Задача интерполяции

Шокуров

9 апреля 2025 г.

Интерполяционный процесс. Погрешность интерполяции

Определение (1)

Матрицей $\mathbf{X}$ *интерполяционных узлов на отрезке* $I = [a, b]$ *называется бесконечная треугольная таблица чисел*

$$\begin{array}{ccccc} x_{1,1} & & & & \\ x_{2,1} & x_{2,2} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

для которой

1. $x_{n,k} \in I$ *при* $1 \le k \le n$,
2. *при любом* n *выполняются неравенства* $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$.

Интерполяционный процесс. Погрешность интерполяции

Из определения следует, что каждая строка такой матрицы определяет узлы интерполяции $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ \ldots, x_{n,n})$. Следовательно, для $f \in C[a, b]$ матрица интерполяции определяет последовательность интерполяционных полиномов $p_{n-1} = p_{n-1}(\mathbf{X}, f) = \pi_n(\mathbf{x}_n, f) \in \mathcal{P}_n$. Эта последовательность называется интерполяционным процессом, отвечающим данной матрице интерполяционных узлов $\mathbf{X}$ и данной функции f.

Сходимость интерполяционного процесса

Определение (2)

Интерполяционный процесс $p_{n-1}(\mathbf{X}, f)$ *называется сходящимся для данной матрицы интерполяционных узлов* $\mathbf{X}$ *и данной функции* $f \in [a, b]$, *если для любого* $x \in [a, b]$ *существует предел и выполняется равенство*

$$\lim_{n \to +\infty} p_{n-1}(\mathbf{X}, f)(x) = f(x), \quad x \in I. \tag{1}$$

Интерполяционный процесс $p_{n-1}(\mathbf{X}, f)$ *называется равномерно сходящимся на отрезке* I *для данной матрицы интерполяционных узлов* $\mathbf{X}$ *и данной функции* $f \in [a, b]$, *если указанная выше сходимость является равномерной.*

Теорема Фабера-Бернштейна

Возникает естественный вопрос: можно ли так выбрать матрицу интерполяции, чтобы для любой непрерывной функции интерполяционный процесс был бы равномерно сходящимся. Ответ на этот вопрос отрицателен. Это следует из следующей теоремы, показывающей неограниченный рост констант Лебега.

Теорема (1 (Фабер-Бернштейн).)

Для любой матрицы интерполяционных узлов $\mathbf{X}$ *выполняются неравенства*

$$\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x}_n) = \|\pi_n(\mathbf{x}_n)\| > \frac{1}{8}\sqrt{\pi} \cdot \ln n, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Теорема Фабера-Бернштейна

Следствие (1)

Для любой матрицы интерполяционных узлов $\mathbf{X}$ *существует функция* $f \in C[a, b]$*, для которой последовательность интерполяционных полиномов* $p_{n-1}(\mathbf{X}, f)$ *не сходится равномерно на* I *к* f *и, более того, последовательность* $\|p_{n-1}(\mathbf{X}, f)\|_{C[I]}$ *неограничена.*

Для вывода следствия из теоремы Фабера-Бернштейна напомним теорему Банаха-Штейнгауза.

Теорема Банаха-Штейнгауза

Теорема (Теорема Банаха-Штейнгауза)

Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное векторное пространство, F — семейство линейных непрерывных операторов из X в Y. Предположим, что для любого $x \in X$ выполняется

$$\sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y < \infty.$$

Тогда

$$\sup_{T \in F, \|x\|=1} \|T(x)\|_Y = \sup_{T \in F} \|T(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Следствие

Если последовательность ограниченных операторов на банаховом пространстве сходится поточечно, то её поточечный предел является ограниченным оператором.

Вывод следствия теоремы Фабера-Бернштейна

Доказательство.

Допустим, что это не так и для некоторой матрицы $\mathbf{X}$ при любом $f \in C[a,b]$ последовательность $p_{n-1}(\mathbf{X}, f)$ равномерно сходится к f на I. Следовательно, последовательность линейных непрерывных операторов $\pi_n(\mathbf{x}_n) : C[a,b] \to \mathcal{P}_n \subset C[a,b]$ поточечно сходится. Тогда, поскольку $C[a,b]$ — полное нормированное пространство, по теореме Банаха-Штейнгауза, нормы операторов $\|\pi_n(\mathbf{x}_n)\| = \lambda_n$ ограничены, что противоречит теореме Фабера-Бернштейна.

$\square$

Существование равномерно сходящегося интерполяционного процесса для заданной функции

Тем не менее справедлива

Теорема (2)

Пусть $f \in C[a, b]$*. Тогда существует матрица интерполяционных узлов* $\mathbf{X}$ *на отрезке* $[a, b]$*, для которой интерполяционный процесс для функции* f *сходится равномерно.*

Доказательство теоремы 2

Доказательство.

Если f — алгебраический полином, то подходит любая матрица $\mathbf{X}$. Будем предполагать теперь, что f не является алгебраическим полиномом. Пусть $p_{n-1} \in \mathcal{P}_n$ — его наилучшее приближение в пространстве $\mathcal{P}_n$. Согласно теореме Чебышева на отрезке $[a, b]$ разность $\Delta_n = f - p_{n-1}$ имеет альтернанс порядка $n + 1$, т.е. существуют точки $a \leq y_{1,n} < y_{2,n} < \ \ldots < y_{n+1,n} \leq b$, для которых $|\Delta_n(y_{k,n})| = \|\Delta_n\|$ и знаки $\Delta_n(y_{k,n})$ чередуются. Тогда существуют нули функции Δ_n

$$y_{1,n} < x_{1,n} < y_{2,n} < \ \ldots < x_{n,n} < y_{n+1,n}.$$

$\square$

Доказательство теоремы 2

Продолжение доказательства.

Рассмотрим матрицу интерполяции $\mathbf{X}$, соответствующую полученным нулям. По построению, выполняются равенства $p_{n-1}(x_{k,n}) = f(x_{k,n})$ при $1 \leq k \leq n$. Тогда выполняется равенство

$$p_{n-1} = p_{n-1}(\mathbf{x}_n, f) = \pi_n(\mathbf{x}_n, f).$$

Погрешность интерполяции равна

$$\|f - p_{n-1}\| = \|f - \pi_n(\mathbf{x}_n, f)\| = \varepsilon(f, \mathcal{P}_n),$$

и, следовательно, по теореме Вейерштрасса

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_{n-1}\| = 0.$$

Поэтому p_{n-1} равномерно сходится к f. $\square$

Чебышевские системы узлов

Определение (3)

Чебышевской системой узлов порядка n на отрезке $I_0 = [0,1]$ называется система точек

$$\mathbf{x}_k^* = (x_{1,n}^*, x_{2,n}^*, \ \ldots, x_{n,n}^*),$$

где

$$x_{k,n}^* = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \ \ n \geq 1, \ \ 1 \leq k \leq n.$$

Теорема Бернштейна

Теорема (3 (Бернштейн))

Пусть $I = I_0 = [0,1]$ и $\mathbf{X}^*$ — интерполяционная матрица из чебышевских узлов на отрезке I_0. Тогда

$$\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x}_k^*) < 8 + \frac{4}{\pi} \cdot \ln n, \quad n \geq 1. \tag{3}$$

Из теорем 1 и 3 следует оценка

$$\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x}_k^*) \asymp \ln n, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Чебышевские системы узлов

Определение (4)

Чебышевской системой узлов порядка n на отрезке $I = [a, b]$ называется система точек

$$\mathbf{x}_k^* = (x_{1,n}^*, x_{2,n}^*, \ \ldots, x_{n,n}^*),$$

где

$$x_{k,n}^* = x_{k,n}^*(I) = \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} + \frac{b+a}{2}, \ \ n \geq 1, \ \ 1 \leq k \leq n.$$

О погрешности интерполяции

Вследствие инвариантности констант Лебега относительно линейных преобразований теорема Бернштейна и асимптотическая оценка справедливы для произвольной чебышевской системы узлов и представляют собой оптимальную систему узлов интерполяции.Согласно теореме Лебега выполняется неравенство Лебега

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n). \tag{5}$$

О погрешности интерполяции

Согласно теореме Вейерштрасса $\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \to 0$. Следовательно, в правой части неравенства (5) возникает неопределенность типа $0 \cdot \infty$ и предел зависит от скоростей сходимости сомножителей. Согласно теореме Джексона для функции $f \in W^r(M, [a, b])$ при $n \geq r$ выполняется неравенство

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \leq (1 + \lambda_n) \cdot \left(\frac{b - a}{2}\right)^r \cdot \frac{MD_r}{n^r}, \quad (6)$$

где $\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x})$ и $D_r = (\pi r/2)^r / r!$. Теперь рост погрешности определяется константами Лебега. Рассмотрим чебышевскую систему узлов. Тогда по теореме Бернштейна при $n \geq r$ выполняется неравенство

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq \left(9 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) \frac{MD_r}{n^r} \quad (7)$$

О равномерной сходимости интерполяционного процесса

Поэтому справедливо

Следствие (2)

Для любой функции $f \in W^r(M, [a, b])$ и $r \geq 1$ интерполяционный процесс, отвечающий матрице $\mathbf{X}^*$ чебышевских узлов на отрезке $[a, b]$ и функции f, равномерно сходится на этом отрезке к функции f.

Поэтому погрешность интерполяции для чебышевской системы узлов сходится к нулю со скоростью не меньшей чем $\asymp n^{-r} \cdot \ln n$. Для матрицы равноотстоящих узлов константы Лебега $\lambda_n = \lambda_n(\mathbf{x}_n^0)$ растут экспоненциально при $n \to \infty$ и правая часть неравенства (6) стремится к бесконечности при $n \to \infty$. В этом случае с помощью неравенств Лебега и Джексона нельзя получить никакой информации о поведении погрешности интерполяции.

Пример Бернштейна

Пример 1 (Бернштейн). Пусть $I = I_0 = [-1, 1]$, $f_0(x_0) = |x|$ для $x \in \mathbb{R}$. Тогда $f_0 \in W^1(1, I_0)$, но интерполяционный процесс, отвечающий функции f_0 и матрице равноотстоящих узлов на отрезке I_0, расходится всюду на отрезке I_0, кроме концов отрезка и точки $x = 0$.

Интерполяция функций из класса $W^r(M, I)$

Теорема (3)

Пусть $I = [a, b]$ — отрезок, $n \geq 1$, $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n)$ — система узлов интерполяции на I, $M > 0$ и $f \in W^n(M, I)$. Тогда выполняется неравенство

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq \frac{M(b-a)^n}{n!}. \tag{8}$$

Для доказательства потребуется

Лемма (1)

Пусть m, ν — целые, $m \geq 1$, $m \geq \nu \geq 0$, $f \in C^m[I]$ и f имеет $k \geq m$ различных нулей на I. Тогда $f^{(n-\nu)}$ имеет не менее $k - \nu$ корней на отрезке I.

Интерполяция функций из класса $W^r(M, I)$

Задача 1. Докажите лемму 1. Указание: докажите по индукции, используя теорему Ролля.

Рассмотрим множество $W_*^n(M, I) = \{f \in C^n[I] \mid \|f^{(n)}\| \leq M\}$. Тогда справедлива

Задача 2. Выполнено равенство $[W_*^n(M, I)] = W^n(M, I)$, где $[X]$ — замыкание множества X в пространстве $C[I]$.

Доказательство теоремы 3.

Сначала докажем теорему для $f \in W_*^n(M, I)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \pi_n(\mathbf{x}, f)(x) \in C^n[I]$. Требуется доказать неравенство

$$|g(x)| \leq \frac{M(b-a)^n}{n!} \qquad (9)$$

для всех $x \in I$. Если x_0 является одним из узлов интерполяции x_k, то $g(x) = g(x_k) = 0$, то неравенство (7.9), конечно, выполняется. Пусть $x_0 \neq x_k$ для всех $1 \leq k \leq n$. Тогда $l_n(x_0) = \prod_{k=1}^{n}(x_0 - x_k) \neq 0$. Тогда определена функция

$$\xi(x) = g(x) - \frac{g(x_0)}{l_n(x_0)} \cdot l_n(x).$$

$\square$

Доказательство теоремы 3

Продолжение доказательства.

По построению для всех $0 \le k \le n$ выполняются равенства $\xi(x_k) = 0$. Поэтому, по лемме 1, существует точка $y \in I$, в которой выполнено равенство $\xi^{(n)}(y) = 0$. Поскольку $\pi_n(\mathbf{x}, f)(x)$ — многочлен степени меньшей n, а $l_n(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом равным 1, то $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ и выполняется равенство

$$0 = \xi^n(y) = f^{(n)}(y) - \frac{g(x_0)}{l_n(x_0)} \cdot n!.$$

Следовательно,

$$g(x_0) = \frac{f^{(n)}(y)}{l_n(x_0)n!}. \tag{10}$$

□

Доказательство теоремы 3

Продолжение доказательства.

Поскольку $x_0 \in I = [a, b]$, очевидно, выполнено неравенство $|l_n(x_0)| \leq (b - a)^n$, а ввиду условия $f \in W^n_*(M, I)$ выполнено неравенство $|f^{(n)}(y)| \leq M$. Неравенство (9) следует теперь из (10).

В силу леммы 2 для произвольной $f \in W^n(M, I)$ при любом $\varepsilon > 0$ существует $f_\varepsilon \in W^n_*(M, I)$, для которого $\|f_\varepsilon - f\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| = \|f - f_\varepsilon + f_\varepsilon - \pi_n(\mathbf{x}, f_\varepsilon) + \pi_n(\mathbf{x}, f_\varepsilon) - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq$$

$$\|f - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - \pi_n(\mathbf{x}, f_\varepsilon)\| + \|\pi_n(\mathbf{x}, f_\varepsilon) - \pi_n(\mathbf{x}, f)\| \leq$$

$$\varepsilon + \frac{M(b-a)^n}{n!} + \lambda_n(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon.$$

Переходя к пределу в полученном неравенстве при $\varepsilon \to 0$, получим (8). $\square$

Оценка погрешности производных при интерполяции

Теорема (4)

Пусть $f \in W^n(M, I)$. Тогда для целого $0 \le \nu < n$ выполняется неравенство

$$\|f^{(\nu)} - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}\| \le \frac{M(b-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}. \tag{7.11}$$

Оценка погрешности производных при интерполяции

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f^{(\nu)}(x) - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}(x).$$

Согласно лемме 1 функция $g(x)$ имеет на отрезке $I = [a, b]$ не менее $n - \nu$ корней $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ \dots, x_{n-\nu}^*)$. Заметим, что интерполяционный полином $\pi_{n-\nu}(\mathbf{x}^*, f^{(\nu)})$ совпадает с полиномом $\pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}$ в узлах $\mathbf{x}^*$ и что оба полинома имеют степень $n - \nu$. Поэтому они тождественно равны.
Следовательно, учитывая что $f^{(\nu)} \in W^{n-\nu}(M, I)$, согласно теореме 3 выполнено неравенство

$$\|f^{(\nu)} - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}\| = \|f^{(\nu)} - \pi_{n-\nu}(\mathbf{x}^*, f^{(\nu)})\| \leq \frac{M(b-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}.$$

□

Оценка погрешности

Следствие (3)

Пусть $f \in W^n(M, I)$ *и* $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *— произвольный набор вещественных чисел. Тогда для любого набора узлов* $\mathbf{x}$ *на отрезке* $[a, b]$ *и произвольного* $0 \le \nu < n$ *выполняется неравенство*

$$\|f^{(\nu)} - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi)^{(\nu)}\| \le \|f^{(\nu)} - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}\| + \lambda_n^{(\nu)}(\mathbf{x}) \max_{1 \le k \le n} |f(x_k) - \xi_k|.$$

Оценка погрешности

Доказательство.

Согласно теореме 4 выполнено неравенство

$$
\begin{aligned}
\|f^{(\nu)} - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi)^{(\nu)}\| &\leq \|f^{(\nu)} - \pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)}\| \\
&+ \|\pi_n(\mathbf{x}, f)^{(\nu)} - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi)^{(\nu)}\| \\
&\leq \frac{M(b-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \\
&+ \|(\pi_n(\mathbf{x}, f) - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi))^{(\nu)}\|. \quad (11)
\end{aligned}
$$

□

Продолжение доказательства.

Пусть $\mathbf{f}_\mathbf{x} = (f(x_1), \ \ldots, f(x_n))$. Тогда согласно определению констант Лебега выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
\|(\pi_n(\mathbf{x}, f) - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi))^{(\nu)}\| &= \|(p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_\mathbf{x}) - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi))^{(\nu)}\| \\
&= \|(p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_\mathbf{x} - \Xi))^{(\nu)}\| \\
&\leq \lambda_n^{(\nu)}(\mathbf{x}) \|\mathbf{f}_\mathbf{x} - \Xi\| \\
&= \lambda_n^{(\nu)}(\mathbf{x}) \max_{1 \leq k \leq n} |f(x_k) - \xi_k|.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|f^{(\nu)} - p_{n-1}(\mathbf{x}, \Xi)^{(\nu)}\| \leq \frac{M(b-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} + \lambda_n^{(\nu)}(\mathbf{x}) \max_{1 \leq k \leq n} |f(x_k) - \xi_k|.$$

□

Оценка погрешности

В следствии 3 получена оценка погрешности аппроксимации функции и ее производных при заданных приближениях значений функций в некоторых узлах.

Задачи

Задача 3. Для произвольной функции $f \in C^n[a, b]$ и системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ \dots, x_n)$ и любого $x \in [a, b]$

$$f(x) = \pi_n(\mathbf{x}, f)(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x - x_k),$$

где $y_1 < \xi < y_2$, а $y_1 = \min\{x, x_1, \ \dots, x_n\}$ и $y_1 = \max\{x, x_1, \ \dots, x_n\}$.

Задача 4. Пусть $n \geq 1$, $f \in C^n[a, b]$, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ \dots, x_n^*)$ — чебышевские интерполяционные узлы на $[a, b]$, $x_k^* = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k-1}{2n\pi} + \frac{a+b}{2}$, $1 \leq k \leq n$. Докажите, что при $a = -1$, $b = 1$

$$\|f - \pi_n(\mathbf{x}^*, f)\| \leq \frac{1}{2^{n-1} n!} \sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)|.$$

Задачи

Задача 5. Пусть $f \in C[a,b]$ — ограничение целой функции. Тогда для произвольного $q > 0$ найдется $A > 0$, что для любой системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n)$ на отрезке $[a,b]$ выполняется неравенство $\|f - \pi(\mathbf{x}, f)\| \le Aq^n$. Вывести из этого, что интерполяционный процесс, отвечающий произвольной интерполяционной матрице $\mathbf{X}$ на отрезке $[a,b]$ равномерно сходится к функции f.

Задача 6. Пусть $f \in C^\infty[a,b]$ и $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \le BA^n$ для всех $n \ge 1$ и некоторых констант $A > 0$ и $B > 0$. Докажите, что

а) интерполяционный процесс, отвечающий произвольной матрице интерполяционных узлов на $[a,b]$ равномерно на $[a,b]$ сходится к f,

б) функция f аналитична на $[a,b]$. Рассмотрите примеры $f(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Интерполяция периодических функций

Рассмотрим сначала общую задачу интерполяции. Итак, пусть задано бесконечное компактное множество D, пространство непрерывных на нем функций $C[D]$ и конечномерное подпространство $V \subset C[D]$ с базисом $\varphi_1, \ \ldots, \varphi_n$. Элементы пространства V будем называть многочленами.

Определение (5)

Пусть заданы попарно различные n точек $x_1, \ \ldots, x_n \in D$, называемые узлами интерполяции, и произвольные вещественные числа $y_1, \ \ldots, y_n$. Элемент $\varphi \in V$ называется интерполяционным многочленом, если $\varphi(x_k) = y_k$.

Предложение (1)

Задача интерполяции всегда разрешима, причем однозначно, на векторном пространстве $V \subset C[D]$ для любых n узлов интерполяции и любых вещественных векторов $\mathbf{y} = (y_1, \ \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда V — чебышевское подпространство размерности $n + 1$.

Интерполяция периодических функций

Доказательство.

Пусть V — чебышевское подпространство размерности $n+1$. Тогда согласно предложению 1 лекции 2 задача интерполяции всегда однозначно разрешима на n узлах.

Предположим теперь, что задача интерполяции всегда однозначно разрешима. Пусть подпространство V не чебышевское. Тогда существует элемент $\varphi_0 \neq 0$ подпространства V, имеющий более $\dim V - 1$ корней. Пусть $x_1^0, \ \ldots, x_n^0$ — любые различные корни многочлена φ_0. Пусть φ произвольное решение интерполяционной задачи с узлами $x_1^0, \ \ldots, x_n^0$. Тогда эта задача интерполяции имеет также решение $\varphi + \varphi_0 \neq \varphi$, т.е. задача интерполяции имеет неединственное решение. □

Задача интерполяции в чебышевских пространствах

Из приведенного предложения и теоремы Мэрхьюбера следует, что задача интерполяции содержательна только на пространствах функций $C[a, b]$ и $C[\mathbf{S}^1]$. Задача интерполяции для пространства функций $C[a, b]$ была исследована в предыдущих лекциях. Рассмотрим теперь соответствующую задачу в пространстве $C[\mathbf{S}^1]$. Интерполировать будем в чебышевских подпространствах $\mathcal{T}_{2n+1}$. Отображение $\exp : \mathbb{R} \to \mathbf{S^1}$ задает изоморфизм пространства 2π-периодических функций на вещественной прямой и пространством $C[\mathbf{S}^1]$.

Задача интерполяции в чебышевских пространствах

Поскольку подпространство $\mathcal{T}_{2n+1} \subset C[\mathbf{S}^1]$ чебышевское, выполняется

Предложение (2)

Пусть $x_1, \ \ldots, x_{2n+1} \in [0, 2\pi)$ *— произвольные попарно различные точки, а* $f_1, \ \ldots, f_{2n+1}$ *— произвольные вещественные числа. Тогда существует и притом единственный вещественный тригонометрический многочлен* $T(x)$ *степени* $\leq n$*, для которого*

$$T(x_k) = f_k.$$

Задача интерполяции в чебышевских пространствах

Интерполяционный полином $p_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$, принимающий на узлах $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_{2n+1})$ значения $\mathbf{f} = (f(x_1), \ \ldots, f(x_{2n+1}))$ для некоторой периодической (с периодом 2π) функции f, называется интерполяционным полиномом функции f на узлах $\mathbf{x}$ и обозначается $T(\mathbf{x}, \mathbf{f}) \in \mathcal{T}_{2n+1}$. Пусть $\delta_j = (\delta_{j,1}, \ \ldots, \delta_{j,2n+1})$, где $\delta_{j,i}$ — символы Кронекера. Тогда полиномы $\tau_{n,j} = \tau_{n,j}(\mathbf{x}) = T_n(\mathbf{x}, \delta_j)$ называются фундаментальными полиномами системы интерполяционных узлов $\mathbf{x}$. С помощью фундаментальных полиномов тригонометрический полином $T_n(\mathbf{x}, \mathbf{f})$ можно представить в виде, являющемся аналогом формы Лагранжа алгебраического интерполяционного полинома

$$T_n(\mathbf{x}, \mathbf{f})(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} f_k \tau_{n,k}(\mathbf{x})(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Задача интерполяции в чебышевских пространствах

При фиксации узлов интерполяции возникает оператор

$$\Pi_n = \Pi_n(\mathbf{x}) : C[\mathbf{S}^1] \to \mathcal{T}_{2n+1}, \quad n \geq 0,$$

определяемый равенством

$$\Pi_n(f) = \Pi_n(\mathbf{x})(f) = \Pi_n(\mathbf{x}, f) = T_n(\mathbf{x}, f_{\mathbf{x}}),$$

где

$$f_{\mathbf{x}} = (f(x_1), \ \ldots, f(x_{2n+1})).$$

Непрерывность операторов проекции

Следующее предложение доказывается также как и соответствующее утверждение для непериодических функций.

Предложение (3)

Линейные операторы $\Pi_n = \Pi_n(\mathbf{x})$ *являются непрерывными проекторами и выполняется равенство*

$$\|\Pi_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{2n+1} |\tau_{n,k}(x)|, \quad n \geq 0.$$

Определение (5)

Числа $\Lambda_n = \Lambda_n(\mathbf{x}) = \|\Pi_n\|$ *называются константами Лебега тригонометрической интерполяции относительно узлов* $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_{2n+1})$.

Неравенство Лебега

Поскольку Π_n — проектор, выполняется неравенство Лебега:

Теорема (5)

Для любых $f \in C[\mathbf{S}^1]$ и системы узлов $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_{2n+1}) \in [0, 2\pi)$ выполняется неравенство Лебега

$$\|f - \Pi_n(\mathbf{x})(f)\| \leq (1 + \Lambda_n)\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n+1}), \quad n \geq 0.$$

Такая интерполяция используется сравнительно редко. Обычно рассматриваемую функцию представляют в виде суммы четной и нечетной функций и каждое из слагаемых интерполируют соответственно четными и нечетными тригонометрическими полиномами. Итак, имеются разложение

$$C[D] = C^{+}[D] \oplus C^{-}[D]$$

и

$$\mathcal{T}_{2n+1} = \mathcal{T}_{n+1}^{+} \oplus \mathcal{T}_{n}^{-}.$$

Интерполяция четными и нечетными тригонометрическими полиномами

Однако подпространства $\mathcal{T}_{n+1}^{+}$ и $\mathcal{T}_{n}^{-}$ не являются чебышевскими. Поэтому узлы интерполяции не могут быть произвольными.

Предложение (4)

1. *Пусть* $x_1, \ \ldots, x_{n+1} \in [0, \pi]$ *— попарно различные узлы интерполяции,* $f_1, \ \ldots, f_{n+1} \in \mathbb{R}$ *— произвольные числа. Тогда существует и притом единственный четный тригонометрический многочлен* $T(x)$ *степени не более* n*, для которого* $T(x_k) = f_k$*.*
2. *Пусть* $x_1, \ \ldots, x_n \in (0, \pi)$ *— попарно различные узлы интерполяции,* $f_1, \ \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ *— произвольные числа. Тогда существует и притом единственный нечетный тригонометрический многочлен* $T(x)$ *степени не больше* n*, для которого* $T(x_k) = f_k$*.*

Интерполяция четными и нечетными тригонометрическими полиномами

Четный тригонометрический многочлен из предложения 4 обозначается через $T_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{f})$, а соответствующий нечетный многочлен через $T_n^-(\mathbf{x}, \mathbf{f})$. Итак, определены операторы четной и нечетной тригонометрической интерполяции

$$\Pi_n^+ = \Pi_n^+(\mathbf{x}) : C^+[\mathbf{S}^1] \to \mathcal{T}_{n+1}^+, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_{n+1})$$

и

$$\Pi_n^- = \Pi_n^-(\mathbf{x}) : C^-[\mathbf{S}^1] \to \mathcal{T}_n^-, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n),$$

задаваемые равенствами

$$\Pi_n^+(\mathbf{f}) = \Pi_n^+(\mathbf{x})(\mathbf{f}) = T_n^+(\mathbf{x}, \mathbf{f}), \quad \mathbf{f}_{\mathbf{x}} = (f(x_1), \ \ldots, f(x_{n+1})),$$

и

$$\Pi_n^-(\mathbf{f}) = \Pi_n^-(\mathbf{x})(\mathbf{f}) = T_n^-(\mathbf{x}, \mathbf{f}), \quad \mathbf{f}_{\mathbf{x}} = (f(x_1), \ \ldots, f(x_n)).$$

Интерполяция четными и нечетными тригонометрическими полиномами

Определим четные и нечетные фундаментальные полиномы формулами:

$$C_{n,j} = C_{n,j}(\mathbf{x}) = T_n^+(\mathbf{x}, \delta_j), \quad 1 \le j \le n+1,$$

где

$$\delta_j = (\delta_{1,j}, \ \ldots, \delta_{n+1,j}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_{n+1}),$$

и

$$S_{n,j} = S_{n,j}(\mathbf{x}) = T_n^-(\mathbf{x}, \delta_j), \quad 1 \le j \le n,$$

где

$$\delta_j = (\delta_{1,j}, \ \ldots, \delta_{n,j}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n).$$

Фундаментальные многочлены

Предложение (5)

Π_n^+ при $n \geq 0$ и Π_n^- при $n \geq 1$ — линейные непрерывные операторы, являющиеся проекторами, причем

$$\|\Pi_n^+\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n+1} |C_{n,j}|,$$

$$\|\Pi_n^-\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n+1} |S_{n,j}|.$$

Числа $\Lambda_n^+ = \Lambda_n^+(\mathbf{x}) = \|\Pi_n^+(\mathbf{x})\|$ и $\Lambda_n^- = \Lambda_n^-(\mathbf{x}) = \|\Pi_n^-(\mathbf{x})\|$ называются константами Лебега четной и нечетной интерполяций относительно системы узлов $\mathbf{x}$.

Теорема Лебега.

Справедлива теорема Лебега.

Теорема (6)

1. *Для любых* $f \in C^{+}[\mathbf{S}^1]$ *и системы узлов* $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_{n+1}) \in [0, \pi]$ *выполняется неравенство*

$$\|f - \Pi_n^{+}(\mathbf{x})(f)\| \leq (1 + \Lambda_n^{+})\varepsilon(f, \mathcal{T}_{n+1}^{+}), \quad n \geq 0.$$

2. *Для любых* $f \in C^{-}[\mathbf{S}^1]$ *и системы узлов* $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, x_n) \in (0, \pi)$ *выполняется неравенство*

$$\|f - \Pi_n^{-}(\mathbf{x})(f)\| \leq (1 + \Lambda_n^{-})\varepsilon(f, \mathcal{T}_n^{-}), \quad n \geq 0.$$

Существуют многочлены T_n и U_n степени n такие, что

$$\cos nx + i \sin nx = T_n(\cos x) + i \sin x U_n(\cos x).$$

Теорема об изометрии

Теорема (7)

Соответствие $f(x) \mapsto F(\Theta) = f(\cos\Theta)$, *где* $f \in C[-1,1]$ *задает изометрический линейный изоморфизм пространства* $C[-1,1]$ *на пространство* $C^+[\mathbf{S}^1]$. *При этом изоморфизме*

а) подпространство $\mathcal{P}_{n+1}$ *алгебраических многочленов степени не более* n *отображается на* $\mathcal{T}^+_{n+1}$.

б) если $\Theta_1, \ \dots, \Theta_{n+1} \in [0,\pi]$ — *попарно различные точки,* $\Theta = (\Theta_1, \ \dots, \Theta_{n+1})$ *и* $\mathbf{x} = (\cos\Theta_1, \ \dots, \cos\Theta_{n+1})$ — *возникающие из этих точек системы узлов на отрезках* $[0,\pi]$ *и* $[-1,1]$, *то диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} C[-1,1] & \cong & C^+[\mathbf{S}^1] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{n+1}(\mathbf{x})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi^+_n(\Theta)} \\ \mathcal{P}^+_{n+1} & \cong & \mathcal{T}^+_{n+1} \end{array}$$

коммутативна,

в) $\lambda_{n+1}(\mathbf{x}) = \Lambda^+_n(\Theta)$,

г) произведение функций в $C[-1,1]$ *переходит в произведение функций в* $C[\mathbf{S}^1]$, *т.е. построенный изоморфизм является изоморфизмом банаховых алгебр* $C[-1,1]$ *и* $C[\mathbf{S}^1]$.

Интерполяция нечетными тригонометрическими полиномами

В случае интерполяции нечетными тригонометрическими многочленами выполняется лишь следующая

Лемма (2)

Отображение $f(x) \mapsto \sin x \cdot f(x)$ *пространства* $C[\mathbf{S}^1]$ *в себя определяет линейное взаимно однозначное отображение пространства* $C^+[\mathbf{S}^1]$ *в пространство* $C^-[\mathbf{S}^1]$ *и изоморфизм* $\mathcal{T}_n^+$ *на* $\mathcal{T}_n^-$.

Пусть $x_1, \ \ldots, x_n \in (0, \pi)$ — узлы интерполяции. Тогда следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
C^+[\mathbf{S}^1] \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_{n-1}^+(\mathbf{x})"] & C^-[\mathbf{S}^1] \arrow[d, "\Pi_n^-(\mathbf{x})"] \\
\mathcal{T}_n^+ \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{T}_n^-
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Оценка погрешности

Теорема (8 (Фабер-Бернштейн))

Пусть $\Theta_1, \ \ldots, \Theta_n \in [0, \pi]$, $n \geq 1$ *— произвольные попарно различные точки и* $\Theta = (\Theta_1, \ \ldots, \Theta_n)$. *Тогда выполняется неравенство* $\Lambda_{n-1}^{+}(\Theta) > \ln n / 8\sqrt{n}$.

Теорема (9 (Бернштейн))

Пусть $\Theta_{n,k}^{*} = \frac{2k-1}{2n} \cdot \pi$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$ *— равноотстоящие узлы на* $[0, \pi]$, $\Theta_n^{*} = (\Theta_{n,k}^{*}, \ \ldots, \Theta_{n,n}^{*})$, *тогда* $\Lambda_{n-1}^{+}(\Theta_n^{*}) < 8 + \frac{4}{\pi} \ln n$.

Оценка погрешности

Используя неравенства Фавара и Лебега для матрицы равноотстоящих на $[0,\pi]$ интерполяционных узлов

$$\Xi^* = \left\{ \Theta^*_{n,k} = \frac{2k-1}{2n} \cdot \pi,\ 1 \le k \le n,\ n \ge 1 \right\},$$

получим

$$\|f - \Pi^+_{n-1}(\Theta^*_n)(f)\| \le (9 + \frac{4}{\pi}\ln n) M \mathcal{K}_r n^{-r} \asymp n^{-r} \ln n,$$

где $n \ge 1$, $r \ge 1$, $f \in \mathcal{W}^r(M) \cap C^+[\mathbf{S}^1]$.

Отсюда получаем

Следствие

Процесс интерполяции четными тригонометрическими многочленами, отвечающий матрице Ξ^* равноотстоящих на отрезке $[0,\pi]$ узлов, для любой четной функции $f \in \mathcal{W}^r(M)$, равномерно на $\mathbf{S}^1$ сходится к f со скоростью, не меньшей чем $\asymp n^{-r} \ln n$.