Лагранжевы сплайны

Шокуров

15 апреля 2025 г.

Сплайн-функции

Пусть $D \subset \mathbb{R}^s$ — замкнутое подмножество.
Определение 1. Конечная совокупность $D_k \subset \mathbb{R}^s$, $k \in \mathcal{K}$ называется разбиением D, если

1. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k = D$
2. $\langle D_k \rangle \cap \langle D_j \rangle = \emptyset$ при $k \neq j$
3. $\langle D_k \rangle \neq \emptyset$,

где $\langle D \rangle$ — обозначает внутренность множества D.
Определение 2. Функция $l \in C[D]$ называется сплайн-функцией на конечном разбиении D_k, $k \in K$ множества D, если эта функция полиномиальна на каждом множестве D_k.
Поскольку $\langle D_k \rangle \neq \emptyset$, алгебраический многочлен на каждом множестве D_k определен однозначно. Число $\max\limits_{k \in \mathcal{K}} \deg l|_{D_k}$ называется порядком *сплайн-функции* l.

Сплайн-функции

Далее будет исследован случай $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$. В число узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ \dots, x_n)$ всегда будут входить начало и конец отрезка $a = x_1 < x_2 < \ \dots < x_n = b$. В качестве разбиения рассматриваются множества $D_k = I_k = [x_{k+1}, x_{k+2}]$, где $0 \le k \le n-2$. Пусть $n \ge r \ge 2$. Определим отображение

$$I_r = I_r(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to C[a, b].$$

Для вектора $\mathbf{f} = (f_1, \ \dots, f_n)$ и $x \in [a, b]$ положим

$$I_r(\mathbf{x})(\mathbf{f})(x) = \begin{cases} p_{r-1}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)})(x), & x \in I_k, \quad 0 \le k \le n-r, \\ p_{r-1}(\mathbf{x}^{(n-r)}, \mathbf{f}^{(n-r)})(x), & x \in I_k, \quad n-r < k \le n-2, \end{cases}$$

где $\mathbf{x}^{(k)} = (x_{k+1}, \ \dots, x_{k+r})$, $\mathbf{f}^{(k)} = (f_{k+1}, \ \dots, f_{k+r})$ при $0 \le k \le n-r$ и $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)})$ — алгебраический интерполяционный полином степени меньшей r на отрезке $J_k = [x_{k+1}, x_{k+r}]$. Очевидно, что данное выше определение отображения I_r корректно, поскольку значения на узлах интерполяции определяются вектором $\mathbf{f}$. Из определения следует, что $I_r \in C[a, b]$.

Лагранжев сплайн

Определение 3. Пусть $f \in C[a, b]$ и $a = x_1 < \ \dots < x_n = b$. Положим $\mathbf{f} = (f(x_1), \ \dots, f(x_n))$. Тогда функция $l_r(\mathbf{x}, \mathbf{f})$ называется лагранжевым сплайном, или сплайн-интерполяцией порядка $< r$ функции f относительно узлов $\mathbf{x}$.
Множество всех лагранжевых сплайнов порядка $< r$, обозначаемое через $\mathcal{L}_n^{(r)} = \mathcal{L}_n^{(r)}(\mathbf{x}) = l_r(\mathbb{R}^n)$, является линейным подпространством в $C[a, b]$.
Определим также отображение $l_r(\mathbf{x}) : C[a, b] \to C[a, b]$ как композицию отображения $\omega(\mathbf{x}) : C[a, b] \to \mathbb{R}^n$, заданного формулой $\omega(\mathbf{x})(f) = \mathbf{f} = (f(x_1), \ \dots, f(x_n))$, и отображения $l_r = l_r(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to C[a, b]$.

Свойства лагранжевых сплайнов

Предложение 1. Выполняются следующие свойства сплайнов:
1. $l_r(\mathbf{x}, \mathbf{f})(x_k) = f(x_k)$,
2. $l_r = l_r(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to C[a, b]$ — линейное непрерывное отображение, причем его образ $\mathcal{L}_n^{(r)}$ — линейное подпространство размерности n,
3. Сплайны $l_r(\mathbf{x}, \delta_k)$, где $1 \le k \le n$, а $\delta_k = (\delta_{1,k}, \ \ldots, \delta_{n,k})$, образуют базис в пространстве $\mathcal{L}_n^{(r)}$, причем сплайн-функции однозначно представимы в виде

$$l_r(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot l_r(\mathbf{x}, \delta_k),$$

4. $\mathcal{L}_n^{(r)} \subset C[a, b]$ — замкнутое полное линейное подпространство,
5. $l_r(\mathbf{x}) : C[a, b] \to C[a, b]$ — непрерывное отображение, причем

$$\|l_r(\mathbf{x})\| \le \max_{0 \le k \le n-r} \lambda_r(J_k, \mathbf{x}^{(k)}),$$

где $J_k = [x_{k+1}, x_{k+r}]$ и $\mathbf{x}^{(k)} = (x_{k+1}, \ \ldots, x_{k+r})$.

Свойства лагранжевых сплайнов

Доказательство.

Пп.1-4 очевидны. Проверим 5. Из определения лагранжевого сплайна следует, что для любого $x \in [a, b]$ выполняется равенство $l_r(\mathbf{x}, f)(x) = p_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)})(x)$ при некотором $0 \le k \le n - r$. Тогда

$$|l_r(\mathbf{x}, f)(x)| = |p_r(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)})(x)| \le \|f\| \cdot \lambda_r(J_k, \mathbf{x}^{(\mathbf{k})}),$$

где $0 \le k \le n - r$. Следовательно,

$$|l_r(\mathbf{x}, f)| = \max_{x \in [a,b]} |l_r(\mathbf{x}, f)(x)| \le \|f\| \cdot \max_{0 \le k \le n-r} \lambda_r(J_k, \mathbf{x}^{(k)}),$$

т.е.

$$\|l_r(\mathbf{x})\| \le \max_{0 \le k \le n-r} \lambda_r(J_k, \mathbf{x}^{(k)}).$$

□

Свойства лагранжевых сплайнов

Очевидно, выполняется
Предложение 2. Отображение $l_r(\mathbf{x}) : C[a,b] \to C[a,b]$ является проектором на пространство лагранжевых сплайнов $\mathcal{L}_n^{(r)}$. ■
Упражнение 1. Докажите неравенство Лебега

$$\|f - l_r(\mathbf{x}, f)\| \leq (1 + \|l_r\|)\varepsilon(f, \mathcal{L}_r^{(n)}),$$

где $f \in C[a,b]$, $2 \leq r \leq n$.
Однако, приведенной формулой нельзя воспользоваться, до тех пор пока не исследована асимптотика наилучших приближений $\varepsilon(f, \mathcal{L}_r^{(n)})$ при $n \to \infty$.

Оценка погрешности при интерполяции сплайнами

Теорема 1. Пусть $I = [a, b]$, $2 \le r \le n$, $f \in W^r(M, I)$, $\xi = (\xi_1, \ \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}$ — произвольный вектор, $h = (b-a)/(n-1)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ \dots, x_n)$ — равноотстоящие узлы $x_k = a + (k-1)h$, $1 \le k \le n$. Тогда

$$\|f - I_r(\mathbf{x}, f)\| \le M \cdot \frac{(r-1)^r}{r!} \cdot h^r + \lambda_r \cdot \max_{1 \le j \le n} |f(x_j) - \xi_j|,$$

где $\lambda_r \le 2^{r-1}$ — константы Лебега относительно системы узлов $\mathbf{x}$. Для $f \in W^1(M, I)$ и $n \ge 2$ справедлива оценка

$$\|f - I_2(\mathbf{x}, f)\| \le 2Mh + \lambda_2 \cdot \max_{1 \le j \le n} |f(x_j) - \xi_j|.$$

Доказательство теоремы 1

Доказательство. Поскольку отрезки $[x_{s+1}, x_{s+2}]$ при $0 \le s \le n-2$ покрывают отрезок $[a, b]$ и каждый из них лежит в некотором отрезке $J_k = [x_{k+1}, x_{k+r}]$, $0 \le k \le n-r$, то из определения лагранжева сплайна и полученной ранее оценки для приближения интерполяционным многочленом $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)})$ следует, что

$$\|f - l_r(\mathbf{x}, \xi)\|_{C[I]} = \max_{1 \le s \le n-2} \|f - l_r(\mathbf{x}, \xi)\|_{C[x_{s+1}, x_{s+2}]} \le$$

$$\max_{1 \le k \le n-r} \|f - p_{r-1}(\mathbf{x}^{(k)}, \xi^{(k)})\|_{C[J_k]} \le$$

$$\max_{1 \le k \le n-r} \left[M \cdot \frac{(r-1)^r}{r!} \cdot h^r + \lambda_r \max_{k+1 \le j \le k+r} |f(x_j) - \xi_j| \right] \le$$

$$M \cdot \frac{(r-1)^r}{r!} \cdot h^r + \lambda_r \max_{1 \le j \le n} |f(x_j) - \xi_j|.$$

Доказательство теоремы 1

Оценка для констант Лебега при равномерном распределении узлов была получее ранее.
При $r = 1$ используются кусочно линейные аппроксимации $p_1((\mathbf{x}^{(k)}, \xi^{(k)})$ и оценка погрешности

$$
\begin{aligned}
|f(x) - p_1(x)| &= \left| f(x) - f(x_1) - \tfrac{f(x_*) - f(x_1)}{x_* - x_1} \cdot (x - x_1) \right| \\
&\le 2M \cdot |x - x_1| \le 2M(b-a)
\end{aligned}
$$

для $f \in W^1(M, I)$

$$
\begin{aligned}
\|f - I_2(\mathbf{x}, \xi)\|_{C[I]} &= \max_{0 \le k \le n-2} \|f - p_1(\mathbf{x}^{(k)}, \xi^{(k)})\|_{C[J_k]} \\
&\le \max_{1 \le k \le n-2} \left[2Mh + \lambda_2 \max_{k+1 \le j \le k+2} |f(x_j) - \xi_j| \right] \\
&\le 2Mh + \lambda_2 \max_{1 \le j \le n} |f(x_j) - \xi_j|. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Равномерная сходимость лагранжевых сплайнов

Теорема 2. Для матрицы равноотстоящих на отрезке $[a, b]$ узлов Ξ^* и любой $f \in C[I]$ последовательность лагранжевых сплайнов $l_r(\mathbf{x}_n^*, f)$ равномерно на I сходится к f.

Равномерная сходимость лагранжевых сплайнов

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Согласно теореме Вейерштрасса существует многочлен $p(x)$ такой, что $\|f - p\| < \varepsilon/(2(1+\lambda_r))$, где λ_r — константа Лебега для равноотстоящих узлов. Положим $M = \sup\limits_{x\in I} |p^{(r)}(x)| + 1$. Тогда $p \in W^r(M, I)$. Для равноотстоящих на $[a, b]$ узлов в силу п.5 предложения 1 и равенства всех констант Лебега $\lambda_r(J_k, (\mathbf{x}_n^*)^{(k)})$ выполняется неравенство $\|l_r(\mathbf{x}_n^*)\| \le \lambda_r$. Тогда, используя теорему 1 при $\xi_k = f(x_k)$, получим

$$\begin{aligned}
\|f - l_r(\mathbf{x}_n^*, f)\| &\le \|f - p\| + \|p - l_r(\mathbf{x}_n^*, p)\| + \|l_r(\mathbf{x}_n^*, p - f)\| \\
&\le \|f - p\|(1 + \|l_r(\mathbf{x}_n^*)\|) + \|p - l_r(\mathbf{x}_n^*, p)\| \\
&\le (1+\lambda_r)\|f - p\| + M\frac{(r-1)^r}{r!} \cdot 2^r (b-a)^r n^{-r} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + MC(r)n^{-r},
\end{aligned}$$

где $C(r) = 2^r(b-a)^r/r!$. Тогда при $n > (2mC(r)/\varepsilon)^{\frac{1}{r}}$ выполняется неравенство $\|f - l_r(\mathbf{x}_n^*, f)\| < \varepsilon$. ■

Насыщение

Теорема 2 демонстрирует значительное отличие аппроксимации лагранжевыми сплайнами по сравнению с аппроксимацией интерполяционными многочленами. Однако картина оказывается не столь радужной, если рассмотреть влияние гладких свойств функции на поведение погрешности аппроксимации. Оказывается, что построенные аппроксимации обладают весьма нежелательным свойством *насыщения*. Обозначим через $\delta_n^r(f) = \|f - l_r(\mathbf{x}_n^*, f)\|$, $f \in C[I]$. Пусть $f \in W^s(M) = W^s(M, I)$. Нас будет интересовать величина

$$\delta_n^r W^s(M) = \sup_{f \in W^s(M)} \delta_n^r(f), \quad s \geq 1, \quad n \geq r \geq 2,$$

называемая погрешностью аппроксимации лагранжевой интерполяции, отвечающей матрице равноотстоящих узлов на классе $W^s(M)$. Рассмотрим поведение этой величины при $n \to \infty$.

Теорема о насыщении

Теорема 3. 1) Если $1 \leq s \leq r$, то $\delta_n^r W^s(M) \asymp M|b-a|n^{-s}$ при $n \to \infty$, $n \geq r$, 2) если $s > r$, то $\delta_n^r W^s(M) = \infty$ при $n \geq r$, причем для любого $E > 0$ найдется функция $f_E \in W^s(M)$, для которой $\delta_n^r(f) \geq E|b-a|^r K_r n^{-r}$, где константа K_r зависит только от r.

Доказательство теоремы о насыщении

Доказательство. 1) Пусть $1 \le s \le r$. Используя неравенства Лебега и Джексона, получим для $f \in W^s(M)$

$$\begin{aligned}
\delta_n^r(f) &= \|f - l_r(\mathbf{x}_n^*, f)\|_{C[a,b]} \\
&\le \max_{0\le k\le n-r} \|f - p_{r-1}((\mathbf{x}_n^*)^{(k)}, \mathbf{f}^{(k)_\mathbf{x}}\|_{C[J_k]} \\
&\le \max_{0\le k\le n-r} (1+\lambda_r)\varepsilon(f|_{J_k}, \mathcal{P}_r) \\
&\le (1+\lambda_r) M \left(\frac{(r-1)(b-a)}{2(n-1)}\right)^s \left(\frac{\pi s}{2}\right)^s \frac{r^{-s}}{s!} \\
&\le M(1+\lambda_r) C_1(s) n^{-s},
\end{aligned}$$

где $C_1(s) = (b-a)^s(\pi s/2)^s/s!$. Поэтому $\delta_n^r W^s(M) \le M(1+\lambda_r)C_1(s)n^{-s}$. С другой стороны, пусть

$$g_n(x) = M\left(\frac{\pi n}{b-a}\right)^{-s} \sin\left(\pi(n-1)\frac{x-a}{b-a}\right), \ \ x \in [a,b].$$

Доказательство теоремы о насыщении

Тогда $g_n \in W^s(M)$ и $l_r(\mathbf{x}_n^*, g_n) = 0$, поскольку $g_n(x_n^* k) = 0$ при $1 \leq k \leq n$. Поэтому $\delta_n^r(g_n) = \|g_n\| = C_2(s)Mn^{-s}$, где $C_2(s) = (b-a)^s \pi^- s$. Следовательно, $C_2(s)Mn^{-s} = \delta_n^r(g_n) \leq \delta_n^r W^s(M)$ и значит, учитывая полученную выше оценку, $\delta_n^r W^s(M) \asymp M|b-a|n^{-s}$.

Доказательство теоремы о насыщении

2) Достаточно проверить существование функции f_E, удовлетворяющей утверждению 2) теоремы. Положим $f_E(x) = \frac{Er!}{x^r}$. Тогда при $s > r$ имеем $f_E \in W^s(M)$. С другой стороны, для любого $x \in [a, b]$

$$\delta_n^r(f_E) = \|f_E - I_r(\mathbf{x}_n^*, f_E)\| \geq |f_E(x) - I_r(\mathbf{x}_n^*, f_E)(x)|.$$

Положим теперь $x = x_* = b - (b - a)/(2(n - 1))$. Тогда $x_* \in J_{n-r} = [x_{n-r+1}, x_n]$ и, записывая погрешность интерполяции в форме Лагранжа, примененной к отрезку J_{n-r}, получим

$$\begin{aligned}
|f_E(x_*) - I_r(\mathbf{x}_n^*, f_E)(x_*)| &= |f_{E|_J}(x_*) - p_{r-1}((\mathbf{x}_n^*)^{(n-r)}, f_E|_{J_{n-r}})(x_*)| \\
&= \frac{|f_E^{(r)}(\xi)|}{r!} |(x_* - x_{n-r+1}) \ \ldots (x_* - x_n)| \\
&= \frac{E(2r-3)!!}{2^r \cdot r!} \left(\frac{b-a}{n-1}\right)^r \\
&\geq E|b-a|^r K_r n^{-r},
\end{aligned}$$

где $x_{n-r+1} < \xi < x_n$, $K_r = (2r - 3)!!/(2^r \cdot r!)$. ■

О насыщаемости метода аппроксимации сплайнами

Результат теоремы 3 показывает насыщаемость метода аппроксимации лагранжевыми сплайнами. Пока гладкость аппроксимируемой функции невелика, скорость аппроксимации возрастает вместе с гладкостью функции. Но при переходе через определенную границу (вторая половина теоремы 3), скорость аппроксимации перестает возрастать.

Конечные разности и интерполяционный полином в форме Ньютона

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ множество всех вещественно-значных функций, заданных на всевозможных подмножествах D множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Две функции $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ и $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ считаются равными, если $D_1 = D_2$ и $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in D_1 = D_2$. Область определения функции f будем обозначать через D_f. На множестве $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ определены операции сложения и умножения на вещественные числа:

$$\begin{array}{ll} (f+g)(x) = f(x) + g(x) & x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g \\ (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x) & x \in D_{\alpha f} = D_f. \end{array}$$

Задача 1. Проверьте, что сложение функций коммутативно и ассоциативно, а функция $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является единственным нулевым элементом.

Конечные разности и интерполяционный полином в форме Ньютона

Пусть $h \in \mathbb{R}$ — число, которое будем называть далее шагом. Определим отображения

$$T_h : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad \Delta_h : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

формулами

$$(T_h(f))(x) = f(x+h) \quad \text{и} \quad (\Delta_h(f))(x) = f(x+h) - f(x).$$

Оператор Δ_h можно представить также в виде $\Delta_h = T_h - E$, где E — единичный оператор $E(f) = f$. Оператор T_h называется оператором сдвига на шаг h, а оператор Δ_h — оператором первой конечной разности(или конечной разности первого порядка).

Конечные разности и интерполяционный полином в форме Ньютона

Умножая оператор Δ_h на себя, получаем конечные разности высших порядков:

$$\Delta_h^0 = E, \quad \Delta_h^1 = \Delta_h, \quad \Delta_h^{n+1} = \Delta_h^n \circ \Delta_h^1.$$

Областью определения функции $\Delta_h^n(f)$ является множество $\bigcap\limits_{k=0}^{n} (D_f - kh)$. Оператор Δ_h^k называется оператором конечной разности k-го порядка. Если $D_f = [a, b]$, то $D_{\Delta_h^k}(f) = [a, b - kh]$ при $h > 0$ и $D_{\Delta_h^k}(f) = [a - kh, b]$ при $h < 0$.

Свойства оператора конечной разности

Оператор конечной разности Δ_h удовлетворяет следующим свойствам:

1.Δ_h — *линейный оператор, т.е.*
$\Delta_h(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta_h(f) + \beta \Delta_h(g)$,

2.*Если f дифференцируемая на отрезке или прямой функция, то функция $\Delta_h(f)$ также дифференцируема на отрезке или прямой и выполняется равенство $(\Delta_h(f))' = (\Delta_h(f'))$.*

3. *Если f определена и абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $0 < h < b - a$, то*

$$(\Delta_h f)(t) = \int_0^h f'(t + \tau) d\tau, \quad t \in [a, b - h]$$

При $a - b < h < 0$ выполнено аналогичное равенство

$$(\Delta_h f)(t) = \int_0^h f'(t + \tau) d\tau, \quad t \in [a - h, b]$$

Свойства оператора конечной разности

4. $(\Delta_h^n f)(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(t + kh).$

5. *Если* $f \in W^r(M, [a, b])$, $1 \leq n \leq r$, $h > 0$ *и* $0 < nh < b - a$ *выполняется равенство*

$$(\Delta_h^s f)(t) = \underbrace{\int_0^h \ldots \int_0^h}_{n \text{ элементов}} f^{(s)}(t + \tau_1 + \ldots + \tau_n) d\tau_1 \ldots d\tau_n, \quad t \in [a, b - nh].$$

Свойства оператора конечной разности

6. *Если* $f \in C^r([a,b])$, $h > 0$, $r \geq 1$, *то для любого* $t \in [a, b - rh]$ *найдется точка* $\xi \in [t, t + rh]$, *для которой*

$$(\Delta_h^r f)(t) = h^r f^{(r)}(\xi).$$

Если $h < 0$, *то последнее равенство верно для* $t \in [a - rh, b]$ *и* $\xi \in [t + rh, t]$.
7. *Если* $f \in W^r(M, [a,b])$, $r \geq 1$, *то для любого* t

$$|(\Delta_h^r f)(t)| \leq M|h|^r.$$

Из свойства 6 следует, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\Delta_h^r f)(t)}{h^r} = f^{(r)}(t)$$

для любого $t \in [a, b]$.

Факториальные полиномы

Определение 1. Алгебраические полиномы

$$\begin{aligned}
\Phi_n(x,h) &= \frac{1}{n!h^n}\prod_{k=0}^{n-1}(x-kh) \quad n \geq 1 \\
\Phi_0(x,h) &= 1 \\
\Phi_{-1}(x,h) &= 0
\end{aligned}$$

называются факториальными полиномами с шагом h.

Факториальные полиномы

Перечислим основные свойства факториальных полиномов.
1.$\Phi_n(x-a,h)$ — *алгебраический многочлен относительно переменной x степени n, в частности,* $\Phi_n(x-a,h) \in \mathcal{P}_{n+1}$.
2.*Многочлены* $\Phi_0(x-a,h), \ \ldots, \Phi_n(x-a,h)$ $n \geq 0$ *образуют базис в пространстве* $\mathcal{P}_{n+1}$ *всех алгебраических многочленов степени* $\leq n$.
3. *Если* $n > 0$, *то* $\Phi_n(0,h) = 0$.
4. $\Delta_h \Phi_n(x-a,h) = \Phi_{n-1}(x-a,h)$ *при* $n \geq 0$.
5. *Если* $p \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 1$, *то*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_h^k p)(a) \Phi_k(x-a,h).$$

Полиномы Ньютона

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана система из $n+1$ равноотстоящих узлов $x_k = a + kh$, $0 \le k \le n$, $h = (b-a)/n$, $n \ge 1$. Рассмотрим алгебраический интерполяционный полином $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)$ функции f, построенный по первым $r \le n+1$ узлам $x_0, \ \ldots, x_{r-1}$, где $r \ge 1$, $\mathbf{x}^{(r)} = (x_0, \ \ldots, x_{r-1})$. Согласно свойству 5, для любого алгебраического полинома степени $< r$ имеет место тождество

$$p(x) = \sum_{k=0}^{r-1} (\Delta_h^k p)(a) \Phi_k(x-a, h).$$

Полиномы Ньютона

Пусть теперь $p = p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)$, тогда $p(a + lh) = f(a + lh)$ при $0 \le l \le r - 1$. Поэтому, по свойству 4 конечных разностей, получим при $0 \le l \le r - 1$

$$
\begin{aligned}
(\Delta_h^k p)(a) &= \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} p(a + lh) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} f(a + lh) \\
&= (\Delta_h^k f)(a).
\end{aligned}
$$

Следовательно, интерполяционный полином функции f относительно системы равноотстоящих узлов записывается в виде

$$
p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)(x) = \sum_{k=0}^{r-1} (\Delta_h^k f)(a) \Phi_k(x - a, h).
$$

Эта форма интерполяционного полинома называется формой Ньютона.

Полиномы Ньютона

Форма Ньютона имеет ряд преимуществ перед интерполяционной формой Лагранжа. Рассмотрим задачу рекуррентного вычисления многочленов $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)$. Пусть вычислен многочлен $p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)$. Найдем $p_r(\mathbf{x}^{(r+1)}, f)$. Согласно формуле Ньютона

$$\begin{aligned} p_r(\mathbf{x}^{(r+1)}, f)(x) &= \sum_{k=0}^{r} (\Delta_h^k f)(a)\Phi_k(x-a, h) \\ &= p_{r-1}(\mathbf{x}^{(r)}, f)(x) + (\Delta_h^r f)(a)\Phi_r(x-a, h). \end{aligned}$$

Полиномы Ньютона

Следовательно, задача сводится к вычислению конечной разности $(\Delta_h^r f)(a)$ и значения в точке x факториального полинома $\Phi_r(x-a,h)$. Последнее сделать очень просто, поскольку $\Phi_r(x-a,h) = \Phi_{r-1}(x-a,h)(x-(r-1)h)/(rh)$, а величина $\Phi_r(x-a,h)$ уже вычислена. Конечная разность $(\Delta_h^r f)(a)$ ищется с помощью рекуррентной процедуры, которая сводится к последовательному вычислению столбцов следующей треугольной таблицы

Полиномы Ньютона

$$
\begin{array}{llllllll}
f(x_0) & & & & & & & \\
 & \Delta_h f(x_0) & & & & & & \\
f(x_1) & & \Delta_h^2 f(x_0) & & & & & \\
 & \Delta_h f(x_1) & & \Delta_h^3 f(x_0) & & & & \\
f(x_2) & & \Delta_h^2 f(x_1) & & \cdot & & & \\
 & \Delta_h f(x_2) & & \Delta_h^3 f(x_1) & & \cdot & & \\
f(x_3) & & \Delta_h^2 f(x_2) & & & \cdot & & \cdot \\
 & \Delta_h f(x_3) & & & \cdot & \cdot & \Delta_h^n f(x_0) & \\
f(x_4) & & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & & & & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & & \\
 & & & & & & & \\
\cdot & & & \Delta_h^3 f(x_{n-3}) & & & & \\
f(x_{n-1}) & & \Delta_h^2 f(x_{n-2}) & & & & & \\
 & \Delta_h f(x_{n-1}) & & & & & & \\
f(x_n) & & & & & & &
\end{array}
$$

Задача интерполяции в чебышевских пространствах

Самый левый столбец известен - это значения функции в узлах интерполяции. Каждый последующий столбец получается из предыдущего при помощи вычитания соседних элементов.

Приложениие к лагранжевым сплайнам

Рассмотрим n равноотстоящих узлов $x^0_{n,k} = a + (b-a)(k-1)/(n-1)$ на $[a,b]$. Пусть $n \geq r \geq 2$ и $\mathbf{l}_r(\mathbf{x}^0_n, f)$ лагранжевый сплайн функции $f \in C[a,b]$, $\delta^r_n(f) = \|f - \mathbf{l}_r(\mathbf{x}^0_n, f)\|$ — погрешность интерполяции функции f порядка меньшего r относительно системы узлов $\mathbf{x}^0_n$, $\delta^r_n(W^s) = \sup\limits_{f \in W_s} \delta^r_n(f)$ — погрешность интерполяции на классе $W^s = W^s(M, [a,b])$ при $s \geq 1$. Ранее в теореме 3 было доказано, что при $1 \leq s \leq r$ имеет место слабая эквивалентность $\delta^r_n(W^s) \asymp n^{-s}$.

Вопрос. Может ли для каждой $f \in W^s$ последовательность индивидуальных погрешностей интерполяции $\delta^r_n(f)$ сходиться к нулю быстрее, чем $\delta^r_n(W^s)$, т.е. выполняется ли $\delta^r_n(f) = o(\delta^r_n(W^s))$ для каждой функции $f \in W^s$?

Ответ отрицательный: для любого $1 \leq s < r$ построим функцию $f_s \in W^s(M, [a,b])$, для которой $\delta^r_n(f_s) \geq Cn^{-s}$ для всех достаточно больших n. Константа C зависит только от $r, s, M, b-a$ (для $s = r$ смю теорему 3). Достаточно построить f_s для функций на $[-1,1]$.

Приложение к лагранжевым сплайнам

Пусть $r > 2$. Положим

$$f_s(x) = \frac{(\operatorname{sgn} x)x^s}{s!}, \ \ |x| \le 1, \ \ 1 \le s < r \tag{1}$$

Пусть $\varphi_s(x) = \frac{1}{2}\left(f_s(x) + \frac{x^s}{s!}\right)$. Тогда $f_s(x) = 2\varphi_s(x) - \frac{x^s}{s!}$ и $\mathbf{l}_r(\mathbf{x}_n^0, f_s) = 2\mathbf{l}_r(\mathbf{x}_n^0, \varphi_s) - \frac{x^s}{s!}$, поскольку $\frac{x^s}{s!}$ алгебраический многочлен степени $s < r$, а $\mathbf{l}_r$ — проектор на $\mathcal{L}_r$. Поэтому $\delta_n^r(f_s) = 2\delta_n^r(\varphi_s)$ и требуется доказать, что

$$\delta_n^r(\varphi_s) \ge Cn^{-s} \tag{2}$$

при всех натуральных n, начиная с некоторого, а C зависит только от r и s. Заметим, что $\varphi_s(x) = 0$ при $-1 \le x \le 0$.
Пусть $n \ge 2r$. Рассмотрим вначале случай нечетного $n = 2m + 1$. Тогда узлы интерполяции это

$$x_k = -1 + \frac{k-1}{m}, \ \ k = 1, 2, \ \ldots, 2m+1 = n. \tag{3}$$

Приложение к лагранжевым сплайнам

Вычислим

$$|\mathbf{l}_r(\mathbf{x}_n^0, \varphi_s)(x_0) - \varphi_s(x_0)|$$

в точке $x_0 = x_{m-r+3} + \frac{1}{2m}$. Заметим, что $x_0 \in [x_{m-r+3}, x_{m+2}]$ и на этом отрезке находится ровно r узлов, причем единственным большим нуля является $x_{m+2} = \frac{1}{m}$, а $x_0 \in [x_{m-r+3}, x_{m-r+4}]$. Поэтому, по определению лагранжева сплайна, $\mathbf{l}_r(x_0) = p_{r-1}(x_0)$, где p_{r-1} — интерполяционный многочлен функции φ_s степени меньшей r, построенный по ее значениям в узлах $x_{m-r+3}, x_{m-r+4}, \ \dots, x_{m+2}$. Запишем этот полином в форме Ньютона, положив $a = x_{m-r+3}, h = \frac{1}{m}$:

$$p_{r-1}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{m^k}{k!} \Delta_h^k \varphi(x_{m-r+3}) \cdot (x - x_{m-r+3}) \cdot \ \dots \cdot (x - x_{m-r+2+k}).$$

Приложение к лагранжевым сплайнам

Согласно формуле 4 свойств конечных разностей

$$(\Delta_h^n f)(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(t+kh).$$

Поэтому

$$\Delta_h^k \varphi_s(x_{m-r+3}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \varphi_s \left(x_{m-r+3} + \frac{i}{m} \right). \qquad (4)$$

Поскольку $\varphi_s(x) = 0$ при $-1 \le x \le 0$, из формулы (4) следует, что $\Delta_h^k \varphi_s(x_{m-r+3}) = 0$ при $0 \le k < r-1$, а при $k = r-1$ в сумме (4) имеется только одно ненулевое слгаемое при $i = k = r-1$, т.е.

$$\Delta_h^{r-1} \varphi_s(x_{m-r+3}) = \varphi_s \left(\frac{1}{m} \right).$$

Приложение к лагранжевым сплайнам

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
p_{r-1}(x_0) \quad &= \frac{m^{r-s-1}}{(r-1)!s!}\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}\right)\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{2m}\right)\cdot \\
&\quad \ldots \cdot \left(\frac{1}{m}-\frac{r-2}{2m}\right)(-1)^{r-2} \\
&= (-1)^r\frac{m^{r-s-1}}{(r-1)!s!}\frac{1}{2^{r-1}}\cdot\frac{1}{m^{r-1}}\cdot(2(r-2)-1)! \\
&= \frac{C(r)}{s!}m^{-s}\cdot(-1)^r,
\end{aligned}
$$

где $C(r)=\dfrac{(2(r-2)-1)!}{2^{r-1}(r-1)!}$. Поскольку $x_0\le 0$, то $\varphi_s(x_0)=0$. Поэтому

$$
\delta_n^r(\varphi_s)=\delta_{2m+1}^r(\varphi_s)=\|\varphi_s-\mathbf{l}_r(\mathbf{x}_n^0,\varphi_s)\|\ge\|\varphi_s(x_0)-\mathbf{l}_r(\mathbf{x}_n^0)(x_0)\|=
$$
$$
=|p_{r-1}(x_0)|=\frac{C(r)}{s!}(2m+1)^{-s}\left(2+\frac{1}{m}\right)^s\ge\frac{2^sC(r)}{s!}n^{-s}.
$$

Итак, неравенство (2) доказано для нечетных n.

Приложение к лагранжевым сплайнам

Случай четного n получается теми же средствами.
Пусть число узлов четно, т.е. $n = 2m$. Тогда $m \geq r$ и имеем узлы интерполяции

$$x_k = -1 + \frac{k-1}{m - \frac{1}{2}}, \quad k = 1, 2, \ \ldots, 2m = n.$$

Положим $x_0 = x_{m-r+2} + \frac{1}{2m-1} \in [x_{m-r+2}, x_{m-r+3}] \subset [x_{m-r+2}, x_{m+1}]$ и вычислим

$$|\mathbf{l}_r(\mathbf{x}_n^0, \varphi_s)(x_0) - \varphi_s(x_0)|$$

в этой точке. По определению лагранжева сплайна $\mathbf{l}_r(\mathbf{x}_n^0, \varphi_s)(x_0) = p_{r-1}(x_0)$, где $p_{r-1}(x)$ — интерполяционный полином степени меньшей r, построенный по значениям $\varphi(x)$ в узлах $x_{m-r+2}, \ \ldots, x_{m+1}$.

Приложение к лагранжевым сплайнам

Представим этот многочлен в форме Ньютона, положив $a = x_{m-r+2}, h = \dfrac{1}{m-\frac{1}{2}}$:

$$p_{r-1}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \Delta_h^k \varphi(x_{m-r+2}) \cdot (x - x_{m-r+2}) \cdot \ \ldots \cdot (x - x_{m-r+1+k}).$$

По свойству 4 конечных разностей имеем

$$(\Delta_h^n f)(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(t+kh).$$

Поэтому

$$\Delta_h^k \varphi_s(x_{m-r+2}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \varphi_s\left(x_{m-r+2} + \frac{i}{m-\frac{1}{2}}\right). \qquad (5)$$

Выполняются соотношения $x_i < 0$ при $i < m$ и $x_m \in (0,1]$. Поэтому $\Delta_h^k \varphi_s(x_{m-r+2}) = 0$ при $0 \le k < r-1$ и выражении для разности порядка $r-1$ только последнее слагаемое ненулевое и сумма равна $\varphi_s(x_{m+1}) = \varphi_s(\frac{1}{2m-1})$.

Приложение к лагранжевым сплайнам

Поэтому $\Delta_h^k \varphi_s(x_{m-r+2}) = 0$ при $0 \le k < r-1$ и в выражении для разности порядка $r-1$ только последнее слагаемое ненулевое и сумма равна

$$\varphi_s(x_{m+1}) = \varphi_s\left(\frac{1}{2m-1}\right) = \frac{(2m-1)^{-s}}{s!}.$$

Следовательно,

$$p_{r-1}(x) = \frac{(2m-1)^{r-s-1}}{2^{r-1}(r-1)!s!}(x - x_{m-r+2}) \cdot \ \ldots \cdot (x - x_m).$$

Подставляя $x = x_0$, получим

$$p_{r-1}(x_0) = \frac{C(r)}{r!}(-1)^r \cdot (2m-1)^{-s},$$

де константа $C(r)$ была определена при рассмотрении нечетного n.

Приложение к лагранжевым сплайнам

Поскольку $x_0 \leq 0$, то $\varphi_s(x_0) = 0$. Поэтому

$$\delta_n^r(\varphi_s) = \|\varphi_s - \mathbf{I}_r(\mathbf{x}_{n,s}^0)\| \geq |p_{r-1}(x_0)| > \frac{C(r)n^{-s}}{s!}.$$

Поэтому выполняется неравенство

$$\delta_n^r(\varphi_s) \geq Cn^{-s},$$

где $C = \frac{C(r)}{s!}$.
В случае $r = 2$, и следовательно, $s = 1$ определим функцию $f_1 \in W^1(1, [0, 1])$. Пусть

$$g(x) = (-1)^n, \quad \text{для} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq x < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k}, \ n = 0, 1, \ \ldots.$$

Тогда

$$f_1(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Задачи

1. Доказать, что при $n > 1$ выполняется неравенство $\delta_n^2(f_1) \geq \frac{1}{24n}$.