Задача 1. Пусть **B** – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), где $(x, y) \in$ **B**. Тогда пространство **B** является строго нормированным относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Задача 2. Пусть **B** $= L_p(D, \mu)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а μ мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Элементами пространства **B** являются классы эквивалентных, измеримых по Лебегу функций $f : D \to \mathbb{R}$, для которых функция f^p является μ-суммируемой по D, а две функции эквивалентны, если их разность равна нулю почти всюду в D. Норма в **B** задается равенством:

$$\|f\| = \left(\int\limits_D |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда пространство **B** является строго нормированным относительно введенной нормы. Это утверждение следует из неравенства Минковского и условий при которых оно превращается в равенство.

Задача 3. Доказать, что банахово пространство строго нормировано тогда и только тогда, когда для любых различных элементов $x \neq y$ единичной сферы и $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$\|\alpha\, x + (1 - \alpha)\, y\| < 1.$$

Задача 4. Доказать, что банахово пространство **B** $= C[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ не является строго нормированным.

Задача 5. Доказать, что банахово пространство классов интегрируемых по Лебегу функций $\mathcal{L}_1[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \int\limits_0^1 |f(x)| \, d\mu$ не является строго нормированным.

Задача 6. Пусть **H** — гильбертово пространство и $\mathbf{H}_n$ — его n-мерное подпространство. Пусть отображение $\pi = \pi_n : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ сопоставляет элементу $x \in \mathbf{H}$ наименее уклоняющийся элемент из $\mathbf{H}_n$. Доказать, что

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k$$

и

$$\varepsilon(x, \mathbf{H}_n) = \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $e_1, \; \ldots e_n$ — произвольный ортонормированный базис.

Задача 7. Пусть $M \subset$ **B** и $\lambda \in$ **R** и $x, \; \lambda\, x \in P_M$. Доказать, что тогда выполнено равенство $\pi(\lambda\, x) = \lambda\, \pi(x)$.

Задача 8. В $C[\mathbf{S}^1]$ не существует четномерных Чебышевских подпространств.

Задача 9. Не существует чебышевских подпространств размерности большей 1 на множестве, являющемся объединением трех отрезков с общим концом.

Задача 10. Чебышевское подпространство размерности большей 1 определено на связном компактном множестве тогда и только тогда, когда это множество гомеоморфно отрезку или окружности.

Задача 11. Докажите теорему Чебышева для произвольного чебышевского подпространства в случае $D = \mathbf{S}^1$.

Задача 12. Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится. Рассмотрим 2π-периодическую функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 3^k x$$

и для целого $m \geq 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos 3^k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot 3^m+1}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Задача 13. Пусть $f \in C[D]$ и для некоторого p из чебышевского подпространства L размерности n найдутся точки $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, в которых разность $r = f - p$ принимает ненулевые значения с чередующимися знаками (в силу задачи 2 это множество упорядочено, для $\mathbf{S}^1$ этот порядок задает направление обхода по окружности.) Тогда

$$\varepsilon(f, L) \geq \min_{1 \leq k \leq n+1} |r(x_k)|.$$

Задача 14. Пусть $f \in C[\mathbf{S}^1]$ — четная функция. Тогда наименее уклоняющийся многочлен Чебышева также является четной функцией.

Задача 15. Пусть $a_k > 0$ — такие вещественные положительные числа, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, а $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — такие натуральные числа, для которых все отношения n_{k+1}/n_k суть целые нечетные числа. Определим функцию с помощью формулы

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos n_k x,$$

и для целого $m \geq 0$ положим

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos n_k x.$$

Доказать, что тригонометрический многочлен $T(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в $\mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}$ и $\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2\cdot n_m+1}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Задача 16. Докажите, что последовательность функций

$$J_n(x) = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)} \left(\frac{\sin nx/2}{n \sin x/2} \right)^4 = \frac{6\pi n}{2n^2+1} \Phi_n^2(x)$$

определяет положительное ядро.

Задача 17. Докажите, что для четной функции существует четный тригонометрический многочлен, удовлетворяющий неравенству из теоремы Джексона.

Задача 18. Пусть $f \in W^r(M, [a,b])$. Тогда для любого $n \geq r$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) < \left(\frac{b-a}{2} \right)^r \frac{A_r M}{n^r}, \quad n \geq r,$$

где константа A_r не зависит от $M,\ n,\ f$ и равна $A_r = (Cr)^r/r!$ (C — константа из теоремы Джексона). Указание: сначала сведите доказательство к случаю функций f на отрезке $[-1,1]$, затем перейдите к функциям вида $h(t) = f(\cos t)$.

Задача 19. Доказать, что для произвольных $\varphi_1, \ \ldots, \varphi_n \in \mathbb{R}:$

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cdots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix} =$$

$$2^{(n-1)^2} \prod_{1\le i<k\le n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2},$$

при $n>1$.

$$() \begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \cdots & \sin n\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \cdots & \sin n\varphi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \cdots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix} =$$

$$2^{n(n-1)} \prod_{k=1}^{n} \sin\varphi_k \prod_{1\le i<k\le n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}.$$

(Указание. Воспользуйтесь тем, что $\cos nx$ и $\sin(n+1)x/\sin x$ — многочлены степени n относительно переменной $\cos x$. Найдите их старшие коэффициенты. Используйте определитель Вандермонда.)

Задача 20. 1) Пусть $t_0, \ \ldots, t_{n-1} \in (0,\pi)$ — попарно различные точки и $b_0, \ \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ — произвольные числа. Тогда существует единственный четный тригонометрический многочлен $T(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos kt, \ \alpha_k \in \mathbb{R}$, для которого $T(t_j) = b_j$ при $0 \le j \le n-1$.

2) Пусть $\tau_1, \ \ldots, \tau_{n-1} \in (0,\pi)$ — попарно различные точки и $d_1, \ \ldots, d_{n-1} \in \mathbb{R}$ — роизвольные числа. Тогда существует единственный нечетный тригонометрический многочлен $T(t) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin kt, \ \beta_k \in \mathbb{R}$, для которого $T(\tau_j) = d_j$ при $1 \le j \le n-1$. Воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения для вывода этих утверждений.

Задача 21. Докажите, что разность $\Delta(t) = \Delta_{nr}(t) = B_r(t) - T_{nr}(t)$ обращается в нуль на интервале $(0,\pi)$ при $n \ge 1$ и четном r только в точках t_j, а при нечетном r только в точках τ_k. При $n=1$ и нечетном r корней на $(0,\pi)$ нет. Все корни являются простыми.Указание: рассмотрите процедуру дифференцирования функций $\Delta_{nr}(t) = B_r(t) - T_{nr}(t)$. Сколько раз можно дифференцировать эту функцию? Докажите, что при дифференцировании число нулей не изменится. Воспользуйтесь периодичностью функций. Рассмотрите отдельно случай четного r и случай нечетного r.

Задача 22. Для произвольной функции $f \in C^n[a,b]$ и системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n)$ и любого $x \in [a,b]$

$$f(x) = \pi_n(\mathbf{x}, f)(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k),$$

где $y_1 < \xi < y_2$, а $y_1 = \min\{x, x_1, \ \ldots, x_n\}$ и $y_1 = \max\{x, x_1, \ \ldots, x_n\}$.

Задача 23. Пусть $n \ge 1$, $f \in C^n[a,b]$, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ \ldots, x_n^*)$ — чебышевские интерполяционные узлы на $[a,b]$, $x_k^* = \frac{b-a}{2}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{a+b}{2}$, $1 \le k \le n$. Докажите, что при $a=-1$, $b=1$

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}^*, f)\| \le \frac{1}{2^{n-1}n!}\sup_{x\in[-1,1]}|f^{(n)}(x)|.$$

Задача 24. Пусть $f \in C[a,b]$ — ограничение целой функции. Тогда для произвольного $q>0$ найдется $A>0$, что для любой системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n)$ на отрезке $[a,b]$ выполняется неравенство

$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq Aq^n$. Вывести из этого, что интерполяционный процесс, отвечающий произвольной интерполяционной матрице **X** на отрезке $[a, b]$ равномерно сходится к функции f.

Задача 25. Пусть $f \in C^\infty[a, b]$ и $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \leq BA^n$ для всех $n \geq 1$ и некоторых констант $A > 0$ и $B > 0$. Докажите, что

а) интерполяционный процесс, отвечающий произвольной матрице интерполяционных узлов на $[a, b]$ равномерно на $[a, b]$ сходится к f,

б) функция f аналитична на $[a, b]$.

Рассмотрите примеры $f(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Упражнение 26. Докажите неравенство Лебега

$$\|f - l_r(\mathbf{x}, f)\| \leq (1 + \|l_r\|)\varepsilon(f, \mathcal{L}_r^{(n)}),$$

где $f \in C[a, b]$, $2 \leq r \leq n$.

Задача 27. Проверьте, что сложение функций коммутативно и ассоциативно, а функция $f_0 : \ R \to \mathbb{R}$ является единственным нулевым элементом. Однако, если $D_f \neq \emptyset$, то элемент f не обратим.

Задача 28. Пусть $L_n = \mathcal{L}_{2n+1}$ и $S_n : C[S^1] \to L_n$ — оператор, сопоставляющий непрерывной функции n-ю частичную сумму ее ряда Фурье. Доказать, что выполняется равенство $\|S_n\| = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$.

Задача 29. Пусть $B = C[I_0]$, $I_0 = [-1, 1]$, $L_n = \mathcal{P}_{n+1}$, $n \geq 1$, а $c_n : C[I_0] \to L_n$ — оператор, сопоставляющий функции $f \in C[I_0]$ ее частичную сумму Фурье-Чебышева. Тогда выполняется равенство

$$\|c_n\| = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi |D_n(t)|dt.$$

Задача 30. Доказать равенство

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2(nt/2)}{t} dt = \frac{1}{2} \ln n + O(1).$$