

Теоретические основы численных методов

Шокуров

18 марта 2025 г.

Постановка задачи о наилучшем приближении

В нормированном пространстве **V** фиксируем некоторое непустое подмножество M . Пусть $\|x\|$ обозначает норму элемента x в нормированном пространстве **V**.

Определение

Число $\varepsilon(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ называется наилучшим приближением элемента $x \in \mathbf{V}$ на множестве M . Элемент $y_* \in M$ называется наименее уклоняющимся от x , или элементом наилучшего приближения на множестве M , если $\|x - y_*\| = \varepsilon(x, M)$.

Теорема Бореля

Предложение

(Э.Борель)

1. Пусть $M \subset \mathbf{B}$ конечномерное подпространство нормированного пространства \mathbf{B} . Тогда для любого элемента $x \in \mathbf{B}$ существует хотя бы один наименее уклоняющийся элемент $y \in M$.
2. Пусть $M \subset \mathbf{B}$ — выпуклое замкнутое подмножество. Тогда множество наименее уклоняющихся от x элементов выпукло и замкнуто.

Теорема Бореля

Доказательство.

1. Поскольку M конечномерно, оно замкнуто в \mathbf{B} . Для заданного $x \in \mathbf{B}$ рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $\varphi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$, заданную формулой $\varphi(y) = \|y - x\|$. Фиксируем $y_0 \in M$ и рассмотрим множество $P = \{y \in M \mid \|y - x\| \leq \|y_0 - x\|\} = M \cap \{y \in \mathbf{B} \mid \varphi(y) \leq \varphi(y_0)\}$.

Множество P замкнуто, поскольку является пересечением двух замкнутых множеств. Пусть $y \in P$, тогда

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \leq \|y_0 - x\| + \|x\|.$$

Следовательно, множество P ограничено. Поэтому, множество P компактно и, следовательно, по теореме Вейерштрасса функция $\varphi(y)$ достигает наименьшего значения на этом множестве. Этот элемент и является наименее уклоняющимся элементом. □

Теорема Бореля

Доказательство.

2. Пусть y_1 и y_2 — два наименее уклоняющиеся элемента от $x \in \mathbf{B}$, т.е. $\varepsilon(x, M) = \|x - y_1\| = \|x - y_2\|$. Тогда для произвольного $0 \leq \alpha \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned}\|x - (\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2)\| &= \|\alpha x + (1 - \alpha) x - (\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2)\| \\ &= \|\alpha (x - y_1) + (1 - \alpha) (x - y_2)\| \\ &\leq \alpha \|x - y_1\| + (1 - \alpha) \|x - y_2\| \\ &= \alpha \varepsilon(x, M) + (1 - \alpha) \varepsilon(x, M) \\ &= \varepsilon(x, M). \square\end{aligned}$$



Обозначим для $M \subset \mathbf{B}$ через P_M множество всех тех элементов $x \in \mathbf{B}$, для которых существует и единственен элемент наилучшего приближения в M . Очевидно, $M \subset P_M$ и определено отображение $\pi : P_M \rightarrow M$, где $\pi(x)$ определяется как элемент, наименее уклоняющийся от $x \in P_M$.

Свойства наименьшего уклонения

Предложение

1. Для любого $M \subset \mathbf{B}$ функция $\varepsilon(x, M)$ равномерно непрерывна по x .
2. Если $M \subset \mathbf{B}$ — подпространство, то :
 - ▶ (а) $\varepsilon(\alpha x, M) = |\alpha| \varepsilon(x, M)$ для любых $x \in \mathbf{B}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - ▶ (б) $\varepsilon(x_1 + x_2, M) \leq \varepsilon(x_1, M) + \varepsilon(x_2, M)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{B}$.
 - ▶ (в) $\varepsilon(x, M) \leq \|x\|$ для любого $x \in \mathbf{B}$.
3. Пусть $M \subset \mathbf{B}$ — конечномерное линейное многообразие. Тогда отображение $\pi : P_M \rightarrow M$ непрерывно.

Доказательство.

2. Утверждения п.2 (а)–(в) очевидны. □

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

1. Докажем неравенство

$$|\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M)| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Для произвольного $y \in M$ имеем

$\varepsilon(x_1, M) \leq \|x_1 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\|$. Поэтому,
 $\varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \|x_2 - y\|$. Ввиду произвольности $y \in M$ получим
 $\varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon(x_2, M)$. Поэтому, выполняется неравенство

$$\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M) \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\varepsilon(x_2, M) - \varepsilon(x_1, M) \leq \|x_2 - x_1\|.$$

Следовательно,

$$|\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M)| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

3. Рассмотрим сходящуюся в P_M последовательность x_n и пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Докажем сначала, что последовательность $\pi(x_n)$ ограничена. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\pi(x_n)\| &= \|\pi(x_n) - x_n + x_n\| \\ &\leq \|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\| \\ &= \varepsilon(x_n, M) + \|x_n\| \\ &= \varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M) + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \\ &\leq |\varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M)| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \\ &\leq \|x_n - x_0\| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\|. \end{aligned}$$

Последнее неравенство доказано в п. 1). Поскольку последовательность x_n сходится, все слагаемые последней суммы ограничены. Следовательно, последовательность $\pi(x_n)$ ограничена.

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

Необходимо доказать, что последовательность $\pi(x_n)$ сходится к $\pi(x_0)$. Пусть это не так. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность x_{n_k} , для которых выполняется неравенство

$$|\pi(x_{n_k}) - \pi(x_0)| > \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность x_{n_k} совпадает со всей последовательностью x_n . Поскольку последовательность $\pi(x_n)$ ограничена, а подпространство M конечномерно, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. □

Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

Опять без ограничения общности будем считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\pi(x_n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x_n) = y_0$. Тогда переходя к пределам в неравенствах

$$\|\pi(x_n) - \pi(x_0)\| > \varepsilon,$$

получаем

$$\|y_0 - \pi(x_0)\| \geq \varepsilon > 0.$$

Согласно определению проекции π выполнены равенства

$$\|\pi(x_n) - x_n\| = \varepsilon(x_n, M).$$



Свойства наименьшего уклонения

Доказательство.

Переходя к пределу, получим ввиду непрерывности функции $\varepsilon(x, M)$ равенство

$$\|y_0 - x_0\| = \varepsilon(x_0, M).$$

Следовательно, y_0 наименее уклоняющийся от x_0 элемент пространства M . Тогда по определению пространства P_M выполняется равенство $y_0 = \pi(x_0)$, что противоречит полученному выше неравенству. □

Строго нормированные пространства

Определение

Линейное нормированное пространство \mathbf{B} называется строго нормированным, если для любых $x, y \in \mathbf{B}$ из $x \neq 0, y \neq 0, \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ всегда $x = \lambda y$, при некотором $\lambda > 0$.

Предложение

Банахово пространство строго нормировано тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x \neq y$ единичной сферы и $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\|\alpha x + (1 - \alpha) y\| < 1.$$

Строго нормированное пространство

Из предыдущего предложения следует

Предложение

Пусть \mathbf{B} — линейное строго нормированное пространство, $x \in \mathbf{B}$. Тогда

1. если $M \subset \mathbf{B}$ выпуклое: то существует не более одного элемента из M наименее уклоняющегося от x ,
2. если $M \subset \mathbf{B}$ — конечномерное линейное многообразие, то существует и притом единственный элемент из M , наименее уклоняющийся от x .

Доказательство.

1. Согласно теореме Боореля, если $y_1, y_2 \in M$ наименее уклоняющиеся от x элементы, то и

$\|x - \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2\| = \varepsilon(x, M)$. Тогда

$\|\alpha(x - y_1) + (1 - \alpha)(x - y_2)\| = \varepsilon(x, M)$, что противоречит строгой выпуклости \mathbf{B} .

2. Следует из теоремы Бореля и п.1.

Примеры

Пример 1. Пусть \mathbf{B} – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) , где $(x, y) \in \mathbf{B}$. Тогда пространство \mathbf{B} является строго нормированным относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Пример 2. Пусть $\mathbf{B} = L_p(D, \mu)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а μ мера Лебега в \mathbb{R}^n . Элементами пространства \mathbf{B} являются классы эквивалентных, измеримых по Лебегу функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которых функция f^p является μ -суммируемой по D , а две функции эквивалентны, если их разность равна нулю почти всюду в D . Норма в \mathbf{B} задается равенством:

$$\|f\| = \left(\int_D |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда пространство \mathbf{B} является строго нормированным относительно введенной нормы. Это утверждение следует из неравенства Минковского и условий при которых оно превращается в равенство.

Задачи

Задача 1. Доказать, что банахово пространство строго нормировано тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x \neq y$ единичной сферы и $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\|\alpha x + (1 - \alpha) y\| < 1.$$

Задача 2. Доказать, что банахово пространство $\mathbf{B} = C[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ не является строго нормированным.

Задача 3. Доказать, что банахово пространство классов интегрируемых по Лебегу функций $\mathcal{L}_1[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| d\mu$ не является строго нормированным.

Задачи

Задача 4. Пусть \mathbf{H} — гильбертово пространство и \mathbf{H}_n — его n -мерное подпространство. Пусть отображение $\pi = \pi_n : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ сопоставляет элементу $x \in \mathbf{H}$ наименее уклоняющийся элемент из \mathbf{H}_n . Доказать, что

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$$

и

$$\varepsilon(x, \mathbf{H}_n) = \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (x, e_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где e_1, \dots, e_n — произвольный ортонормированный базис в \mathbf{H}_n .

Задача 5. Пусть $M \subset \mathbf{B}$ подпространство и $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x, \lambda x \in P_M$. Доказать, что тогда выполнено равенство $\pi(\lambda x) = \lambda \pi(x)$.

Теорема Чебышева

Пусть $C[D]$ — пространство вещественных непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, состоящем из бесконечного числа точек, с нормой максимум модуля

$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$. Особо выделим два случая: $D = [a, b]$ при $m = 1$ и $D = \mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ при $m = 2$.

Определение 1. Подпространство $L \subset C[D]$ называется чебышевским, если любая ненулевая функция $f \in L$ имеет не более $n - 1$ корней на отрезке $[a, b]$, где $\dim L = n$.

Согласно теореме Бореля для любой функции $f \in C[D]$ существует наилучшее приближение некоторым элементом из L . Согласно теореме Хаара такое приближение единственно, если пространство L чебышевское. Рассмотрим примеры чебышевских подпространств.

Примеры чебышевских пространств

Пример 1. Пусть функция f_0 не обращается в нуль на компакте D . Тогда пространство $L = [f_0] = \{\alpha f_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ является одномерным чебышевским подпространством.

Пример 2. Пусть $I = [a, b]$ и $L = \mathcal{P}_n \subset C[I]$ — пространство многочленов на D степени меньше чем $n > 0$. Из основной теоремы алгебры следует, что пространство \mathcal{P}_n чебышевское.

Пример 3. Пусть $D = \mathbf{S}^1$. отождествим пространство $C[\mathbf{S}^1]$ при помощи экспоненциального отображения $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$ с пространством 2π -периодических функций на \mathbb{R} . Пусть \mathcal{T}_{2n-1} , $n \geq 1$ — пространство тригонометрических многочленов вида

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx).$$

Это пространство чебышевское, $\dim \mathcal{T}_{2n-1} = 2n - 1$.

Примеры чебышевских пространств

Действительно, пусть $z = e^{ikx}$. Тогда представим тригонометрический многочлен через переменную $z \in \mathbf{S}^1$.
Имеем

$$\cos kx = \frac{z^k + z^{-k}}{2} \quad \text{и} \quad \sin kx = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} T(x) = Q(z) &= a_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ 2n-2}}^{n-1} \left(a_k \cdot \frac{z^k + z^{-k}}{2} + b_k \cdot \frac{z^k - z^{-k}}{2i} \right) \\ &= z^{1-n} \sum_{k=0} c_k z^k. \end{aligned}$$

Следовательно, $T(x) \neq 0$ имеет на полуинтервале $[0, 2\pi)$ не более $2n - 2$ корней.

Примеры чебышевских пространств

Приведенные примеры показывают:

- существование 1-мерных пространств Чебышева в произвольных пространствах функций,
- существование пространств Чебышева произвольной размерности в пространстве непрерывных на отрезке функций,
- существование пространств Чебышева нечетной размерности в пространстве непрерывных на окружности функций, или эквивалентно в пространстве 2π -периодических функций на прямой.

Далее будет доказано, что в пространстве непрерывных на окружности функций не существует пространства Чебышева четной размерности. Сформулируем теперь две теоремы, которые будут доказаны в частных случаях. Именно эти частные случаи будут использоваться в дальнейшем.

Теорема Чебышева

Теорема 1. Пусть $L \subset C[I]$ — чебышевское подпространство, $n = \dim L \geq 1$ и $f \in C[I]$ — произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $n + 1$ различные точки $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $|r(x_i)| = \|r\| = \sup_{x \in I} |r(x)|$ при $1 \leq i \leq n + 1$,
2. $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \dots = (-1)^n \cdot r(x_{n+1})$.

Теорема 2. Пусть $L \subset C[S^1]$ — чебышевское подпространство, $2n - 1 = \dim L \geq 1$ и $f \in C[S^1]$ — произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $2n$ различные точки $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} < 2\pi$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $|r(x_i)| = \|r\| = \sup_{x \in S^1} |r(x)|$ при $1 \leq i \leq 2n$,
2. $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \dots = -r(x_{2n})$.

Теорема Чебышева

Теорема 1 в частном случае $L = P_n$ была доказана Чебышевым. Доказательства теоремы 2 и обобщения теоремы 1 незначительно отличаются от доказательства Чебышева. Поэтому эти теоремы обычно называют теоремами Чебышева.

Определение 2. Пусть $g \in C[I]$. Точки $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq b$ называются альтернансом m -го порядка для функции $g(x)$, если $|g(x_i)| = \|g\|$, $1 \leq i \leq m$ и $(-1)^i g(x_i) = \text{const}$.

Определение 3. Пусть $g \in C[S^1]$. Точки $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m < 2\pi$ называются альтернансом m -го порядка для функции $g(x)$, если $|g(x_i)| = \|g\|$, $1 \leq i \leq m$ и $(-1)^i g(x_i) = \text{const} = g(x_m)$. В силу определения, очевидно, любая ненулевая функция $g \in C[S^1]$ не имеет альтернанса нечетного порядка. Теоремы 1 и 2 можно переформулировать теперь как одну теорему.

Теорема Чебышева

Теорема 3. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство причем $\dim L \geq 1$ и $f \in C[D]$ — произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда разность $r(x) = f(x) - p(x)$ имеет альтернанс порядка $\dim L + 1$.

Определение 4. Элементы чебышевского подпространства L в пространстве функций будем называть чебышевскими L -полиномами или просто чебышевскими полиномами. Пусть $f_1, \dots, f_n \in C[D]$ и $x_1, \dots, x_n \in D$. Тогда введем обозначение

$$\Delta_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Теорема Чебышева

Предложение 1. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство и $\dim L = n$. Тогда

1. элементы $e_1, \dots, e_n \in L$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\Delta_e(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$,
2. для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ и любых n чисел c_1, c_2, \dots, c_n существует и притом единственный интерполяционный чебышевский многочлен $p \in L$, для которого $p(x_i) = c_i$ при $1 \leq i \leq n$,
3. для любых $n - 1$ попарно различных точек пространство чебышевских многочленов, обращающихся в этих точках в нуль, имеет размерность 1.

Теорема Чебышева

Доказательство. 1) Если $e_1, \dots, e_n \in L$ линейно зависимы, то найдутся такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство $\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(x) = 0$. Тогда для любой последовательности точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ линейная однородная система уравнений $A\mathbf{y} = 0$, где $A = \|e_j(x_i)\|_{1 \leq i, j \leq n}$ имеет ненулевое решение $\mathbf{y} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$. Следовательно, определитель системы равен нулю. Но $\det A = \Delta_e(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Поэтому $\Delta_e(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ для любой последовательности точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ и, в частности, для любых попарно различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$.

Свойства Чебышевских пространств

Обратно, пусть $e_1, \dots, e_n \in L$ и существуют n различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$, для которых выполнено равенство $\Delta_e(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Тогда $\det A = 0$ и, следовательно, столбцы матрицы A линейно зависимы. Поэтому существуют такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство $\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(x_i) = 0$ при всех $1 \leq i \leq n$. Это означает, что функция $\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(x) \in L$ имеет n различных корней. Поскольку подпространство L чебышевское, то отсюда вытекает, что $\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(x) = 0$. Следовательно, вектора $e_1, \dots, e_n \in L$ линейно зависимы.

Свойства Чебышевских пространств

2) Пусть e_1, \dots, e_n — базис в чебышевском пространстве L и c_1, c_2, \dots, c_n произвольные n чисел. Тогда согласно уже доказанному определитель системы линейных уравнений $Ay = c$, где $A = \|e_j(x_i)\|_{1 \leq i, j \leq n}$, не равен нулю, и, следовательно, эта система имеет ненулевое решение $y^T = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда

$$p(x) = \sum_{k=1}^n y_k e_k(x)$$
 определяет искомым интерполяционный многочлен Чебышева.

3) Пусть даны n различных точек x_0, \dots, x_{n-1} . Согласно 2) существует единственный чебышевский многочлен $p_0(x)$, обращающийся в 0 в точках x_1, \dots, x_{n-1} и равный 1 в точке x_0 . Тогда согласно 2) для любого чебышевского многочлена $q(x)$, обращающегося в 0 в точках x_1, \dots, x_{n-1} , выполнено равенство $q(x) = q(x_0)p_0(x)$. ■

Свойства Чебышевских пространств

Предложение 2. Пусть $L \subset C[D]$ — чебышевское подпространство и $\dim L = n$.

1. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$ и $y_1, y_2, \dots, y_n \in D$ — две системы попарно различных точек и для всех $1 \leq i \leq n$ существуют непрерывные функции $\xi_i : [0, 1] \rightarrow D$, удовлетворяющие условиям: а) $\xi_i(0) = x_i, \xi_i(1) = y_i$ при $1 \leq i \leq n$, б) для любого t точки $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ попарно различные. Тогда для любого базиса $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ знаки определителей $\Delta_{\mathbf{e}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\Delta_{\mathbf{e}}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ совпадают.
2. Пусть $D = [a, b]$ или $D = \mathbf{S}^1$, а $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in D$ — попарно различные нули ненулевого элемента $p \in L$. Тогда $p(x)$ не имеет других нулей в D и меняет знак при прохождении x через каждый нуль $x_i, 1 \leq i \leq n-1$, отличный от концов a, b в случае отрезка $D = [a, b]$.

Свойства Чебышевских пространств

Доказательство. 1) Рассмотрим функцию

$$f(t) = \Delta_e(\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)).$$

Согласно условию эта функция непрерывна. Поскольку по условию при любом t все точки $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ различны, то согласно предложению 1 функция $f(t)$ не обращается в нуль. Следовательно, $f(0)$ и $f(1)$ имеют одинаковые знаки.

Свойства Чебышевских пространств

2) Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} \in D$ — различные корни чебышевского многочлена $p(x)$ и пусть между точками $u, v \in D$ имеется единственный корень x_k ($u, v \neq x_k$). Рассмотрим n непрерывных на $[0, 1]$ функций

$$\xi_1(t) = x_1$$

...

$$\xi_k(t) = (1 - t)u + tx_k$$

$$\xi_{k+1}(t) = (1 - t)x_k + tv$$

$$\xi_{k+2}(t) = x_{k+1}$$

...

$$\xi_n(t) = x_{n-1}.$$

Свойства Чебышевских пространств

Тогда согласно уже доказанному утверждению 1) знаки определителей $\Delta_e(u, x_1, \dots, x_{n-1})$ и $\Delta_e(x_k, x_1, \dots, x_{k-1}, v, x_{k+1}, \dots, x_{n-1})$ совпадают. Согласно предложению 1 для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $p(x) = \lambda \Delta_e(x, x_1, \dots, x_{n-1})$. Кроме того из свойств определителей следует равенство $\Delta_e(x_k, x_1, \dots, x_{k-1}, v, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}) = -\Delta_e(v, x_1, \dots, x_{n-1})$. Следовательно, числа $p(u)$ и $p(v)$ имеют противоположные знаки. ■

Задача. В $C[S^1]$ не существует четномерных Чебышевских подпространств.