Теоретические основы численных методов. Теорема Фавара

Шокуров А.В.

2 апреля 2025 г.

Оптимальные константы

Согласно теореме Джексона существует набор констант $C_r = C^r$, не зависящих от n, M и f, для которых выполнены неравенства

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C_r \cdot M/n^r, \quad f \in W^r(M).$$

Определение (Оптимальные константы)

Набор констант C_r называется оптимальным, если:

1. *для любых $n \geq 1,\ r \geq 1,\ f \in W^r(M),\ M > 0$ для констант C_r выполнено неравенство*

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C_r \cdot M/n^r, \quad f \in W^r(M),$$

2. *если $0 < c < C_r$ для некоторого $r \geq 1$, то $\forall n \geq 1\ \forall M > 0\ \exists f \in W^r(M) \mid \varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) > cM/n^r$.*

Для набора $C_r = C^r$ из теоремы Джексона следует выполнение условия (1) определения. Кроме того, очевидно, $\lim\limits_{r\to\infty} C^r = \infty$.

Периодические интегралы

Определение

Пусть f_0 — периодическая функция на прямой с периодом 2π, имеющая конечное число точек разрыва только первого рода и всюду $f_0(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, и такая, что ее интеграл по периоду равен нулю. r-кратным периодическим интегралом функции f_0 называется последовательность 2π-периодических функций f_r, такая что

1. $\forall s = 1, \ \ldots, r \int\limits_0^{2\pi} f_s(t)dt = 0.$
2. $\forall s = 2, \ \ldots, r \ f_s'(t) = f_{s-1}(t).$
3. $f_1'(t+0) = f_0(t+0)$ *и* $f_1'(t-0) = f_0(t-0).$

Теорема

r-кратные периодические интегралы задаются однозначно функцией f_0.

Периодические интегралы

Доказательство.

Докажем существование и единственность по индукции. При $r = 0$ определена функция f_0 по условию теоремы.
Пусть определены функции f_m при всех $0 \le m \le r$, являющиеся m-периодическими интегралами функции f_0. Положим $f(t) = \int\limits_0^t f_r(t)\,dt$, $C = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt$ и $f_{r+1}(t) = f(t) + \frac{C}{2\pi}$. Заметим, что функция f_{r+1} является искомым $(r+1)$-кратным интегралом функции $f_0(x)$.
Пусть имеется другая такая функция $g(x)$. Тогда $f'(x) = g'(x)$. Следовательно, $(f_{r+1}(x) - g(x))' = 0$. Поэтому $g(x) = f_{r+1}(x) + C$. Тогда из условия 1 определения периодического интеграла следует, что $C = 0$. $\square$

Функция Бернулли

Определение (Функция Бернулли)

Пусть $r \geq 1$. *r-й функций Бернулли называется функция*

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi r/2)}{k^r}.$$

При $r = 1$ *ряд Бернулли определяет ряд Фурье* 2π*-периодической функции*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2}, & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t = 0,\ t = 2\pi \end{cases}.$$

Теорема

Функция $B_{r+1}(t)$ *является r-периодическим интегралом функции* $B_1(t)$.

Периодические интегралы

Доказательство.

Проверим равенство $\varphi(t) = B_1(t)$. Достаточно вычислить коэффициенты разложения Фурье функции $\varphi(t)$. Имеем

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} \cdot \cos kt\,dt = \frac{1}{k\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2}\,d\sin kt \\
&= \frac{\pi - t}{2k\pi} \cdot \sin kt\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2k\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin kt\,dt = 0, \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} \cdot \sin kt\,dt = \frac{1}{k\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{t - \pi}{2}\,d\cos kt \\
&= \frac{t - \pi}{2k\pi} \cdot \cos kt\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2k\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos kt\,dt = \frac{1}{k}.
\end{aligned}
$$

Периодические интегралы

Равенства $B'_{s+1} = B_s$ следуют из формулы дифференцирования рядов Фурье.

Применим предыдущую теорему к функции $B_2(t)$ для $t \in [0, 2\pi)$.

Имеем

$$B_2(t) = \int\limits_0^t \frac{\pi - t}{2}\,dt - \frac{C}{2\pi} = \frac{\pi}{2}t - \frac{t^2}{4} - \frac{C}{2\pi},$$

где

$$C = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2}t - \frac{t^2}{4}\right)\,dt = \frac{\pi t^2}{4} - \frac{t^3}{12}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{3}.$$

Поэтому для $t \in [0, 2\pi)$ выполняется

$$B_2(t) = \frac{\pi}{2}t - \frac{t^2}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, $B_2(0) = -\dfrac{\pi^2}{6}$.

Периодические интегралы

С другой стороны,

$$B_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi)}{k^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}.$$

Поэтому

$$B_2(0) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Периодические интегралы

Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Поэтому

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{1}$$

Теорема Фавара

Теорема (Фавар)

Пусть

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}}, \;\; r \geq 1.$$

Тогда для любых $f \in W^r(M)$ и $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, T_{2n-1}) \leq K_r M/n^r, \;\; r \geq 1, \; n \geq 1,$$

причем для любых $r \geq 1$, $n \geq 1$ найдется функция $f_{nr} \in W^r(M)$, для которой $\varepsilon(f_{nr}, T_{2n-1}) \leq K_r M/n^r$.

Следовательно, набор констант K_r из теоремы Фавара оптимален. Из определения констант Фавара и соотношения (1)

$$0 < K_r \leq \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому константы K_r ограничены в совокупности.

Доказательство теоремы Фавара

Лемма

Лемма 1. *Пусть* $n \geq 1$*— натуральное и* $2\pi/n$*-периодическая функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *суммируема на каждом конечном отрезке. Тогда для любого* $1 \leq k \leq n-1$*:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = 0.$$

Если интеграл от $f(t)$ *по периоду* 2π *равен 0, то для любого тригонометрического многочлена* $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ *имеем:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) T(t) dt = 0.$$

Доказательство леммы

Доказательство.

В силу $2\pi/n$-периодичности функции f выполняются равенства

$$J_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt \;\; = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) e^{ikt}\,dt = \int\limits_{-\pi-\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{2\pi}{n}} f(x)e^{ik\left(x-\frac{2\pi}{n}\right)}\,dx$$

$$= e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx = e^{-\frac{2ik\pi}{n}} J_k.$$

Поскольку $1 \le k \le n-1$, то выполняется равенство $J_k = 0$. $\square$

Лемма об интерполяции

Лемма (О тригонометрической интерполяции)

Лемма 2.

1. *Пусть* $t_0, \ \ldots, t_{n-1} \in (0, \pi)$ *— попарно различные точки и* $b_0, \ \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ *— произвольные числа. Тогда существует единственный четный тригонометрический многочлен* $T(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos kt, \ \alpha_k \in \mathbb{R}$, *для которого* $T(t_j) = b_j$ *при* $0 \le j \le n-1$.
2. *Пусть* $\tau_1, \ \ldots, \tau_{n-1} \in (0, \pi)$ *— попарно различные точки и* $d_1, \ \ldots, d_{n-1} \in \mathbb{R}$ *— произвольные числа. Тогда существует единственный нечетный тригонометрический многочлен* $T(t) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin kt, \ \beta_k \in \mathbb{R}$, *для которого* $T(\tau_j) = d_j$ *при* $1 \le j \le n-1$.

Классы гладких функций. Формула обращения

Определение

$$W_*^r(M) = \{f \in C^r[S^1] \mid \|f^{(r)}\| \leq M\}.$$

Теорема

1. $W_*^r(M) \subset W^r(M)$.
2. $[W_*^r(M)] = W^r(M)$.

Лемма (Формула обращения)

Лемма 3. *Пусть* $f \in W_*^r(M)$. *Тогда*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} B_r(t-\tau)f^{(r)}(\tau)d\tau.$$

Доказательство формулы обращения

Формула обращения.

Достаточно доказать для $r = 1$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_1(t-\tau)f'(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{t} B_1(t-\tau)f'(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_t^{2\pi} B_1(t-\tau+2\pi)f'(\tau)d\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{t} \frac{\pi-t+\tau}{2}f'(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_t^{2\pi} \frac{\tau-t-\pi}{2}f'(\tau)d\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tau-t}{2}f'(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{t} f'(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^{2\pi} f'(\tau)d\tau =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tau f'(\tau)d\tau + f(t) = f(t)$$

$\square$

Представление фунции Бернулли в виде ряда Фурье

Лемма

Лемма 4. *Коэффициенты Фурье для функции Бернулли $B_r(t)$ выражаются формулой*

$$\mu_{r,n} + i\nu_{r,n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)e^{int}dt = \frac{i^r}{n^r}, \quad n > 0$$

и

$$\mu_{r,0} + i\nu_{r,0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)dt = 0.$$

Свойства функции Бернулли

Лемма

Лемма 5.

1. *При* $r > 2$ *функция* $B_r(t)$ *дифференцируема всюду на* $\mathbb{R}$ *и* $B'_r(t) = B_{r-1}(t)$.
2. *При* $r = 2$ *функция* $B_2(t)$ *дифференцируема при* $t \neq 2k\pi$ *и* $B'_2(t) = B_1(t)$ *для таких точек* t. *В точках* $t = 2k\pi$ *существуют односторонние производные и выполняется равенство* $B'_2(2k\pi \pm 0) = B_1(2k\pi \pm 0)$.

Нули погрешности аппроксимации

Определим тригонометрические многочлены $T_{n,r}(t)$. Пусть $n \geq 1$ и $t_j = (2j+1)\pi/(2n)$ — все нули функции $\cos nt$ на интервале $(0,\pi)$, а $\tau_k = k\pi/n$ — все нули функции $\sin nt$ на интервале $(0,\pi)$. Для четного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ — тригонометрический многочлен, для которого $T_{n,r}(t_j) = B_r(t_j)$, где $B_r(t)$ — r-я функция Бернулли. Для нечетного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ — тригонометрический многочлен, для которого $T_{n,r}(\tau_k) = B_r(\tau_k)$, где $B_r(t)$ — r-я функция Бернулли. Согласно лемме о тригонометрической интерполяции функции $T_{n,r}$ определены однозначно.

Лемма (О нулях тригонометрической интерполяции)

Лемма 6. *Разность $\Delta(t) = \Delta_{n,r}(t) = B_r(t) - T_{n,r}(t)$ обращается в нуль на интервале $(0,\pi)$ при $n \geq 1$ и четном r только в точках t_j, а при нечетном r только в точках τ_k. При $n = 1$ и нечетном r корней на $(0,\pi)$ нет. Все корни являются простыми.*

Доказательство теоремы Фавара.

Доказательство теоремы Фавара. Проверим сначала выполнение условий (a) определения оптимальных констант. Согласно формуле обращения выполняется равенство

$$f(t) = \frac{a}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} B_r(t-\tau) f^{(r)}(\tau) d\tau.$$

Пусть $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ произвольный тригонометрический многочлен степени $< n$. Тогда

$$\Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} T(t-\tau) f^{(r)}(\tau) d\tau$$

также является тригонометрическим многочленом степени $< n$.

Доказательство теоремы Фавара

Рассмотрим разность

$$f(t)-\frac{a}{2}-\Lambda(T)(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}(B_r(t-\tau)-T(t-\tau))f^{(r)}(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$|f(t)-\frac{a}{2}-\Lambda(T)(t)|\leq\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}|B_r(t-\tau)-T(t-\tau)|\cdot|f^{(r)}(\tau)|d\tau\leq$$

$$\frac{M}{\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}|B_r(z)-T(z)|dz.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(f,\mathcal{T}_{2n-1})\leq\frac{M}{\pi}\cdot\inf_{T\in\mathcal{T}_{2n-1}}\int\limits_0^{2\pi}|B_r(z)-T(z)|dz.$$

Доказательство теоремы Фавара

Достаточно проверить неравенство

$$\inf_{T\in\mathcal{T}_{2n-1}} \int\limits_0^{2\pi} |B_r(z) - T(z)|dz \le \pi K_r n^{-r}.$$

Для этого достаточно проверить, что , например,

$$\int\limits_0^{2\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)|dz \le \pi K_r n^{-r}.$$

Согласно лемме 6 все корни разности $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ на интервале $(0,\pi)$ простые и совпадают с простыми корнями функции $\cos nt$ при четном r и с корнями $\sin nt$ при нечетном r.

Доказательство теоремы Фавара

Поэтому знаки функций $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ и $\cos nt$ при четном r и, соответственно, $\sin nt$ при нечетном r, либо всюду совпадают, либо всюду противоположны. Поэтому при четном r выполнено равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)| dz = 2\int_{0}^{\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)| dz =$$

$$2\int_{0}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z)) \operatorname{sign}\Delta(z) dz = \pm 2\int_{0}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z)) \operatorname{sign}\cos nz dz =$$

$$2\left|\int_{0}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z)) \operatorname{sign}\cos nz dz\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z)) \operatorname{sign}\cos nz dz\right| =$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} B_r(z) \operatorname{sign}\cos nz dz\right|,$$

где в последнем равенстве использована лемма 1.

Доказательство теоремы Фавара

Аналогично для нечетного r

$$\int_{-\pi}^{\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)| dz = \left| \int_{-\pi}^{\pi} B_r(z) \operatorname{sign} \sin nz dz \right|.$$

Теперь воспользуемся обобщенным равенством Парсеваля в $L_2[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt = \frac{\alpha_0 \cdot a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cdot a_k + \beta_k \cdot b_k),$$

где α_k, β_k и a_k, b_k — коэффициенты Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$, соответственно.

Доказательство теоремы Фавара

Для функций Бернулли коэффициенты Фурье вычислены в лемме 4. Для функций $\operatorname{sign}\cos nt$ и $\operatorname{sign}\sin nt$ соответствующие ряды Фурье определяется формулами

$$\operatorname{sign}\cos nt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1}$$

и

$$\operatorname{sign}\sin nt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1}.$$

Доказательство теоремы Фавара

Подставляя полученные коэффициенты в равенство Парсеваля, получим при четном $r = 2\nu$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu}(z)\operatorname{sign}\cos nz dz = (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi n^{2\nu}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\nu+1}} = \frac{(-1)^{\nu}K_r}{n^r},$$

и нечетном $r = 2\nu + 1$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu+1}(z)\operatorname{sign}\sin nz dz = (-1)^{\nu}\frac{4}{\pi n^{2\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2\nu+2}} = \frac{(-1)^{\nu}K_r}{n^r}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)| dz = K_r n^{-r}.$$

Утверждение (a) теоремы Фавара доказано.

Периодические интегралы

Лемма

Лемма 7. *Пусть $\varphi_r(t)$ — r-кратные периодические интегралы функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sign}\sin t$. Тогда*

1. *(а) $\varphi_r \in W^r(1)$, при $r \geq 1$,*
2. *Функции $\varphi_r(t)$ имеют следующие представления в виде рядов Фурье*

$$\varphi_r(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t - \pi r/2)}{(2k+1)^{r+1}}.$$

3. *(б) $\|\varphi_r\| = K_r$, где K_r — константы Фавара,*
4. *(в) $|\varphi_r(\pi/2)| = \|\varphi_r\|$, для четного $r \geq 2$ и $|\varphi_r(0)| = \|\varphi_r\|$, для нечетного $r \geq 1$.*

Доказательство неулучшаемости констант

Покажем теперь, что константы Фавара неулучшаемы.
Рассмотрим функции $f_{n,r}(t) = \dfrac{M}{n^r}\varphi_r(nt)$. Покажем, что для этих функций наименее уклоняющимся многочленом в $\mathcal{T}_{2n-1}$ является нулевой многочлен.
Из леммы 7 следует, что эти функции лежат в классе $W^r(M)$.
Согласно этой же лемме многочлены $\varphi_r(t)$ могут быть разложены в ряд Фурье

$$\varphi_r(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t - \pi r/2)}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Неулучшаемость констант в теореме Фавара

Пусть $r = 2\nu$ четное. Рассмотрим точки $\xi_k = (2k+1)\pi/(2n)$. Вычислим значения функции $f_{n,r}$ в этих точках, используя разложение в ряд Фурье. Получим

$$f_{n,r}(\xi_k) = \frac{M}{n^r}\varphi_r\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \frac{4M}{\pi n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)(2k+1)\pi/2 - \pi\nu]}{(2m+1)^{r+1}} =$$

$$\frac{4M(-1)^{\nu+k}}{\pi n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^{r+1}} = (-1)^{\nu+k}\frac{M}{n^r}K_r = (-1)^{\nu+k}\|f_{nr}\|,$$

т.е. точки $-\pi < \xi_{-n} < \ \ldots < \xi_{n-1} < \pi$ образуют альтернанс порядка $2n$ для функции $f_{n,r}$. Следовательно, по теореме Чебышева нулевой многочлен наименее уклоняется от $f_{r,n}$ и неравенство Фавара превращается в этом случае в равенство.

Неулучшаемость констант в теореме Фейера

Пусть теперь $r = 2\nu + 1$ нечетное. Рассмотрим точки $\zeta_k = k\pi/n$. Вычислим значения функции $f_{n,r}$ в этих точках, используя разложение в ряд Фурье. Получим

$$f_{n,r}(\zeta_k) = \frac{M}{n^r}\varphi_r(k\pi) = \frac{4M\pi}{n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin[(2m+1)(2k+1)\pi/2 - \pi\nu - \pi/2]}{(2m+1)^{r+1}} =$$

$$\frac{4M(-1)^{\nu+k+1}}{\pi n^r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^{r+1}} = (-1)^{\nu+k+1}\frac{M}{n^r}K_r = (-1)^{\nu+k+1}\|f_{nr}\|,$$

т.е. точки $-\pi < \zeta_{-n} < \ \ldots < \zeta_{n-1} < \pi$ образуют альтернанс порядка $2n$ для функции $f_{n,r}$. Следовательно, по теореме Чебышева нулевой многочлен наименее уклоняется от $f_{r,n}$ и неравенство Фавара превращается в этом случае в равенство.

Оптимальность констант Фавара доказана.

Задачи

Задача 1. Доказать, что для произвольных $\varphi_1, \ \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \cdots & \cos(n-1)\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_n & \cdots & \cos(n-1)\varphi_n \end{vmatrix} =$$

$$2^{(n-1)^2} \prod_{1\le i<k\le n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \cdot \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2},$$

при $n > 1$ и

$$(b) \begin{vmatrix} \sin\varphi_1 & \sin 2\varphi_1 & \cdots & \sin n\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 & \sin 2\varphi_2 & \cdots & \sin n\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\varphi_n & \sin 2\varphi_n & \cdots & \sin n\varphi_n \end{vmatrix} =$$

$$2^{n(n-1)} \prod_{k=1}^{n} \sin\varphi_k \prod_{1\le i<k\le n} \sin\frac{\varphi_i+\varphi_k}{2} \cdot \sin\frac{\varphi_i-\varphi_k}{2}.$$

Задачи

Указание к задаче 1. Воспользуйтесь тем, что $\cos nx$ и $\sin(n+1)x/\sin x$ — многочлены степени n относительно переменной $\cos x$. Найдите их старшие коэффициенты. Используйте определитель Вандермонда.)

Задача 2. Воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения для вывода леммы 2.

Задача 3. Докажите лемму 6. Для этого рассмотрите процедуру дифференцирования функций $\Delta_{n,r}(t) = B_r(t) - T_{n,r}(t)$. Сколько раз можно дифференцировать эту функцию? Докажите, что при дифференцировании число нулей не изменится. Воспользуйтесь периодичностью функций. Рассмотрите отдельно случай четного r и случай нечетного r.

Постановка задачи интерполяции

Рассмотрим бесконечный компакт $D \subset \mathbb{C}$ и пространство непрерывных на нем функций $C[D]$. Пусть P_n — пространство полиномов степени меньшей n.

Определение

Определение 1. *Фиксируем произвольные n точек* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ \ldots, x_n)$*, где* $x_i \in D$ *и набор чисел* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ \ldots, y_n)$*, где* $y_i \in \mathbb{R}$*. Интерполяционным полиномом для этих данных называется многочлен* $p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in P_n$ *для которого* $p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(x_k) = y_k$*.*

Существование интерполяции

Теорема

Теорема 1. *Интерполяционный полином существует для любого набора узлов.*

Существование интерполяции

Доказательство. Задача нахождения интерполяционного полинома эквивалентна задаче нахождения решения системы линейных уравнений

$$
\begin{array}{l}
a_0 + a_1 \cdot x_1 + \ \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\
a_0 + a_1 \cdot x_2 + \ \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 + a_1 \cdot x_n + \ \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n
\end{array}
$$

Определителем этой системы является определитель Вандермонда для узлов $\mathbf{x}$

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix}.
$$

Поскольку все точки x_k различны, этот определитель не равен нулю $\blacksquare$.

Полиномы Лагранжа

Определение

Определение 2. *Полиномами Лагранжа называются интерполяционные полиномы* $l_{k,n}(\mathbf{x}) = p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)$ *для* $\mathbf{y}_k = (\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \cdots, \delta_{k,n})$.

Имеет место равенство

$$l_{k,n}(\mathbf{x})(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

При фиксации узлов интерполяции $\mathbf{x}$ обозначение для интерполяционного полинома обычно сокращается

$$p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_{n-1}(\mathbf{y})$$

и

$$l_{k,n}(\mathbf{x}) = l_{k,n}.$$

Интерполяционный полином Лагранжа

Решение задачи интерполяции можно записать в виде

$$p_{n-1}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot l_{k,n}.$$

Пусть задана функция $f \in C[D]$. Положим $\mathbf{y} = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$. Тогда полином $p_{n-1}(\mathbf{x}, f) = p_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется интерполяционным полиномом функции f.
Решение задачи интерполяции можно записать в виде

$$p(\mathbf{x}, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot l_{k,n}.$$

Полином Лагранжа

Определим операторы

$$\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)} : C[D] \to P_n$$

формулами

$$\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot l_{k,n}^{(\nu)}.$$

Заметим, что оператор $\pi_{\mathbf{x}}^{(0)} = \pi_{\mathbf{x}}$ является проектором. Действительно, интерполяционным полиномом для интерполяционного полинома является сам интерполяционный полином.

Определим числа $\lambda_n^{(\nu)} = \max\limits_{x \in D} \sum\limits_{k=1}^{n} |l_{k,n}^{(\nu)}(x)|$. При $\nu = 0$ положим $\lambda_n^{(0)} = \lambda_n$.

Полиномы Лагранжа

Теорема

Теорема 2. *Линейные операторы* $\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}$ *непрерывны и выполняется равенство*

$$\|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}\| = \lambda_n^{(\nu)}.$$

Доказательство.

Доказательство. Выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}(f)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot l_{k,n}^{(\nu)} \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \cdot \|l_{k,n}^{(\nu)}\| \\ &\leq \|f\| \cdot \sum_{k=1}^{n} \|l_{k,n}^{(\nu)}\| = \|f\| \cdot \lambda_n^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}$ непрерывен и $\|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}\| \leq \lambda_n^{(\nu)}$. □

Полиномы Лагранжа

Докажем теперь, что $\|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}\| \geq \lambda_n^{(\nu)}$. Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |l_{k,n}^{(\nu)}(x)|$. Поскольку множество D компактно, существует элемент $x_* \in D$, для которого $\varphi(x_*) = \lambda_n^{(\nu)}$. Построим теперь функцию $f_0 \in C[D]$, для которой выполняются соотношения $f_0(x_k) = \operatorname{sgn}(l_{n,k}(x_*))$ и $|f_0(x)| \leq 1$. Если $D = I$, то функция f определяется кусочно-линейной интерполяцией по узлам x_k. Существование такой функции в общем случае следует, например, из теоремы Титце о продолжении. Тогда

$$\|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}\| \geq \|\pi_{\mathbf{x}}^{(\nu)}(f_0)\| = \max_{x\in D} \|\sum_{k=1}^{n} f_0(x_k) \cdot l_{k,n}^{(\nu)}(x)\| \geq$$

$$\|\sum_{k=1}^{n} f_0(x_k) \cdot l_{k,n}^{(\nu)}(x_*)\| = \sum_{k=1}^{n} |l_{k,n}^{(\nu)}(x_*)| = \lambda_n^{(\nu)}. \blacksquare$$

Константы Лебега

Определение

Определение 3. *Числа* $\lambda_n = \max\limits_{x \in D} \sum\limits_{k=1}^{n} |l_{k,n}(x)|$ *называются константами Лебега.*

Теорема

Теорема 3 (Неравенство Лебега). *Для любой непрерывной на отрезке* $[a, b]$ *функции* f *выполняется неравенство*

$$\|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n).$$

Неравенство Лебега

Доказательство.

Пусть $q \in \mathcal{P}_n$ — произвольный элемент. Тогда, поскольку $\pi_{\mathbf{x}}$ проектор,

$$\|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| = \|f - q + q - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \le \|f - q\| + \|\pi_{\mathbf{x}}(q) - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| =$$

$$\|f - q\| + \lambda_n \cdot \|f - q\| = (1 + \lambda_n) \cdot \|f - q\|.$$

Пусть теперь q_δ, такой полином из $\mathcal{P}_n$, для которого выполняется неравенство $\|f - q_\delta\| < \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) + \delta$. Тогда

$$\|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \le (1 + \lambda_n) \cdot \|f - q_\delta\| < (1 + \lambda_n) \cdot (\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) + \delta).$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$\|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \le (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n). \quad \square$$

Неравенство Лебега

Из неравенства Лебега получаем оценку

$$\varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \leq \|f - \pi_{\mathbf{x}}(f)\| \leq (1 + \lambda_n) \cdot \varepsilon(f, \mathcal{P}_n).$$

Легко доказывается следующая

Лемма

Лемма 8. *Пусть переменные $a \leq x \leq b$ и $-1 \leq s \leq 1$ и узлы интерполяции $x_k \in I = [a, b]$ ($k = 1, \ \ldots, n$) и $s_j \in I_0 = [-1, 1]$ ($j = 1, \ \ldots, n$) связаны линейными соотношениями*

$$x = x(s) = \frac{b - a}{2} \cdot s + \frac{b + a}{2}.$$

Тогда выполняется равенство

$$\lambda_n^{(\nu)}(I_0, \mathbf{s}) = (b - a/2)^{\nu} \cdot \lambda_n^{(\nu)}(I, \mathbf{x}).$$

Инвариантность констант Лебега

Из леммы следует инвариантность констант Лебега для линейных преобразований узлов. Найдем константы Лебега для равномерно распределенных узлов интерполяции. Достаточно рассмотреть отрезок $[1, n]$ с узлами $x_k = k$. Полиномы Лагранжа имеют вид

$$l_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - j}{k - j}.$$

Оценки сверху и снизу констант Лебега

Лемма

Лемма 9. *Выполняются соотношения*

$$1.\ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |k-j| = (k-1)!\cdot(n-k)!,$$

$$2.\ k!\cdot(n-k)! \le (n-1)!,\ \ 1 \le k < n,$$

$$3.\ \prod_{j=1}^{m}\left(j-\frac{1}{2}\right) \ge \frac{m!}{2}\sqrt{m},\ \ m \ge 1.$$

В следующей теореме утверждается, что константы Лебега растут экспоненциально от числа узлов интерполяции.

Теорема

Теорема 4. *При $n > 1$ константы Лебега удовлетворяют неравенству*

$$2^{n-3}/n^{3/2} \le \lambda_n \le 2^{n-1}.$$

Оценка снизу констант Лебега

Доказательство. Оценим константы Лебега снизу. Имеем

$$\lambda_n = \max_{1\le x\le n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |x-j|$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \left|\frac{3}{2}-j\right|.$$

Согласно неравенству 3 леммы 2 получаем

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \left|\frac{3}{2}-j\right| = \frac{1}{|k-3/2|} \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{3}{2}-j\right| =$$

$$\frac{1}{2|k-3/2|} \prod_{j=1}^{n-1} \left|\frac{1}{2}-j\right| \geq \frac{(n-1)!}{4|k-3/2|\sqrt{n-1}} \geq \frac{(n-1)!}{4n\sqrt{n-1}}.$$

Оценка снизу констант Лебега

Поэтому

$$\lambda_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \left|\frac{3}{2} - j\right| \geq$$

$$\frac{1}{4n\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{2^{n-1}}{4n\sqrt{n-1}} \geq 2^{n-3}/n^{3/2}.$$

Оценка сверху констант Лебега

Докажем справедливость оценки сверху для констант Лебега. Представим $x \in [1, n]$ в виде $x = l + s$, где $1 \le l \le n$ — целое число, а $|s| \le \frac{1}{2}$. Предположим также, что $s \ne 0$. Тогда

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\ne k}}^{n} |x-j| = \frac{1}{|x-k|}\prod_{j=1}^{n} |x-j| =$$

$$\frac{1}{|l-k+s|}\prod_{j=1}^{n}|l-j+s| = \frac{1}{|l-k+s|}\prod_{j=-(n-l)}^{l-1}|j+s| =$$

$$\frac{|s|}{|l-k+s|}\prod_{j=1}^{l-1}|j+s|\cdot\prod_{j=1}^{n-l}|j-s| \le \prod_{j=1}^{l-1}|j+s|\cdot\prod_{j=1}^{n-l}|j-s|.$$

Оценка сверху констант Лебега

При $s > 0$ всегда $l < n$ и, следовательно, выполнено неравенство

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |x-j| \leq l!(n-l)! \leq (n-1)!.$$

При $s < 0$ всегда $1 < l$ и, следовательно, выполнено неравенство

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |x-j| \leq (l-1)!(n-l+1)! \leq (n-1)!.$$

При $s = 0$ это неравенство очевидно. Следовательно,

$$\lambda_n = \max_{1\leq x\leq n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!(n-k)!} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |x-j| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = 2^{n-1}.$$