

# Содержание

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Слабая сходимость в банаховом пространстве .....</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1. Изометричность вложения $E$ в $E^{**}$ . Критерий слабой сходимости последовательности. ....   | 2         |
| 1.2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества. ....   | 3         |
| 1.3. Замкнутый шар в Гильбертовом пространстве секвенциально компактен (теорема Банаха). ....   | 4         |
| <b>2. Обратимый оператор. Обратимость .....</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1. Обратимость линейного, ограниченного снизу, оператора .....  | 5         |
| 2.2. Обратимость возмущённого оператора .....   | 6         |
| 2.3. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе. Доказательство в случае гильбертова пространства. ....                                | 7         |
| <b>3. Сопряжённый оператор .....</b>  | <b>7</b>  |
| 3.1. Норма сопряжённого оператора (в ЛНП) .....   | 7         |
| 3.2. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Равенство $H = [\text{Im } A] \oplus \text{Ker } A^*$ .....                           | 7         |
| <b>4. Спектр. Резольвента. ....</b>   | <b>9</b>  |
| 4.1. Операторозначные функции комплексного переменного. Аналитичность резольвенты. Спектральный радиус. Основная теорема о спектре .....      | 9         |
| <b>5. Самосопряжённые операторы .....</b>   | <b>12</b> |
| 5.1. Свойства квадратичной формы $(Ax, x)$ и собственных значений самосопряжённого оператора $A$ . ....                                       | 12        |
| 5.2. Разложение гильбертова пространства $H = [\text{Im } A_\lambda] \oplus \text{Ker } A_\lambda$ , где $A$ – самосопряжённый оператор. .... | 13        |
| 5.3. Критерий принадлежности числа спектру самосопряжённого оператора. Вещественность спектра самосопряжённого оператора. ....                | 14        |
| 5.4. Теорема о спектре самосопряжённого оператора: $\sigma(A) \subseteq [m_-, m_+]$ , $r(A) = \ A\ $ .....                                    | 15        |
| <b>6. Компактные операторы .....</b>  | <b>16</b> |
| 6.1. Свойства компактных операторов .....   | 16        |
| 6.2. Свойства собственных значений компактного оператора. ....  | 18        |
| 6.3. Теорема Фредгольма для компактных самосопряжённых операторов .....   | 19        |
| 6.4. Теорема Гильберта-Шмидта .....   | 20        |
| <b>7. Элементы нелинейного анализа .....</b>  | <b>22</b> |
| 7.1. Производная Фреше, производная Гато. Формула конечных приращений .....   | 22        |
| <b>8. Производная Фурье и свёртка в пространствах <math>L_1(\mathbb{R})</math> и <math>L_2(\mathbb{R})</math> .....</b>                       | <b>24</b> |
| 8.1. Определения и основные свойства. Формула умножения. Преобразование Фурье свёртки. ....   | 24        |
| 8.2. Операторы Гильберта-Шмидта .....   | 27        |

## Функциональный анализ 2.0.

Disclaimer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами  
Big thanks for клуб Теха Лекций и Максиму Даниилу в частности.

### 1. Слабая сходимость в банаховом пространстве

#### 1.1. Изометричность вложения $E$ в $E^{**}$ . Критерий слабой сходимости последовательности.

**Теорема 1.1.1** (Хана Банаха, напоминание): Пусть  $E$  – ЛНП.  $M \subset E$  – линейное многообразие,  $f$  – линейный ограниченный функционал на  $M$ . Тогда  $\exists \tilde{f} \in E^*$ :

1.  $\tilde{f}|_M = f$
2.  $\|\tilde{f}\| = \|f\|$

**Следствие 1.1.1.1:**

$$\forall x \in E : \|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

**Теорема 1.1.2** (Об изометрии):  $E$  изометрично  $E^{**}$ , через отображение  $\pi : E \rightarrow E^{**}$ , где

$$\pi x = F_x \in E^{**}; \quad F_x(f) = f(x)$$

*Доказательство:* Нужно доказать, что отображение  $\pi$  не меняет норму.

В силу приведённого выше следствия из теоремы Хана-Банаха:

$$\|F_x\| = \sup_{\|f\|=1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|$$

□

**Определение 1.1.1:** Пусть  $E$  – нормированное пространство. Говорим, что последовательность элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  **слабо сходится** к  $x$ :

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall f \in E^* : f(x_n) \rightarrow f(x)$$

**Теорема 1.1.3** (Критерий поточечной сходимости операторов. Напоминание из прошлого семестра):

Пусть  $E_1$  – банахово,  $E_2$  – ЛНП. Причём  $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ ,  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Тогда

$$A_n \xrightarrow{\text{поточечно}} A \Leftrightarrow \begin{cases} \exists M: \forall n: \|A_n\| \leq M \\ \exists S: [\langle S \rangle] = E_1: \forall s \in S: A_n s \rightarrow A s \end{cases}$$

**Теорема 1.1.4** (Критерий слабой сходимости): Пусть  $E$  – ЛНП. Тогда последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$ :

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \begin{cases} \{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty \text{ ограничена} \\ \exists S: [\langle S \rangle] = E^*: \forall f \in S: f(x_n) \rightarrow f(x) \end{cases}$$

*Доказательство:* Перейдём к рассмотрению операторов  $F_{x_n}, F_x \in E^{**}$ . Тогда слабая сходимость  $x_n \xrightarrow{w} x$  по определению является поточечной сходимостью  $F_{x_n}(f) \rightarrow F_x(f)$ .

Из условия:

- $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$
- Пространство  $E^*$  всегда полно
- Нормы  $\|F_{x_n}\| = \|x_n\|$  ограничены
- $\exists S: [\langle S \rangle] = E^*: \forall f \in S: F_{x_n}f \rightarrow F_x f$

Эти условия позволяют нам применить упомянутый выше критерий поточечной сходимости операторов из предыдущего семестра. А поточечная сходимость оператором во всём пространстве соответствует  $x_n \xrightarrow{w} x$ .  $\square$

**Замечание 1.1.1:** В случае рефлексивного банахова пространства  $E$  условие для слабой сходимости можно ослабить. Достаточно потребовать не сходимости  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ , а существования предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  (тем самым, нам не нужно знать конкретный  $x$ ).

## 1.2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества.

**Теорема 1.2.1** (Слабая сходимость и ограниченные операторы):

Пусть  $E_1, E_2$  – ЛНП,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E_1, x \in E_1$ , причём  $x_n \xrightarrow{w} x$ , а также  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Тогда есть слабая сходимость образов:

$$Ax_n \xrightarrow{w} Ax$$

*Доказательство:* По определению слабой сходимости, выполняется

$$\forall f \in E_1^*: f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

В частности, можно рассмотреть функционал  $f = g \circ A$  для любого  $g \in E_2^*$ . Тогда

$$\forall g \in E_2^*: g(Ax_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(Ax)$$

Это утверждение в точности совпадает с определением слабой сходимости  $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$ .  $\square$

**Определение 1.2.1:** Множество  $S \subseteq E$  называется **слабо ограниченным**, если

$$\forall f \in E^* : f(S) - \text{ограниченное множество в } \mathbb{K}$$

**Утверждение 1.2.1:** Пусть  $S \subseteq E$  – ограниченное множество. Тогда  $S$  слабо ограничено.

*Доказательство:* По определению, если  $f \in E^*$ , то это линейный ограниченный функционал.

Ограниченный функционал переводит ограниченные множества в ограниченные, по определению.

Поэтому слабая ограниченность  $S$  тривиальна.  $\square$

**Теорема 1.2.2 (Хана):** Пусть  $S \subseteq E$  – слабо ограниченное множество. Тогда  $S$  ограничено.

*Доказательство:* Предположим противное, то есть  $S$  неограничено. Тогда

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S : \forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \geq n^2$$

Рассмотрим последовательность  $y_n = \frac{x_n}{n}$ . В силу слабой ограниченности, мы можем сделать следующую оценку на образ  $f(y_n), f \in E^*$  (где  $K_f$  – константа, ограничивающая образ  $f(S)$ ):

$$\forall f \in E^* : |f(y_n)| = \frac{|f(x_n)|}{n} \leq \frac{K_f}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Стало быть,  $y_n \xrightarrow{w} 0$ . В силу критерия слабой сходимости,  $\|y_n\| \leq M$  – есть ограниченность норм. Отсюда

$$\forall n \in \mathbb{N} : M \geq \|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n$$

Противоречие.  $\square$

### 1.3. Замкнутый шар в Гильбертовом пространстве секвенциально компактен (теорема Банаха).

**Определение 1.3.1:** Множество  $S \subseteq E$  называется **слабо секвенциально компактным** (или секвенциально слабо компактным), если из любой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S : \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} : \exists x \in S : x_{n_k} \xrightarrow{w}_{k \rightarrow \infty} x$$

**Теорема 1.3.1 (Банаха):** Пусть  $H$  – гильбертово пространство. Тогда  $\overline{B}(0, R)$  – слабо секвенциально компактное множество.

*Доказательство:*

1. Рассмотрим любую последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{B}(0, R)$ . Хотим показать, что в ней выделяется слабо сходящаяся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ .
2. Рассмотрим  $L = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ . В силу гильбертовости пространства  $H$ , мы можем воспользоваться теоремой о проекции. Тогда  $H = L \oplus L^{\perp}$ .
3. Выделим такую подпоследовательность  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , что есть сходимость для любого скалярного произведения с  $x_m$ :

$$\forall m \in \mathbb{N} : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} (x_m, y_k)$$

Тогда, в силу критерия слабой сходимости (смотреть замечание после него),  $y_k$  будет слабо сходящейся последовательностью в  $L$ .

4. Заметим, что из имеющейся сходимости следует слабая сходимость и во всём пространстве  $H$ :

$$H = L \oplus L^{\perp} \Rightarrow \forall h = l + l^{\perp} : (y_k, h) = (y_k, l) + (y_k, l^{\perp}) = (y_k, l)$$

А  $(y_k, l)$  сходится в силу результата предыдущего пункта.

Единственная вещь, требующая пояснения – пункт 3, выделение слабо сходящейся последовательности. Воспользуемся диагональным методом Кантора:

1. Зафиксируем  $x_m$ . Тогда  $(x_m, x_n) \leq R^2$  и, получается,  $\{(x_m, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  является ограниченной последовательностью чисел. По теореме Больцано-Вейерштрасса, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k}$ .
2. Итерируемся по  $m \in \mathbb{N}$  (с началом  $m = 1$  и последовательностью  $x_n$ ) и выделяем новую подпоследовательность из той, что была получена на предыдущем шаге. Обозначаем их как  $x_{m,n}$ .
3. Получили искомую последовательность  $y_k = x_{k,k}$ .

□

## 2. Обратимый оператор. Обратимость

### 2.1. Обратимость линейного, ограниченного снизу, оператора

**Теорема 2.1.1:** Пусть  $A \in \mathcal{L}(E)$  – взаимно однозначный оператор  $E \rightarrow \text{Im } A$ . Тогда обратный оператор  $A^{-1}$  будет ограничен тогда и только тогда, когда образы  $A$  оцениваются снизу:

$$\exists m : \forall x \in E : \|Ax\| \geq m\|x\|$$

*Доказательство:*  $\Rightarrow$  В силу ограниченности оператора  $A^{-1}$ , можно записать следующее:

$$\forall y = Ax : \|x\| = \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\|\|y\| = \|A^{-1}\|\|Ax\|$$

Отсюда имеем  $\|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$ .

$\Leftarrow$  Раз  $A$  – биекция, то и  $A^{-1}$  тоже. Поэтому вместо  $x$  можно подставить соответствующий ему  $A^{-1}y, y \in \text{Im } A$ :

$\forall y \in \text{Im } A: \|AA^{-1}y\| \geq m\|A^{-1}y\| \Leftrightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$   
 А это в точности ограниченность оператора  $A^{-1}$ .  $\square$

## 2.2. Обратимость возмущённого оператора

**Теорема 2.2.1:** Пусть  $E$  – банахово пространство,  $A \in \mathcal{L}(E)$ , причём  $\|A\| < 1$ . Тогда оператор  $(I + A)$  обратим. Более того, справедлива формула  

$$(I + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$$

**Замечание 2.2.1:** Выписанный ряд называется **рядом Неймана**.

*Доказательство:* Нужно доказать, что ряд справа действительно является обратным к оператору  $(I + A)$ . Обозначим  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k A^k$ .

1. Покажем, что  $S_n$  сходится к некоторому  $S \in \mathcal{L}(E)$ . Во-первых,  $S_n \in \mathcal{L}(E)$  тривиальным образом, а в силу банаховости  $E$ , достаточно проверить фундаментальность этой последовательности:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^k A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A\|^k < \varepsilon$$

Последнее неравенство выполняется, начиная с некоторого  $n$ , так как  $\|A\|, \|A\|^2, \dots$  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $< 1$ .

2. Так как многочлены от одного и того же оператора коммутируют, то если мы покажем, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(I + A) = I \Rightarrow S(I + A) = I = (I + A)S$$

и всё доказано.

Раскроем выражение под пределом:

$$\begin{aligned} S_n(I + A) &= S_n + S_n A = \sum_{k=0}^n (-1)^k A^k + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} A^k = \\ &= A^0 + (-1)^n A^{n+1} = I + (-1)^n A^{n+1} \end{aligned}$$

Оценим норму последнего слагаемого:

$$\|(-1)^n A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Стало быть,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(I + A) = I + 0$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.2.2:** Пусть  $E$  – банахово пространство,  $A \in \mathcal{L}(E)$  и  $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ . Также пусть  $\Delta A \in \mathcal{L}(E)$ , причём  $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ . Тогда  $(A + \Delta A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ .

*Доказательство:* Сведём теорему к предыдущей:

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$$

Проверим, что норма оператора из скобки удовлетворяет условию на норму:

$$\|A^{-1}\Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$$

$\square$

## 2.3. Формулировка теоремы Банаха об обратном операторе. Доказательство в случае гильбертова пространства.

**Теорема 2.3.1** (Банаха об обратном операторе): Пусть  $E_1, E_2$  – банаховы пространства,  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  – биективный оператор. Тогда  $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ .

*Доказательство:* Случай, когда  $E_1 = E_2 = H$  – гильбертово пространство над полем  $\mathbb{C}$ .

Основная идея состоит в том, чтобы доказать утверждение теоремы не для  $A$ , а для  $A^*$ . Запишем 2 разложения пространства  $H$  (тема про сопряжённый оператор и разложение будет далее):

$$[\text{Im } A] \oplus \text{Ker } A^* = H$$

$$[\text{Im } A^*] \oplus \text{Ker } A = H$$

Так как  $A$  биективен, то  $\text{Ker } A = \{0\}$  и мы сразу получаем  $[\text{Im } A^*] = H$ . С другой стороны,  $[\text{Im } A] = \text{Im } A = H$ , а потому  $\text{Ker } A^* = \{0\}$ .

Далее вы узнаете, что сопряжённый оператор всегда ограничен снизу, а значит из его сюръективности автоматически следует ограниченность обратного.  $\square$

## 3. Сопряжённый оператор

### 3.1. Норма сопряжённого оператора (в ЛНП)

**Определение 3.1.1:** Пусть  $A : E_1 \rightarrow E_2$ . Тогда **сопряжённым оператором**  $A^* : E_2^* \rightarrow E_1^*$  называется оператор, удовлетворяющий условию:

$$\forall g \in E_2^* : \forall x \in E_1 : (A^*g)x = g(Ax)$$

**Теорема 3.1.1:** Пусть  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Тогда  $A^* \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ , причём  $\|A^*\| = \|A\|$ .

*Доказательство:* Покажем неравенства для норм в 2 стороны:

$\leq$  Верна следующая оценка:

$$\forall g \in E_2^* : \forall x \in E_1 : |(A^*g)x| = |g(Ax)| \leq \|g\|\|Ax\| \leq \|g\|\|A\|\|x\|$$

Из последнего имеем  $\|A^*g\| \leq \|A\|\|g\|$ , что означает  $\|A^*\| \leq \|A\|$ .

$\geq$  Так как  $A^* \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ , то можно воспользоваться следствием теоремы Хана-Банаха для нормы элемента  $Ax$ :

$$\forall x \in E_1 : \|Ax\| = \sup_{\|g\|=1} |g(Ax)| = \sup_{\|g\|=1} |(A^*g)x|$$

При этом  $\|(A^*g)x\| \leq \|A^*\| \cdot 1 \cdot \|x\|$ , а значит  $\|Ax\| \leq \|A^*\|\|x\| \Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\|$ .

$\square$

### 3.2. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Равенство $H = [\text{Im } A] \oplus \text{Ker } A^*$

**Определение 3.2.1:** Пусть  $E_1 = H_1, E_2 = H_2$  – гильбертовы пространства,  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Тогда **эрмитово сопряжённым оператором**  $A^* : H_2 \rightarrow H_1$  называется оператор, удовлетворяющий условию:

$$\forall x \in E_1 : \forall y \in E_2 : (Ax, y)_{H_2} = (x, A^*y)_{H_1}$$

**Теорема 3.2.1:** Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $A \in \mathcal{L}(H)$ . Тогда  

$$H = [\operatorname{Im} A] \oplus \operatorname{Ker} A^*$$

*Доказательство:*

1. Покажем, что  $(\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^*$ . Для этого рассмотрим произвольный элемент ортогонального дополнения:

$$\forall y \in (\operatorname{Im} A)^\perp : \forall x \in H : (Ax, y) = 0$$

Стало быть, для любых  $x, y$  выше будет  $(x, A^*y) = 0$ , а в силу гильбертовости пространства это означает, что  $A^*y = 0$ , что означает  $y \in \operatorname{Ker} A^*$ .

2. Заметим, что  $(\operatorname{Im} A)^\perp = [\operatorname{Im} A]^\perp$ . Так как последнее является подпространством, то по теореме о проекции получаем требуемое разложение:

$$H = [\operatorname{Im} A] \oplus [\operatorname{Im} A]^\perp = [\operatorname{Im} A] \oplus \operatorname{Ker} A^*$$

□

**Утверждение 3.2.1:** Если  $A \in \mathcal{L}(H)$ , где  $H$  – гильбертово, то оператор  $A^*$  (эрмитово сопряжённый) ограничен снизу.

*Доказательство:* Заметим, что свойство ограниченности снизу имеет эквивалентный вариант (в силу линейности):

$$\exists m > 0 : \forall x \in H : \|A^*x\| \geq m\|x\| \Leftrightarrow \exists m > 0 : \forall x \in H : \|A^*x\| = 1 : \|x\| \leq \frac{1}{m}$$

Обозначим рассматриваемое подпространство

$$S := \{x \in H \mid \|A^*x\| = 1\}$$

Таким образом, задача свелась к доказательству ограниченности  $S$ .

А как мы знаем, ограниченность эквивалентна слабой ограниченности. Более того, мы находимся в Гильбертовом пространстве  $H$ , а значит каждый функционал представляется в виде  $(y, \cdot)$ :

$$\forall y \in H : \exists K_y \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in S : |(y, x)| \leq K_y$$

Однако,  $A$  – сюръекция, а значит для любого  $y \in H$  найдётся  $z \in H$  такой, что  $Az = y$ . Отсюда:

$$\forall z \in H : \exists K_z \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in S : |(Az, x)| = |(z, A^*x)| \leq 1 \cdot \|z\| =: K_z$$

□

**Утверждение 3.2.2:** Пусть  $B \in \mathcal{L}(H)$  и  $B$  ограничен снизу. Тогда  $[\operatorname{Im} B] = \operatorname{Im} B$ .



*Доказательство:* Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \text{Im } B$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Докажем, что  $y \in \text{Im } B$ .

В силу сходимости есть и фундаментальность:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall p \in \mathbb{N} : \|y_{n+p} - y_n\| < \varepsilon$$

Коль скоро  $y_n \in \text{Im } B$ , то можно переписать норму разности следующим образом:

$$\|y_{n+p} - y_n\| = \|Bz_{n+p} - Bz_n\| > m\|z_{n+p} - z_n\|$$

Стало быть,  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна, а в силу полноты  $H$  должен существовать предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ . Тогда

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Bz_n = B(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = Bz$$

□

## 4. Спектр. Резольвента.

### 4.1. Операторозначные функции комплексного переменного. Аналитичность резольвенты. Спектральный радиус. Основная теорема о спектре

**Определение 4.1.1:** Резольвентным множеством оператора  $A$  называется следующее множество:

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\}$$

Все  $\lambda \in \mathbb{C}$ , попадающие в резольвентное множество, называются **регулярными значениями**.

**Определение 4.1.2:** Спектром оператора  $A$  называется дополнение к резольвентному множеству:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

**Определение 4.1.3:** Резольвентой оператора  $A$  называется любое отображение следующего вида:

$$R_{\lambda} := R(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$$

**Утверждение 4.1.1:**  $R(\lambda)$  является непрерывной функцией от  $\lambda$ .

*Доказательство:* Положим  $B = A - \lambda_0 I$  и  $\Delta B = -\Delta \lambda I$ .

Как мы уже доказывали выше, мы можем рассмотреть  $\Delta \lambda$  с ограничением  $|\Delta \lambda| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$  и тогда  $B + \Delta B$  будет обратим.

Для непрерывности, нам нужно оценить норму следующей разности при  $\Delta \lambda \rightarrow 0$ :

$$\|R(\lambda_0 + \Delta \lambda) - R(\lambda_0)\| = \|(B + \Delta B)^{-1} - B^{-1}\|$$

Распишем  $(B + \Delta B)^{-1}$  через ряд Неймана следующим образом:

$$\begin{aligned}(B + \Delta B)^{-1} &= (I + B^{-1}\Delta B)^{-1} B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (B^{-1}\Delta B)^k B^{-1} = \\ &= B^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (B^{-1}\Delta B)^k B^{-1}\end{aligned}$$

Отсюда можно вернуться к оценке приращение и уже работать с рядом:

$$\begin{aligned}\|(B + \Delta B)^{-1} - B^{-1}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (B^{-1}\Delta B)^k B^{-1} \right\| \leq \\ &= \|B^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty} (\|B^{-1}\| \|\Delta B\|)^k = \|B^{-1}\| \cdot \frac{\|B^{-1}\| \|\Delta B\|}{1 - \|B^{-1}\| \|\Delta B\|} \xrightarrow{\Delta B \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

□

**Замечание 4.1.1:** Далее будет использоваться обозначение

$$A_{\lambda} := A - \lambda I$$

**Утверждение 4.1.2:** Пусть  $\lambda_0, \lambda \in \rho(A)$ . Тогда

$$R_{\lambda} - R_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda} R_{\lambda_0}$$

*Доказательство:*

Рассмотрим следующую тривиальную цепочку равенств:

$$\begin{aligned}R_{\lambda} - R_{\lambda_0} &= R_{\lambda} \underbrace{A_{\lambda_0}}_I R_{\lambda_0} - \underbrace{A_{\lambda} R_{\lambda}}_I R_{\lambda_0} = \\ &= R_{\lambda} (A_{\lambda_0} - A_{\lambda}) R_{\lambda_0} = R_{\lambda} (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda} R_{\lambda_0}\end{aligned}$$

□

**Утверждение 4.1.3:**  $R(\lambda)$  дифференцируема на  $\rho(A)$ . Более того:

$$R'(\lambda_0) = R_{\lambda_0}^2$$

*Доказательство:* Запишем дроби из предела производной:

$$\frac{R_{\lambda} - R_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = \frac{(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda} R_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = R_{\lambda} R_{\lambda_0} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} R_{\lambda_0}^2$$

□

**Определение 4.1.4:** Спектральным радиусом оператора  $A$  называется радиус окружности с центром в нуле, в которую попадают все элементы спектра:

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

**Утверждение 4.1.4:** Если  $|\lambda| > \|A\|$ , то  $\lambda \in \rho(A)$ .

*Доказательство:* Перепишем  $A_{\lambda}$  следующим образом:

$$A_{\lambda} = -\lambda \left( I - \frac{1}{\lambda} A \right)$$

Так как  $\left\| \frac{A}{\lambda} \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \|A\| < 1$ , то применима теорема об обратимости возмущённого оператора и, соответственно, этот оператор обратим. Значит  $\lambda \in \rho(A)$  по определению.  $\square$

**Следствие 3.2.1.1:** Очевидно следует, что  $r(A) \leq \|A\|$ .

**Утверждение 4.1.5:** Радиус сходимости ряда Неймана для  $R(\lambda)$  равен спектральному радиусу  $r(A)$ .

*Доказательство:* Мы можем говорить о ряде Лорана. Если  $|\lambda| > \|A\|$ , то тогда имеет место следующее представление резольвенты:

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} A^k \lambda^{-k}$$

При этом, ранее было установлено, что  $R(\lambda)$  дифференцируема на  $\rho(A)$ . В частности, это происходит на круге  $|\lambda| > r(A)$ .

Так как представление функции в виде ряда Лорана в круге единственно, а мы уже его записали выше для некоторой окрестности бесконечности, то тот же самый вид должен быть и в этом круге.

Значит, радиус сходимости ряда Неймана не превосходит  $r(A)$ .

≥ Пусть  $|\lambda_0| < r(A)$ . Тогда, предположим, что ряд сходится в этой точке. Это означает, что ряд будет сходиться и при всех  $|\lambda| > |\lambda_0|$ .

Это также означает обратимость  $A_\lambda$  при всех таких  $\lambda$ , но коль скоро  $|\lambda_0| < r(A)$ , то должен существовать  $|\lambda_0| < |\lambda_1| < r(A)$  такой, что  $\lambda_1 \in \sigma(A)$  в силу определения спектрального радиуса, а это противоречит определению спектра.  $\square$

**Утверждение 4.1.6:** Если  $\lambda \in \sigma(A)$ , то  $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ .

*Доказательство:* Предположим противное, то есть  $\lambda^n \in \rho(A^n)$  и  $\lambda \in \sigma(A)$ . Значит  $(A^n - \lambda^n I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ . Заметим, что мы также можем записать обратимый оператор в следующем виде:

$$A^n - \lambda^n I = (A - \lambda I) \underbrace{(A^{n-1} + \dots + \lambda^{n-1} I)}_B \Rightarrow I = (A - \lambda I) B (A^n - \lambda^n I)^{-1}$$

Так как рассматриваемые операторы – многочлены от степеней  $A$ , то они коммутируют. С учётом этого имеем, что  $A_\lambda$  обратим, а стало быть  $\lambda \in \rho(A)$ , противоречие.  $\square$

**Утверждение 4.1.7:** Верна формула для спектрального радиуса:

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

*Доказательство:* Как мы уже знаем, радиус сходимости ряда Неймана для  $R(\lambda)$  совпадает с  $r(A)$ :

$$r(A) = r_{\text{сх}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

В силу последнего доказанного утверждения, мы можем связать  $r(A)$  и  $r(A^n)$  следующим образом:

$$r(A^n) = \sup_{\mu \in \sigma(A^n)} |\mu| \geq \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda^n| = r(A)^n$$

Стало быть,  $r(A) \leq \sqrt[n]{r(A^n)}$ . При этом, знаем, что  $r(A^n) \leq \|A^n\|$ .

Получилось, что верхний предел не превосходит любого элемента последовательности  $\sqrt[n]{\|A^n\|}$ , а это означает, что он не превосходит их нижнего предела. Такое возможно только тогда, когда существует просто предел.  $\square$

**Теорема 4.1.1** (Основная теорема о спектре): Спектр оператора непуст:  
 $\sigma(A) \neq \emptyset$

*Доказательство:* Предположим противное. Тогда  $\rho(A) = \mathbb{C}$  и, следовательно,  $R(\lambda)$  является целой функцией. Оценим норму этого оператора, пользуясь представлением обратного оператора в ряд Неймана:

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|}\|A\|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

Коль скоро есть предел  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R(\lambda)\|$ , то норма  $R(\lambda)$  ограничена. Стало быть, по теореме Лиувилля  $R(\lambda) = \text{const}$ . Более того, из-за найденного выше предела  $R(\lambda) = 0$ . Это противоречит обратимости  $A_\lambda$  при каком-либо  $\lambda$ .  $\square$

**Определение 4.1.5:** Рассмотрим оператор  $A \in \mathcal{L}(E)$ . Тогда

- $\sigma_{p(A)} := \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Ker } A_\lambda \neq \{0\}\}$  – **точечный спектр**.

Причём  $v \in \text{Ker } A_\lambda$  называются **собственными векторами** для **собственного значения**  $\lambda$ .

- $\sigma_{c(A)} := \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Ker } A_\lambda = \{0\} \wedge \text{Im } A_\lambda \neq E \wedge [\text{Im } A_\lambda] = E\}$  – **непрерывный спектр**.
- $\sigma_{r(A)} := \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Ker } A_\lambda = \{0\} \wedge [\text{Im } A_\lambda] \neq E\}$  – **остаточный спектр**.

## 5. Самосопряжённые операторы

### 5.1. Свойства квадратичной формы $(Ax, x)$ и собственных значений самосопряжённого оператора $A$ .

**Определение 5.1.1:** Пусть  $E_1 = E_2 = H$  – гильбертово пространство. Тогда, если  $A \in \mathcal{L}(H)$  и  $A^* = A$ , то оператор  $A$  называется **самосопряжённым**:

$$\forall x, y \in H : (Ax, y) = (x, Ay)$$

**Определение 5.1.2:** Квадратичной формой оператора  $A$  называется функционал, определённый следующим образом:

$$K(x) = (Ax, x)$$

**Утверждение 5.1.1:** Пусть  $A \in \mathcal{L}(H)$  – произвольный оператор. Если  $\forall x \in H : K(x) = 0$ , то  $A \equiv 0$ .

*Доказательство:* Рассмотрим произвольные  $x, y \in H$ . Тогда  $x + y, x + iy \in H$ .

Запишем по определению квадратичную форму для этих точек:

$$K(x + y) = (A(x + y), x + y) = \underbrace{K(x)}_0 + \underbrace{K(y)}_0 + (Ax, y) + (Ay, x)$$

$$K(x + iy) = (A(x + iy), x + iy) = \underbrace{K(x)}_0 - \underbrace{K(y)}_0 - i(Ax, y) + i(Ay, x)$$

Отсюда  $(Ax, y) = \frac{1}{2}(K(x + y) + iK(x + iy)) = 0$ . Если варьировать  $y$  по всем возможным значениям, то следствие теоремы Хана-Банаха даст равенство  $\forall x \in H : Ax = 0$ .  $\square$

**Теорема 5.1.1:**

1. Оператор  $A$  самосопряжён тогда и только тогда, когда  $\forall x \in H : K(x) \in \mathbb{R}$ .
2. Если  $\lambda$  – собственное значение самосопряжённого  $A$ , то  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
3. Если  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  – собственные значения самосопряжённого  $A$ , а  $e_1, e_2 \in H$  – соответствующие собственные вектора, то  $(e_1, e_2) = 0$ .

*Доказательство:*

1. Проведём доказательство в обе стороны.

$\Rightarrow$  Скалярное произведение эрмитово, поэтому воспользуемся свойством перестановки аргументов:

$$K(x) = (Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \Rightarrow K(x) \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$  Аналогично первому пункту, имеем

$$K(x) = (Ax, x) = \overline{(Ax, x)} = (x, Ax)$$

В то же время,  $(Ax, x) = (x, A^*x)$  по определению. Стало быть, квадратичная форма для  $A - A^*$  нулевая.

По доказанному утверждению, это возможно лишь в том случае, когда  $A - A^* \equiv 0$ , что и требовалось.

2. Пусть  $Av = \lambda v$ . Тогда

$$K(v) = (Av, v) = \lambda(v, v) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Заметим следующее соотношение:

$$\lambda_1(e_1, e_2) = (Ae_1, e_2) = (e_1, Ae_2) = \lambda_2(e_1, e_2)$$

Так как  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то такое возможно только тогда, когда  $(e_1, e_2) = 0$ .  $\square$

**5.2. Разложение гильбертова пространства  $H = [\text{Im } A_\lambda] \oplus \text{Ker } A_\lambda$ , где  $A$  – самосопряжённый оператор.**

**Теорема 5.2.1:** Для самосопряжённого  $A$  верно равенство  

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : [\operatorname{Im} A_\lambda] \oplus \operatorname{Ker} A_\lambda = H$$

*Доказательство:* Воспользуемся обычной теоремой о разложении для сопряжённых операторов. Тогда

$$[\operatorname{Im} A_\lambda] \oplus \operatorname{Ker} A_\lambda^* = H$$

При этом  $A_\lambda^* = A^* - \bar{\lambda}I = A - \bar{\lambda}I$ .

Если  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то всё доказано. Иначе  $\lambda \neq \mathbb{R}$ , но это также значит, что  $\lambda \notin \sigma_p(A)$ , а это эквивалентно  $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$ . То же самое верно и для  $\bar{\lambda}$ , откуда тоже получаем тривиальное доказательство.  $\square$

### 5.3. Критерий принадлежности числа спектру самосопряжённого оператора. Вещественность спектра самосопряжённого оператора.

**Теорема 5.3.1** (Критерий принадлежности спектру самосопряжённого оператора):

1.  $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow A_\lambda$  – ограниченный снизу, то есть  $\exists m > 0 : \forall x \in H : \|A_\lambda x\| \geq m\|x\|$
2.  $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H : \|x_n\| = 1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_\lambda x_n\| = 0$

*Доказательство:* Второй пункт – отрицание обеих частей первого. Поэтому доказывать будем только первую эквивалентность.

$\Rightarrow$  Раз  $\lambda \in \rho(A)$ , то  $A_\lambda$  обратим, а значит биективен. По теореме об ограниченности снизу обратимого оператора всё доказано.

$\Leftarrow$  По той же теореме, должны доказать, что  $A_\lambda$  биективен. Из ограниченности снизу следует  $\operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$  (иначе образом ненулевого элемента был бы ноль, что нарушило бы ограниченность), а в силу разложения пространство имеем следующее:

$$[\operatorname{Im} A_\lambda] \oplus \operatorname{Ker} A_\lambda = H = [\operatorname{Im} A_\lambda]$$

Также по лемме о замыкании образа ограниченного снизу оператора, имеем

$$\operatorname{Im} A_\lambda = [\operatorname{Im} A_\lambda] = H$$

$\square$

**Утверждение 5.3.1:** Пусть  $A$  – самосопряжённый, а  $\lambda = \mu + i\nu, \nu \neq 0$ . Тогда  

$$\|A_\lambda x\|^2 \geq \|\nu\|^2 \|x\|^2$$

*Доказательство:* Заметим, что  $A_\lambda = A - \lambda I = A - (\mu + i\nu)I = A_\mu - i\nu I$ .

Так как речь идёт о квадрате нормы, то мы можем расписать её через скалярное произведение:

$$\|A_\lambda x\|^2 = (A_\lambda x, A_\lambda x) = \|A_\mu x\|^2 - i\nu(x, A_\mu x) + i\nu(A_\mu x, x) + \|\nu\|^2 \|x\|^2$$

Так как  $\mu \in \mathbb{R}$ , то  $A_\mu$  – самосопряжённый оператор. Стало быть, мы можем сократить слагаемые в середине. Тогда:

$$\|A_\lambda x\|^2 = \|A_\mu x\|^2 + \|\nu\|^2 \|x\|^2 \geq \|\nu\|^2 \|x\|^2$$

По доказанной лемме,  $A_\lambda$  ограничен снизу. В силу критерия принадлежности спектру, такое возможно лишь в том случае, когда  $\lambda \in \rho(A)$ .  $\square$

**Следствие 5.3.1.1:** Для самосопряжённого оператора  $A$  верно:

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$$

## 5.4. Теорема о спектре самосопряжённого оператора: $\sigma(A) \subseteq [m_-, m_+]$ , $r(A) = \|A\|$

**Теорема 5.4.1:** Обозначим для самосопряжённого  $A$ :  $m_- := \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$  и  $m_+ := \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$ . Тогда:

1.  $\sigma(A) \subseteq [m_-, m_+]$ , причём  $m_-, m_+ \in \sigma(A)$
2.  $\|A\| = r(A) = \max(|m_-|, |m_+|)$

*Доказательство:*

1. Покажем, что если  $\lambda > m_+$ , то  $\lambda \in \rho(A)$ . Будем снова ограничивать  $\|A_\lambda x\|$  снизу. С одной стороны, по КБШ:

$$|(A_\lambda x, x)| \leq \|A_\lambda x\| \|x\| \Rightarrow \|A_\lambda x\| \geq \frac{1}{\|x\|} |(A_\lambda x, x)|$$

С другой стороны, распишем скалярное произведение:

$$|(A_\lambda x, x)| = |(Ax, x) - \lambda(x, x)| = \lambda \|x\|^2 - (Ax, x) \geq (\lambda - m_+) \|x\|^2$$

Последний переход верен, так как

$$m_+ = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = \sup_x \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \Rightarrow (Ax, x) \leq m_+ \|x\|^2 < \lambda \|x\|^2$$

Отсюда сразу  $\lambda \in \rho(A)$ . Теперь докажем, что  $m_+ \in \sigma(A)$ . Для этого воспользуемся критерием принадлежности спектру. В силу определения  $m_+$ :

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq H : \|x_n\| = 1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, x_n) = m_+$$

Надо показать, что предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_{m_+} x_n\| = 0$ . Так как норма векторов единична, то текущий предел можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, x_n) - m_+ = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, x_n) - m_+ (x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{m_+} x_n, x_n) = 0$$

Также из определения  $m_+$  следует, что  $A_{m_+}$  – отрицательно полуопределённый оператор.

Так как неравенство КБШ справедливо для скалярных произведений, порождённый положительными полуопределёнными операторами, то перейдём к  $B = -A_{m_+}$ . Чтобы получить требуемое, нам достаточно показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0$ .

Запишем четвёртую! степень нормы следующим образом:

$$\|Bx_n\|^4 = |(x_n, Bx_n)_B|^2 \leq |(x_n, x_n)_B| |(Bx_n, Bx_n)_B| = |(Bx_n, x_n)| |(B^2 x_n, Bx_n)|$$

Первый множитель стремится к нулю, а второй ограничен:

$$|(B^2 x_n, Bx_n)| \leq \|B^2 x_n\| \|Bx_n\| \leq \|B\|^3 \|x_n\|^2 = \|B\|^3$$

- Требуемый предел установлен. Доказательство для  $m_-$  аналогично.
2. Из формулы спектрального радиуса

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

Докажем, что для  $n = 2^k$  верно равенство  $\|A^n\| = \|A\|^n$ .

Достаточно доказать, что  $\|A^2\| = \|A\|^2$ .

≤ Воспользуемся неравенством для ограниченных операторов:

$$\|A^2x\| = \|A(Ax)\| \leq \|A\|\|Ax\| \leq \|A\|^2\|x\| \Rightarrow \|A^2\| \leq \|A\|^2$$

≥ Распишем квадрат нормы  $\|Ax\|^2$ :

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, A^2x) \leq \|x\|\|A^2x\|$$

Осталось взять супремум от обеих частей неравенства:

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 \leq \sup_{\|x\|=1} \|A^2\|\|x\|^2 = \|A^2\|$$

Так как предел в формуле спектрального радиуса существует, то достаточно найти любой частичный предел. Будем брать предел по индексам-степеням двойки.

□

## 6. Компактные операторы

### 6.1. Свойства компактных операторов

**Определение 6.1.1:** Оператор  $A$  называется **компактным**, если

$$\forall M \subseteq E_1 - \text{ограниченное} \Rightarrow A(M) \subseteq$$

$$E_2 - \text{предкомпакт (вполне ограниченное)}$$

Множество компактных операторов обозначается как  $\mathcal{K}(E_1, E_2)$ .

**Утверждение 6.1.1:** Имеют место следующие утверждения:

1.  $\dim E_1 < \infty \Rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2) = \mathcal{K}(E_1, E_2)$
2.  $\dim E_2 < \infty \Rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2) = \mathcal{K}(E_1, E_2)$

*Доказательство:* Достаточно понимать, что в конечномерном пространстве любое ограниченное множество вполне ограничено.

1. Коль скоро  $\dim \operatorname{Im} A \leq \dim E_1 < \infty$ , то образ любого ограниченного множества оказывается ограниченным множеством в подпространстве  $\operatorname{Im} A$  конечной размерности.
2. Сразу следует из исходного заявления в доказательстве.

□



**Замечание 6.1.1:** Пусть  $R$  – кольцо,  $I$  – подгруппа  $(R, +)$ . Тогда  $I$  называется **левосторонним идеалом**, если  $I$  обладает свойством **поглощения слева**:

$$\forall r \in R : \forall a \in I : ra \in I$$

Аналогично определяется **правосторонний идеал**. Ну и **двухсторонний идеал**, если он является и левосторонним, и правосторонним.

**Утверждение 6.1.2:** Пусть  $E_1 = E_2 = E$ . Тогда  $\mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{L}(E)$  – двухсторонний идеал.

*Доказательство:*

1.  $\mathcal{K}(E)$  является подгруппой по сложению. Пусть  $A, B \in \mathcal{K}(E)$ . Тогда  $A + B \in \mathcal{K}(E) \Leftrightarrow (A + B)(B(0, 1))$  – предкомпакт.

Это эквивалентно тому, что из любой ограниченной последовательности в этом множестве можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Действительно, рассмотрим ограниченную последовательность  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (A + B)(B(0, 1))$ . В силу определения, её элементы распишутся так:

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_n = Ax_n + Bx_n; x_n \in B(0, 1)$$

Так как  $A \in \mathcal{K}(E)$ , то из  $Ax_n$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $Ax_{n_k}$ .

Аналогично, уже из  $Bx_{n_k}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $Bx_{n_{k_l}}$ , причём предыдущая сходимость никуда не денется.

2.  $\mathcal{K}(E)$  поглощает элементы  $\mathcal{L}(E)$ . Пусть  $A \in \mathcal{K}(E)$  и  $B \in \mathcal{L}(E)$ . Тогда  $AB \in \mathcal{K}(E)$  – ибо  $B(B(0, 1))$  тоже ограниченное множество.

Для  $BA$  сложнее, но мы можем воспользоваться приёмом предыдущего пункта. Рассмотрим ограниченную последовательность  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq BA(B(0, 1))$ . Тогда  $y_n = BAx_n, x_n \in B(0, 1)$ . В силу компактности оператора  $A$ , можно из  $Ax_n$  выделить сходящуюся подпоследовательность  $Ax_{n_k}$ . Так как оператор  $B$  непрерывен, сходимость в образе сохранится, а значит нужная подпоследовательность  $y_{n_k} = BAx_{n_k}$  найдена.

□

**Утверждение 6.1.3:** Если  $\dim E = \infty$ , то тождественный оператор  $I \notin \mathcal{K}(E)$ .

*Доказательство:* Действительно, по теореме Рисса мы знаем, что замкнутый единичный шар в таком пространстве не компактен, а значит  $B(0, 1) = I(B(0, 1))$  не может быть предкомпактом. □

**Следствие 5.4.1.1:** Если  $\dim E = \infty, A \in \mathcal{K}(E)$ , то  $A^{-1} \notin \mathcal{L}(E)$ .

*Доказательство:* Предположим противное. Тогда  $I = AA^{-1} \in \mathcal{K}(E)$ , чего не может быть.  $\square$

**Утверждение 6.1.4:** Если  $A \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$  и  $x_n \xrightarrow{w} x_0 \in E_1$ , то  $Ax_n \xrightarrow{w} Ax_0$ .

*Доказательство:* Пусть  $x_n \xrightarrow{w} x_0$ . Тогда  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  – ограниченная, а значит  $\{Ax_n\}_{n=1}^\infty$  – предкомпакт. Более того, из слабой сходимости аргументов и непрерывности  $A$  следует слабая сходимость  $Ax_n \xrightarrow{w} Ax_0$ .  $\square$

**Теорема 6.1.1:** Пусть  $E_2$  – банахово пространство,  $A_n \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$ ,  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ , причём  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ . Тогда  $A \in \mathcal{K}(E_1, E_2)$ .

*Доказательство:* В силу банаховости  $E_2$  для компактности оператора  $A$  достаточно проверить, что  $A(B(0, 1))$  является вполне ограниченным множеством.

Идея состоит в том, чтобы взять достаточно близкий оператор  $A_n$ , взять соответствующую ему  $\varepsilon$ -сеть и заявить, что она подойдёт к  $A$ :

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \|A - A_{n_0}\| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists \{y_t\}_{t=1}^T \subseteq E : \forall x \in B(0, 1) : \exists s : \|A_{n_0}x - y_s\| < \varepsilon$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0, n_0 \in \mathbb{N}$  и  $\{y_t\}_{t=1}^T \subseteq E$  согласно утверждениям выше. Тогда:

$$\forall x \in B(0, 1) : \exists y_s : \|Ax - y_s\| \leq \|Ax - A_{n_0}x\| + \|A_{n_0}x - y_s\| < 2\varepsilon$$

Стало быть,  $\{y_t\}_{t=1}^T$  – это конечная  $2\varepsilon$ -сеть для  $A(B(0, 1))$ , то есть образ вполне ограничен.  $\square$

## 6.2. Свойства собственных значений компактного оператора.

**Теорема 6.2.1:** Пусть  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Тогда  $\dim \text{Ker } A_\lambda < \infty$ . Где  $A$  – компактный, а  $\lambda$  – его СЗ.

*Доказательство:* Утверждение теоремы эквивалентно тому, что единичная сфера в пространстве  $\text{Ker } A_\lambda$  компактна.

Это будет доказано, если мы покажем, как выделить из любой последовательности сходящуюся подпоследовательность. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq S(0, 1) \subseteq \text{Ker } A_\lambda$ . Отсюда  $\|x_n\| = 1$  и  $Ax_n = \lambda x_n$ . Более того,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  – ограниченное множество, а значит  $\{Ax_n\}_{n=1}^\infty$  – предкомпакт.

Стало быть, существует сходящаяся подпоследовательность  $\lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = y$ . В силу того, что мы можем раскрыть образ через  $x_{n_k}$ , получим следующее:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda x_{n_k} = y \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \frac{y}{\lambda}$$

Однако, это ещё не все. Нам также нужно показать, что  $y \in \text{Ker } A_\lambda$  – принадлежит рассматриваемому подпространству. Для этого мы применим оператор  $A$  к обеим частям предела:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = y = \frac{1}{\lambda} Ay \Leftrightarrow Ay = \lambda y \Leftrightarrow y \in \text{Ker } A_\lambda$$

□

**Теорема 6.2.2:** Для любого  $\delta > 0$  вне любого круга  $\{|\lambda| \leq \delta\}$  может лежать лишь конечное число собственных значений компактного оператора  $A$ .

*Доказательство:* Проведём доказательство в частном случае  $E = H$  – гильбертово пространство, и  $A$  – компактный самосопряжённый оператор.

Предположим противное. Тогда, должна существовать  $\delta_0 > 0$  и хотя бы счётное число  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  собственных значений вне этого круга.

Пусть  $e_n$  – нормированный собственный вектор для значения  $\lambda_n$ . Тогда  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  – ограниченное множество, а значит  $\{Ae_n\}_{n=1}^\infty$  – предкомпакт.

Однако, в то же время верно неравенство (здесь мы используем ортогональность собственных векторов для теоремы Пифагора, это свойство самосопряжённого оператора):

$$\forall n \neq m : \|Ae_n - Ae_m\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 > 2\delta_0^2$$

Получили явное противоречие с вполне ограниченностью.

□

**Утверждение 6.2.1:** Если  $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ , то  $\lambda \in \sigma_p(A)$ .

*Доказательство:* По критерию принадлежности спектру, существует нормированная последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , для которой есть предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_\lambda x_n = 0$ .

Так как  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  – ограниченное множество, то в силу компактности  $A$  можно выделить сходящуюся последовательность  $\lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = y$ . Тогда, мы в то же время имеем равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Ax_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda x_{n_k} = y$$

В силу непрерывности оператора  $A$ , его можно применить к последнему равенству:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda Ax_{n_k} = \lambda y = Ay \Leftrightarrow y \in \text{Ker } A_\lambda$$

Важно отметить, что  $y \neq 0$ . Это следует из упомянутого предела  $\lim \lambda x_{n_k} = y$ . Стало быть,  $\lambda \in \sigma_p(A)$ .

□

### 6.3. Теорема Фредгольма для компактных самосопряжённых операторов

**Утверждение 6.3.1** (Лемма об инвариантности): Пусть  $M \subseteq H$  – подпространство, инвариантное относительно самосопряжённого оператора  $A$  (то есть  $AM \subseteq M$ ). Тогда  $M^\perp$  тоже инвариантно относительно  $A$ .

*Доказательство:* Пусть  $x \in M$ . В силу условия,  $Ax \in M$ . Вопрос состоит в том, чтобы из  $y \in M^\perp$  показать верность  $Ay \in M^\perp$ . Проверим это явно:

$$\forall x \in M : (x, Ay) = (Ax, y) = 0 \Rightarrow Ay \in M^\perp$$

□

**Утверждение 6.3.2:** Для компактного самосопряжённого оператора верно:

$$[\operatorname{Im} A_\lambda] = \operatorname{Im} A_\lambda$$

Иначе говоря, образ  $A_\lambda$  замкнут.

*Доказательство:* Применим лемму об инвариантности. Заметим, что  $M = \operatorname{Ker} A_\lambda$  инвариантен относительно  $A$  и  $A_\lambda$ , а значит и  $M^\perp = [\operatorname{Im} A_\lambda]$  инвариантен относительно тех же операторов.

Если мы докажем, что  $A_\lambda|_{[\operatorname{Im} A_\lambda]}$  является сюръективным оператором, то всё будет доказано.

Действительно, получим тогда  $[\operatorname{Im} A_\lambda] = A_\lambda([\operatorname{Im} A_\lambda]) \subseteq \operatorname{Im} A_\lambda$ .

Обозначим  $\tilde{A} := A|_{[\operatorname{Im} A_\lambda]}$ . Это тоже компактный самосопряжённый оператор, действующий из  $[\operatorname{Im} A_\lambda]$  в само себя. Заметим, как связаны собственные значения  $\tilde{A}$  с исходными:

$$\tilde{A}_\lambda = \tilde{A} - \lambda I = A|_{[\operatorname{Im} A_\lambda]} - \lambda I|_{[\operatorname{Im} A_\lambda]} = (A - \lambda I)|_{[\operatorname{Im} A_\lambda]} = \tilde{A}_\lambda$$

А как мы знаем из теоремы Фредгольма для самосопряжённых операторов, все собственные вектора лежат в другой части прямого разложения.

Раз так, то  $\lambda \notin \{0\} \cup \sigma_p(\tilde{A})$ . А по одному из свойств СЗ компактного оператора, может быть верно  $\lambda \in \rho(\tilde{A})$ . Значит, оператор  $\tilde{A}_\lambda = \tilde{A}_\lambda$  биективен, что включает в себя его сюръективность. □

**Теорема 6.3.1:** Пусть  $H$  – гильбертово пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $A$  – компактный самосопряжённый оператор и  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Тогда

$$H = \operatorname{Im} A_\lambda \oplus \operatorname{Ker} A_\lambda$$

*Доказательство:* Очевидно из комбинации теоремы Фредгольма для самосопряжённых операторов и утверждения о замкнутости образа компактного самосопряжённого оператора. □

## 6.4. Теорема Гильберта-Шмидта

**Утверждение 6.4.1:** Если  $A \neq 0$ , то у этого оператора существует собственное значение  $\lambda \neq 0$ .

*Доказательство:* Коль скоро  $A \neq 0$  и мы рассматриваем компактный оператор, то  $\|A\| \neq 0$ . Коль скоро  $A$  – самосопряжённый оператор, то можно воспользоваться теоремой о норме, по ней  $\|A\| = \max(|m_-|, |m_+|)$ .

Так как  $m_-, m_+ \in \sigma(A)$ , то хотя бы одно из этих чисел ненулевое и является собственным значением, что и требовалось.  $\square$

**Теорема 6.4.1** (Гильберта - Шмидта): Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство над полем  $\mathbb{C}$ ,  $A$  – компактный самосопряжённый оператор. Тогда в  $H$  найдётся ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора  $A$ .

*Доказательство:* Построим нужный базис явным образом. Для этого упорядочим все собственные значения оператора  $A$  по модулю, причём включим в этот ряд копии этих значений столько раз, сколько соответствует размерности их собственного подпространства (в силу теоремы о конечности размерности собственных подпространств, это возможно). Получим ряд:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

Пусть  $v_n$  – нормированный собственный вектор, соответствующий  $\lambda_n$  (для равных СЗ берём ортонормированные вектора базиса подпространства).

Образуем ортонормированную систему  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ , полученную перенумерованием векторов  $v_n$  и добавлением собственных векторов, соответствующих  $\lambda = 0$  (конечно, если оно является СЗ).

Так как мы находимся в сепарабельном пространстве, то для того, чтобы эта система была базисом, достаточно доказать её полноту. Обозначим  $M = [\langle \{e_n\}_{n=1}^\infty \rangle]$ . Коль скоро это подпространство, можно применить теорему о проекции:

$$M \oplus M^\perp = H$$

Стало быть,  $M = H \Leftrightarrow M^\perp = \{0\}$ . Покажем, что  $M^\perp$  инвариантно относительно  $A$ .

В силу самосопряжённости  $A$ , достаточно это доказать для просто  $M$  (лемма об инвариантности).

Введём дополнительное обозначение  $L := \langle \{e_n\}_{n=1}^\infty \rangle$ . Тогда  $AL \subseteq L$  тривиальным образом. При этом оператор  $A$  компактен, а значит непрерывен, то есть

$$AM = A([L]) \subseteq [AL] \subseteq [L] = M$$

Исследуем  $\tilde{A} := A|_{M^\perp}$ . Возможно 2 случая:

- $\tilde{A} = 0$ . Этот факт можно записать следующим образом:

$$\forall x \in M^\perp : \tilde{A}x = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker } \tilde{A}$$

Стало быть,  $M^\perp \subseteq \text{Ker } \tilde{A}$ . Но так как мы рассмотрели сужение на  $M^\perp$ , то по определению  $M$  мы оставили  $\text{Ker } A \setminus \{0\}$  за бортом, то есть  $\text{Ker } \tilde{A} = \{0\} = M^\perp$ .

- $\tilde{A} \neq 0$ . Предположим противное:  $M^\perp \neq \{0\}$ .

По доказанной выше лемме, у  $\tilde{A}$  существует ненулевое СЗ  $\lambda$ . Обозначим за  $e$  – соответствующий нормированный собственный вектор, то есть  $\tilde{A}e = \lambda e$ , но ведь тогда и  $Ae = \lambda e$ . Получили противоречие с определением  $M$ .

□

## 7. Элементы нелинейного анализа

### 7.1. Производная Фреше, производная Гато. Формула конечных приращений

**Определение 7.1.1:** Пусть  $D \subseteq E_1$  – открытое подмножество,  $F : D \rightarrow E_2$ . Тогда говорят, что  $F$  дифференцируема по Фреше в точке  $x_0 \in D$ , если существует оператор  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  такой, что приращение можно представить в следующем виде:

$$\Delta F = F(x_0 + h) - F(x_0) = Ah + o(\|h\|), h \rightarrow 0$$

**Определение 7.1.2:** Пусть  $F : D \rightarrow E_2$  дифференцируема по Фреше в точке  $x_0 \in D$ . Тогда соответствующий оператор  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  называется **производной (Фреше)  $F$**  в точке  $x_0 \in D$ :

$$F'(x_0) := A$$

**Определение 7.1.3:** Пусть  $F : D \rightarrow E_2$  дифференцируема по Фреше в точке  $x_0 \in D$ . Тогда значение  $Ah$  называется **дифференциалом  $F$**  в точке  $x_0$  по приращению  $h$ :

$$dF(x_0, h) := Ah = F'(x_0)h = F'(x_0)[h]$$

**Утверждение 7.1.1:** Пусть  $F \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Тогда  
 $\forall x \in E_1 : F'(x) = F$

*Доказательство:* Действительно,

$$\forall x_0 \in E_1 : F[x_0 + h] - F[x_0] = F[h] + 0$$

То есть  $A = F$  и  $0 = o(\|h\|)$

□

**Утверждение 7.1.2:** Если  $F$  дифференцируема по Фреше, то она непрерывна.

*Доказательство:* Действительно, предел правой части из определения равен нулю при стремлении  $h \rightarrow 0$ , что в точности означает непрерывность.  $\square$

**Теорема 7.1.1** (Дифференцирование сложной функции): Пусть  $F : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $G : E_2 \rightarrow E_3$  дифференцируемые по Фреше операторы. Тогда  $H = G \circ F$  также дифференцируема по Фреше, причём

$$H'(x_0) = G'(F(x_0)) \circ F'(x_0)$$

*Доказательство:* Распишем дифференцируемость  $F$  в точке  $x_0 \in E_1$ :

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \Delta F = F'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\|\Delta x\|, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1(\Delta x) = 0$$

Аналогично распишем для  $G$ :

$$G(y_0 + t) - G(y_0) = \Delta G = G'(y_0)\Delta y + \varepsilon_2(\Delta y)\|\Delta y\|, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_2(\Delta y) = 0$$

В силу непрерывности, мы можем рассмотреть  $t = F(x_0 + h) - F(x_0)$ . Тогда  $t \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . Более того, мы можем подставить первую формулу во вторую:

$$\Delta G = G'(y_0)[F'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\|\Delta x\|] + \varepsilon_2(\Delta y)\|\Delta y\|, \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Если мы покажем, что  $G'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\|\Delta x\| + \varepsilon_2(\Delta y)\|\Delta y\| = o(\|\Delta x\|)$ , то всё будет доказано.

Для первого слагаемого утверждаем, что оператор  $G'(y_0)$  линеен и даже непрерывен, а значит

$$\varepsilon_1(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow G'(y_0)[\varepsilon_1(\Delta x)] \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

Для второго – распишем  $\|\Delta y\|$ :

$$\|\Delta y\| = \|F'(x_0)[\Delta x] + \varepsilon_1(\Delta x)\|\Delta x\|\| \leq (\|F'(x_0)\| + \|\varepsilon_1(\Delta x)\|)\|\Delta x\|$$

Получили, что  $\|\Delta y\| = O(\|\Delta x\|)$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ . А так как  $\varepsilon_2(\Delta y) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ , то получили произведение бесконечно малой на ограниченную и всё доказали.  $\square$

**Определение 7.1.4:** Дифференциалом по Гато функции  $F$  в точке  $x_0 \in D$  по приращению  $h$  называется следующее значение:

$$DF(x_0, h) := \frac{d}{dt} F(x_0 + th)|_{t=0}$$

**Определение 7.1.5:** Если для дифференциала по Гато функции  $F$  в точке  $x_0$  существует оператор  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  такой, что

$$DF(x_0, h) = Ah$$

то он называется **производной по Гато**.

**Теорема 7.1.2** (о среднем): Пусть  $D \subseteq E_1$  – выпуклое открытое множество,  $F$  – дифференцируема по Фреше на  $D$ . Тогда верно неравенство:

$$\forall x_0, x_1 \in D : \|F(x_1) - F(x_0)\| \leq \sup_{y \in s(x_0, x_1)} \|F'(y)\| \|x_1 - x_0\|$$

где  $s(x_0, x_1)$  – интервал от  $x_0$  до  $x_1$ .

*Доказательство:* Вся идея в том, чтобы построить сквозное отображение

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

и применить к нему теорему Лагранжа.

Итак,  $x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$ , а  $f \in E_2^*$  – произвольный функционал. Определим  $\varphi$  следующим образом:

$$\varphi(t) = (f \circ F \circ x)(t)$$

Каждая часть композиции является дифференцируемой по Фреше функцией. Стало быть, и их комбинация дифференцируема:

$$\varphi'(t) = f'(F(x(t))) \circ F'(x(t)) \circ x'(t) = f[F'(x(t))[x'(t)]] = f[F'(x(t))[x_1 - x_0]]$$

Теперь применим теорему Лагранжа для всего отрезка  $[0, 1]$ :

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi'(\xi)|(1 - 0)$$

Разберёмся с левой частью. Она переписывается следующим образом:

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = |f[F(x_1)] - f[F(x_0)]| =$$

$$|f[F(x_1) - F(x_0)]| \leq \|f\| \|F(x_1) - F(x_0)\|$$

В этот момент нужно вспомнить теорему Хана-Банаха. Одним из её следствий было то, что для произвольного ненулевого элемента можно подобрать функционал с единичной нормой, который на этом элементе принимает значение – норму этого элемента.

Воспользуемся этим следствием, чтобы найти  $f$  по точке  $F(x_1) - F(x_0)$ .

Тогда неравенство выше превращается в равенство:

$$\exists f \in E_2^* : |\varphi(1) - \varphi(0)| = |f[F(x_1) - F(x_0)]| = \|F(x_1) - F(x_0)\|$$

Итак, соберём всё вместе:

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = \|F(x_1) - F(x_0)\| = |f(F'(x(\xi)))[x_1 - x_0]| \leq$$

$$\|f\| \|F'(x(\xi))\| \|x_1 - x_0\| \leq \sup_{y \in s(x_0, x_1)} \|F'(y)\| \|x_1 - x_0\|$$

□

## 8. Производная Фурье и свёртка в пространствах $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$

### 8.1. Определения и основные свойства. Формула умножения. Преобразование Фурье свёртки.

**Определение 8.1.1:** Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R})$ . Тогда преобразованием Фурье функции  $f$  называется функция, заданная следующим образом:

$$\hat{f}(y) = F[f](y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} d\mu(x)$$



**Утверждение 8.1.1:** Преобразование Фурье отображает функции из  $L_1(\mathbb{R})$  в  $B(\mathbb{R})$  – множество ограниченных функций.

*Доказательство:*

$$|F[f](y)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot 1 \, d\mu(x) = \|f\|_{L_1} \Rightarrow \|F[f]\|_{L_\infty} \leq \|f\|_{L_1}$$

□

**Утверждение 8.1.2:** Преобразование Фурье отображает функции из  $L_1(\mathbb{R})$  в  $C_0(\mathbb{R})$  – множество непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности.

*Доказательство:* Рассмотрим преобразование Фурье индикатора отрезка:

$$\widehat{\mathbb{I}_{[a,b]}}(y) = \frac{e^{-ia y} - e^{-ib y}}{iy} \in C_0(\mathbb{R})$$

А как мы знаем, любая функция из  $L_1(\mathbb{R})$  приближается ступенчатыми.

Значит преобразование Фурье любой ступенчатой функции лежит в  $C_0(\mathbb{R})$ . Более того,  $F$  – непрерывный оператор, и поэтому образы будут равномерно сходиться. □

**Утверждение 8.1.3** (Формула умножения): Пусть  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{g}(y) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y) \, d\mu(y)$$

**Замечание 8.1.1:** Для применения теоремы Фубини (о перестановке интегралов), мы должны доказать, что хотя бы один из повторных интегралов конечен.

*Доказательство:* Распишем преобразование Фурье по определению:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{g}(y) \, d\mu(y) \right| &\leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(y)g(x)e^{-ixy}| \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \\ \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(y)g(x)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) &\leq \|g\|_{L_1} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, d\mu(y) \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1} < +\infty \end{aligned}$$

□

**Определение 8.1.2:** Пусть  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ . Тогда **свёрткой функций**  $f$  и  $g$  называется функция:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)f(x - y) \, d\mu(y)$$

**Утверждение 8.1.4:** Свёртка функций  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$  тоже лежит в пространстве  $L_1(\mathbb{R})$ .

*Доказательство:* Докажем, что ограничен интеграл от модуля свёртки:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(y)g(x-y)| \, d\mu(y) \, d\mu(x) &\stackrel{\text{Фубини}}{=} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(y)g(x-y)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \, d\mu(t) \, d\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, d\mu(y) \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \, d\mu(t) = \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1} < +\infty \end{aligned}$$

□

**Утверждение 8.1.5** (Преобразование Фурье свёртки): Пусть  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ . Тогда верна формула:

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

*Доказательство:* Распишем преобразование Фурье от свёртки:

$$f * g(y) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-ixy} \, d\mu(x) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(\xi)g(x-\xi) e^{-ixy} \, d\mu(\xi) \, d\mu(x)$$

Выше мы уже доказали, что свёртка «хороших» функций лежит в  $L_1(\mathbb{R})$ , а значит мы можем применить теорему Фубини. Итак:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \int_{\mathbb{R}} g(x-\xi) e^{-ixy} \, d\mu(x) \, d\mu(\xi) \stackrel{1=e^{i\xi y} e^{-i\xi y}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-i\xi y} \int_{\mathbb{R}} g(x-\xi) e^{-i(x-\xi)y} \, d\mu(x-\xi) \, d\mu(\xi) = \hat{f}(y) \cdot \hat{g}(y) \end{aligned}$$

□

**Определение 8.1.3:** Пространством Шварца  $S \subset L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$  называется множество бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со всеми своими производными убывают на бесконечности быстрее любой степени:

$$S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} x^m f^{(n)}(x) = 0\}$$

**Утверждение 8.1.6:** Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$  и  $\forall p \in \mathbb{N} : x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ , то преобразование Фурье  $g = F[f]$  дифференцируемо бесконечное число раз на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство:* Функции пространства Шварца можно описать эквивалентным образом:

$$\forall f \in S : \exists C_{n,m} \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R} : |x^m f^{(n)}(x)| \leq C_{n,m}$$

Покажем, что из этого факта следует  $x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$  при любом  $p \in \mathbb{N}$ . Действительно, можно написать следующее:

$$\forall m \in \mathbb{N} : \exists C_{0,m+2} \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R} : |x^m f(x)| \leq \frac{C_{0,m+2}}{x^2}$$

Отсюда тривиальным образом получаем абсолютную интегрируемость. Стало быть, преобразование Фурье  $g = F[f]$  обладает всеми производными.

Чтобы доказать, что они тоже являются функциями из пространства Шварца, воспользуемся следующим равенством:

$$(iy)^q g^{(m)}(y) = (-i)^q F[(x^m f(x))^{(q)}](y)$$

Из непрерывности преобразования Фурье, требуемое установлено.  $\square$

**Утверждение 8.1.7:** Преобразование Фурье на  $S$  обладает следующими свойствами:

1.  $F : S \rightarrow S$  – биекция
2.  $F : S \rightarrow S$  – изометрия
3.  $F^4 = I$  (Более того,  $F^2[f](x) = f(-x)$ )

*Доказательство:*

1. Достаточно показать, что для любой  $g \in S$  найдётся прообраз по преобразованию Фурье. Посмотрим на образ:

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-iyx} d\mu(y)$$

Положим  $f(x) = f^*(-x)$ . Из уже доказанного,  $f^* \in S$ , а значит и  $f \in S$ . Осталось произвести замену переменной:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f^*(x) e^{ixy} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} d\mu(x) = F[f](y)$$

2. Распишем скалярное произведение с использованием формулы обращения (без доказательства):

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y) e^{ixy} d\mu(y)} d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x) \overline{\hat{g}(y)} e^{-ixy} d\mu(x) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} d\mu(x) d\mu(y) = (\hat{f}, \hat{g}) \end{aligned}$$

3. Заметим, что

$$F[f](y) = F^{-1}[f](-y)$$

Так как преобразование Фурье биективно, можно применить его к полученному равенству и получить требуемое.  $\square$

**Замечание 8.1.2:** Замыкание  $S$  – это пространство  $L_2(\mathbb{R})$ .

**Утверждение 8.1.8:** Преобразование Фурье продолжается на  $L_2(\mathbb{R})$ . Более того,  $F[L_2(\mathbb{R})] \subseteq L_2(\mathbb{R})$

*Доказательство:* Как известно из предыдущего семестра, линейный ограниченный оператор, определённый на линейном многообразии, продолжается на его замыкание с сохранением нормы. Именно это тут и происходит.  $\square$

## 8.2. Операторы Гильберта-Шмидта

**Определение 8.2.1:** Оператором Гильберта-Шмидта называется частный случай оператора Фредгольма в  $L_2[a, b]$ :

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x, t)f(t) d\mu(t), \quad K \in L_2([a, b]^2)$$

**Утверждение 8.2.1:** Оператор Гильберта-Шмидта отображает в  $L_2[a, b]$

*Доказательство:* Раз  $K \in L_2([a, b]^2)$ , то как функция по одному из своих аргументов, она тоже будет из  $L_2[a, b]$ :

$$|(Af)(x)|^2 = \left| \int_a^b K(x, t)f(t) d\mu(t) \right|^2 = |(K(x, \cdot), f(\cdot))|^2 \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \|f\|_{L_2}^2 \|K(x, \cdot)\|_{L_2}^2 < \infty$$

□

**Теорема 8.2.1:** Оператор Гильберта-Шмидта является компактным оператором на  $L_2[a, b]$ .

*Доказательство:*  $L_2[a, b]$  – сепарабельное гильбертово пространство, поэтому в нём есть ортонормированный базис  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ .

Идея состоит в том, чтобы найти последовательность компактных операторов  $\{A_N\}_{N=1}^\infty$ , которые сходятся по норме к  $A$ .

Итак, можно разложить ядро  $K$  по вышеупомянутому базису:

$$K(x, t) = \sum_{n,m=1}^\infty c_{n,m} \varphi_n(x) \varphi_m(t)$$

Возьмём за отдельные ядра – «срезки» от ряда выше:

$$K_{N(x,t)} = \sum_{n,m=1}^N c_{n,m} \varphi_n(x) \varphi_m(t)$$

Тогда, тривиальным образом,  $A_N f(x) = \int_a^b K_{N(x,t)} f(t) d\mu(t)$ , который является компактным из-за конечномерности образа.

Осталось вспомнить, что норма оператора Фредгольма оценивается сверху 2-нормой ядра, а значит:

$$\|A - A_n\| \leq \|K - K_n\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

□

**Определение 8.2.2:** Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  – его базис. Классом операторов Гильберта-Шмидта называется следующее множество операторов  $A \in \{L_n\}_{n=1}^\infty(H)$  таких, что

$$\sum_{n=1}^\infty \|Ae_n\|^2 < +\infty$$