Теоретические основы численных методов. Теоремы Чебышева. Теорема Джексона

Шокуров

25 марта 2025 г.

Теорема Чебышева

Теорема 1. Пусть $L \subset C[I]$ — чебышевское подпространство, $n = \dim L \geq 1$ и $f \in C[I]$ – произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $n+1$ различные точки $a \leq x_1 < x_2 < \ \ldots < x_{n+1} \leq b$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $|r(x_i)| = \|r\| = \sup\limits_{x \in I} |r(x)|$ при $1 \leq i \leq n+1$,
2. $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \ \ldots = (-1)^n \cdot r(x_{n+1})$.

Теорема 2. Пусть $L \subset C[\mathbf{S^1}]$ — чебышевское подпространство, $2n - 1 = \dim L \geq 1$ и $f \in C[\mathbf{S^1}]$ — произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $2n$ различные точки $0 \leq x_1 < x_2 < \ \ldots < x_{2n} < 2\pi$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $|r(x_i)| = \|r\| = \sup\limits_{x \in S^1} |r(x)|$ при $1 \leq i \leq 2n$,
2. $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \ \ldots = -r(x_{2n})$.

Доказательство теорем Чебышева

Теоремы 1 и 2 будут доказаны в следующих важных частных случаях: $D = I = [a, b]$, $L = \mathcal{P}_n$, $n > 0$ и $D = \mathbf{S^1}$ и $L = \mathcal{T}_{2n-1}$.

Лемма 1. Пусть $r, g \in C[D]$,
$M = M(r) = \{x \in D \quad | \quad |r(x)| = \|r\|\}$. Тогда, если $a = \inf\limits_{x \in M} r(x)g(x) > 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < k < \delta$ всегда выполнено неравенство $\|r - kg\| < \|r\|$.

Лемма 2. Пусть $r \in C[I]$ ненулевая функция,
$M = M(r) = \{x \in I \quad | \quad |r(x)| = \|r\|\}$. Тогда M представимо в виде объединения, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$, где $M_k,\ 1 \leq k \leq m,\ m \geq 1$ замкнутые непустые попарно непересекающиеся множества, причем: 1) $M_k < M_{k+1},\ 1 \leq k \leq m$, 2) $\mathrm{sign(r(x))} = -\mathrm{sign(r(y))}$ для любых $x \in M_k,\ y \in M_{k+1},\ 1 \leq k \leq m$.

Доказательство. Лемма 1

Доказательство леммы 1. Множество $M \subset I$ замкнуто и ограничено, поэтому компактно. Поэтому существует такое $c > 0$,что $\forall x \in M$ выполнено $r(x)g(x) > 2c$. Для каждой точки $x \in M$ имеется открытый шар радиуса $r_x > 0$, такой что для любой точки y этого шара выполняются условия $r(x)r(y) > 0$, $r(y)g(y) > c$ и $|r(y)| > \|r\|/2$. Рассмотрим покрытие M открытыми шарами $U(x, r_x/4)$ (по всем $x \in M$). Поскольку M компактно, можно выделить его конечное подпокрытие $U(x_1, r_{x_1}/4), \ \ldots, U(x_n, r_{x_n}/4)$. Дополнение в I объединения этих шаров — компактное множество N. Тогда $\|r\| > \max\limits_{x\in N} |r(x)| = r_0$. Пусть $\max\limits_{x\in N} |g(x)| = g_0$. Тогда существует такое δ_1, что $0 < r_0 - kg_0 < r_0 + kg_0 < \|r\|$ для всех $0 < k < \delta_1$. Поэтому для любого $x \in N$ и любого $0 < k < \delta_1$ всегда $|r(x) - kg(x)| < r_0 + kg_0 < \|r\|$.

Доказательство

Выберем теперь такое $\delta_2 > 0$, что для всех $x \in I$ выполняется $\delta_2 |g(x)| < \|r\|/4$. Тогда для всех $0 < k < \delta_2$ и $x \in \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, r_{x_i})$ выполняется $|r(x) - kg(x)| < \|r\|$. Пусть $N_1 = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i}/2)$, где $B(x, r)$ — замкнутый шар радиуса r. Тогда N_1 компакт и, следовательно, для любого $0 < k < \delta_2$ и $x \in N_1$ выполняется неравенство $\max_{x \in N_1} |r(x) - kg(x)| = a_k < \|r\|$.

Поскольку $I = N \cup N_1$ величина $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ удовлетворяет условиям леммы.

Доказательство. Лемма 2

Представим $M = M^+ \cup M^-$, где $M^+ = \{x \in M \mid r(x) > 0\}$ и $M^- = \{x \in M \mid r(x) < 0\}$. Пусть $x \in M$. Положим $M_x^+ = \{y \in M \mid r(y) > 0, \forall z \in (x, y) \cap M \;\; r(z) > 0\}$ и $M_x^- = \{y \in M \mid r(y) < 0, \forall z \in (x, y) \cap M \;\; r(z) < 0\}$. Возможно, что при некоторых $x_0 \neq x_1$ выполняется $M_{x_0}^+ = M_{x_1}^+$. Выберем по одному экземпляру таких множеств. Пусть это множества M_a^+ при $a \in A$ и M_b^- при $b \in B$. Тогда $M^+ = \bigcup\limits_{a \in A} M_a^+$, $M^- = \bigcup\limits_{b \in B} M_b^-$, $M_a^+ \neq M_{a'}^+$ при $a \neq a'$ и $M_b^+ \neq M_{b'}^-$ при $b \neq b'$.

Доказательство. Лемма 2

Множества A и B конечны, поскольку в противном случае имеется точка $x_0 \in I$ в любой окрестности которой бесконечно много элементов из A или B. Тогда $x_0 \in A$ или $x_0 \in B$. В этом случае $M^+_{x_0}$ пересекается с M^+_a (соответственно, с $M^-_{x_0}$) для бесконечного числа элементов $a \in A$ (соответственно, $b \in B$). Тогда для некоторого $a \neq x_0$ (соответственно, $b \in B$) выполняется $M^+_{x_0} = M^+_a$ ($M^-_{x_0} = M^+_b$).
Пусть $a \neq a'$ и $(a, a') \cap A = \emptyset$. Тогда множество $(a, a') \cap B$ состоит из одного элемента. Расположим теперь элементы множеств A и B в порядке чередования

$$\dots a_1 < b_1 < a_2 < \ \dots < a_k \ \dots,$$

тогда

$$\dots M^+_{a_1} < M^-_{b_1} < M^+_{a_2} < \ \dots < M^+_{a_k} \ \dots$$

Доказательство теоремы Чебышева для $L = \mathcal{P}_n$.

1. Необходимость. Пусть $f \in C[I]$ и $p \in L$ наименее уклоняется от f. Рассмотрим разность $r = f - p$. При $r = 0$ утверждение теоремы очевидно. Если $r \neq 0$, рассмотрим $M = M(r) = \{x \in I \quad | \quad |r(x)| = \|r\|\}$. Тогда множество M представимо в виде объединения, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$, непустых замкнутых непересекающихся множеств, удовлетворяющих условиям 1 и 2 леммы 2. Пусть не существует чебышевского альтернанса порядка $n+1$ для функции $r(x)$. Тогда $m \leq n$. Поскольку все множества M_k компактны, существует последовательность точек

$$M_1 < y_1 < M_2 < y_2 < \ \ldots < y_{m-1} < M_m.$$

Рассмотрим многочлен $h(x) = \sigma(y_1 - x) \cdot (y_2 - x) \cdot \ \ldots \cdot (y_{m-1} - x)$ степени $m-1$, где $\sigma = \mathrm{sgn}\, \mathrm{r}(\mathrm{M}_1)$. Тогда функции $r(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условию леммы 1. Поэтому при некотором $\delta > 0$ выполнено неравенство $\|r - \delta h\| < \|r\|$. Следовательно многочлен $p + \delta h \in L$ дает лучшее приближение. Поэтому предположение о том, что чебышевского альтернанса не существует неверно.

Доказательство теоремы Чебышева для $L = \mathcal{P}$

2. Достаточность. Пусть для разности $r(x) = f(x) - p(x)$ существует чебышевский альтернанс $x_1, \ \ldots x_{n+1}$ порядка $n+1$, а наилучшим приближением является многочлен $q(x)$. Тогда

$$|f(x_k) - q(x_k)| < \|r\| = |r(x_k)| = |f(x_k) - p(x_k)|. \tag{1}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |q(x_k) - p(x_k)| &= |(f(x_k) - p(x_k)) - (f(x_k) - q(x_k))| \\ &\geq ||(f(x_k) - p(x_k))| - |(f(x_k) - q(x_k))|| \\ &= |(f(x_k) - p(x_k))| - |(f(x_k) - q(x_k))| \\ &> 0, \end{aligned}$$

причем согласно (1) $\operatorname{sgn}(q(x_k) - p(x_k)) = \operatorname{sgn}(f(x_k) - p(x_k))$.
Следовательно, существуют точки
$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ \ldots < y_n < x_{n+1}$, в которых $q(y_k) - p(y_k) = 0$.
Поскольку $q(x) - p(x) \in L$, то $q(x) - p(x) = 0$ для всех $x \in I$. Поэтому $q(x) = p(x)$, т.е. многочлен $p(x)$ дает наилучшее приближение. $\blacksquare$

Теорема Хаара

Теорема Чебышева для периодического случая доказывается аналогично.
Теперь выведем в двух частных случаях теорему Хаара.

Теорема

Пусть $D = I,\ L = \mathcal{P}_n$ *или* $D = \mathbf{S}^1,\ L = \mathcal{T}_{2n-1}$*. Тогда для любого* $f \in C[D]$ *наилучшая аппроксимация существует и единственна.*

Доказательство теоремы Хаара

Доказательство. Существование следует из теоремы Бореля. **Единственность**. Пусть существует две наилучшие аппроксимации p и q функции f. Тогда, согласно теореме Бореля, наилучшей аппроксимацией является и $(p(x) + q(x))/2$. Поэтому согласно теореме Чебышева существует чебышевский альтернанс $x_1 < x_2 < \ \ldots < x_{m+1}$ для разности $f(x) - (p(x) + q(x))/2$, где $m = \dim L$. Тогда

$$
\begin{aligned}
2\varepsilon(f, L) &= \|2f - (p+q)\| = |2f(x_k) - p(x_k) - q(x_k)| \\
&= |(f(x_k) - p(x_k)) + (f(x_k) - q(x_k))| \\
&\leq |(f(x_k) - p(x_k))| + |(f(x_k) - q(x_k))| \\
&\leq \|f - p\| + \|f - q\| = 2\varepsilon(f, L).
\end{aligned}
$$

Следовательно, все неравенства в приведенных выше соотношениях являются равенствами. Тогда $|f(x_k) - p(x_k)| = \|f - p\|$, $|f(x_k) - q(x_k)| = \|f - q\|$ и $\mathrm{sgn(f(x_k) - q(x_k)) = sgn(f(x_k) - p(x_k))}$. Поэтому $f(x_k) - p(x_k) = f(x_k) - q(x_k)$, т.е. $p(x_k) = q(x_k)$. Поскольку L чебышевское, из полученных равенств следует, что $p(x) = q(x)$ для всех $x \in D$. ■

Примеры

Пример 1. Пусть $D = [-1, 1]$, $L = \mathcal{P}_n$ и $f(x) = x^n \notin L$. Рассмотрим алгебраический многочлен $T_n(x) = \cos n \arccos x$ степени n со старшим коэффициентом, равным 2^{n-1}. Этот многочлен имеет чебышевский альтернанс порядка $n + 1$. Поэтому согласно теореме Чебышева многочлен $f(x) - T_n(x)/2^{n-1} \in \mathcal{P}_n$ является наименее уклоняющимся элементом от $f(x) = x^n$ в L и $\varepsilon(x^n, \mathcal{P}_n) = 1/2^{n-1}$.

Задачи

Задача 1. Постройте чебышевский альтернанс порядка $n+1$ для многочлена $T_n(x) = \cos(n \arccos x) \in \mathcal{P}_{n+1}$.
Задача 2. Не существует чебышевских подпространств размерности большей 1 на множестве, являющемся объединением трех отрезков с общим концом.
Задача 3. Чебышевское подпространство размерности большей 1 определено на связном компактном множестве тогда и только тогда, когда это множество гомеоморфно отрезку или окружности.
Задача 4. Докажите теорему Чебышева для произвольного чебышевского подпространства в случае $D = \mathbf{S}^1$.

Задача 5. Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Рассмотрим 2π-периодическую функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 3^k x$$

и для целого $m \geq 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos 3^k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$.

Задачи

Задача 6. Пусть $f \in C[D]$ и для некоторого p из чебышевского подпространства L размерности n найдутся точки $a \leq x_1 < x_2 < \ \dots < x_{n+1} \leq b$, в которых разность $r = f - p$ принимает ненулевые значения с чередующимися знаками (в силу задачи 2 это множество упорядочено, для $\mathbf{S}^1$ этот порядок задает направление обхода по окружности.) Тогда

$$\varepsilon(f, L) \geq \min_{1 \leq k \leq n+1} |r(x_k)|.$$

Задача 7. Пусть $f \in C[\mathbf{S}^1]$ — четная функция. Тогда наименее уклоняющийся многочлен Чебышева также является четной функцией.

Задачи

Задача 7. Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, а $1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — такие натуральные числа, для которых все отношения n_{k+1}/n_k суть целые нечетные числа. Положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos n_k x$$

и для целого $m \ge 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos n_k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}) = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$.

Неравенство Джексона

Согласно теореме Вейерштрасса выполнено предельное соотношение

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) = 0.$$

Тем не менее остается вопрос о скорости сходимости. Оказывается скорость сходимости определяется классом гладкости функции $f(x)$.

Определение (Класс $W^r(M)$)

Пусть $M > 0$ и r натуральное. Классом $W^r(M)$ называется множество $r - 1$ дифференцируемых 2π-периодических функций, для которых $f^{(r-1)}(x) \in L_1(M)$.

Теорема (Джекссон)

Существует такая константа C, что для любых $r, n, M > 0$ и $f \in W^r(M)$ выполняется неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C^r \cdot M/n^r.$$

Ядро.

В качестве константы C можно взять $(3\pi^3/4) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 v}{v^3} dv$.

Определение (Ядро)

Положительным ядром называется последовательность 2π-периодических функций $K_n(x)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $K_n(x) \geq 0$,
2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(x) dx = 1$ *для всех* $0 < \delta < \pi$

При выполнении свойств 2 и 3 последовательность K_n называется ядром.

Лемма о положительном ядре

Лемма (Лемма о положительном ядре)

Пусть $K_n(x)$ — положительное ядро. Тогда для любой 2π-периодической функции $f(x)$ последовательность функций $f_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)K_n(t)dt$ сходится равномерно к функции $f(x)$.

Доказательство. Ввиду свойств ядра $\forall_{0<\delta<\pi}$ имеем

$$
\begin{aligned}
f(x) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t))K_n(t)dt \\
&= \left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} \right) (f(x) - f(x+t))K_n(t)dt.
\end{aligned}
$$

Доказательство леммы о положительном ядре

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности и периодичности функции $f(x)$, эта функция равномерно непрерывна и ограничена на всей числовой прямой. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|x_1 - x_2| \leq \delta$ следует, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, и существует такое M, что $|f(x)| < M$ при всех x.

Доказательство леммы о положительном ядре.

Фиксируем такое $\delta < \pi$. Тогда ввиду неотрицательности $K_n(t)$, имеем

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{-\delta}^{\delta}(f(x)-f(x+t))K_n(t)dt\right| &\leq \int\limits_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x+t)|K_n(t)dt \\
&< \int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}K_n(t)dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}K_n(t)dt,
\end{aligned}$$

поскольку при $t \in [-\delta, \delta]$ всегда $|x-(x+t)| = |t| \leq \delta$.

Доказательство леммы о положительном ядре.

В силу ограниченности функции $|f(x)| < M$ выполнено неравенство

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi}\right) |f(x) - f(x+t)| K_n(t)dt \leq 2M \left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi}\right) K_n(t)dt = 2M\left(1 - \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt\right).$$

Доказательство леммы о положительном ядре.

Поэтому

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt \right| &= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt \right| \\
&= \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t))K_n(t)dt \right| \\
&= \left| \left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} \right) (f(x) - f(x+t))K_n(t)dt \right| \\
&\leq \left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} \right) |(f(x) - f(x+t))K_n(t)|dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt + 2M \left(1 - \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt \right).
\end{aligned}$$

Доказательство леммы о положительном ядре.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(x)dx = 1$, последнее выражение является бесконечно малой, не зависящей от x. ■

Неравенство Бесселя

Рассмотрим пространство $B = L_2^*(-\pi, \pi]$ кусочно непрерывных функций с интегрируемым квадратом. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Пусть $H_n = \{1, \cos x, \sin x, \ \ldots, \cos nx, \sin nx\}$ — его $2n+1$-мерное подпространство. Тогда согласно задаче 4 предыдущей лекции выполняется равенство

$$\varepsilon(f, H_n) = \left(\|f\|^2 - (1, f)^2 - \sum_{k=1}^{n} ((f(x), \cos kx)^2 + (f(x), \sin kx)^2) \right)^{1/2}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x), \cos nx) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x), \sin nx) = 0.$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$

Ядро Дирихле

Лемма (Определение ядра Дирихле)

Последовательность функций

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1} \cos kx = \frac{\sin\left(n - 1/2\right)x}{2\pi \sin(x/2)}$$

определяет ядро. Это ядро называется ядром Дирихле.

Доказательство леммы о ядре Дирихле

Доказательство. По определению функции D_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt = 1.$$

Проверим свойство 3 определения ядра. Пусть $0 < \delta < \pi$. Имеем

$$\int_{-\delta}^{\delta} D_n(t)dt = 1 - \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) D_n(t)dt.$$

Достаточно проверить, что $\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) D_n(t)dt$ бесконечно малая величина.

Доказательство леммы о ядре Дирихле

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0 & |x| < \delta \\ 1 & \delta \le |x| \le \pi \end{cases}$$

Положим $h(x) = g(x)/\sin\frac{x}{2} \in L_2^*[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) D_n(t)dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)tdt = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos\frac{t}{2}\sin ntdt - \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin\frac{t}{2}\cos ntdt.$$

Согласно неравенству Бесселя последние два интеграла стремятся к нулю. ■

Ядро Фейера

Лемма (Определение ядра Фейера)

Последовательность функций

$$\Phi_n(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)}{n}$$

определяет положительное ядро. Это ядро называется ядром Фейера.

Доказательство леммы о ядре Фейера

Доказательство. По определению функции $\Phi_n(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n} D_k(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 1.$$

Неравенство $\Phi_n(t) \geq 0$ следует из соотношения

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi n}\cdot\frac{1-\cos nt}{\sin^2(t/2)}.$$

Фиксируем $0 < \delta \leq \pi$. Функция

$$\frac{1-\cos nt}{\sin^2(t/(2\pi))}$$

ограничена на $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$. Следовательно, на этом множестве $\Phi_n(t)\rightrightarrows 0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\Phi_n(t)dt = 0.\blacksquare$$

Теорема Фейера

Лемма

Пусть $h(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ *и* $f(x)$ *— непрерывная периодическая функция на прямой. Тогда*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)h(x)dx \in \mathcal{T}_{2n-1}.$$

Теорема (Фейер)

Теорема 2 (Фейер). *Для любой непрерывной периодической функции с периодом* 2π *на прямой последовательность тригонометрических многочленов*

$$f_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\Phi_n(t)dt$$

равномерно сходится к функции f*.*

Теорема Вейерштрасса

Теорема Фейера следует непосредственно из леммы о положительном ядре и лемме о ядре Фейера.

Теорема (Вейерштрасс)

Для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует равномерно сходящаяся к ней последовательность многочленов.

Для доказательства теоремы потребуется

Лемма

Функцию $\cos nx$ можно представить как многочлен степени n от переменной $\cos x$.

Доказательство леммы

Доказательство. При $n = 0$ и $n = 1$ утверждение очевидно.Пусть теорема доказана для всех $n \le k$ ($k > 0$) и при всех $n \le k$ выполнено равенство $\cos nx = P_n(\cos x)$. Докажем, что тогда теорема справедлива и при $n = k + 1$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\cos(k+1)x &= \cos kx \cos x - \sin kx \sin x \\
&= P_k(\cos x)\cos x \\
&\quad -(\sin(k-1)x\cos x + \cos(k-1)x \sin x)\sin x \\
&= P_k(\cos x)\cos x \\
&\quad -\sin(k-1)x \sin x \cos x - \cos(k-1)x \sin^2 x \\
&= P_k(\cos x)\cos x + (\cos kx - \cos(k-1)x\cos x)\cos x \\
&\quad -\cos(k-1)x(1-\cos^2 x) \\
&= P_k(\cos x)\cos x + P_k(\cos x)\cos x - P_{k-1}(\cos x)\cos^2 x \\
&\quad -P_{k-1}(\cos x)(1-\cos^2 x) \\
&= 2P_k(\cos x)\cos x - P_{k-1}(\cos x) \\
&= P_{k+1}(\cos x). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Доказательство теоремы Вейерштрасса

Определим функцию на отрезке $[0, 1]$

$$g(s) = f((1 - s)a + sb).$$

Функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ восстанавливается по функции $g(s)$, заданной на отрезке $[0, 1]$, по формуле

$$f(x) = g\left(\frac{x - a}{b - a}\right).$$

Поэтому достаточно установить теорему только для функций, заданных на отрезке $[0, 1]$. Будем далее считать, что $f(x) \in C[0, 1]$.

Доказательство теоремы Вейерштрасса

Продолжим функцию $f(x)$ до четной функции на отрезке $[-1, 1]$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

и определим четную функцию на всей числовой прямой

$$g(t) = h(\cos t).$$

В силу определения и условий теоремы, функция $g(t)$ непрерывна и периодична с периодом $T = 2\pi$. Следовательно, выполнены условия теоремы Фейера и последовательность тригономертических многочленов $\sigma_n(t; g)$ сходится равномерно к функции $g(t)$.

Доказательство теоремы Вейерштрасса

Поскольку функция $g(t)$ четная, коэффициенты $b_n = 0$ и, следовательно,

$$\sigma_n(t; g) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kt =$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(\cos t) = Q_n(\cos t),$$

где $P_k(x)$ — многочлены из доказанной выше леммы и, следовательно, $Q_n(x)$ также многочлен степени n. Покажем теперь, что последовательность $Q_n(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$.

Поскольку $Q_n(\cos t) \rightrightarrows g(t)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ всегда $|g(t) - Q_n(\cos t)| < \varepsilon$.
Следовательно, при $n > N$ всегда $|f(\cos t) - Q_n(\cos t)| < \varepsilon$, т.е. для всех $x \in [0, 1]$ выполнено $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$. ■

Ядро Джексона

Лемма (Определение ядра Джексона)

Последовательность функций

$$J_n(x) = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)}\left(\frac{\sin nx/2}{n\sin x/2}\right)^4 = \frac{6\pi n}{2n^2+1}\Phi_n^2(x)$$

определяет положительное ядро. Это ядро называется ядром Джексона.

Задача 8. Докажите лемму 5.

Доказательство. Согласно определению $J_n(x) \in \mathcal{T}_{4n-1}$. Поэтому $J_n(x)$ тригонометрический многочлен степени $2(n-1)$.
Следовательно, $\forall f \in C[\mathbf{S}^1]$

$$T_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(t-x)f(t)dt$$

— тригонометрическиq многочлен степени $\leq 2(n-1)$.

Доказательство теоремы Джексона.

Пусть $r = 1$ и $f \in W^1(M)$. Для $m \geq 1$ рассмотрим тригонометрический многочлен

$$T(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_m(t-x)f(t)dt, \quad T(x) \in \mathcal{T}_{4m-3}.$$

Учитывая четность ядра Джексона и условие Липшица для функции f, получаем

$$|f(x) - T(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} J_m(t)(f(x) - f(x+t))dt \right| \leq$$

$$M \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_m(t)dt = 2M \int_{0}^{\pi} tJ_m(t)dt.$$

Доказательство теоремы Джексона.

Ввиду неравенства $\sin(t/2) \geq t/\pi$ при $0 \leq t \leq \pi$ получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\pi tJ_m(t)dt &\leq \frac{3\pi^3}{2m(2m^2+1)}\int\limits_0^\pi \frac{\sin^4 mt/2}{t^3}dt \\ &= \frac{3\pi^3 m}{8(2m^2+1)}\int\limits_0^{m\pi/2}\frac{\sin^4 t}{t^3}dt < \frac{C}{4m}\end{aligned}$$

Следовательно, $\|f-T\| < \frac{CM}{2m}$. Если $n = 2m$, то с помощью ядра J_m построим тригонометрический многочлен $T \in \mathcal{T}_{4m-3} = \mathcal{T}_{2n-3} \subset \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого, как доказано выше, $\|f-T\| < \frac{CM}{2m} = CM/n$. Если $n = 2m-1$, то с помощью ядра J_m строим тригонометрический многочлен $T \in \mathcal{T}_{4m-3} = \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого, как доказано выше, $\|f-T\| < \frac{CM}{2m} < CM/n$.
Заметим, что если интеграл по периоду от функции f равен нулю, то и вычисляемый тригонометрический многочлен T также удовлетворяет этому условию.

Доказательство теоремы Джексона.

Пусть теперь теорема доказана для произвольного r и более того, если интеграл по периоду равен нулю, то и полученная аппроксимация удовлетворяет этому свойству. Докажем, что тогда то же выполнено и для $r+1$. Пусть $f \in W^{r+1}(M)$. Тогда $f' \in W^{r}(M)$. Причем, очевидно, интеграл по периоду от функции f' равен нулю. Тогда согласно индукционному предположению существует $T(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого выполнено неравенство $\|f' - T\| < C^{r}Mn^{-r}$ и интеграл по периоду от T равен нулю. Тогда свободный член тригонометрического многочлена T нулевой. Поэтому существует тригонометрический многочлен U той же степени с нулевым свободным членом, для которого $U'(x) = T(x)$. Следовательно, $\|(f-U)'\| = \|f' - T\| < C^{r}Mn^{-r}$. Поэтому $f - U \in W^{1}(C^{r}Mn^{-r})$. Следовательно, существует $t \in \mathcal{T}_{2n-1}$ такой, что $\|f - U - t\| < C(C^{r}Mn^{-r})/n = C^{r+1}M/n^{r+1}$. Причем, если интеграл по периоду функции f равен нулю, то это же справедливо и для многочлена $U + t \in \mathcal{T}_{2n-1}$. $\blacksquare$

Задачи.

Задача 9. Докажите, что для четной функции существует четный тригонометрический многочлен, удовлетворяющий неравенству из теоремы Джексона.

Теорема (Джексон)

Пусть $f \in W^r(M, [a, b])$. Тогда для любого $n \geq r$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) < \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \frac{A_r M}{n^r}, \quad n \geq r,$$

где константа A_r не зависит от $M,\ n,\ f$ и равна $A_r = (Cr)^r/r!$ (C — константа из теоремы Джексона для периодических функций).

Задача 10. Докажите теорему Джексона для непериодических функций. Указание: сначала сведите доказательство к случаю функций f на отрезке $[-1, 1]$, затем перейдите к функциям вида $h(t) = f(\cos t)$.