Содержание

ИСП Численный анализ

1. О наилучшем приближении

Определение 1.1 (Наилучшее приближение)

Пусть B – нормированное пространство, фиксируем некоторое непустое подмножество M. Пусть $\|x\|$ обозначает норму элемента x в нормированном пространстве B.

Число

$$\varepsilon(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

называется **наилучшим приближением** элемента $x \in B$ на множестве M.

Элемент $y_* \in M$ называется **наименее уклоняющимся** от x, или **элементом наилучшего приближения** на множестве M, если

$$\|x - y_*\| = \varepsilon(x, M)$$

♣

Определение 1.2. Наилучшее приближение

Предложение 1.2 (Свойства наименьшего уклонения)

1. Для любого $M \subset B$ функция $\varepsilon(x, M)$ равномерно непрерывна по x.
2. Если $M \subset B$ – подпространство, то
   - $\varepsilon(\alpha x, M) = |\alpha|\varepsilon(x, M)$ для любых $x \in B$ и $\alpha \in \mathbb{R}$
   - $\varepsilon(x_1 + x_2, M) \leq \varepsilon(x_1, M) + \varepsilon(x_2, M)$ для любых $x_1, x_2 \in B$
   - $\varepsilon(x, M) \leq \|x\|$ для любого $x \in B$
3. Пусть $M \subset B$ – конечномерное линейное многообразие. Тогда отображение $\pi : P_M \to M$ непрерывно

♠

Предложение 1.3. Свойства наименьшего уклонения

Доказательство. Пункт 2 очевидно следует из свойств нормы.

Для пункта 1 докажем неравенство

$$|\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M)| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Для произвольного $y \in M$ имеем

$$\varepsilon(x_1, M) \leq \|x_1 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\| \Rightarrow \varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \|x_2 - y\|$$

Ввиду произвольности $y \in M$ получим

$$\varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon(x_2, M)$$

Поэтому, выполняется неравенство

$$\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M) \leq \|x_1 - x_2\|$$

Аналогично доказывается неравенство со знаком - и получили, что хотели.

Для пункта 3 рассмотрим сходящуюся в P_M последовательность x_n и пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Докажем сначала, что последовательность $\pi(x_n)$ ограничена

$$\|\pi(x_n)\| = \|\pi(x_n) - x_n + x_n\| \leq$$
$$\|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\| = \varepsilon(x_n, M) + \|x_n\| = \varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M) + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \leq$$
$$|\varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M)| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \underset{\text{п.1}}{\leq}$$
$$|x_n - x_0| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\|$$

Поскольку последовательность x_n сходится, все слагаемые последней суммы ограничены, следовательно, последовательность $\pi(x_n)$ ограничена.

Теперь необходимо доказать, что последовательность $\pi(x_n)$ сходится к $\pi(x_0)$. Пусть это не так. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность x_{n_k}, для которых выполняется неравенство

$$\left|\pi\left(x_{n_k}\right) - \pi(x_0)\right| > \varepsilon$$

Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность x_{n_k} совпадает со всей последовательностью x_n.

Поскольку последовательность $\pi(x_n)$ ограничена, а подпространство M конечномерно, из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Опять БОО будем считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\pi(x_n)$ и $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n) = y_0$. Тогда переходя к пределам в неравенстве из отрицания сходимости:

$$\|\pi(x_n) - \pi(x_0)\| > \varepsilon \Rightarrow \|y_0 - \pi(x_n)\| \geq \varepsilon > 0$$

Согласно определению проекции π выполнены равенства

$$\|\pi(x_n) - x_n\| = \varepsilon(x_n, M)$$

Переходя к пределу в равенстве ввиду непрерывности функции ε

$$\|y_0 - x_0\| = \varepsilon(x_0, M)$$

Следовательно, y_0 – наименее уклоняющийся элемент пространства $M \Rightarrow y_0 = \pi(x_0)$.

Противоречие! $\square$

2. О чебышевских пространствах

Определение 2.1 (Чебышевское пространство)

Пусть $C[D]$ – пространство вещественных непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$, состоящем из бесконечного числа точек, с нормой максимума модуля

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

Особо выделим два случая:

- $D = [a, b]$ при $m = 1$
- $D = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ при $m = 2$

Тогда подпространство $L \subset C[D]$ называется **чебышевским**, если любая ненулевая функция $f \in L$ имеет не более $n - 1$ корня на рассматриваемом множестве, где $n := \dim L$.

Определение 2.2. Чебышевское пространство

Определение 2.2

Элементы чебышевского подпространства L в пространстве функций будем называть **чебышевскими L-полиномами** или просто **чебышевскими полиномами**.

Пусть $f_1, \dots, f_n \in C[D]$ и $x_1, \dots, x_n \in D$. Тогда введём обозначение

$$\Delta_f(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

Определение 2.3.

Предложение 2.3

Пусть $L \subset C[D]$ – чебышевское подпространство и $\dim L = n$. Тогда

1. Элементы $e_1, \dots, e_n \in L$ линейно независимы тогда и только тогда, когда
$$\Delta_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$
Для любых попарно различных точек $x_1, \dots, x_n \in D$
2. Для любых попарно различных точек $x_1, \dots, x_n \in D$ и любых n чисел $c_1, \dots, c_n$ существует и притом единственный интерполяционный чебышевский многочлен $p \in L$, для которого $p(x_i) = c_i$ при $1 \leq i \leq n$
3. Для любых $n - 1$ попарно различных точек, пространство чебышевских многочленов, обращающихся в этих точках в нуль, имеет размерность 1.

Предложение 2.4.

Доказательство. 1 пункт.

Если $e_1, .., e_n \in L$ линейно зависимы, то найдутся такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) = 0$$

Тогда для любой последовательности точек $x_1, ..., x_n \in D$ линейная однородная система уравнений $Ay = 0$, где $A = \left\| e_j(x_i) \right\|_{1 \le i,j < +n}$ имеет ненулевое решение $y = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T$.

Следовательно, определитель системы равен нулю, но

$$\det A = \Delta_e(x_1, ..., x_n) \Rightarrow \forall x_1, ..., x_n : \Delta_e(x_1, ..., x_n) \equiv 0$$

Обратно, пусть $e_1, ..., e_n \in L$ и существуют n различных точек $x_1, ..., x_n \in D$, для которых выполнено равенство

$$\Delta_e(x_1, ..., x_n) = 0$$

Тогда $\det A = 0$ и, следовательно, столбцы матрицы A линейно зависимы. Поэтому существуют такие числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$ не все равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x_i) = 0$$

Это означает, что функция $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) = 0$ имеет n различных корней. Поскольку подпространство L чебышевское, то отсюда вытекает, что она – тождественный нуль. Следовательно, вектора $e_1, ..., e_n$ линейно зависимы.

Пункт 2.

Пусть $e_1, ..., e_n$ – базис в чебышевском пространстве L и $c_1, ..., c_n$ произвольные n чисел. Тогда, согласно уже доказанному, определитель системы линейных уравнений

$$Ay = c \quad A = \left\| e_j(x_i) \right\|_{1 \le i,j \le n}$$

не равен нулю и, следовательно, эта система имеет ненулевое решение $y^T = (y_1, ..., y_n)$. Тогда $p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k(x)$ определяет искомый интерполяционный многочлен Чебышева.

Пункт 3.

Пусть даны n различных точек $x_0, ..., x_{n-1}$. Согласно предыдущему пункту, существует единственный чебышевский многочлен $p_0(x)$, обращающийся в 0 в точках $x_1, ..., x_{n-1}$ и равный 1 в точке x_0.

Тогда, согласно тому же предыдущему пункту, для любого чебышевского многочлена $q(x)$ обращающегося в 0 в точках $x_1, ..., x_{n-1}$, выполнено равенство

$$q(x) = q(x_0) p_0(x)$$

$\square$

Лемма 2.4

Пусть $r, g \in C[D]$, $M = M(r) = \{x \in D \mid |r(x)| = \|r\|\}$.

Тогда, если

$$a := \inf_{x \in M} r(x)g(x) > 0$$

то существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < k < \delta$ всегда выполнено неравенство

$$\|r - kg\| < \|r\|$$

♡

Лемма 2.5.

Доказательство. Множество $M \subset I$ замкнуто и ограничено, поэтому компактно. Поэтому

$$\exists c > 0 : \forall x \in M : r(x)g(x) > 2c$$

Причём для каждой точки $x \in M$ имеется открытый шар радиуса $r_x > 0$, такой что для любой точки y этого шара выполняются условия

$$r(x)r(y) > 0 \quad r(y)g(y) > c \quad |r(y)| > \frac{\|r\|}{2}$$

Рассмотрим покрытие M открытыми шарами $U(x, \frac{r_x}{4})$. Поскольку M компактно, можно выделить его конечное подпокрытие

$$U\left(x_1, \frac{r_{x_1}}{4}\right), \ldots, U\left(x_n, \frac{r_{x_n}}{4}\right)$$

Дополнение в I объединения этих шаров – компактное множество N. Тогда

$$\|r\| > \max_{x \in N} |r(x)| = r_0$$

Пусть $\max_{x \in N} |g(x)| = g_0$. Тогда

$$\exists \delta_1 : \forall k, 0 < k < \delta_1 : 0 < r_0 - kg_0 < r_0 + kg_0 < \|r\|$$

Поэтому для любого $x \in N$ и любого $0 < k < \delta_1$ всегда

$$|r(x) - kg(x)| < r_0 + kg_0 < \|r\|$$

Выберем теперь такое $\delta_2 > 0$, что для всех $x \in I$ выполняется

$$\delta_2 |g(x)| < \frac{\|r\|}{4}$$

Тогда

$$\forall k, 0 < k < \delta_2 : \forall x \in \cup_{i=1}^n U\left(x_i, r_{x_i}\right) : |r(x) - kg(x)| < \|r\|$$

Пусть $N_1 = \cup_{i=1}^n B\left(x_i, \frac{r_{x_i}}{2}\right)$. Тогда N_1 компакт и для любого $0 < k < \delta_2$ и $x \in N_1$ выполняется неравенство $\max_{x \in N_1} |r(x) - kg(x)| = a_k < \|r\|$.

Поскольку $I = N \cup N_1$, величина $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ удовлетворяет условиями леммы. □

Лемма 2.5

Пусть $r \in C[I]$ ненулевая функция,

$$M = M(r) = \{x \in I \mid |r(x)| = \|r\|\}$$

Тогда M представимо в виде объединения $M = \cup_{k=1}^{m} M_k$ где M_k – замкнутые непустые попарно непересекающиеся множества, причём

- $M_k < M_{k+1}, 1 \leq k \leq m$
- $\forall x \in M_k : \forall y \in M_{k+1} : \operatorname{sign}(r(x)) = -\operatorname{sign}(r(y))$

Лемма 2.6.

Доказательство. Представим $M = M^+ \cup M^-$, где

$$M^+ = \{x \in M \mid r(x) > 0\} \quad M^- = \{x \in M \mid r(x) < 0\}$$

Пусть $x \in M$, положим

$$M_x^+ = \{y \in M \mid r(y) > 0, \forall z \in (x, y) \cap M : r(z) > 0\}$$
$$M_x^- = \{y \in M \mid r(y) < 0, \forall z \in (x, y) \cap M : r(z) < 0\}$$

Возмжно, что при некоторых $x_0 \neq x_1$ выполняется $M_{x_0}^+ = M_{x_1}^+$. Выберем по одному экземпляру таких множеств.

Пусть это множества M_a^+ при $a \in A$ и M_b^- при $b \in B$. Тогда

$$M^+ = \cup_{a \in A} M_a^+ \quad M^- = \cup_{b \in B} M_b^-$$

Множества A и B конечны, поскольку в противном случае имеется точка $x_0 \in I$ в любой окрестности которой бесконечно много элементов из A или B. БОО пусть из A. В этом случае $M_{x_0}^+$ пересекается с M_a^+ для бесконечного числа элементов $a \in A$.

Тогда, для некоторого $a \neq x_0$ выполняется $M_{x_0}^+ = M_a^+$. Что противоречит уникальности каждого взятого множества. Конечное число таких множеств доказано!

Осталось построить чередующиеся множества. Найдём $a' : a' \neq a$, причём $(a, a') \cap A = \emptyset$. Тогда множество $(a, a') \cap B$ состоит из одного элемента. Расположим теперь элементы множеств A и B в порядке чередования по этому алгоритму. $\square$

3. О Чебышеве

Теорема 3.1 (Чебышева)

Пусть $L \subset C[I]$ – чебышевское подпространство, $n = \dim L \geq 1$ и $f \in C[I]$ – произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $n+1$ различные точки $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\forall i = 1..n+1 : |r(x_i)| = \|r\|$
- $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \ldots = (-1)^n r(x_{n+1})$

Такая разность r называется **чебышевским альтернансом**

♡

Теорема 3.2. Чебышева

Доказательство. Необходимость.

Пусть $f \in C[I]$ и $p \in L$ наименее уклоняется от f. Рассмотрим разность $r = f - p$. При $r = 0$ утверждение теоремы очевидно. Если $r \neq 0$, рассмотрим

$$M = M(r) = \{x \in I \mid |r(x)| = \|r\|\}$$

Тогда множество M представимо в виде объединения $M = \cup_{k=1}^{m} M_k$ непустых замкнутых непересекающихся множеств, удовлетворяющим условиям вспомогательной леммы.

Если $m > n$, то r удовлетворяет требованиям теоремы. Иначе рассмотрим $m \leq n$. Поскольку все множества M_k компактны, существует последовательность точек

$$M_1 < y_1 < M_2 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < M_m$$

Рассмотрим многочлен $h(x) = \sigma(y_1 - x)(y_2 - x)\ldots(y_{m-1} - x)$ степени $m-1$, где $\sigma = \mathrm{sign}(r(M_1))$. Тогда функции r, h удовлетворяют условию первой вспомогательной леммы, поэтому при некотором $\delta > 0$ выполнено неравенство $\|r - \delta h\| < \|r\|$. Следовательно, многочлен $p + \delta h \in L$ даст лучшее приближение, а не p, противоречие.

Достаточность.

Пусть $r = f - p$ – чебышевский альтенанс порядка $n+1$, а наилучшим приближением является многочлен $q(x)$. Тогда

$$|f(x_k) - q(x_k)| < |f(x_k) - p(x_k)| = |r(x_k)| = \|r\|$$

Поэтому

$$|q(x_k) - p(x_k)| = |(f(x_k) - p(x_k)) - (f(x_k) - q(x_k))| \geq$$
$$||f(x_k) - p(x_k)| - |f(x_k) - q(x_k)|| = |f(x_k) - p(x_k)| - |f(x_k) - q(x_k)| > 0$$

Причём из этих неравенств будет следовать, что разность $|f(x_k) - p(x_k)|$ «зажимает» разность $|f(x_k) - q(x_k)|$ при смене знака в этих точках и не остаётся выбора, кроме как тоже сменить знак. Тогда

$$\exists y_1, ..., y_n : x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < y_n < x_{n+1}$$

в которых $q(y_k) - p(y_k) = 0$, а так как $q - p \in L \Rightarrow q - p \equiv 0$, то есть многочлен p действительно даёт наилучшее приближение. $\square$

4. О ядрах

Определение 4.1 (Ядро)

Положительным ядро называется последовательность 2π-периодических функций $K_n(x)$, удовлетворяющая следующим свойствам:
1. $K_n(x) \geq 0$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ для всех $0 < \delta < \pi$

Если выполняются лишь свойства 2 и 3, последовательность K_n называется **ядром**. ♣

Определение 4.2. Ядро

Лемма 4.2 (Об аппроксимации положительного ядра)

Пусть $K_n(x)$ – положительное ядро.

Тогда для любой 2π-периодической функции $f(x)$ последовательность функций $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)K_n(t)\,\mathrm{d}t$ равномерно сходится к функции $f(x)$. ♡

Лемма 4.3. Об аппроксимации положительного ядра

Доказательство. Ввиду свойств ядра имеем:

$$f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x+t))K_n(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)(f(x) - f(x+t))K_n(t)\,\mathrm{d}t$$

В силу непрерывности и периодичности функции $f(x)$, эта функция равномерно непрерывна и ограничена на всей числовой прямой. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2, |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\exists M > 0 : \forall x : |f(x)| < M$$

Фиксируем такое $\delta < \pi$. Тогда ввиду неорицательности $K_n(t)$ имеем

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x) - f(x+t))\right|K_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\delta}^{\delta}|f(x) - f(x+t)|K_n(t)\,\mathrm{d}t <$$
$$\int_{-\delta}^{\delta} \tfrac{\varepsilon}{2}K_n(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t$$

А в силу ограниченности функции $|f(x)| < M$ выполнено неравенство

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)|f(x) - f(x+t)|K_n(t)\,\mathrm{d}t \leq 2M\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)K_n(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$2M\left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Получается,

$$\left|f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t + 2M\left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

□

Лемма 4.3

Последовательность функций

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx = \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\pi\sin(\frac{x}{2})}$$

определяет ядро. Это ядро называется **ядром Дирихле**.

Лемма 4.4.

Доказательство. По определению функции D_n:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,\mathrm{d}t = 1$$

Далее, пусть $0 < \delta < \pi$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t$$

То есть, достаточно проверять, что $\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t$ бесконечно малая величина.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0, |x|<\delta \\ 1, \delta\leq|x|\leq\delta \end{cases}$$

Положим $h(x) = \frac{g(x)}{\sin(\frac{x}{2})} \in L_2^*[-\pi,\pi]$. Тогда

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin(n-\tfrac{1}{2})t\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos(\tfrac{t}{2})\sin(nt)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin(\tfrac{t}{2})\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Согласно неравенству Бесселя, последние два интеграла стремятся к нулю. □

Лемма 4.4

Последовательность функций

$$\Phi_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k(x)}{n}$$

Определяет положительное ядро. Это ядро называется **ядром Фейера**.

Лемма 4.5.

Доказательство. По определению функции $\Phi_n(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n} D_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$$

Неравенство $\Phi_n(t) \geq 0$ следует из соотношения

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi n}\frac{1-\cos(nt)}{\sin^2(\frac{t}{2})}$$

Фиксируем $0 < \delta \leq \pi$. Функция

$$\frac{1-\cos nt}{\sin^2(\frac{t}{2\pi})}$$

ограничена на $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Следовательно, на этом множестве $\Phi_n(t) \twoheadrightarrow 0$. Поэтому требуемая бесконечная малость выполняется. □

Лемма 4.5

Последовательность функций

$$J_n(x) = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)}\left(\frac{\sin(n\frac{x}{2})}{n\sin(\frac{x}{2})}\right)^4 = \frac{6\pi n}{2n^2+1}\Phi_n^2(x)$$

определяет положительное ядро. Это ядро называется **ядром Джекснова**.

Лемма 4.6.

Определение 4.6

Пусть $M > 0$ и r натуральное. Классом $W^r(M)$ называется множество $r-1$ дифференцируемых 2π-периодических функций, для который $f^{(r-1)}(x)$ – M-липшецева.

Определение 4.7.

Теорема 4.7 (Джексона)

Существует такая константа C, что для любых $r, n, M > 0$ и $f \in W^r(M)$ выполняется неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C^r\frac{M}{n^r}$$

Теорема 4.8. Джексона

Доказательство. Заметим, что $J_n(x)$ тригонометрический многочлен степени $2(n-1)$. Следовательно, $\forall f \in C[S^1]$

$$T_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t-x)f(t)\,\mathrm{d}t$$

тригонометрический многочлен степени $\leq 2(n-1)$.

Пусть $r = 1$ и $f \in W^1(M)$, для $m \geq 1$ рассмотрим тригонометрический многочлен $T(x)$. Учитывая чётность ядра Джексона и условие Липшица для функции f, получаем

$$|f(x) - T(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} J_m(t)(f(x) - f(x+t))\,\mathrm{d}t\right| \leq M\int_{-\pi}^{\pi}|t|J_m(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$2M\int_0^{\pi} tJ_m(t)\,\mathrm{d}t$$

Ввиду неравенства $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$ при $0 \leq t \leq \pi$ получаем

$$\int_0^\pi tJ_m(t)\,\mathrm{d}t \le \tfrac{3\pi^3}{2m(2m^2+1)}\int_0^\pi \tfrac{\sin^4(m\frac{t}{2})}{t^3}\,\mathrm{d}t =$$

$$\tfrac{3\pi^3 m}{8(2m^2+1)}\int_0^{m\frac{\pi}{2}} \tfrac{\sin^4(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t < \tfrac{C}{4m}$$

Следовательно, $\|f-t\| < \frac{CM}{2m}$.

Заметим, что $J_n(x) \in \mathcal{T}_{4n-1}$, когда нам нужно использовать многочлены, степени не более $2n-1$. Определим стратегию уменьшения степени:

Если итоговый $n = 2m$, то с помощью ядра J_m построим рассмотренный выше тригонометрический многочлен, иначе $n = 2m+1$, для которого также построим требуемый J_m. Таким образом,

$$\|f-T\| < \tfrac{CM}{2m} < \tfrac{CM}{n}$$

Пусть теперь теорема доказана для произвольного r и более того, если интеграл по периоду равен нулю, то и полученная апроксимация удовлетворяет этому свойству.

Докажем, что тогда то же выполнено и для $r+1$. Пусть $f \in W^{r+1}(M)$. Тогда $f' \in W^r(M)$. Причём, очевидно, интеграл по периоду от функции f' равен нулю.

Тогда, согласно индукционному предположению, существует $T(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого выполнено неравенство $\|f'-T\| < C^r mn^{-r}$ и интеграл по периоду от T равен нулю.

Тогда свободный член тригонометрического многочлена T нулевой. Поэтому существует тригонометрический многочлен U той же степени с нулевым свободный членом, для которого $U' = T$. Следовательно

$$\|(f-U)'\| = \|f'-T\| < C^r M n^{-r}$$

Поэтому $t - U \in W^1(C^r M n^{-r})$. Следовательно, существует $t \in \mathcal{T}_{2n-1}$, такой, что

$$\|(f-U)-t\| < \tfrac{C(C^r M n^{-r})}{n} = C^{r+1}\tfrac{M}{n^{r+1}}$$

Причём, если интеграл по периоду функции f равен нулю, то это же справедливо и для многочлена $U + t \in \mathcal{T}_{2n-1}$. $\square$

5. Об оптимальных константах

Определение 5.1

Набор констант C_r называется **оптимальным**, если:
- Для любых $n \geq 1, r \geq 1, f \in W^r(M), M > 0$ для констант C_r выполнено неравенство
$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C_r \frac{M}{n^r} \quad f \in W^r(M)$$
- Если $0 < c < C_r$ для некоторого $r \geq 1$, то
$$\forall n \geq 1 : \forall M > 0 : \exists f \in W^r(M) : \varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) > c\frac{M}{n^r}$$

♣

Определение 5.2.

Определение 5.2 (Функция Бернулли)

Пусть $r \geq 1$. r-й функцией Бернулли называется функция
$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \pi\frac{r}{2}\right)}{k^r}$$

♣

Определение 5.3. Функция Бернулли

Лемма 5.3 (О тригонометрической интерполяции)

1. Пусть $t_0, ..., t_{n-1} \in (0, \pi)$ – попарно различные точки и $b_0, ..., b_{n-1} \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. Тогда существует единственный чётный тригонометрический многочлен
$$T(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos(kt) \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$
для которого $T(t_j) = b_j$ при $0 \leq j \leq n-1$.
1. Пусть $\tau_1, ..., \tau_{n-1} \in (0, \pi)$ – попарно различные точки и $d_1, ..., d_{n-1} \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. Тогда существует единственный нечётный тригонометрический многочлен
$$T(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin(kt) \quad \beta_k \in \mathbb{R}$$
для которого $T(\tau_j) = d_j$ при $1 \leq j \leq n-1$.

♡

Лемма 5.4. О тригонометрической интерполяции

Определение 5.4

Определим тригонометрические многочлены $T_{n,r}(t)$.

Пусть $n \geq 1$ и $t_j = \frac{(2j+1)\pi}{2n}$ – все нули функции $\cos(nt)$ на интервале $(0, \pi)$, а $\tau_k = \frac{k\pi}{n}$ – все нули функции $\sin(nt)$ на интервале $(0, \pi)$.

Для чётного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ – тригонометрический многочлен, для которого $T_{n,r}(t_j) = B_r(t_j)$.

Для нечётного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ – тригонометрический многочлен, для которого $T_{n,r}(\tau_k) = B_r(\tau_k)$. Согласно лемме о тригонометрической интерполяции, функции $T_{n,r}$ определены однозначно.

♣

Определение 5.5.

Определение 5.5 (Класс гладких функций)

$$W_*^r(M) = \left\{ f \in C^r[S^1] \mid \left\| f^{(r)} \right\| \leq M \right\}$$

♣

Определение 5.6. Класс гладких функций

Лемма 5.6 (Формула обращения)

Пусть $f \in W_*^r(M)$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_r(t-\tau) f^{(r)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

♡

Лемма 5.7. Формула обращения

Доказательство. Достаточно доказать для $r = 1$. имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_1(t-\tau) f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{t} B_1(t-\tau) f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi} \int_t^{2\pi} B_1(t-\tau+2\pi) f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{t} \frac{\pi-t+\tau}{2} f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi} \int_t^{2\pi} \frac{\tau-t-\pi}{2} f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tau-t}{2} f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2} \int_0^{t} f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \frac{1}{2} \int_t^{2\pi} f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau f'(\tau)\, \mathrm{d}\tau + f(t) \underset{\text{По частям}}{=} f(t)$$

□

Лемма 5.7 (О нулях тригонометрической интерполяции)

Разность $\Delta(t) = \Delta_{n,r}(t) = B_r(t) - T_{n,r}(t)$ обращается в нуль на интервале $(0, \pi)$ при $n \geq 1$ и чётном r только в точках t_j, а в нечётном r только в точках τ_k.

При $n = 1$ и нечётном r корней на $(0, \pi)$ нет. Все корни являются простыми.

Лемма 5.8. О нулях тригонометрической интерполяции

Лемма 5.8

Пусть $n \geq 1$ – натуральное и $2\frac{\pi}{n}$-периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

Тогда для любого $1 \leq k \leq n-1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0$$

Лемма 5.9.

Лемма 5.9

Коэффициенты Фурье для функции Бернулли $B_r(t)$ выражаются формулой

$$\mu_{r,n} + i\nu_{r,n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_r(t) d^{int}\,\mathrm{d}t = \frac{i^r}{n^r} \quad n > 0$$

и

$$\mu_{r,0} + i\nu_{r,0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Лемма 5.10.

Теорема 5.10 (Фавара)

Пусть

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}} \quad r \geq 1$$

Тогда для любых $f \in W^r(M)$ и $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) \leq K_r\frac{M}{n^r} \quad r \geq 1 \quad n \geq 1$$

Теорема 5.11. Фавара

Доказательство. Согласно Лемма 5.11 выполняется равенство

$$f(t) = \frac{a}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_r(t-\tau)f^{(r)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Пусть $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ произвольный тригонометрический многочлен степени $< n$. Тогда

$$\Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(t-\tau)f^{(r)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

также является тригонометрическим многочленом степени $< n$. Рассмотрим разность

$$f(t) - \frac{a}{2} - \Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(B_r(t-\tau) - T(t-\tau))f^{(r)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Тогда

$$\left|f(t) - \frac{a}{2} - \Lambda(T)(t)\right| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|B_r(t-\tau) - T(t-\tau)|\left|f^{(r)}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \le$$
$$\frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi}|B_r(z) - T(z)|\,\mathrm{d}z$$

Следовательно,

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) \le \frac{M}{\pi}\inf_{T\in\mathcal{T}_{2n-1}}\int_0^{2\pi}|B_r(z) - T(z)|\,\mathrm{d}z$$

Значит достаточно проверить нерпвенство

$$\inf_{T\in\mathcal{T}_{2n-1}}\int_0^{2\pi}|B_r(z) - T(z)|\,\mathrm{d}z \le \pi K_r n^{-r}$$

А для этого достаточно проверить, что, например,

$$\int_0^{2\pi}\left|B_r(z) - T_{n,r}(z)\right|\mathrm{d}z \le \pi K_r n^{-r}$$

Согласно Лемма 5.11 все корни разности $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ на интервале $(0, \pi)$ простые и совпадают с простыми корнями функции $\cos(nt)$ при чётном r и с корнями $\sin(nt)$ при нечётном r.

Поэтому знаки функций $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ и $\cos(nt)$ при чётном r и, соответственно, $\sin(nt)$ при нечётном r, либо всюду совпадают, либо всюду противоположны. Поэтому при БОО чётном r выполняется равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|B_r(z) - T_{n,r}(z)\right|\mathrm{d}z = 2\int_0^{\pi}\left|B_r(z) - T_{n,r}(z)\right|\mathrm{d}z =$$
$$2\int_0^{\pi}\left(B_r(z) - T_{n,r}(z)\right)\operatorname{sign}\Delta(z)\,\mathrm{d}z = \pm 2\int_0^{\pi}\left(B_r(z) - T_{n,r}(z)\right)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z =$$
$$2\left|\int_0^{\pi}\left(B_r(z) - T_{n,r}\right)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(B_r(z) - T_{n,r}(z)\right)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z\right| =$$
$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} B_r(z)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z\right|$$

где в последнем равенстве использована Лемма 5.11.

Абсолютно такое же равенство (но с $\operatorname{sign}\sin(nz)$) аналогично получаем для нечётного r.

Теперь воспользуемся обобщённым равенством Парсеваля в $L_2[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) = \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)$$

где α_k, β_k и a_k, b_k – коэффициенты Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$ соответственно.

Для функции Бернулли коэффициенты Фурье вычислены в Лемма 5.11. Для функции $\operatorname{sign}\cos(nt)$ и $\operatorname{sign}\sin(nt)$ соответствующие ряды Фурье определяются формулами

$$\operatorname{sign}\cos(nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1}$$

и

$$\operatorname{sign}\sin(nt) = \tfrac{4}{\pi}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{\sin(2k+1)nt}{2k+1}$$

Подставляя полученные коэффициенты в равенства Парсеваля получим при чётном $r = 2\nu$:

$$\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu}(z)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z = (-1)^{\nu}\tfrac{4}{\pi n^{2\nu}}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\nu+1}} = \tfrac{(-1)^{\nu}K_r}{n^r}$$

и нечётном $r = 2\nu + 1$

$$\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu+1}(z)\operatorname{sign}\sin(nz)\,\mathrm{d}z = (-1)^{\nu}\tfrac{4}{\pi n^{2\nu+1}}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{1}{(2k+1)^{2\nu+2}} = \tfrac{(-1)^{\nu}K_r}{n^r}$$

Следовательно,

$$\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{0}^{2\pi}\big|B_r(z) - T_{n,r}(z)\big|\,\mathrm{d}z = K_r n^{-r}$$

Что и требовалось доказать. $\square$

6. О интерполяции

Определение 6.1

Рассмотрим бесконечный компакт $D \subset \mathbb{C}$ и пространство непрерывных на нём функций $C[D]$. Пусть P_n – пространство полиномов степени меньшей n.

Фиксируем произвольные n точек $x = (x_1, ..., x_n)$, где $x_i \in D$ и набор чисел $y = (y_1, ..., y_n)$, где $y_i \in \mathbb{R}$.

Интерполяционным полиномом для этих данных называется многочлен $p_{n-1}(x, y) \in P_n$ для которого $p_{n-1}(x, y)(x_k) = y_k$.

♣

Определение 6.2.

Определение 6.2

Полиномами Лагранжа называются интерполяционные полиномы

$$I_{k,n}(x) = p_{n-1}(x, y_k)$$

дл $y_k = (\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, ..., \delta_{k,n})$, где

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Имеет место равенство

$$I_{k,n}(x)(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

При фиксации узлов интерполяции x обозначения для интерполяционного полинома обычно сокращается

$$p_{n-1}(x, y) = p_{n-1}(y) \quad I_{k,n}(x) = I_{k,n}$$

♣

Определение 6.3.

Определение 6.3

Определим операторы

$$\pi_x^{(\nu)} : C[D] \to P_n$$

формулами

$$\pi_x^{(\nu)}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot I_{k,n}^{(\nu)}$$

Заметим, что оператор $\pi_x^{(0)} =: \pi_x$ является проектором.

♣

Определение 6.4.

Определение 6.4

Числа

$$\lambda_n = \max_{x \in D} \sum_{k=1}^{n} |I_{k,n}(x)|$$

называются **константами Лебега**.

♣

Определение 6.5.

Теорема 6.5 (Неравенство Лебега)

Для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f выполняется неравенство

$$\|f - \pi_x(f)\| \leq (1 + \lambda_n)\varepsilon(f, P_n)$$

♡

Теорема 6.6. Неравенство Лебега

Доказательство. Пусть $q \in P_n$ – произвольный элемент. Тогда, поскольку π_x проектор

$$\|f - \pi_x(f)\| = \|f - q + q - \pi_x(f)\| \leq \|f - q\| + \|\pi_x(q) - \pi_x(f)\| =$$
$$\|f - q\| + \lambda_n \|f - q\| = (1 + \lambda_n)\|f - q\|$$

Пусть теперь q_δ такой полином из P_n, для которого выполняется неравенство $\|f - q_\delta\| < \varepsilon(f, P_n) + \delta$.

Тогда

$$\|f - \pi_x(f)\| \leq (1 + \lambda_n)\|f - q_\delta\| < (1 + \lambda_n)(\varepsilon(f, P_n) + \delta)$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\delta \to 0$, получим требуемое. □

7. О интерполяционном процессе

Определение 7.1

Матрицей X **интерполяционных узлов** на отрезке $I = [a, b]$ называется бесконечная треугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & & & & \\ x_{2,1} & x_{2,2} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

для которой

1. $x_{n,k} \in I$ при $1 \leq k \leq n$
2. При любом n выполняются неравенства $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$

♣

Определение 7.2.

Определение 7.2

Для $f \in C[a, b]$ матрицы интерполяции определяет последовательность интерполяционных полиномов

$$p_{n-1} = p_{n-1}(X, f) = \pi_n(x_n, f) \in P_n$$

Эта последовательность называется **интерполяционным процессом**, отвечающим данной матрице интерполяционных узлов X и данной функции f

♣

Определение 7.3.

Определение 7.3

Интерполяционный процесс $p_{n-1}(X, f)$ называется **сходящимся** для данной матрицы интерполяционных узлов X и данной функции $f \in [a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ существует предел и выполняется равенство

$$\lim_{n \to \infty} p_{n-1}(X, f)(x) = f(x) \quad x \in I$$

Интерполяционный процесс $p_{n-1}(X, f)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке I для данной матрицы интерполяционных узлов X и данной функции $f \in [a, b]$, если указанная выше сходимость является равномерной.

♣

Определение 7.4.

Теорема 7.4 (Банаха-Штейнгауза)

Пусть X – банахово пространство, Y – нормированное векторное пространство, F – семейство линейных непрерывных операторов из X в Y.

Предположим, что для любого $x \in X$ выполняется

$$\sup_{T\in F} \|T(x)\|_Y < \infty$$

Тогда

$$\sup_{T\in F, \|x\|=1} \|T(x)\|_Y = \sup_{T\in F} \|T(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$$

♡

Теорема 7.5. Банаха-Штейнгауза

Следствие 7.4.1

Если последовательность ограниченных операторов на банаховом пространстве сходится поточечно, то её поточечный предел является ограниченным оператором.

♡

Следствие 7.4.2.

Теорема 7.5 (Фабера-Бернштейна)

Для любой матрицы интерполяционных узлов X выполняются неравенства

$$\lambda_n = \lambda_n(x_n) = \|\pi_n(x_n)\| > \tfrac{1}{8}\sqrt{\pi}\ln(n) \quad n \geq 1$$

♡

Теорема 7.6. Фабера-Бернштейна

Следствие 7.5.1

Для любой матрицы интерполяционных узлов X существует функция $f \in C[a,b]$, для которой последовательность интерполяционных полиномов $p_{n-1}(X,f)$ не сходится равномерно на I к f и, более того, последовательность $\|p_{n-1}(X,f)\|_{C[I]}$ неограниченна

♡

Следствие 7.5.2.

Доказательство. Допустим, что это не так и для некоторой матрицы X при любом $f \in C[a,b]$ последовательность $p_{n-1}(X,f)$ равномерно сходится к f на I.

Следовательно, последовательность линейных непрерывных операторов $\pi_n(x_n) : C[a,b] \to P_n \subset C[a,b]$ поточечно сходится.

Тогда, поскольку $C[a,b]$ – полной нормированное пространство, по теореме Банаха-Штейнгауза, нормы операторов $\|\pi_n(x_n)\| = \lambda_n$ ограничены, что противоречит теореме Фабера-Бернштейна. □

Теорема 7.6

Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда существует матрица интерполяционных узлов X на отрезке $[a,b]$, для которой интерполяционный процесс для функции f сходится равномерно.

Теорема 7.7.

Доказательство. Если f – алгебраический полином, то подходит любая матрица X. Будем предполагать теперь, что f не является алгебраическим полиномом.

Пусть $p_{n-1} \in P_n$ – его наилучшее приближение в пространстве P_n. Согласно теореме Чебышева на отрезке $[a,b]$ разность $\Delta_n = f - p_{n-1}$ имеет альтернанс порядка $n+1$, то есть существуют точки

$$a \leq y_{1,n} < y_{2,n} < \ldots < y_{n+1,n} \leq b$$

для которых $|\Delta_n(y_{k,n})| = \|\Delta_n\|$ и знаки $\Delta_n(y_{k,n})$ чередуются. Тогда существуют нули функции Δ_n:

$$y_{1,n} < x_{1,n} < y_{2,n} < \ldots < x_{n,n} < y_{n+1,n}$$

Рассмотрим матрицу интерполяции X, соответствующую полученным нулям. По построению, выполняются равенства $p_{n-1}(x_{k,n}) = f(x_{k,n})$ при $1 \leq k \leq n$. Тогда выполняется равенство

$$p_{n-1} = p_{n-1}(x_n, f) = \pi_n(x_n, f)$$

Погрешность интерполяции равна

$$\|f - p_{n-1}\| = \|f - \pi_n(x_n, f)\| = \varepsilon(f, P_n)$$

и, следовательно, по теореме Вейерштрасса

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_{n-1}\| = 0$$

□

Определение 7.7

Чебышевской системой узлов порядка n на отрезке $I_0 = [0,1]$ называется система точек

$$x_k^* = (x_{1,n}^*, x_{2,n}^*, \ldots, x_{n,n}^*)$$

где

$$x_{k,n}^* = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad n \geq 1 \quad 1 \leq k \leq n$$

Определение 7.8.

Теорема 7.8 (Бернштейна)

Пусть $I = I_0 = [0, 1]$ и X^* – интерполяционная матрица из чебышевских узлов на отрезке I_0. Тогда

$$\lambda_n = \lambda_n(x_k^*) < 8 + \frac{4}{\pi} \ln n \quad n \geq 1$$

♡

Теорема 7.9. Бернштейна

Пример Берштейна. Пусть $I = I_0 = [-1, 1]$, $f_0(x) = |x|$.

Тогда $f_0 \in W^1(1, I_0)$, но интерполяционный процесс, отвечающий функции f_0 и матрице равноотстоящих узлов на отрезке I_0, расходится всюду на отрезке I_0, кроме концов отрезка и точки $x = 0$.

8. О сплайнах

Определение 8.1

Пусть $D \subset \mathbb{R}^s$ – замкнутое подмножество.

Конечная совокупность $D_k \subset \mathbb{R}^s, k \in \mathcal{K}$ называется **разбиением** D, если
1. $\cup_{k=1}^n D_k = D$
2. $[D_k] \cap [D_j] = \emptyset, k \neq j$
3. $[D_k] \neq \emptyset$

Где $[D]$ обозначает внутренность множества D

Определение 8.2.

Определение 8.2

Функция $I \in C[D]$ называется **сплайн-функцией** на конечном разбиении D_k, $k \in \mathcal{K}$ множества D, если эта функция полиномиальна на каждом множестве D_k.

Поскольку $[D_k] \neq \emptyset$, алгебраический многочлен на каждом множестве D_k определён однозначно.

Число $\max_{k \in \mathcal{K}} \deg I|_{D_k}$ называется **порядком сплайн-функции** I

Определение 8.3.

Определение 8.3

Далее будет исследован случай $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$.

В число узлов $x = (x_1, ..., x_n)$ всегда будут входить начало и конец отрезка. В качестве разбиения рассматриваются множества $D_k = I_k = [x_{k+1}, x_{k+2}]$, где $0 \leq k \leq n - 2$. Пусть $n \geq r \geq 2$. Определим отображение

$$I_r = I_r(x) : \mathbb{R}^n \to C[a, b]$$

Для вектора $f = (f_1, ..., f_n)$ и $x \in [a, b]$ положим

$$I_r(x)(f)(x) = \begin{cases} p_{r-1}(x^{(k)}, f^{(k)})(x), x \in I_k, 0 \leq k \leq n-r \\ p_{r-1}(x^{(n-r)}, f^{(n-r)})(x), x \in I_k, n-r < k \leq n-2 \end{cases}$$

где $x^{(k)} = (x_{k+1}, ..., x_{k+r}), f^{(k)} = (f_{k+1}, ..., f_{k+r})$ при $0 \leq k \leq n$ и $p_{r-1}(x^{(k)}, f^{(k)})$ – алгебраический интерполяционный полином степени меньше r на отрезке $J_k = [x_{k+1}, x_{k+r}]$.

Пусть функция $f \in C[a, b]$ и $a = x_1 < ... < x_n = b$. Положим $f = (f(x_1), ..., f(x_n))$. Тогда функция $I_r(x, f)$ называется **лагранжевым сплайном** или **сплайн-интерполяцией** порядка $< r$ функции f относительно узлов x.

Определение 8.4.

Теорема 8.4

Пусть $I = [a, b], 2 \le r \le n, f \in W^r(M, I), \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ – произвольный вектор, $h = \frac{b-a}{n-1}, x = (x_1, ..., x_n)$ – равноотстоящие узлы $x_k = a + (k-1)h, 1 \le k \le n$. Тогда

$$\|f - I_r(x, f)\| \le M\frac{(r-1)^r}{r!}h^r + \lambda_r \max_{1\le j\le n}|f(x_j) - \xi_j|$$

где $\lambda_r < 2^{r-1}$ – константы Лебега относительно системы узлов x.

Для $f \in W^1(M, I)$ и $n \ge 2$ справедлива оценка

$$\|f - l_2(x, f)\| \le 2Mh + \lambda_2 \max_{1\le j\le n}|f(x_j) - \xi_j|$$

Теорема 8.5.

Доказательство. Поскольку отрезки $[x_{s+1}, x_{s+2}]$ при $0 \le s \le n-2$ покрывают отрезок $[a, b]$ и каждый из них лежит в некотором отрезке $J_k = [x_{k+1}, x_{k+r}], 0 \le k \le n-r$, то из определения лагранжева сплайна и полученной ранее оценки для приближения интерполяционным многочленом $p_{r-1}(x^{(k)}, f^{(k)})$ следует, что

$$\|f - I_r(x, \xi)\|_{C[I]} = \max_{1\le s\le n-2} \|f - I_r(x, \xi)\|_{C[x_{s+1}, x_{s+2}]} \le$$
$$\max_{1\le k\le n-r} \left\|f - p_{r-1}(x^{(k)}, \xi^{(k)})\right\|_{C[J_k]} \le$$
$$\max_{1\le k\le n-r}\left[M\frac{(r-1)^r}{r!}h^r + \lambda_r \max_{k+1\le j\le k+r}|f(x_j) - \xi_j|\right] \le$$
$$M\frac{(r-1)^r}{r!}h^r + \lambda_r \max_{1\le j\le n}|f(x_j) - \xi_j|$$

Оценка для констант Лебега при равномерном распределении узлов будет получена в следующем билете.

При $r = 1$ используются кусочно линейные аппроксимации $p_1(x^{(k)}, \xi^{(k)})$ и оценка погрешности

$$|f(x) - p_1(x)| = \left|f(x) - f(x_1) - \frac{f(x_*)-f(x_1)}{x_*-x_1}(x - x_1)\right| \le$$
$$2M|x - x_1| \le 2M(b - a)$$

Для $f \in W^1(M, I)$:

$$\|f - I_2(x, \xi)\|_{C[I]} = \max_{0\le k\le n-2} \left\|f - p_1(x^{(k)}, \xi^{(k)})\right\|_{C[J_k]} \le$$
$$2Mh + \lambda_2 \max_{1\le j\le n}|f(x_j) - \xi_j|$$

□

9. О оценке константы Лебега

Примечание

Константы Лебега инвариантны для линейных преобразований узлов. Найдём константы Лебега для равномерно распределённых узлов интерполяции. Достаточно рассмотреть отрезок $[1, n]$ с узлами $x_k = k$.

Полиномы Лагранжа имеют вид

$$I_{n,k}(x) = \prod_{j \neq k}^{n} \frac{x-j}{k-j}$$

Лемма 9.1

Выполняются соотношения:
1. $\prod_{j \neq k}^{n} |k-j| = (k-1)!(n-k)!$
2. $k!(n-k)! \leq (n-1)! \quad 1 \leq k \leq n$
3. $\prod_{j=1}^{m} (j - \frac{1}{2}) \geq \frac{m!}{2}\sqrt{m} \quad m \geq 1$

Лемма 9.2.

Теорема 9.2

При $n > 1$ константы Лебега удовлетворяют неравенству

$$\frac{2^{n-3}}{n^{\frac{3}{2}}} \leq \lambda_n \leq 2^{n-1}$$

Теорема 9.3.

Доказательство. Оценим константы Лебега снизу. Имеем

$$\lambda_n \underset{\text{Равенство 1}}{=} \max_{1 \leq x \leq n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{j \neq k}^{n} |x-j| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{j \neq k}^{n} |\tfrac{3}{2} - j|$$

Согласно неравенству 3 предыдущей леммы получаем

$$\prod_{j \neq k}^{n} |\tfrac{3}{2} - j| = \frac{1}{|k-\frac{3}{2}|} \prod_{j=1}^{n} |\tfrac{3}{2} - j| = \frac{1}{2|k-\frac{3}{2}|} \prod_{j=1}^{n-1} |\tfrac{1}{2} - j| \geq \frac{(n-1)!}{4|k-\frac{3}{2}|\sqrt{n-1}} \geq \frac{(n-1)!}{4n\sqrt{n-1}}$$

Поэтому

$$\lambda_n \geq \frac{1}{4n\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{2^{n-1}}{4n\sqrt{n-1}} \geq \frac{2^{n-3}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Теперь докажем справедливость оценки сверху для констант Лебега. Представим $x \in [1, n]$ в виде $x = l + s$,где $1 \leq l \leq n$ – целое число, а $|s| \leq \frac{1}{2}$. Предположим также, что $s \neq 0$. Тогда

$$\prod_{j\neq k}^{n}|x-j| = \frac{1}{|x-k|}\prod_{j=1}^{n}|x-j| =$$
$$\frac{1}{|l-k+s|}\prod_{j=1}^{n}|l-j+s| = \frac{1}{|l-k+s|}\prod_{j=-(n-l)}^{l-1}|j+s| =$$
$$\frac{|s|}{|l-k+s|}\prod_{j=1}^{l-1}|j+s|\prod_{j=1}^{n-l}|j-s| \leq \prod_{j=1}^{l-1}|j+s|\prod_{j=1}^{n-l}|j-s|$$

При $s > 0$ всегда $l < n$, и, следовательно, выполнено неравенство

$$\prod_{j\neq k}^{n}|x-j| \leq l!(n-l)! \underset{\text{Неравенство 2}}{\leq} (n-1)!$$

При $s < 0$ всегда $l > 1$ и следовательно, выполнено неравенство

$$\prod_{j\neq k}^{n}|x-j| \leq (l-1)!(n-l+1)! \underset{\text{Неравенство 2}}{\leq} (n-1)!$$

При $s = 0$ 'nj неравенство очевидно. Следовательно

$$\lambda_n = \max_{1\leq x\leq n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!(n-k)!}\prod_{j\neq k}^{n}|x-j| \leq \sum_{k=1}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = 2^{n-1}$$

$\square$

10. О насыщении

Определение 10.1

Последовательность $\pi_n : B \to L_n$ определённая для достаточно больших n и состоящая из линейных непрерывных отображений банахова пространства B в конечномерные линейные подпространства $L_n \subset B$, называется **линейным методом приближения**.

Нормы $\|\pi_n\|$ называются **абстрактными константами Лебега**. ♣

Определение 10.2.

Определение 10.2

Пусть $(\mathcal{R}, \prec)$ – линейный порядок на множестве индексов и для каждого $r \in \mathcal{R}$ задано подмножество $W^r \subset B$, называемое классом, не содержащееся ни в каком конечномерном подпространстве B.

Обозначим через

$$\delta_n(f) = \|f - \pi_n f\| \quad \delta_n W^s(M) = \sup_{f \in W^s(M)} \delta_n(f)$$

Линейный метод приближения $\pi_n : B \to L_n$ имеет **насыщение** на классах $W^r, r \in \mathcal{R}$, если существует индекс $r_0 \in \mathcal{R}$, для которого выполнены следующие условия

1. $\lim_{n\to\infty} \delta_n W^r = 0$ при любом $r \preceq r_0$
2. $\delta_n W^s = o(\delta_n W^r)$ при $n \to \infty$ для любых $r \prec s \preceq r_0$
3. Если $r_0 \prec r$, то существуют $x \in W^r$ и $C > 0$, не зависящая от n, для которых при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\delta_n x \geq C\delta_n W^{r_0}$$

то есть $\delta_n W^{r_0} = O(\delta_n(x)), n \to \infty$

Класс W^{r_0} называется **классом насыщения** линейного метода приближения π_n, а класс последовательностей, слабо эквивалентных сходящейся к нулю последовательности $\delta_n W^{r_0}$ – порядком насыщения. ♣

Определение 10.3.

Теорема 10.3

Если π_n проектор, то имеет место абстрактное неравенство Лебега

$$\varepsilon(x, L_n) \leq \|x - \pi_n(x)\| \leq (1 + \|\pi_n\|)\varepsilon(x, L_n)$$ ♡

Теорема 10.4.

Теорема 10.4

Пусть $\delta_n^r(f) = \|f - I_r(x_n, f)\|_{C[a,b]}$
1. Если $1 \leq s \leq r$, то $\delta_n^r W^s(M) \sim M|b-a|n^{-s}, n \to \infty, n \geq r$
2. Если $s > r$, то $\delta_n^r W^s(M) = \infty, n \geq r$, причём для любого $E > 0$ найдётся функция $f_E \in W^S(M)$, для которой $\delta_n^r(f) \geq E|b-a|^r K_r n^{-r}$, где константа K_r зависит только от r.

Теорема 10.5.

Насыщение при интерполяции лагранжевыми сплайнами. Пусть $B = C[I], I = [a,b], r_0 \geq 2$,

$x_{n,k}^0 = a + \frac{(b-a)(k-1)}{n-1}, 1 \leq k \leq n, n \geq r_0$ – равноотстоящие узлы на $[a,b]$

$\pi_n = I_{r_0}(x_n^0) : C[I] \to \mathcal{L}_{r_0}^{(n)}(x_n^0) = L_n$ – оператор, сопоставляющий функции f её лагранжев сплайн относительно системы узлов $x_n^0 = \left(x_{n,1}^0, ..., x_{n,n}^0\right), n \geq r_0$.

Из свойств лагранжевых сплайнов следует, что π_n линейный метод приближения и $\|\pi\| \leq \lambda_{r_0}$, где λ_{r_0} – константа Лебега относительно системы r_0 равноотстоящих узлов.

Положим, для заданного положительного числа $M : W^r = W^r(M, I)$

Насыщение при интерполяции по чебышевскими узлам. Пусть $B = C[I], I = [a,b]$

$$x_{n,k}^* = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad n \geq 1, 1 \leq k \leq n$$

чебышевские узлы на отрезке $I, \pi_n = \pi_n(x_n^*) : C[i] \to P_n$ – оператор, сопоставляющий функции её алгебраический интеполяционный полином степени, меньшей n относительно системы узлов $x_n^* = \left(x_{n,1}^*, ..., x_{n,n}^*\right)$ на отрезке I.

Для интепорялицонных полиномов с такими узлами было доказано, что π_n – линейный оператор и $\|\pi_n\| = \lambda_n$ – соответствующая константа Лебега относительно узлов x_n^*, то есть определяет линейный метод приближения.

Положим для $M > 0 : W^r = W^r(M, I)$. Тогда полученный линейный метод не имеет насыщения на классах W^r.

приближение периодических функций частичной суммой ряда Фурье. Пусть $B = C[S^1], L_n = \mathcal{T}_{2n+1}, \pi_n = S_n : B \to L_n$, оператор, сопоставляющий функции $f \in C[S^1]$ n-ю частичную сумму её ряда Фурье

$\pi_n = S_n(f)(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$

Поэтому выполняется неравенство

$$|S_n(f)(x)| \leq \|f\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

Поэтому

$$\|S_n\| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t$$

...

Не имеет насыщения

Аппроксимация с помощью ядра Фейера. Пусть $B = C[S^1], L_n = \mathcal{T}_{2n-1}, \pi_n = \sigma_n : B \to L_n$ – оператор, сопоставляющий функции $f \in C[S^1]$ её n-ую сумму Фейера

$$\sigma_n(f)(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t-x) f(t) \, \mathrm{d}t$$

где Φ_n – ядро Фейера, умноженное на π.

Утверждается, что

$$\delta_n W^1(M) \sim \frac{\ln n}{n} \quad \delta_n W^2 \sim \frac{1}{n}$$

...

Класс насыщения $W^2(M)$, а порядок насыщения n^{-1}.

частичная сумма Фурье-Чебышева. Пусть $B = C[I_0], I_0 = [-1, 1], L_n = P_{n+1}, n \geq 1$, а $\pi_n = c_n : C[I_0] \to P_{n+1}$ – оператор, сопоставляющий функции $f \in C[I_0]$ её частичную сумму Фурье-Чебышева

$$c_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k t_k(x) \quad a_k = \int_{-1}^{1} \frac{t_k(x) f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

где $t_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x), k > 0, t_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ – ортогональные многочлены Чебышева. Оператор $c_n(f)$ – линейные операторы, являющиеся проекторами.

Они непрерывные, имеющие какую-то операторную норму, а значит, зажав $\delta_n W^r$ по абстрактному неравенству Лагранжа получим ненасыщенность.

11. О Вейерштрасса

Теорема 11.1 (Фейера)

Для любой непрерывной периодической функции с периодом 2π на прямой, последовательность тригонометрических многочленов

$$f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Phi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

равномерно сходится к функции f

Теорема 11.2. Фейера

Лемма 11.2

Фукнцию $\cos(nx)$ можно представить, как многочлен степени n от переменной $\cos(x)$

Лемма 11.3.

Теорема 11.3 (Вейерштрасса)

Для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует равномерно сходящаяся к ней последовательность многочленов.

Теорема 11.4. Вейерштрасса

Доказательство. Определим функцию на отрезке $[0,1]$:

$$g(s) = f((1-s)a + sb)$$

Функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ восстанавливается по функции $g(s)$, заданной на отрезке $[0,1]$ по формуле

$$f(x) = g\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)$$

Поэтому достаточно доказать теорему только для функций заданных на отрезке $[0,1]$

Продолжим функцию $f(x)$ до чётной на отрезке $[-1,1]$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), x \geq 0 \\ f(-x), x \leq 0 \end{cases}$$

И определим чётную функцию на всей числовой прямой:

$$g(t) = h(\cos t)$$

В силу определния и условия теоремы, функция $g(t)$ непрерывна и периодична с периодом $T = 2\pi$. Следовательно, выполнены условия теоремы Фейера и последовательность тригонометрических многочленов $\sigma_n(t; g)$ сходится равномерно к функции $g(t)$.

Поскольку функцию $g(t)$ чётная, коэффициенты $b_n = 0$ и следовательно

$$\sigma_n(t; g) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(\cos t) = Q_n(\cos t)$$

Где $P_k(x)$ – многочлены из леммы выше и, следовательно, $Q_n(x)$ также многочлен степени n.

Покажем теперь, что последовательность $Q_n(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$.

Поскольку $Q_n(\cos t) \rightarrow\rightarrow g(t)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ всегда $|g(t) - Q_n(\cos t)| < \varepsilon$.

Следовательно, при $n > N$ всегда $|f(\cos t) - Q_n(\cos t)| < \varepsilon$, то есть для всех $x \in [0, 1]$ выполнено

$$|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$$

$\square$

12. О Бернулли и обращении

Ищи в предыдущих билетах

13. О гладком классе

Лемма 13.1

Пусть m, ν – целые, $m \geq 1, m \geq \nu \geq 0, f \in C^m[I]$ и f имеет $k \geq m$ различных нулей на I. Тогда $f^{(n-\nu)}$ имеет не менее $k-\nu$ корней на отрезке I.

Лемма 13.2.

Лемма 13.2

Утверждается, что

$$[W_*^n(M, I)] = W^n(M, I)$$

где $[X]$ – замыкание множества X в пространстве $C[I]$.

Лемма 13.3.

Теорема 13.3

Пусть $I = [a, b]$ – отрезок, $n \geq 1, x = (x_1, ..., x_n)$ – система узлов интерполяции на $I, M > 0$ и $f \in W^n(M, I)$. Тогда выполняется неравенство

$$\|f - \pi_n(x, f)\| \leq M \tfrac{(b-a)^n}{n!}$$

Теорема 13.4.

Доказательство. Сначала докажем теорему для $f \in W_*^n(M, I)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \pi_n(x, f)(x) \in C^n[I]$. Требуется доказать неравенство

$$|g(x)| \leq \tfrac{M(b-a)^n}{n!}$$

для всех $x \in I$. Если x_0 является одним из узлов интерполяции x_k, то $g(x) = g(x_k) = 0$, то неравенство выполняется.

Пусть $x_0 \neq x_k$ для всех $1 \leq k \leq n$. Тогда

$$I_n(x_0) = \textstyle\prod_{k=1}^n (x_0 - x_k) \neq 0$$

Тогда определена функция

$$\xi(x) = g(x) - \tfrac{g(x_0)}{I_n(x_0)} \cdot I_n(x)$$

По построению, для всех $0 \leq k \leq n$ выполняются равенства $\xi(x_k) = 0$. Поэтому, по ближайшей лемме, существует точка $y \in I$, в которой выполнено равенство $\xi^{(n)}(y) = 0$.

Поскольку $\pi_n(x, f)(x)$ – многочлен степени меньшей n, а $I_n(x)$ – многочлен степени n со старшим коэффициентом равным 1, то $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ и выполняется равенство

$$0 = \xi^{(n)}(y) = f^{(n)}(y) - \tfrac{g(x_0)}{I_n(x_0)} n!$$

Следовательно,

$$g(x_0) = \frac{f^{(n)}(y)}{I_n(x_0)n!}$$

Поскольку $x_0 \in I = [a, b]$, очевидно, выполнено неравенство

$$|I_n(x_0)| \leq (b-a)^n$$

А ввиду условия $f \in W_*^n(M, I)$ выполнено неравенство $\left|f^{(n)}(y)\right| \leq M$. Требуемое неравенство теперь очевидно.

Рассмотрим теперь произвольную $f \in W^n(M, I)$, по лемме о приближении при любом $\varepsilon > 0$ существует $f_\varepsilon \in W_*^n(M, I)$, для которого $\|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|f - \pi_n(x, f)\| = \|f - f_\varepsilon + f_\varepsilon - \pi_n(x, f_\varepsilon) + \pi_n(x, f_\varepsilon) - \pi_n(x, f)\| \leq$$
$$\|f - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - \pi_n(x, f_\varepsilon)\| + \|\pi_n(x, f_\varepsilon) - \pi_n(x, f)\| \leq$$
$$\varepsilon + \frac{M(b-a)^n}{n!} + \lambda_n(x) \cdot \varepsilon$$

Переходя к пределу в полученном неравенстве при $\varepsilon \to 0$, получим требуемое.

$\square$

14. О конечных разностях

Определение 14.1

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ множество всех вещественно-значных функций, заданных на всевозможных подмножествах D множества вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Две функции $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ и $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ считаются равными, если

$$D_1 = D_2 \wedge \forall x \in D_1 : f_1(x) = f_2(x)$$

Область определении функции f будем обозначать через D_f. На множестве $\mathcal{F}(R)$ определены операции сложения и умножения на вещественные числа:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad x \in D_{\alpha f} = D_f$$

Определение 14.2.

Определение 14.2

Пусть $h \in \mathbb{R}$ – число, которое будем называть далее шагом. Определим отображения

$$T_h : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}) \quad \Delta_h : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

формулами

$$(T_h(f))(x) = f(x+h) \quad (\Delta_h(f))(x) = f(x+h) - f(x)$$

Оператор Δ_h можно представить в виде $\Delta_h = T_h - E$, где E – тождественный оператор.

Оператор T_h называется оператором **сдвига на шаг h**, а оператор Δ_h – **оператором первой конечной разности**.

Определение 14.3.

Определение 14.3

Умножая оператор Δ_h на себя, получаем конечные разности высших порядков:

$$\Delta_h^0 = E \quad \Delta_h^1 = \Delta_h \quad \Delta_h^{n+1} = \Delta_h^n \circ \Delta_h^1$$

Областью определению функции $\Delta_h^n(f)$ является множество $\cap_{k=0}^n \big(D_f - kh\big)$. Оператор Δ_h^k называется **оператором конечной разности k-го порядка**.

Определение 14.4.

Предложение 14.4 (Свойства конечных разностей)

1. Δ_h – линейный оператор
2. Если f дифференцируемая на отрезке или прямой функция, то функция $\Delta_h(f)$ также дифференцируема на отрезке или прямой и выполняется равенство
$$(\Delta_h(f))' = \Delta_h(f')$$
3. Если f определена и абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $0 < h < b-a$, то
$$(\Delta_h f)(t) = \int_0^h f'(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad t \in [a, b-h]$$
4. $(\Delta_h^n f)(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(t+kh)$
5. Если $f \in W^r(M,[a,b]), 1 \le n \le r, h > 0, 0 < nh < b-a$ выполняется равенство
$$(\Delta_h^s f)(t) = \int_0^h \ldots \int_0^h f^{(s)}(t+\tau_1+\ldots+\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_1\ldots\mathrm{d}\tau_n \quad t \in [a, b-nh]$$
6. Если $f \in C^r([a,b]), h > 0, r \ge 1$, то для любого $t \in [a, b-rh]$ найдётся точка $\xi \in [t, t+rh]$, для которой
$$(\Delta_h^r f)(t) = h^r f^{(r)}(\xi)$$
7. Если $f \in W^r(M,[a,b]), r \ge 1$, то для любого t:
$$|(\Delta_h^r f)(t)| \le M|h|^r$$

Предложение 14.5. Свойства конечных разностей

Определение 14.5

Алгебраические полиномы
$$\Phi_n(x,h) = \frac{1}{n!h^n}\prod_{k=0}^{n-1}(x-kh) \quad n \ge 1$$
называются **факториальными полиномами с шагом h**.

Определение 14.6.

Предложение 14.6 (Свойства факториальных полиномов)

1. $\Phi_n(x-a,h)$ – алгебраический многочлен относительно переменной x степени n
2. Многочлены $\Phi_0(x-a,h), \ldots, \Phi_n(x-a,h), n \ge 0$ образуют базис в пространстве P_{n+1} всех алгебраических многочленов степени $\le n$.
3. Если $n > 0$, то $\Phi_n(0,h) = 0$
4. $\Delta_h \Phi_n(x-a,h) = \Phi_{n-1}(x-a,h), n \ge 0$
5. Если $p \in P_n, n \ge 1$, то
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_h^k p)(a)\Phi_k(x-a,h)$$

Предложение 14.7. Свойства факториальных полиномов

Определение 14.7

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система из $n+1$ равноотстоящих узлов $x_k = a + kh, 0 \leq k \leq n, h = \frac{b-a}{n}, n \geq 1$.

Рассмотрим алгебраический интерполяционный полином $p_{r-1}\left(x^{(r)}, f\right)$ функции f, построенный по первым $r \leq n+1$ узлам $x_0, \ldots, x_{r-1}$, где $r \geq 1, x^{(r)} = (x_0, \ldots, x_{r-1})$.

Согласно последнему свойству, для любого алгебраического полинома степени $< r$ имеет место тождество:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \left(\Delta_h^k p\right)(a) \Phi_k(x-a, h)$$

Пусть теперь $p = p_{r-1}\left(x^{(r)}, f\right)$, тогда $p(a+lh) = f(a+lh)$ при $0 \leq l \leq r-1$.

Поэтому, по одному из свойств конечных разностей, получим

$$\left(\Delta_h^k p\right)(a) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l p(a+lh) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l f(a+lh) = \left(\Delta_h^k f\right)(a)$$

Следовательно, интерполяционный полином функции f относительно системы равноотстоящих узлов записывается в виде

$$p_{r-1}\left(x^{(r)}, f\right)(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \left(\Delta_h^k f\right)(a) \Phi_k(x-a, h)$$

Эта форма интерполяционного полинома называется **формой Ньютона** ♣

Определение 14.8.