт о квадрате нормы, то мы можем расписать её через скалярное произведение:

$$\|A_\lambda x\|^2 = (A_\lambda x, A_\lambda x) = \left\|A_\mu x\right\|^2 - i\nu\left(x, A_\mu x\right) + i\nu\left(A_\mu x, x\right) + \|\nu\|^2 \|x\|^2$$

Так как $\mu \in \mathbb{R}$, то A_μ – самосопряжённый оператор. Стало быть, мы можем сократить слагаемые в середине. Тогда:

$$\|A_\lambda x\|^2 = \left\|A_\mu x\right\|^2 + \|\nu\|^2 \|x\|^2 \geq \|\nu\|^2 \|x\|^2$$

По доказанной лемме, A_λ ограничен снизу. В силу критерия принадлежности спектру, такое возможно лишь в том случае, когда $\lambda \in \rho(A)$. $\square$

Следствие 5.3.1.1: Для самосопряжённого оператора A верно:

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$$

5.4. Теорема о спектре самосопряжённого оператора: $\sigma(A) \subseteq [m_-, m_+], r(A) = \|A\|$

Теорема 5.4.1: Обозначим для самосопряжённого A: $m_- := \inf_{\|x\|=1}(Ax, x)$ и $m_+ := \sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$. Тогда:

1. $\sigma(A) \subseteq \left[m_-, m_+\right]$, причём $m_-, m_+ \in \sigma(A)$
2. $\|A\| = r(A) = \max\left(|m_-|, \left|m_+\right|\right)$

Доказательство:

1. Покажем, что если $\lambda > m_+$, то $\lambda \in \rho(A)$. Будем снова ограничивать $\|A_\lambda x\|$ снизу. С одной стороны, по КБШ:

   $$|(A_\lambda x, x)| \leq \|A_\lambda x\| \|x\| \Rightarrow \|A_\lambda x\| \geq \frac{1}{\|x\|} |(A_\lambda x, x)|$$

   С другой стороны, распишем скалярное произведение:

   $$|(A_\lambda x, x)| = |(Ax, x) - \lambda(x, x)| = \lambda\|x\|^2 - (Ax, x) \geq \left(\lambda - m_+\right)\|x\|^2$$

   Последний переход верен, так как

   $$m_+ = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x) = \sup_x \frac{Ax, x}{\|x\|^2} \Rightarrow (Ax, x) \leq m_+ \|x\|^2 < \lambda \|x\|^2$$

   Отсюда сразу $\lambda \in \rho(A)$. Теперь докажем, что $m_+ \in \sigma(A)$. Для этого воспользуемся критерием принадлежности спектру. В силу определения m_+:

   $$\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq H : \|x_n\| = 1 \land \lim_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) = m_+$$

   Надо показать, что предел $\lim_{n\to\infty} \left\|A_{m_+} x_n\right\| = 0$. Так как норма векторов единична, то текущий предел можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) - m_+ = 0 = \lim_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) - m_+(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(A_{m_+}x_n, x_n\right) = 0$$

Также из определения m_+ следует, что A_{m_+} – отрицательно полуопределённый оператор.

Так как неравенство КБШ справедливо для скалярных произведений, порождённый положительными полуопределёнными операторами, то перейдём к $B = -A_{m_+}$. Чтобы получить требуемое, нам достаточно показать, что $\lim_{n\to\infty} Bx_n = 0$.

Запишем четвёртую! степень нормы следующим образом:

$$\|Bx_n\|^4 = \left|(x_n, Bx_n)_B^2\right| \le \left|(x_n, x_n)_B\right|\left|(Bx_n, Bx_n)_B\right| = |(Bx_n, x_n)|\left|(B^2x_n, Bx_n)\right|$$

Первый множитель стремится к нулю, а второй ограничен:

$$\left|(B^2x_n, Bx_n)\right| \le \left\|B^2x_n\right\|\|Bx_n\| \le \|B\|^3\|x_n\|^2 = \|B\|^3$$

Требуемый предел установлен. Доказательство для m_- аналогично.

2. Из формулы спектрального радиуса

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

Докажем, что для $n = 2^k$ верно равенство $\|A^n\| = \|A\|^n$.

Достаточно доказать, что $\left\|A^2\right\| = \|A\|^2$.

$\le$ Воспользуемся неравенством для ограниченнх операторов:

$$\left\|A^2x\right\| = \|A(Ax)\| \le \|A\|\|Ax\| \le \|A\|^2\|x\| \Rightarrow \left\|A^2\right\| \le \|A\|^2$$

$\ge$ Распишем квадрат нормы $\|Ax\|^2$:

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, A^2x) \le \|x\|\left\|A^2\right\|\|x\|$$

Осталось взять супремум от обеих частей неравенства:

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 \le \sup_{\|x\|=1}\left\|A^2\right\|\|x\|^2 = \left\|A^2\right\|$$

Так как предел в формуле спектрального радиуса существует, то достаточно найти любой частичный предел. Будем брать предел по индексам-степеням двойки.

□

6. Компактные операторы

6.1. Свойства компактных операторов

Определение 6.1.1: Оператор A называется **компактным**, если

$$\forall M \subseteq E_1 \text{ - ограниченное} \Rightarrow A(M) \subseteq E_2 \text{ - предкомпакт (вполне ограниченное)}$$

Множество компактных операторов обозначается как $\mathcal{K}(E_1, E_2)$.

Утверждение 6.1.1: Имеют место следующие утверждения:
1. $\dim E_1 < \infty \Rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2) = \mathcal{K}(E_1, E_2)$
2. $\dim E_2 < \infty \Rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2) = \mathcal{K}(E_1, E_2)$

Доказательство: Достаточно понимать, что в конечномерном пространстве любое ограниченное множество вполне ограниченно.

1. Коль скоро $\dim \operatorname{Im} A \leq \dim E_1 < \infty$, то образ любого ограниченного множества оказывается ограниченным множеством в подпространстве $\operatorname{Im} A$ конечной размерности.
2. Сразу следует из исходного заявления в доказательстве.

□

Замечание 6.1.1: Пусть R – кольцо, I – подгруппа $(R, +)$. Тогда I называется **левосторонним идеалом**, если I обладает свойством **поглощения слева**:

$$\forall r \in R : \forall a \in I : \ ra \in I$$

Аналогично определяется **правосторонний идеал**. Ну и **двухсторонний идеал**, если он является и левосторонним, и правосторонним.

Утверждение 6.1.2: Пусть $E_1 = E_2 = E$. Тогда $\mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{L}(E)$ – двухсторонний идеал.

Доказательство:
1. $\mathcal{K}(E)$ является подгруппой по сложению. Пусть $A, B \in \mathcal{K}(E)$. Тогда $A + B \in \mathcal{K}(E) \Leftrightarrow (A+B)(B(0,1))$ – предкомпакт.

   Это эквивалентно тому, что из любой ограниченной последовательности в этом множество можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Действительно, рассмотрим ограниченную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (A+B)(B(0,1))$. В силу определения, её элементы распишутся так:

   $$\forall n \in \mathbb{N} : y_n = Ax_n + Bx_n; \ x_n \in B(0,1)$$

   Так как $A \in \mathcal{K}(E)$, то из Ax_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность Ax_{n_k}.

   Аналогично, уже из Bx_{n_k} можно выделить сходящуюся подподпоследовательность $Bx_{n_{k_l}}$, причём предыдущая сходимость никуда не денется.
2. $\mathcal{K}(E)$ поглощает элементы $\mathcal{L}(E)$. Пусть $A \in \mathcal{K}(E)$ и $B \in \mathcal{L}(E)$. Тогда $AB \in \mathcal{K}(E)$ – ибо $B(B(0,1))$ тоже ограниченной множество.

   Для BA сложнее, но мы можем воспользоваться приёмом предыдущего пункта. Рассмотрим ограниченную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq BA(B(0,1))$. Тогда $y_n = BAx_n, x_n \in B(0,1)$. В силу компактности оператора A, можно из Ax_n выделить сходящуюся подпоследовательность Ax_{n_k}. Так как оператор B непрерывен, сходимость в образе сохранится, а значит нужная подпоследовательность $y_{n_k} = BAx_{n_k}$ найдена.

□

Утверждение 6.1.3: Если $\dim E = \infty$, то тождественный оператор $I \notin \mathcal{K}(E)$.

Доказательство: Действительно, по теореме Рисса мы знаем, что замкнутый единичный шар в таком пространстве не компактен, а значит $B(0,1) = I(B(0,1))$ не может быть предкомпактом. □

Следствие 5.4.1.1: Если $\dim E = \infty, A \in \mathcal{K}(E)$, то $A^{-1} \notin \mathcal{L}(E)$.

Доказательство: Предположим противное. Тогда $I = AA^{-1} \in \mathcal{K}(E)$, чего не может быть. □

Утверждение 6.1.4: Если $A \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$, E_2 - банахово и $x_n \overset{w}{\to} x_0 \in E_1$, то $Ax_n \to Ax_0$.

Доказательство: Пусть $x_n \overset{w}{\to} x_0$. Тогда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная, а значит $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – предкомпакт. Более того, из слабой сходимости аргументов и непрерывности A следует слабая сходимость $Ax_n \overset{w}{\to} Ax_0$.

Далее, предположим противное. Пусть не сходится. Тогда $\exists \varepsilon \exists Ax_{n_k}, \left\|Ax_{n_k} - Ax_0\right\| > \varepsilon$. Заметим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ предкомпакт, а значит из x_{n_k} можно выделить сходящуюся подпоследовательность $Ax_{n_{k_l}} \to y$. Так как отделена от Ax_0, то $y \neq Ax_0$

Из сходимости следует слабая, то есть $Ax_{n_{k_l}} \overset{w}{\to} y$, но в то же время $Ax_{n_{k_l}} \overset{w}{\to} Ax_0 \neq y$. Противоречие. □

Теорема 6.1.1: Пусть E_2 – банахово пространство, $A_n \in \mathcal{K}(E_1, E_2), A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, причём $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Тогда $A \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$.

Доказательство: В силу банаховости E_2 для компактности оператора A достаточно проверить, что $A(B(0,1))$ является вполне ограниченным множеством.

Идея состоит в том, чтобы взять достаточно близкий оператор A_n, взять соответствующую ему ε-сеть и заявить, что она подойдёт к A:
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \left\|A - A_{n_0}\right\| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists \{y_t\}_{t=1}^{T} \subseteq E : \forall x \in B(0,1) : \exists s : \ \left\|A_{n_0}x - y_s\right\| < \varepsilon$

Зафиксиоуем $\varepsilon > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ и $\{y_t\}_{t=1}^{T} \subseteq E$ согласно утверждениям выше. Тогда:

$$\forall x \in B(0,1) : \exists y_s : \ \|Ax - y_s\| \leq \left\|Ax - A_{n_0}x\right\| + \left\|A_{n_0}x - y_s\right\| < 2\varepsilon$$

Стало быть, $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ – это конечная 2ε-сеть для $A(B(0,1))$, то есть образ вполне ограничен. □

6.2. Свойства собственных значений компактного оператора.

Теорема 6.2.1: Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $\dim \operatorname{Ker} A_\lambda < \infty$. Где A – компактный, а λ – его СЗ.

Доказательство: Утверждение теоремы эквивалентно тому, что единичная сфера в пространстве Ker A_λ компактна.

Это будет доказано, если мы покажем, как выделить из любой последовательности сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S(0,1) \subseteq$ Ker A_λ. Отсюда $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n = \lambda x_n$. Более того, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченное множество, а значит $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – предкомпакт.

Стало быть, существует сходящаяся подпоследовательность $\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = y$. В силу того, что мы можем раскрыть образ через x_{n_k}, получим следующее:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda x_{n_k} = y \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \frac{y}{\lambda}$$

Однако, это ещё не все. Нам также нужно показать, что $y \in$ Ker A_λ – принадлежит рассматриваемому подпространству. Для этого мы применим оператор A к обеим частям предела:

$$\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = y = \frac{1}{\lambda}Ay \Leftrightarrow Ay = \lambda y \Leftrightarrow y \in \text{Ker } A_\lambda$$

□

Теорема 6.2.2: Для любого $\delta > 0$ вне любого круга $\{|\lambda| \le \delta\}$ может лежать лишь конечное число собственных значений компактного оператора A.

Доказательство: Проведём доказательство в частном случае $E = H$ – гильбертово пространство, и A – компактный самосопряжённый оператор.

Предположим противное. Тогда, должна существовать $\delta_0 > 0$ и хотя бы счётное число $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственных значений вне этого круга.

Пусть e_n – нормированный собственный вектор для значения λ_n. Тогда $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченное множество, а значит $\{Ae_n\}_{n=1}^{\infty}$ – предкомпакт.

Однако, в то же время верно неравенство (здесь мы используем ортогональность собственных векторов для теоремы Пифагора, это свойство самосопряжённого оператора):

$$\forall n \ne m : \|Ae_n - Ae_m\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 > 2\delta_0^2$$

Получили явное противоречие с вполне ограниченностью. □

Утверждение 6.2.1: Если $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, то $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Доказательство: По критерию принадлежности спектру, существует нормированная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой есть предел $\lim_{n\to\infty} A_\lambda x_n = 0$.

Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченное множество, то в силу компактности A можно выделить сходящуюся последовательность $\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = y$. Тогда, мы в то же время имеем равенство

$$\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \lambda x_{n_k} = y$$

В силу непрерывности оператора A, его можно применить к последнему равенсту:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda Ax_{n_k} = \lambda y = Ay \Leftrightarrow y \in \text{Ker } A_\lambda$$

Важно отметить, что $y \neq 0$. Это следует из упомянутого предела $\lim \lambda x_{n_k} = y$. Стало быть, $\lambda \in \sigma_{p(A)}$. □

6.3. Теорема Фредгольма для компактных самосопряжённых операторов

Утверждение 6.3.1 (Лемма об инвариантности): Пусть $M \subseteq H$ – подпространство, инвариантное относительно самосопряжённого оператора A (то есть $AM \subseteq M$). Тогда $M^\perp$ тоже инвариантно относительно A.

Доказательство: Пусть $x \in M$. В силу условия, $Ax \in M$. Вопрос состоит в том, чтобы из $y \in M^\perp$ показать верность $Ay \in M^\perp$. Проверим это явно:

$$\forall x \in M : (x, Ay) = (Ax, y) = 0 \Rightarrow Ay \in M^\perp$$

□

Утверждение 6.3.2: Для компактного самосопряжённого оператора верно:

$$[\text{Im } A_\lambda] = \text{Im } A_\lambda$$

Иначе говоря, образ A_λ замкнут.

Доказательство: Применим лемму об инвариантности. Заметим, что $M = \text{Ker } A_\lambda$ инвариантен относительно A и A_λ, а значит и $M^\perp = [\text{Im } A_\lambda]$ инвариантен относительно тех же операторов.

Если мы докажем, что $A_\lambda \mid_{[\text{Im } A_\lambda]}$ является сюръективным оператором, то всё будет доказано.

Действительно, получим тогда $[\text{Im } A_\lambda] = A_\lambda([\text{Im } A_\lambda]) \subseteq \text{Im } A_\lambda$.

Обозначим $\tilde{A} := A|_{[\text{Im } A_\lambda]}$. Это тоже компактный самосопряжённый оператор, действующий из $[\text{Im } A_\lambda]$ в само себя. Заметим, как связаны собственные значения $\tilde{A}$ с исходными:

$$\tilde{A}_\lambda = \tilde{A} - \lambda I = A|_{[\text{Im } A_\lambda]} - \lambda I|_{[\text{Im } A_\lambda]} = (A - \lambda I)|_{[\text{Im } A_\lambda]} = \widetilde{A_\lambda}$$

А как мы знаем из теоремы Фредгольма для самосопряжённых операторов, все собственные вектора лежат в другой части прямого разложения.

Раз так, то $\lambda \notin \{0\} \cup \sigma_p\left(\tilde{A}\right)$. А по одному из свойств СЗ компактного оператора, может быть верно $\lambda \in \rho\left(\tilde{A}\right)$. Значит, оператор $\tilde{A}_\lambda = \widetilde{A_\lambda}$ биективен, что включает в себя его сюръективность. □

Теорема 6.3.1: Пусть H – гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, A – компактный самосопряжённый оператор и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда
$$H = \operatorname{Im} A_\lambda \oplus \operatorname{Ker} A_\lambda$$

Доказательство: Очевидно из комбинации теоремы Фредгольма для самосопряжённых операторов и утверждения о замкнутости образа компактного самосопряжённого оператора. □

6.4. Теорема Гильберта-Шмидта

Утверждение 6.4.1: Если $A \neq 0$, то у этого оператора существует собственное значение $\lambda \neq 0$.

Доказательство: Коль скоро $A \neq 0$ и мы рассматриваем компактный оператор, то $\|A\| \neq 0$. Коль скоро A – самосопряжённый оператор, то можно воспользоваться теоремой о норме, по ней $\|A\| = \max\big(|m_-|, |m_+|\big)$.

Так как $m_-, m_+ \in \sigma(A)$, то хотя бы одно из этих чисел ненулевое и является собственным значением, что и требовалось. □

Теорема 6.4.1 (Гильберта - Шмидта): Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, A – компактный самосопряжённый оператор. Тогда в H найдётся ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.

Доказательство: Построим нужный базис явным образом. Для этого упорядочим все собственные значения оператора A по модулю, причём включим в этот ряд копии этих значений столько раз, сколько соответствует размерности их собственного подпространства (в силу теоремы о конечности размерности собственных подпространств, это возможно). Получим ряд:
$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

Пусть v_n – нормированный собственный вектор, соответствующий λ_n (для равных СЗ берём ортонормированные вектора базиса подпространства).

Образуем ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, полученную перенумерованием вектором v_n и добавлением собственных векторов, соответствующих $\lambda = 0$ (конечно, если оно является СЗ).

Так как мы находимся в сепарабельном пространстве, то для того, чтобы эта система была базисом, достаточно доказать её полноту. Обозначим $M = \big[\langle \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle\big]$. Коль скоро это подпространство, можно применить теорему о проекции:
$$M \oplus M^\perp = H$$

Стало быть, $M = H \Leftrightarrow M^\perp = \{0\}$. Покажем, что $M^\perp$ инвариантно относительно A.

В силу самосопряжённости A, достаточно это доказать для просто M (лемма об инвариантности).

Введём дополнительное обозначение $L := \langle \{e_n\}_{n=1}^\infty \rangle$. Тогда $AL \subseteq L$ тривиальным образом. При этом оператор A компактен, а значит непрерывен, то есть

$$AM = A([L]) \subseteq [AL] \subseteq [L] = M$$

Исследуем $\tilde{A} := A|_{M^\perp}$. Возможно 2 случая:

- $\tilde{A} = 0$. Этот факт можно записать следующим образом:

$$\forall x \in M^\perp : \ \tilde{A}x = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} \tilde{A}$$

  Стало быть, $M^\perp \subseteq \operatorname{Ker} \tilde{A}$. Но так как мы рассмотрели сужение на $M^\perp$, то по определению M мы оставили $\operatorname{Ker} A \setminus \{0\}$ за бортом, то есть $\operatorname{Ker} \tilde{A} = \{0\} = M^\perp$.
- $\tilde{A} \neq 0$. Предположим противное: $M^\perp \neq \{0\}$.

  По доказанной выше лемме, у $\tilde{A}$ существует ненулевое СЗ λ. Обозначим за e – соответствующий нормированный собственный вектор, то есть $\tilde{A}e = \lambda e$, но ведь тогда и $Ae = \lambda e$. Получили противоречие с определением M.

□

7. Элементы нелинейного анализа

7.1. Производная Фреше, производная Гато. Формула конечных приращений

Определение 7.1.1: Пусть $D \subseteq E_1$ – открытое подмножество, $F : D \to E_2$. Тогда говорят, что F **дифференцируема по Фреше** в точке $x_0 \in D$, если существует оператор $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ такой, что приращение можно представить в следующем виде:

$$\Delta F = F(x_0 + h) - F(x_0) = Ah + o(\|h\|), h \to 0$$

Определение 7.1.2: Пусть $F : D \to E_2$ дифференцируема по Фреше в точке $x_0 \in D$. Тогда соответствующий оператор $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ называется **производной (Фреше)** F в точке $x_0 \in D$:

$$F'(x_0) := A$$

Определение 7.1.3: Пусть $F : D \to E_2$ дифференцируема по Фреше в точке $x_0 \in D$. Тогда значение Ah называется **дифференциалом** F в точке x_0 по приращению h:

$$\mathrm{d}F(x_0, h) := Ah = F'(x_0)h = F'(x_0)[h]$$

Утверждение 7.1.1: Пусть $F \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда
$$\forall x \in E_1 : \; F'(x) = F$$

Доказательство: Действительно,
$$\forall x_0 \in E_1 : \; F[x_0 + h] - F[x_0] = F[h] + 0$$
То есть $A = F$ и $0 = o(\|h\|)$ □

Утверждение 7.1.2: Если F дифференцируема по Фреше, то она непрерывна.

Доказательство: Действительно, предел правой части из определения равен нулю при стремлении $h \to 0$, что в точности означает непрерывность. □

Теорема 7.1.1 (Дифференцирование сложной функции): Пусть $F : E_1 \to E_2$, $G : E_2 \to E_3$ дифференцируемые по Фреше операторы. Тогда $H = G \circ F$ также дифференцируема по Фреше, причём
$$H'(x_0) = G'(F(x_0)) \circ F'(x_0)$$

Доказательство: Распишем дифференцируемость F в точке $x_0 \in E_1$:
$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \Delta F = F'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\|\Delta x\|, \; \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1(\Delta x) = 0$$
Аналогично распишем для G:
$$G(y_0 + t) - G(y_0) = \Delta G = G'(y_0)\Delta y + \varepsilon_2(\Delta y)\|\Delta y\|, \; \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon_2(\Delta y) = 0$$
В силу непрерывности, мы можем рассмотреть $t = F(x_0 + h) - F(x_0)$. Тогда $t \underset{h \to 0}{\to} 0$. Более того, мы можем подставить первую формулу во вторую:
$$\Delta G = G'(y_0)[F'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\|\Delta x\|] + \varepsilon_2(\Delta y)\|\Delta y\|, \Delta x \to 0$$
Если мы покажем, что $G'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\|\Delta x\| + \varepsilon_2(\Delta y)\|\Delta y\| = o(\|\Delta x\|)$, то всё будет доказано.

Для первого слагаемого утверждаем, что оператор $G'(y_0)$ линеен и даже непрерывен, а значит
$$\varepsilon_1(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0 \Rightarrow G'(y_0)[\varepsilon_1(\Delta x)] \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$$
Для второго – распишем $\|\Delta y\|$:
$$\|\Delta y\| = \|F'(x_0)[\Delta x] + \varepsilon_1(\Delta x)\|\Delta x\|\| \le (\|F'(x_0)\| + \|\varepsilon_1(\Delta x)\|)\|\Delta x\|$$
Получили, что $\|\Delta y\| = O(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$. А так как $\varepsilon_2(\Delta y) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, то получили произведение бесконечно малой на ограниченную и всё доказали. □

Определение 7.1.4: **Дифференциалом по Гато** функции F в точке $x_0 \in D$ по приращению h называется следующее значение:
$$DF(x_0, h) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(x_0 + th)\big|_{t=0}$$

Определение 7.1.5: Если для дифференциала по Гато функции F в точке x_0 существует оператор $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ такой, что

$$DF(x_0, h) = Ah$$

то он называется **производной по Гато**.

Теорема 7.1.2 (о среднем): Пусть $D \subseteq E_1$ – выпуклое открытое множество, F – дифференцируема по Фреше на D. Тогда верно неравенство:

$$\forall x_0, x_1 \in D : \ \|F(x_1) - F(x_0)\| \leq \sup_{y \in s(x_0, x_1)} \|F'(y)\| \|x_1 - x_0\|$$

где $s(x_0, x_1)$ – интервал от x_0 до x_1.

Доказательство: Вся идея в том, чтобы построить сквозное отображение

$$\varphi : [0, 1] \to E_1 \to E_2 \to \mathbb{R}$$

и применить к нему теорему Лагранжа.

Итак, $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$, а $f \in E_2^*$ – произвольный функционал. Определим φ следующим образом:

$$\varphi(t) = (f \circ F \circ x)(t)$$

Каждая часть композиции является дифференцируемой по Фреше функцией. Стало быть, и их комбинация дифферецнируема:

$$\varphi'(t) = f'(F(x(t))) \circ F'(x(t)) \circ x'(t) = f[F'(x(t))[x'(t)]] = f[F'(x(t))[x_1 - x_0]]$$

Теперь применим теорему Лагранжа для всего отрезка $[0, 1]$:

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi'(\xi)|(1 - 0)$$

Разберёмся с левой частью. Она переписывается следующим образом:

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = |f[F(x_1)] - f[F(x_0)]| =$$
$$|f[F(x_1) - F(x_0)]| \leq \|f\| \|F(x_1) - F(x_0)\|$$

В этот момент нужно вспомнить теорему Хана-Банаха. Одним из её следствий было то, что для произвольного ненулевого элемента можно подобрать функционал с единичной нормой, который на этом элементе принимает значение – норму этого элемента.

Воспользуемся этим следствием, чтобы найти f по точке $F(x_1) - F(x_0)$. Тогда неравенство выше превращается в равенство:

$$\exists f \in E_2^* : \ |\varphi(1) - \varphi(0)| = |f[F(x_1) - F(x_0)]| = \|F(x_1) - F(x_0)\|$$

Итак, соберём всё вместе:

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = \|F(x_1) - F(x_0)\| = |f(F'(x(\xi)))[x_1 - x_0]| \leq$$
$$\|f\| \|F'(x(\xi))\| \|x_1 - x_0\| \leq \sup_{y \in s(x_0, x_1)} \|F'(y)\| \|x_1 - x_0\|$$

□

8. Производная Фурье и свёртка в пространствах $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$

8.1. Определения и основные свойства. Формула умножения. Преобразование Фурье свёртки.

Определение 8.1.1: Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда **преобразованием Фурье** функции f называется функция, заданная следующим образом:

$$\hat{f}(y) = F[f](y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Утверждение 8.1.1: Преобразование Фурье отображает функции из $L_1(\mathbb{R})$ в $B(\mathbb{R})$ – множество ограниченных функций.

Доказательство:

$$|F[f](y)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot 1 \,\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_{L_1} \Rightarrow \|F[f]\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_1}$$

□

Утверждение 8.1.2: Преобразование Фурье отображает функции из $L_1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$ – множество непрерывных функций, стремящеся к нулю на бесконечности.

Доказательство: Рассмотрим преобразование Фурье индикатора отрезка:

$$\widehat{\mathbb{I}_{[a,b]}}(y) = \frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy} \in C_0(\mathbb{R})$$

А как мы знаем, любая функция из $L_1(\mathbb{R})$ приближается ступенчатыми.

Значит преобразование Фурье любой ступенчатой функции лежит в $C_0(\mathbb{R})$. Более того, F – непрерывный оператор, и поэтому образы будут равномерно сходится. □

Утверждение 8.1.3 (Формула умножения): Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) \hat{g}(y) \,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) g(y) \,\mathrm{d}\mu(y)$$

Замечание 8.1.1: Для применения теоремы Фубини (о перестановке интегралов), мы должны доказать, что хотя бы один из повторных интегралов конечен.

Доказательство: Распишем преобразование Фурье по определению:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \hat{g}(y) \,\mathrm{d}\mu(y) \right| \leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| f(y) g(x) e^{-ixy} \right| \mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\mu(y) =$$

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(y) g(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\mu(y) \leq \|g\|_{L_1} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \,\mathrm{d}\mu(y) \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1} < +\infty$$

□

Определение 8.1.2: Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда **свёрткой функций** f и g называется функция:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) f(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

Утверждение 8.1.4: Свёртка функций $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ тоже лежит в пространстве $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство: Докажем, что ограничен интеграл от модуля свёртки:

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(y) g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \, \mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{Фубини}}{=} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(y) g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| \, \mathrm{d}\mu(x-y) \, \mathrm{d}\mu(y) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, \mathrm{d}\mu(y) \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \, \mathrm{d}\mu(t) = \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1} < +\infty$$

□

Утверждение 8.1.5 (Преобразование Фурье свёртки): Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда верна формула:

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Доказательство: Распишем преобразование Фурье от свёртки:

$$\widehat{f * g}(y) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}\mu(x) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(\xi) g(x-\xi) e^{-ixy} \, \mathrm{d}\mu(\xi) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Выше мы уже доказали, что свёртка «хороших» функций лежит в $L_1(\mathbb{R})$, а значит мы можем применить теорему Фубини. Итак:

$$\widehat{f * g}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \int_{\mathbb{R}} g(x-\xi) e^{-ixy} \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\mu(\xi) \overset{1 = e^{i\xi y} e^{-i\xi y}}{=}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-i\xi y} \int_{\mathbb{R}} g(x-\xi) e^{-i(x-\xi)y} \, \mathrm{d}\mu(x-\xi) \, \mathrm{d}\mu(\xi) = \hat{f}(y) \cdot \hat{g}(y)$$

□

Определение 8.1.3: **Пространством Шварца** $S \subset L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ называется множество бесконечно дифференцируеых функций, которые вместе со всеми своими производными убывают на бесконечности быстрее любой степени:

$$S = \left\{ f \in C^{\infty(\mathbb{R})} \mid \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{N} : \ \lim_{x\to\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0 \right\}$$

Утверждение 8.1.6: Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\forall p \in \mathbb{N} : x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то преобразование фурье $g = F[f]$ дифференцируемо бесконечное число раз на $\mathbb{R}$.

Доказательство: Функции пространства Шварца можно описать эквивалентным образом:

$$\forall f \in S : \exists C_{n,m} \in \mathbb{R}_+ : \ \forall x \in \mathbb{R} : \left| x^m f^{(n)}(x) \right| \leq C_{n,m}$$

Покажем, что из этого факта следует $x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ при любом $p \in \mathbb{N}$. Действительно, можно написать следующее:

$$\forall m \in \mathbb{N} : \exists C_{0,m+2} \in R_+ : \ \forall x \in \mathbb{R} : |x^m f(x)| \leq \frac{C_{0,m+2}}{x^2}$$

Отсюда тривиальным образом получаем абсолютную интегрируемость. Стало быть, преобразование Фурье $g = F[f]$ обладает всеми производными.

Чтобы доказать, что они тоже являются функциями из пространства Шварца, воспользуемся следующим равенством:

$$(iy)^q g^{(m)}(y) = (-i)^q F\left[(x^m f(x))^{(q)} \right](y)$$

Из непрерывности преобразования Фурье, требуемое установлено. □

Утверждение 8.1.7: Преобразование Фурье на S обладает следующими свойствами:
1. $F : S \to S$ – биекция
2. $F : S \to S$ – изометрия
3. $F^4 = I$ (Более того, $F^2[f](x) = f(-x)$)

Доказательство:
1. Достаточно показать, что для любой $g \in S$ найдётся прообраз по преобразованию Фурье. Посмотрим на образ:

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-iyx} \, \mathrm{d}\mu(y)$$

Положим $f(x) = f^*(-x)$. Из уже доказанного, $f^* \in S$, а значит и $f \in S$. Осталось произвести замену переменной:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f^*(x) e^{ixy} = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}\mu(x) = F[f](y)$$

2. Распишем скалярное произведение с использованием формулы обращения (без доказательства):

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{ixy} \, \mathrm{d}\mu(y)} \, \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x) \overline{\hat{g}(y)} e^{-ixy} \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\mu(y) = \left(\hat{f}, \hat{g} \right)$$

3. Заметим, что

$$F[f](y) = F^{-1}[f](-y)$$

Так как преобразование Фурье биективно, можно применить его к полученному равенству и получить требуемое.

□

Замечание 8.1.2: Замыкание S – это пространство $L_2(\mathbb{R})$.

Утверждение 8.1.8: Преобразование Фурье продолжается на $L_2(\mathbb{R})$. Более того, $F[L_2(\mathbb{R})] \subseteq L_2(\mathbb{R})$

Доказательство: Как известно из предыдущего семестра, линейный ограниченный оператор, определённый на линейном многообразии, продолжается на его замыкание с сохранением нормы. Именно это тут и происходит. □

8.2. Операторы Гильберта-Шмидта

Определение 8.2.1: **Оператором Гильберта-Шмидта** называется частный случай оператора Фредгольма в $L_2[a,b]$:

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}\mu(t), \quad K \in L_2\left([a,b]^2\right)$$

Утверждение 8.2.1: Оператор Гильберта-Шмидта отображает в $L_2[a,b]$

Доказательство: Раз $K \in L_2\left([a,b]^2\right)$, то как функция по одному из своих аргументов, она тоже будет из $L_2[a,b]$:

$$|(Af)(x)|^2 = \left|\int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right|^2 = |(K(k,t),f(t))|^2 \overset{\text{КБШ}}{\leq} \|f\|_{L_2}^2 \|K(x,\cdot)\|_{L_2}^2 < \infty$$

□

Теорема 8.2.1: Оператор Гильберта-Шмидта является компактным оператором на $L_2[a,b]$.

Доказательство: $L_2[a,b]$ – сепарабельное гильбертово пространство, поэтому в нём есть ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Идея состоит в том, чтобы найти последовательность компактных операторов $\{A_N\}_{N=1}^{\infty}$, которые сходятся по норме к A.

Итак, можно разложить ядро K по вышеупомянутому базису:

$$K(x,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m}\varphi_n(x)\varphi_m(t)$$

Возьмём за отдельные ядра – «срезки» от ряда выше:

$$K_{N(x,t)} = \sum_{n,m=1}^{N} c_{n,m}\varphi_n(x)\varphi_m(t)$$

Тогда, тривиальным образом, $A_N f(x) = \int_a^b K_{N(x,t)}f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$, который является компактным из-за конечномерности образа.

Осталось вспомнить, что норма оператора Фредгольма оценивается сверху 2-нормой ядра, а значит:

$$\|A - A_n\| \leq \|K - K_n\| \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

□

Определение 8.2.2: Пусть H – гильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его базис. **Классом операторов Гильберта-Шмидта** называется следующее множество операторов $A \in \{L_n\}_{n=1}^{\infty}(H)$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < +\infty$$