Содержание

ИСП Численный анализ

1. О наилучшем приближении

Определение 1.1 (Наилучшее приближение)

Пусть B – нормированное пространство, фиксируем некоторое непустое подмножество M. Пусть $\|x\|$ обозначает норму элемента x в нормированном пространстве B.

Число

$$\varepsilon(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

называется **наилучшим приближением** элемента $x \in B$ на множестве M.

Элемент $y_* \in M$ называется **наименее уклоняющимся** от x, или **элементом наилучшего приближения** на множестве M, если

$$\|x - y_*\| = \varepsilon(x, M)$$

♣

Определение 1.2. Наилучшее приближение

Предложение 1.2 (Свойства наименьшего уклонения)

1. Для любого $M \subset B$ функция $\varepsilon(x, M)$ равномерно непрерывна по x.
2. Если $M \subset B$ – подпространство, то
   - $\varepsilon(\alpha x, M) = |\alpha| \varepsilon(x, M)$ для любых $x \in B$ и $\alpha \in \mathbb{R}$
   - $\varepsilon(x_1 + x_2, M) \leq \varepsilon(x_1, M) + \varepsilon(x_2, M)$ для любых $x_1, x_2 \in B$
   - $\varepsilon(x, M) \leq \|x\|$ для любого $x \in B$
3. Пусть $M \subset B$ – конечномерное линейное многообразие. Тогда отображение $\pi : P_M \to M$ непрерывно

♠

Предложение 1.3. Свойства наименьшего уклонения

Доказательство. Пункт 2 очевидно следует из свойств нормы.

Для пункта 1 докажем неравенство

$$|\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M)| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Для произвольного $y \in M$ имеем

$$\varepsilon(x_1, M) \leq \|x_1 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\| \Rightarrow \varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \|x_2 - y\|$$

Ввиду произвольности $y \in M$ получим

$$\varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon(x_2, M)$$

Поэтому, выполняется неравенство

$$\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M) \leq \|x_1 - x_2\|$$

Аналогично доказывается неравенство со знаком - и получили, что хотели.

Для пункта 3 рассмотрим сходящуюся в P_M последовательность x_n и пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Докажем сначала, что последовательность $\pi(x_n)$ ограничена

$$\|\pi(x_n)\| = \|\pi(x_n) - x_n + x_n\| \leq$$
$$\|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\| = \varepsilon(x_n, M) + \|x_n\| = \varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M) + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \leq$$
$$|\varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M)| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \underset{\text{п.1}}{\leq}$$
$$|x_n - x_0| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\|$$

Поскольку последовательность x_n сходится, все слагаемые последней суммы ограничены, следовательно, последовательность $\pi(x_n)$ ограничена.

Теперь необходимо доказать, что последовательность $\pi(x_n)$ сходится к $\pi(x_0)$. Пусть это не так. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность x_{n_k}, для которых выполняется неравенство

$$\left|\pi\left(x_{n_k}\right) - \pi(x_0)\right| > \varepsilon$$

Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность x_{n_k} совпадает со всей последовательностью x_n.

Поскольку последовательность $\pi(x_n)$ ограничена, а подпространство M конечномерно, из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Опять БОО будем считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\pi(x_n)$ и $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n) = y_0$. Тогда переходя к пределам в неравенстве из отрицания сходимости:

$$\|\pi(x_n) - \pi(x_0)\| > \varepsilon \Rightarrow \|y_0 - \pi(x_n)\| \geq \varepsilon > 0$$

Согласно определению проекции π выполнены равенства

$$\|\pi(x_n) - x_n\| = \varepsilon(x_n, M)$$

Переходя к пределу в равенстве ввиду непрерывности функции ε

$$\|y_0 - x_0\| = \varepsilon(x_0, M)$$

Следовательно, y_0 – наименее уклоняющийся элемент пространства $M \Rightarrow y_0 = \pi(x_0)$.

Противоречие! $\square$

2. О чебышевских пространствах

Определение 2.1 (Чебышевское пространство)

Пусть $C[D]$ – пространство вещественных непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$, состоящем из бесконечного числа точек, с нормой максимума модуля

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

Особо выделим два случая:

- $D = [a, b]$ при $m = 1$
- $D = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ при $m = 2$

Тогда подпространство $L \subset C[D]$ называется **чебышевским**, если любая ненулевая функция $f \in L$ имеет не более $n - 1$ корня на рассматриваемом множестве, где $n := \dim L$.

♣

Определение 2.2. Чебышевское пространство

Определение 2.2

Элементы чебышевского подпространства L в пространстве функций будем называть **чебышевскими L-полиномами** или просто **чебышевскими полиномами**.

Пусть $f_1, ..., f_n \in C[D]$ и $x_1, ..., x_n \in D$. Тогда введём обозначение

$$\Delta_f(x_1, ..., x_n) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & ... & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & ... & f_n(x_2) \\ ... & ... & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & ... & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

♣

Определение 2.3.

Предложение 2.3

Пусть $L \subset C[D]$ – чебышевское подпространство и $\dim L = n$. Тогда

1. Элементы $e_1, ..., e_n \in L$ линейно независимы тогда и только тогда, когда
$$\Delta_e(x_1, ..., x_n) \neq 0$$
Для любых попарно различных точек $x_1, ..., x_n \in D$
2. Для любых попарно различных точек $x_1, ..., x_n \in D$ и любых n чисел $c_1, ..., c_n$ существует и притом единственный интерполяционный чебышевский многочлен $p \in L$, для которого $p(x_i) = c_i$ при $1 \leq i \leq n$
3. Для любых $n - 1$ попарно различных точек, пространство чебышевских многочленов, обращающихся в этих точках в нуль, имеет размерность 1.

♠

Предложение 2.4.

Доказательство. 1 пункт.

Если $e_1, .., e_n \in L$ линейно зависимы, то найдутся такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) = 0$$

Тогда для любой последовательности точек $x_1, ..., x_n \in D$ линейная однородная система уравнений $Ay = 0$, где $A = \left\| e_j(x_i) \right\|_{1 \le i,j <+n}$ имеет ненулевое решение $y = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T$.

Следовательно, определитель системы равен нулю, но

$$\det A = \Delta_e(x_1, ..., x_n) \Rightarrow \forall x_1, ..., x_n : \Delta_e(x_1, ..., x_n) \equiv 0$$

Обратно, пусть $e_1, ..., e_n \in L$ и существуют n различных точек $x_1, ..., x_n \in D$, для которых выполнено равенство

$$\Delta_e(x_1, ..., x_n) = 0$$

Тогда $\det A = 0$ и, следовательно, столбцы матрицы A линейно зависимы. Поэтому существуют такие числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$ не все равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x_i) = 0$$

Это означает, что функция $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j(x) = 0$ имеет n различных корней. Поскольку подпространство L чебышевское, то отсюда вытекает, что она – тождественный нуль. Следовательно, вектора $e_1, ..., e_n$ линейно зависимы.

Пункт 2.

Пусть $e_1, ..., e_n$ – базис в чебышевском пространстве L и $c_1, ..., c_n$ произвольные n чисел. Тогда, согласно уже доказанному, определитель системы линейных уравнений

$$Ay = c \quad A = \left\| e_j(x_i) \right\|_{1 \le i,j \le n}$$

не равен нулю и, следовательно, эта система имеет ненулевое решение $y^T = (y_1, ..., y_n)$. Тогда $p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k(x)$ определяет искомый интерполяционный многочлен Чебышева.

Пункт 3.

Пусть даны n различных точек $x_0, ..., x_{n-1}$. Согласно предыдущему пункту, существует единственный чебышевский многочлен $p_0(x)$, обращающийся в 0 в точках $x_1, ..., x_{n-1}$ и равный 1 в точке x_0.

Тогда, согласно тому же предыдущему пункту, для любого чебышевского многочлена $q(x)$ обращающегося в 0 в точках $x_1, ..., x_{n-1}$, выполнено равенство

$$q(x) = q(x_0) p_0(x)$$

$\square$

Лемма 2.4

Пусть $r, g \in C[D]$, $M = M(r) = \{x \in D \mid |r(x)| = \|r\|\}$.

Тогда, если

$$a := \inf_{x \in M} r(x)g(x) > 0$$

то существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < k < \delta$ всегда выполнено неравенство

$$\|r - kg\| < \|r\|$$

♡

Лемма 2.5.

Доказательство. Множество $M \subset I$ замкнуто и ограничено, поэтому компактно. Поэтому

$$\exists c > 0 : \forall x \in M : r(x)g(x) > 2c$$

Причём для каждой точки $x \in M$ имеется открытый шар радиуса $r_x > 0$, такой что для любой точки y этого шара выполняются условия

$$r(x)r(y) > 0 \quad r(y)g(y) > c \quad |r(y)| > \frac{\|r\|}{2}$$

Рассмотрим покрытие M открытыми шарами $U(x, \frac{r_x}{4})$. Поскольку M компактно, можно выделить его конечное подпокрытие

$$U\left(x_1, \frac{r_{x_1}}{4}\right), \ldots, U\left(x_n, \frac{r_{x_n}}{4}\right)$$

Дополнение в I объединения этих шаров – компактное множество N. Тогда

$$\|r\| > \max_{x \in N} |r(x)| = r_0$$

Пусть $\max_{x \in N} |g(x)| = g_0$. Тогда

$$\exists \delta_1 : \forall k, 0 < k < \delta_1 : 0 < r_0 - kg_0 < r_0 + kg_0 < \|r\|$$

Поэтому для любого $x \in N$ и любого $0 < k < \delta_1$ всегда

$$|r(x) - kg(x)| < r_0 + kg_0 < \|r\|$$

Выберем теперь такое $\delta_2 > 0$, что для всех $x \in I$ выполняется

$$\delta_2 |g(x)| < \frac{\|r\|}{4}$$

Тогда

$$\forall k, 0 < k < \delta_2 : \forall x \in \cup_{i=1}^{n} U\left(x_i, r_{x_i}\right) : |r(x) - kg(x)| < \|r\|$$

Пусть $N_1 = \cup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{r_{x_i}}{2}\right)$. Тогда N_1 компакт и для любого $0 < k < \delta_2$ и $x \in N_1$ выполняется неравенство $\max_{x \in N_1} |r(x) - kg(x)| = a_k < \|r\|$.

Поскольку $I = N \cup N_1$, величина $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ удовлетворяет условиями леммы. □

Лемма 2.5

Пусть $r \in C[I]$ ненулевая функция,

$$M = M(r) = \{x \in I \mid |r(x)| = \|r\|\}$$

Тогда M представимо в виде объединения $M = \cup_{k=1}^{m} M_k$ где M_k – замкнутые непустые попарно непересекающиеся множества, причём

- $M_k < M_{k+1}, 1 \le k \le m$
- $\forall x \in M_k : \forall y \in M_{k+1} : \operatorname{sign}(r(x)) = -\operatorname{sign}(r(y))$

♡

Лемма 2.6.

Доказательство. Представим $M = M^+ \cup M^-$, где

$$M^+ = \{x \in M \mid r(x) > 0\} \quad M^- = \{x \in M \mid r(x) < 0\}$$

Пусть $x \in M$, положим

$$M_x^+ = \{y \in M \mid r(y) > 0, \forall z \in (x, y) \cap M : r(z) > 0\}$$
$$M_x^- = \{y \in M \mid r(y) < 0, \forall z \in (x, y) \cap M : r(z) < 0\}$$

Возмжно, что при некоторых $x_0 \ne x_1$ выполняется $M_{x_0}^+ = M_{x_1}^+$. Выберем по одному экземпляру таких множеств.

Пусть это множества M_a^+ при $a \in A$ и M_b^- при $b \in B$. Тогда

$$M^+ = \cup_{a \in A} M_a^+ \quad M^- = \cup_{b \in B} M_b^-$$

Множества A и B конечны, поскольку в противном случае имеется точка $x_0 \in I$ в любой окрестности которой бесконечно много элементов из A или B. БОО пусть из A. В этом случае $M_{x_0}^+$ пересекается с M_a^+ для бесконечного числа элементов $a \in A$.

Тогда, для некоторого $a \ne x_0$ выполняется $M_{x_0}^+ = M_a^+$. Что противоречит уникальности каждого взятого множества. Конечное число таких множеств доказано!

Осталось построить чередующиеся множества. Найдём $a' : a' \ne a$, причём $(a, a') \cap A = \emptyset$. Тогда множество $(a, a') \cap B$ состоит из одного элемента. Расположим теперь элементы множеств A и B в порядке чередования по этому алгоритму. $\square$

3. О Чебышеве

Теорема 3.1 (Чебышева)

Пусть $L \subset C[I]$ – чебышевское подпространство, $n = \dim L \geq 1$ и $f \in C[I]$ – произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $n+1$ различные точки $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\forall i = 1..n+1 : |r(x_i)| = \|r\|$
- $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \ldots = (-1)^n r(x_{n+1})$

Такая разность r называется **чебышевским альтернансом**

Теорема 3.2. Чебышева

Доказательство. Необходимость.

Пусть $f \in C[I]$ и $p \in L$ наименее уклоняется от f. Рассмотрим разность $r = f - p$. При $r = 0$ утверждение теоремы очевидно. Если $r \neq 0$, рассмотрим

$$M = M(r) = \{x \in I \mid |r(x)| = \|r\|\}$$

Тогда множество M представимо в виде объединения $M = \cup_{k=1}^{m} M_k$ непустых замкнутых непересекающихся множеств, удовлетворяющим условиям вспомогательной леммы.

Если $m > n$, то r удовлетворяет требованиям теоремы. Иначе рассмотрим $m \leq n$. Поскольку все множества M_k компактны, существует последовательность точек

$$M_1 < y_1 < M_2 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < M_m$$

Рассмотрим многочлен $h(x) = \sigma(y_1 - x)(y_2 - x)\ldots(y_{m-1} - x)$ степени $m-1$, где $\sigma = \mathrm{sign}(r(M_1))$. Тогда функции r, h удовлетворяют условию первой вспомогательной леммы, поэтому при некотором $\delta > 0$ выполнено неравенство $\|r - \delta h\| < \|r\|$. Следовательно, многочлен $p + \delta h \in L$ даст лучшее приближение, а не p, противоречие.

Достаточность.

Пусть $r = f - p$ – чебышевский альтенанс порядка $n+1$, а наилучшим приближением является многочлен $q(x)$. Тогда

$$|f(x_k) - q(x_k)| < |f(x_k) - p(x_k)| = |r(x_k)| = \|r\|$$

Поэтому

$$|q(x_k) - p(x_k)| = |(f(x_k) - p(x_k)) - (f(x_k) - q(x_k))| \geq$$
$$||f(x_k) - p(x_k)| - |f(x_k) - q(x_k)|| = |f(x_k) - p(x_k)| - |f(x_k) - q(x_k)| > 0$$

Причём из этих неравенств будет следовать, что разность $|f(x_k) - p(x_k)|$ «зажимает» разность $|f(x_k) - q(x_k)|$ при смене знака в этих точках и не остаётся выбора, кроме как тоже сменить знак. Тогда

$$\exists y_1, ..., y_n : x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < y_n < x_{n+1}$$

в которых $q(y_k) - p(y_k) = 0$, а так как $q - p \in L \Rightarrow q - p \equiv 0$, то есть многочлен p действительно даёт наилучшее приближение. $\square$

4. О ядрах

Определение 4.1 (Ядро)

Положительным ядро называется последовательность 2π-периодических функций $K_n(x)$, удовлетворяющая следующим свойствам:
1. $K_n(x) \geq 0$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ для всех $0 < \delta < \pi$

Если выполняются лишь свойства 2 и 3, последовательность K_n называется **ядром**.

Определение 4.2. Ядро

Лемма 4.2 (Об аппроксимации положительного ядра)

Пусть $K_n(x)$ – положительное ядро.

Тогда для любой 2π-периодической функции $f(x)$ последовательность функций $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)K_n(t)\,\mathrm{d}t$ равномерно сходится к функции $f(x)$.

Лемма 4.3. Об аппроксимации положительного ядра

Доказательство. Ввиду свойств ядра имеем:

$$f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x+t))K_n(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)(f(x) - f(x+t))K_n(t)\,\mathrm{d}t$$

В силу непрерывности и периодичности функции $f(x)$, эта функция равномерно непрерывна и ограничена на всей числовой прямой. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2, |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\exists M > 0 : \forall x : |f(x)| < M$$

Фиксируем такое $\delta < \pi$. Тогда ввиду неорицательности $K_n(t)$ имеем

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}(f(x) - f(x+t))\right|K_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\delta}^{\delta}|f(x) - f(x+t)|K_n(t)\,\mathrm{d}t <$$
$$\int_{-\delta}^{\delta} \tfrac{\varepsilon}{2}K_n(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t$$

А в силу ограниченности функции $|f(x)| < M$ выполнено неравенство

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)|f(x) - f(x+t)|K_n(t)\,\mathrm{d}t \leq 2M\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)K_n(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$2M\left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Получается,

$$\left|f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t + 2M\left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

□

Лемма 4.3

Последовательность функций

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx = \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\pi\sin(\frac{x}{2})}$$

определяет ядро. Это ядро называется **ядром Дирихле**.

Лемма 4.4.

Доказательство. По определению функции D_n:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,\mathrm{d}t = 1$$

Далее, пусть $0 < \delta < \pi$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t$$

То есть, достаточно проверять, что $\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t$ бесконечно малая величина.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases}0, |x|<\delta\\ 1, \delta\le|x|\le\delta\end{cases}$$

Положим $h(x) = \frac{g(x)}{\sin(\frac{x}{2})} \in L_2^*[-\pi,\pi]$. Тогда

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin(n-\tfrac{1}{2})t\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos(\tfrac{t}{2})\sin(nt)\,\mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin(\tfrac{t}{2})\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Согласно неравенству Бесселя, последние два интеграла стремятся к нулю. □

Лемма 4.4

Последовательность функций

$$\Phi_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} D_k(x)}{n}$$

Определяет положительное ядро. Это ядро называется **ядром Фейера**.

Лемма 4.5.

Доказательство. По определению функции $\Phi_n(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n} D_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$$

Неравенство $\Phi_n(t) \ge 0$ следует из соотношения

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi n}\frac{1-\cos(nt)}{\sin^2(\frac{t}{2})}$$

Фиксируем $0 < \delta \leq \pi$. Функция

$$\frac{1-\cos nt}{\sin^2(\frac{t}{2\pi})}$$

ограничена на $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Следовательно, на этом множестве $\Phi_n(t) \twoheadrightarrow 0$. Поэтому требуемая бесконечная малость выполняется. □

Лемма 4.5

Последовательность функций

$$J_n(x) = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)}\left(\frac{\sin(n\frac{x}{2})}{n\sin(\frac{x}{2})}\right)^4 = \frac{6\pi n}{2n^2+1}\Phi_n^2(x)$$

определяет положительное ядро. Это ядро называется **ядром Джексона**.

Лемма 4.6.

Определение 4.6

Пусть $M > 0$ и r натуральное. Классом $W^r(M)$ называется множество $r-1$ дифференцируемых 2π-периодических функций, для который $f^{(r-1)}(x)$ – M-липшецева.

Определение 4.7.

Теорема 4.7 (Джексона)

Существует такая константа C, что для любых $r, n, M > 0$ и $f \in W^r(M)$ выполняется неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C^r\frac{M}{n^r}$$

Теорема 4.8. Джексона

Доказательство. Заметим, что $J_n(x)$ тригонометрический многочлен степени $2(n-1)$. Следовательно, $\forall f \in C[S^1]$

$$T_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t-x)f(t)\,\mathrm{d}t$$

тригонометрический многочлен степени $\leq 2(n-1)$.

Пусть $r = 1$ и $f \in W^1(M)$, для $m \geq 1$ рассмотрим тригонометрический многочлен $T(x)$. Учитывая чётность ядра Джексона и условие Липшица для функции f, получаем

$$|f(x) - T(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} J_m(t)(f(x) - f(x+t))\,\mathrm{d}t\right| \leq M\int_{-\pi}^{\pi}|t|J_m(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$2M\int_0^{\pi} tJ_m(t)\,\mathrm{d}t$$

Ввиду неравенства $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$ при $0 \leq t \leq \pi$ получаем

$$\int_0^\pi tJ_m(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{3\pi^3}{2m(2m^2+1)}\int_0^\pi \frac{\sin^4(m\frac{t}{2})}{t^3}\,\mathrm{d}t =$$
$$\frac{3\pi^3 m}{8(2m^2+1)}\int_0^{m\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t < \frac{C}{4m}$$

Следовательно, $\|f-t\| < \frac{CM}{2m}$.

Заметим, что $J_n(x) \in \mathcal{T}_{4n-1}$, когда нам нужно использовать многочлены, степени не более $2n-1$. Определим стратегию уменьшения степени:

Если итоговый $n = 2m$, то с помощью ядра J_m построим рассмотренный выше тригонометрический многочлен, иначе $n = 2m+1$, для которого также построим требуемый J_m. Таким образом,

$$\|f-T\| < \frac{CM}{2m} < \frac{CM}{n}$$

Пусть теперь теорема доказана для произвольного r и более того, если интеграл по периоду равен нулю, то и полученная апроксимация удовлетворяет этому свойству.

Докажем, что тогда то же выполнено и для $r+1$. Пусть $f \in W^{r+1}(M)$. Тогда $f' \in W^r(M)$. Причём, очевидно, интеграл по периоду от функции f' равен нулю.

Тогда, согласно индукционному предположению, существует $T(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого выполнено неравенство $\|f'-T\| < C^r mn^{-r}$ и интеграл по периоду от T равен нулю.

Тогда свободный член тригонометрического многочлена T нулевой. Поэтому существует тригонометрический многочлен U той же степени с нулевым свободный членом, для которого $U' = T$. Следовательно

$$\|(f-U)'\| = \|f'-T\| < C^r M n^{-r}$$

Поэтому $t-U \in W^1(C^r M n^{-r})$. Следовательно, существует $t \in \mathcal{T}_{2n-1}$, такой, что

$$\|(f-U)-t\| < \frac{C(C^r M n^{-r})}{n} = C^{r+1}\frac{M}{n^{r+1}}$$

Причём, если интеграл по периоду функции f равен нулю, то это же справедливо и для многочлена $U+t \in \mathcal{T}_{2n-1}$. $\square$

5. Об оптимальных константах

Определение 5.1

Набор констант C_r называется **оптимальным**, если:

- Для любых $n \geq 1, r \geq 1, f \in W^r(M), M > 0$ для констант C_r выполнено неравенство
$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C_r \tfrac{M}{n^r} \quad f \in W^r(M)$$
- Если $0 < c < C_r$ для некоторого $r \geq 1$, то
$$\forall n \geq 1 : \forall M > 0 : \exists f \in W^r(M) : \varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) > c\tfrac{M}{n^r}$$

Определение 5.2.

Определение 5.2 (Функция Бернулли)

Пусть $r \geq 1$. r-й функцией Бернулли называется функция
$$B_r(t) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \pi\frac{r}{2}\right)}{k^r}$$

Определение 5.3. Функция Бернулли

Лемма 5.3 (О тригонометрической интерполяции)

1. Пусть $t_0, ..., t_{n-1} \in (0, \pi)$ – попарно различные точки и $b_0, ..., b_{n-1} \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. Тогда существует единственный чётный тригонометрический многочлен
$$T(t) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos(kt) \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$
для которого $T(t_j) = b_j$ при $0 \leq j \leq n - 1$.
1. Пусть $\tau_1, ..., \tau_{n-1} \in (0, \pi)$ – попарно различные точки и $d_1, ..., d_{n-1} \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. Тогда существует единственный нечётный тригонометрический многочлен
$$T(t) = \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin(kt) \quad \beta_k \in \mathbb{R}$$
для которого $T(\tau_j) = d_j$ при $1 \leq j \leq n - 1$.

Лемма 5.4. О тригонометрической интерполяции

Определение 5.4

Определим тригонометрические многочлены $T_{n,r}(t)$.

Пусть $n \geq 1$ и $t_j = \frac{(2j+1)\pi}{2n}$ – все нули функции $\cos(nt)$ на интервале $(0, \pi)$, а $\tau_k = \frac{k\pi}{n}$ – все нули функции $\sin(nt)$ на интервале $(0, \pi)$.

Для чётного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ – тригонометрический многочлен, для которого $T_{n,r}(t_j) = B_r(t_j)$.

Для нечётного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ – тригонометрический многочлен, для которого $T_{n,r}(\tau_k) = B_r(\tau_k)$. Согласно лемме о тригонометрической интерполяции, функции $T_{n,r}$ определены однозначно.

♣

Определение 5.5.

Определение 5.5 (Класс гладких функций)

$$W_*^r(M) = \left\{f \in C^r[S^1] \mid \left\|f^{(r)}\right\| \leq M\right\}$$

♣

Определение 5.6. Класс гладких функций

Лемма 5.6 (Формула обращения)

Пусть $f \in W_*^r(M)$. Тогда

$$f(t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_r(t-\tau) f^{(r)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

♡

Лемма 5.7. Формула обращения

Лемма 5.7 (О нулях тригонометрической интерполяции)

Разность $\Delta(t) = \Delta_{n,r}(t) = B_r(t) - T_{n,r}(t)$ обращается в нуль на интервале $(0, \pi)$ при $n \geq 1$ и чётном r только в точках t_j, а в нечётном r только в точках τ_k.

При $n = 1$ и нечётном r корней на $(0, \pi)$ нет. Все корни являются простыми.

♡

Лемма 5.8. О нулях тригонометрической интерполяции

Лемма 5.8

Пусть $n \geq 1$ – натуральное и $2\frac{\pi}{n}$-периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

Тогда для любого $1 \leq k \leq n-1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = 0$$

♡

Лемма 5.9.

Лемма 5.9

Коэффициенты Фурье для функции Бернулли $B_r(t)$ выражаются формулой

$$\mu_{r,n} + i\nu_{r,n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_r(t) d^{int}\,\mathrm{d}t = \frac{i^r}{n^r} \quad n > 0$$

и

$$\mu_{r,0} + i\nu_{r,0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

♡

Лемма 5.10.

Теорема 5.10 (Фавара)

Пусть

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}} \quad r \geq 1$$

Тогда для любых $f \in W^r(M)$ и $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) \leq K_r \frac{M}{n^r} \quad r \geq 1 \quad n \geq 1$$

♡

Теорема 5.11. Фавара

Доказательство. Согласно Лемма 5.11 выполняется равенство

$$f(t) = \frac{a}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_r(t-\tau) f^{(r)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Пусть $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ произвольный тригонометрический многочлен степени $< n$. Тогда

$$\Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(t-\tau) f^{(r)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

также является тригонометрическим многочленом степени $< n$. Рассмотрим разность

$$f(t) - \frac{a}{2} - \Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (B_r(t-\tau) - T(t-\tau)) f^{(r)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Тогда

$$\left|f(t) - \frac{a}{2} - \Lambda(T)(t)\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |B_r(t-\tau) - T(t-\tau)| \left|f^{(r)}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \leq$$
$$\frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi} |B_r(z) - T(z)|\,\mathrm{d}z$$

Следовательно,

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) \leq \frac{M}{\pi} \inf_{T \in \mathcal{T}_{2n-1}} \int_0^{2\pi} |B_r(z) - T(z)|\,\mathrm{d}z$$

Значит достаточно проверить нерпвенство

$$\inf_{T \in \mathcal{T}_{2n-1}} \int_0^{2\pi} |B_r(z) - T(z)|\,\mathrm{d}z \leq \pi K_r n^{-r}$$

А для этого достаточно проверить, что, например,

$$\int_0^{2\pi} \left|B_r(z) - T_{n,r}(z)\right| \mathrm{d}z \leq \pi K_r n^{-r}$$

Согласно Лемма 5.11 все корни разности $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ на интервале $(0,\pi)$ простые и совпадают с простыми корнями функции $\cos(nt)$ при чётном r и с корнями $\sin(nt)$ при нечётном r.

Поэтому знаки функций $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ и $\cos(nt)$ при чётном r и, соответственно, $\sin(nt)$ при нечётном r, либо всюду совпадают, либо всюду противоположны. Поэтому при БОО чётном r выполняется равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|B_r(z) - T_{n,r}(z)\right| \mathrm{d}z = 2\int_0^{\pi}\left|B_r(z) - T_{n,r}(z)\right| \mathrm{d}z =$$

$$2\int_0^{\pi}\left(B_r(z) - T_{n,r}(z)\right) \operatorname{sign}\Delta(z)\,\mathrm{d}z = \pm 2\int_0^{\pi}\left(B_r(z) - T_{n,r}(z)\right)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z =$$

$$2\left|\int_0^{\pi}\left(B_r(z) - T_{n,r}\right)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(B_r(z) - T_{n,r}(z)\right)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z\right| =$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} B_r(z)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z\right|$$

где в последнем равенстве использована Лемма 5.11.

Абсолютно такое же равенство (но с $\operatorname{sign}\sin(nz)$) аналогично получаем для нечётного r.

Теперь воспользуемся обобщённым равенством Парсеваля в $L_2[-\pi,\pi]$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) = \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k)$$

где α_k, β_k и a_k, b_k – коэффициенты Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$ соответственно.

Для функции Бернулли коэффициенты Фурье вычислены в Лемма 5.11. Для функции $\operatorname{sign}\cos(nt)$ и $\operatorname{sign}\sin(nt)$ соответствующие ряды Фурье определяются формулами

$$\operatorname{sign}\cos(nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1}$$

и

$$\operatorname{sign}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1}$$

Подставляя полученные коэффициенты в равенства Парсеваля получим при чётном $r = 2\nu$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu}(z)\operatorname{sign}\cos(nz)\,\mathrm{d}z = (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi n^{2\nu}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\nu+1}} = \frac{(-1)^{\nu}K_r}{n^r}$$

и нечётном $r = 2\nu + 1$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu+1}(z)\operatorname{sign}\sin(nz)\,\mathrm{d}z = (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi n^{2\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2\nu+2}} = \frac{(-1)^{\nu}K_r}{n^r}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|B_r(z) - T_{n,r}(z)\right| \mathrm{d}z = K_r n^{-r}$$

Что и требовалось доказать. □