

Содержание

1. Слабая сходимость в банаховом пространстве	2
1.1. Изометричность вложения E в E^{**} . Критерий слабой сходимости последовательности.	2
1.2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества.	3
1.3. Замкнутый шар в Гильбертовом пространстве секвенциально компактен (теорема Банаха).	4
2. Обратимый оператор. Обратимость	5
2.1. Обратимость линейного, ограниченного снизу, оператора	5
2.2. Обратимость возмущённого оператора	5
2.3. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе. Доказательство в случае гильбертова пространства.	6

Функциональный анализ 2.0.

Disclaimer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

1. Слабая сходимость в банаховом пространстве

1.1. Изометричность вложения E в E^{**} . Критерий слабой сходимости последовательности.

Теорема 1.1.1 (Хана Банаха, напоминание): Пусть E – ЛНП. $M \subset E$ – линейное многообразие, f – линейный ограниченный функционал на M . Тогда $\exists \tilde{f} \in E^*$:

1. $\tilde{f}|_M = f$
2. $\|\tilde{f}\| = \|f\|$

Следствие 1.1.1.1:

$$\forall x \in E : \|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

Теорема 1.1.2 (Об изометрии): E изометрично E^{**} , через отображение $\pi : E \rightarrow E^{**}$, где

$$\pi x = F_x \in E^{**}; \quad F_x(f) = f(x)$$

Доказательство: Нужно доказать, что отображение π не меняет норму.

В силу приведённого выше следствия из теоремы Хана-Банаха:

$$\|F_x\| = \sup_{\|f\|=1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|$$

□

Определение 1.1.1: Пусть E – нормированное пространство. Говорим, что последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ **слабо сходится** к x :

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall f \in E^* : f(x_n) \rightarrow f(x)$$

Теорема 1.1.3 (Критерий поточечной сходимости операторов. Напоминание из прошлого семестра):

Пусть E_1 – банахово, E_2 – ЛНП. Причём $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда

$$A_n \xrightarrow{\text{поточечно}} A \Leftrightarrow \begin{cases} \exists M: \forall n: \|A_n\| \leq M \\ \exists S: [S]=E_1: \forall s \in S: A_n s \rightarrow A s \end{cases}$$

Теорема 1.1.4 (Критерий слабой сходимости): Пусть E – ЛНП. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$:

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \begin{cases} \{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty \text{ ограничена} \\ \exists S: [S]=E: \forall f \in S: f(x_n) \rightarrow f(x) \end{cases}$$

Доказательство: Перейдём к рассмотрению операторов $F_{x_n}, F_x \in E^{**}$. Тогда слабая сходимость $x_n \xrightarrow{w} x$ по определению является поточечной сходимостью $F_{x_n}(f) \rightarrow F_x(f)$.

Из условия:

- $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$
- Пространство E^* всегда полно
- Нормы $\|F_{x_n}\| = \|x_n\|$ ограничены
- $\exists S: [S] = E^*: \forall f \in S: F_{x_n}f \rightarrow F_x f$

Эти условия позволяют нам применить упомянутый выше критерий поточечной сходимости операторов из предыдущего семестра. А поточечная сходимость оператором во всём пространстве соответствует $x_n \xrightarrow{w} x$. \square

Замечание 1.1.1: В случае рефлексивного банахова пространства E условие для слабой сходимости можно ослабить. Достаточно потребовать не сходимости $f(x_n) \rightarrow f(x)$, а существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ (тем самым, нам не нужно знать конкретный x).

1.2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества.

Теорема 1.2.1 (Слабая сходимость и ограниченные операторы):

Пусть E_1, E_2 – ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E_1, x \in E_1$, причём $x_n \xrightarrow{w} x$, а также $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда есть слабая сходимость образов:

$$Ax_n \xrightarrow{w} Ax$$

Доказательство: По определению слабой сходимости, выполняется

$$\forall f \in E_1^*: f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

В частности, можно рассмотреть функционал $f = g \circ A$ для любого $g \in E_2^*$. Тогда

$$\forall g \in E_2^*: g(Ax_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(Ax)$$

Это утверждение в точности совпадает с определением слабой сходимости $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$. \square

Определение 1.2.1: Множество $S \subseteq E$ называется **слабо ограниченным**, если

$$\forall f \in E^* : f(S) - \text{ограниченное множество в } \mathbb{K}$$

Теорема 1.2.2 (Хана): Пусть $S \subseteq E$ – слабо ограниченное множество. Тогда S ограничено.

Доказательство: Предположим противное, то есть S неограничено. Тогда

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S : \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \geq n^2$$

Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{x_n}{n}$. В силу слабой ограниченности, мы можем сделать следующую оценку на образ $f(y_n)$, $f \in E^*$ (где K_f – константа, ограничивающая образ $f(S)$):

$$\forall f \in E^* : |f(y_n)| = \frac{|f(x_n)|}{n} \leq \frac{K_f}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Стало быть, $y_n \xrightarrow{w} 0$. В силу критерия слабой сходимости, $\|y_n\| \leq M$ – есть ограниченность норм. Отсюда

$$\forall n \in \mathbb{N} : M \geq \|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n$$

Противоречие. □

1.3. Замкнутый шар в Гильбертовом пространстве секвенциально компактен (теорема Банаха).

Определение 1.3.1: Множество $S \subseteq E$ называется **слабо секвенциально компактным** (или секвенциально слабо компактным), если из любой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S : \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} : \exists x \in S : x_{n_k} \xrightarrow{w}_{k \rightarrow \infty} x$$

Теорема 1.3.1 (Банаха): Пусть H – гильбертово пространство. Тогда $\overline{B}(0, R)$ – слабо секвенциально компактное множество.

Доказательство:

1. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{B}(0, R)$. Хотим показать, что в ней выделяется слабо сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.
2. Рассмотрим $L = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$. В силу гильбертовости пространства H , мы можем воспользоваться теоремой о проекции. Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$.
3. Выделим такую подпоследовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что есть сходимость для любого скалярного произведения с x_m :

$$\forall m \in \mathbb{N} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} (x_m, y_k)$$

Тогда, в силу критерия слабой сходимости (смотреть замечание после него), y_k будет слабо сходящейся последовательностью в L .

4. Заметим, что из имеющейся сходимости следует слабая сходимость и во всём пространстве H :

$$H = L \oplus L^\perp \Rightarrow \forall h = l + l^\perp : (y_k, h) = (y_k, l) + (y_k, l^\perp) = (y_k, l)$$

А (y_k, l) сходится в силу результата предыдущего пункта.

Единственная вещь, требующая пояснения – пункт 3, выделение слабо сходящейся последовательности. Воспользуемся диагональным методом Кантора:

1. Зафиксируем x_m . Тогда $(x_m, x_n) \leq R^2$ и, получается, $\{(x_m, x_n)\}_{n=1}^\infty$ является ограниченной последовательностью чисел. По теореме Больцано-Вейерштрасса, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} .
2. Итерируемся по $m \in \mathbb{N}$ (с началом $m = 1$ и последовательностью x_n) и выделяем новую подпоследовательность из той, что была получена на предыдущем шаге. Обозначаем их как $x_{m,n}$.
3. Получили искомую последовательность $y_k = x_{k,k}$.

□

2. Обратимый оператор. Обратимость

2.1. Обратимость линейного, ограниченного снизу, оператора

Теорема 2.1.1: Пусть $A \in \mathcal{L}(E)$ – взаимно однозначный оператор $E \rightarrow \text{Im } A$. Тогда обратный оператор A^{-1} будет ограничен тогда и только тогда, когда образы A оцениваются снизу:

$$\exists m : \forall x \in E : \|Ax\| \geq m\|x\|$$

Доказательство: \Rightarrow В силу ограниченности оператора A^{-1} , можно записать следующее:

$$\forall y = Ax : \|x\| = \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\|\|y\| = \|A^{-1}\|\|Ax\|$$

Отсюда имеем $\|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$.

\Leftarrow Раз A – биекция, то и A^{-1} тоже. Поэтому вместо x можно подставить соответствующий ему $A^{-1}y, y \in \text{Im } A$:

$$\forall y \in \text{Im } A : \|AA^{-1}y\| \geq m\|A^{-1}y\| \Leftrightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$$

А это в точности ограниченность оператора A^{-1} .

□

2.2. Обратимость возмущённого оператора

Теорема 2.2.1: Пусть E – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$, причём $\|A\| < 1$.

1. Тогда оператор $(I + A)$ обратим. Более того, справедлива формула

$$(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$$

Доказательство: Нужно доказать, что ряд справа действительно является обратным к оператору $(I + A)$. Обозначим $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k A^k$.

1. Покажем, что S_n сходится к некоторому $S \in \mathcal{L}(E)$. Во-первых, $S_n \in \mathcal{L}(E)$ тривиальным образом, а в силу банаховости \mathcal{E} , достаточно проверить фундаментальность этой последовательности:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^k A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A\|^k < \varepsilon$$

Последнее неравенство выполняется, начиная с некоторого n , так как $\|A\|, \|A\|^2, \dots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем < 1 .

2. Так как многочлены от одного и того же оператора коммутируют, то если мы покажем, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n(I+A)} = I \Rightarrow S(I+A) = I = (I+A)S$$

и всё доказано.

Раскроем выражение под пределом:

$$\begin{aligned} S_n(I+A) &= S_n + S_n A = \sum_{k=0}^n (-1)^k A^k + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} A^k = \\ &= A^0 + (-1)^n A^{n+1} = I + (-1)^n A^{n+1} \end{aligned}$$

Оценим норму последнего слагаемого:

$$\|(-1)^n A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Стало быть, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n(I+A)} = I + 0$, что и требовалось доказать.

□

Теорема 2.2.2: Пусть E – банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(E)$ и $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Также пусть $\Delta A \in \mathcal{L}(E)$, причём $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда $(A + \Delta A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Доказательство: Сведём теорему к предыдущей:

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$$

Проверим, что норма оператора из скобки удовлетворяет условию на норму:

$$\|A^{-1}\Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$$

□

2.3. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе. Доказательство в случае гильбертова пространства.

Теорема 2.3.1 (Банаха об обратном операторе): Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ – биективный оператор. Тогда $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

Доказательство: Случай, когда $E_1 = E_2 = H$ – гильбертово пространство над полем \mathbb{C} .

Основная идея состоит в том, чтобы доказать утверждение теоремы не для A , а для A^* . Запишем 2 разложения пространства H (тема про сопряжённый оператор и разложение будет далее):

$$\begin{aligned} [\text{Im } A] \oplus \text{Ker } A^* &= H \\ [\text{Im } A^*] \oplus \text{Ker } A &= H \end{aligned}$$

Так как A биективен, то $\text{Ker } A = \{0\}$ и мы сразу получаем $[\text{Im } A^*] = H$.
С другой стороны, $[\text{Im } A] = \text{Im } A = H$, а потому $\text{Ker } A^* = \{0\}$. \square