Содержание

1. Слабая сходимость в банаховом пространстве 2
1.1. Изометричность вложения E в E^{**}. Критерий слабой сходимости последовательности. 2
1.2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества. 3
1.3. Замкнутый шар в Гильбертовом пространстве секвенциально компактен (теорема Банаха). 4

Функциональный анализ 2.0.

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

1. Слабая сходимость в банаховом пространстве

1.1. Изометричность вложения E в E^{**}. Критерий слабой сходимости последовательности.

Теорема 1.1.1 (Хана Банаха, напоминание): Пусть E – ЛНП. $M \subset E$ – линейное многообразие, f – линейный ограниченный функционал на M. Тогда $\exists \tilde{f} \in E^*$:
1. $\tilde{f}|_M = f$
2. $\|\tilde{f}\| = \|f\|$

Следствие 1.1.1.1:

$$\forall x \in E : \|x\| = \sup_{f \in E, \|f\|_{E^*}=1} |f(x)|$$

Теорема 1.1.2 (Об изометрии): E изометрично E^{**}, через отображение $\pi : E \to E^{**}$, где

$$\pi x = F_x \in E^{**}; \quad F_x(f) = f(x)$$

Доказательство: Нужно доказать, что отображение π не меняет норму.

В силу приведённого выше следствия из теоремы Хана-Банаха:

$$\|F_x\| = \sup_{\|f\|=1} |F_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|$$

$\square$

Определение 1.1.1: Пусть E – нормированное пространство. Говорим, что последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **слабо сходится** к x:

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall f \in E^* : f(x_n) \to f(x)$$

Теорема 1.1.3 (Критерий поточечной сходимости операторов. Напоминание из прошлого семестра):

Пусть E_1 – банахово, E_2 – ЛНП. Причём $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2), A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда

$$A_n \overset{\text{поточечно}}{\to} A \Leftrightarrow \begin{cases} \exists M\colon \forall n\colon \|A_n\| \le M \\ \exists S\colon [S] = E_1\colon \forall s \in S\colon A_n s \to As \end{cases}$$

Теорема 1.1.4 (Критерий слабой сходимости): Пусть E – ЛНП. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$:

$$x_n \overset{w}{\to} x \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{\|x\|_n\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена} \\ \exists S\colon [S]{=}E\colon \forall f{\in}S\colon f(x_n){\to}f(x) \end{cases}$$

Доказательство: Перейдём к рассмотрению операторов $F_{x_n}, F_x \in E^{**}$. Тогда слабая сходимость $x_n \overset{w}{\to} x$ по определению является поточечной сходимостью $F_{x_n}(f) \to F_x(f)$.

Из условия:

- $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$
- Пространство E^* всегда полно
- Нормы $\left\|F_{x_n}\right\| = \|x_n\|$ ограничены
- $\exists S :\ [S] = E^* :\ \forall f \in S :\ F_{x_n} f \to F_x f$

Эти условия позволяют нам применить упомянутый выше критерий поточечной сходимости операторов из предыдущего семестра. А поточечная сходимость оператором во всём пространстве соответствует $x_n \overset{w}{\to} x$. □

Замечание 1.1.1: В случае рефлексивного банахова пространства E условие для слабой сходимости множно ослабить. Достаточно потребовать не сходимости $f(x_n) \to f(x)$, а существования предела $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (тем самым, нам не нужно знать конкретный x).

1.2. Слабая сходимость и ограниченные операторы. Слабо ограниченные множества.

Теорема 1.2.1 (Слабая сходимость и ограниченные операторы):

Пусть E_1, E_2 – ЛНП, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E_1, x \in E_1$, причём $x_n \overset{w}{\to} x$, а также $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Тогда есть слабая сходимость образов:

$$Ax_n \overset{w}{\to} Ax$$

Доказательство: По определению слабой сходимости, выполняется

$$\forall f \in E_1^* :\ f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$$

В частности, можно рассмотреть функционал $f = g \circ A$ для любого $g \in E_2^*$. Тогда

$$\forall g \in E_2^* :\ g(Ax_n) \underset{n\to\infty}{\to} g(Ax)$$

Это утверждение в точности совпадает с определением слабой сходимости $Ax_n \overset{w}{\to} Ax$. □

Определение 1.2.1: Множество $S \subseteq E$ называется **слабо ограниченным**, если

$$\forall f \in E^* : \ f(S) \text{ - ограниченное множество в } \mathbb{K}$$

Теорема 1.2.2 (Хана): Пусть $S \subseteq E$ – слабо ограниченное множество. Тогда S ограничено.

Доказательство: Предположим противное, то есть S неограничено. Тогда

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ \|x_n\| \geq n^2$$

Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{x_n}{n}$. В силу слабой ограниченности, мы можем сделать следующую оценку на образ $f(y_n), f \in E^*$ (где K_f – константа, ограничивающая образ $f(S)$):

$$\forall f \in E^* : \ |f(y_n)| = \frac{|f(x_n)|}{n} \leq \frac{K_f}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Стало быть, $y_n \overset{w}{\to} 0$. В силу критерия слабой сходимости, $\|y_n\| \leq M$ – есть ограниченность норм. Отсюда

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ M \geq \|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n$$

Противоречие. □

1.3. Замкнутый шар в Гильбертовом пространстве секвенциально компактен (теорема Банаха).

Определение 1.3.1: Множество $S \subseteq E$ называется **слабо секвенциально компактным** (или секвенциально слабо компактным), если из любой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S : \ \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} : \ \exists x \in S : \ x_{n_k} \overset{w}{\to}_{k\to\infty} x$$

Теорема 1.3.1 (Банаха): Пусть H – гильбертово пространство. Тогда $\overline{B}(0, R)$ – слабо секвенциально компактное множество.

Доказательство:

1. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{B}(0, R)$. Хотим показать, что в ней выделяется слабо сходящаяся подпоследовательность $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.
2. Рассмотрим $L = \left[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right]$. В силу гильбертовости пространства H, мы можем воспользоваться теоремой о проекции. Тогда $H = L \oplus L^{\perp}$.
3. Выделим такую подпоследовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что есть сходимость для любого скалярного произведения с x_m:

   $$\forall m \in \mathbb{N} : \ \exists \lim_{k\to\infty}(x_m, y_k)$$

   Тогда, в силу критерия слабой сходимости (смотреть замечание после него), y_k будет слабо сходящейся последовательностью в L.

4. Заметим, что из имеющейся сходимости следует слабая сходимость и во всём пространстве H:
$$H = L \oplus L^{\perp} \Rightarrow \forall h = l + l^{\perp} : \ (y_k, h) = (y_k, l) + (y_k, l^{\perp}) = (y_k, l)$$
А (y_k, l) сходится в силу результата предыдущего пункта.

Единственная вещь, требующая пояснения – пункт 3, выделение слабо сходящейся последовательности. Воспользуемся диагональным методом Кантора:

1. Зафиксируем x_m. Тогда $(x_m, x_n) \leq R^2$ и, получается, $\{(x_m, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной последовательностью чисел. По теореме Больцано-Вейерштрасса, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}.
2. Итерируемся по $m \in \mathbb{N}$ (с началом $m = 1$ и последовательностью x_n) и выделяем новую подпоследовательность из той, что была получена на предыдущем шаге. Обозначаем их как $x_{m,n}$
3. Получили искомую последовательность $y_k = x_{k,k}$.

$\square$