Пример Бернштейна. Линейные методы приближения

Шокуров

24 апреля 2025 г.

Пример Бернштейна

Расмотрим многочлен

$$P(x) = \frac{(n-x)(n-x-1)\ \dots (2-x)}{n!}.$$

Запишем интерполяционную формулу Ньютона для $a = 0$ и $h = 1$. В этом случае

$$P(a) = 1, \quad P(a+h) = \frac{1}{n}$$

$$P(a+2h) = \ \dots = P(a+(n-1)h) = 0,$$

и потому

$$\Delta^k P(a) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} P(a+rh) = (-1)^k \frac{n-k}{n}.$$

Пример Бернштейна

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\frac{(n-x)(n-x-1)\dots(2-x)}{n!} &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^k P(a)\Phi_k(x-a;h) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{n} \cdot \frac{x\cdot(x-1)\ \dots (x-k+1)}{k!}.
\end{aligned}
$$

Полагая, в частности, $x = n+m$, получаем тождество

$$
\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{n} \binom{n+m}{k} = (-1)^{n-1} \frac{(n+m-2)!}{(m-1)!\cdot n!}.
$$

В последнем равенстве сделаем замену $k = n-i$, добавим нулевое слагаемое и домножим на n. Получим

$$
\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} i \binom{n+m}{n-i} = (-1)^{n-1} \frac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}.
$$

Пример Бернштейна

Теперь поменяем ролями n и m, поделим полученное равенство на n и преобразуем биномиальные коэффициенты. Получим

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\frac{i}{n}\binom{n+m}{n+i}=(-1)^{m-1}\frac{(n+m-2)!}{(m-1)!n!}. \qquad (1)$$

Теорема (Бернштейн). Интерполяционный полином, построенный для функции $|x|$ по равноотстоящим узлам сегмента $[-1,1]$ не сходится ни в одной из точек этого сегмента, отличной от $-1, 0$ и 1.

Пример Бернштейна

Доказательство проведем для точек из интервала $(-1, 0)$.
Определим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Так как $|x| = 2\varphi(x) - x$, то достаточно установить расходимость интерполяционного процесса для функции $\varphi(x)$. Рассмотрим $2n + 1$ узлов вида

$$x_k = -1 + \frac{k-1}{n} \quad (k = 1, 2, \ \ldots, 2n+1)$$

и обозначим через $L_{2n+1}(x)$ соответствующий интерполяционный полином функции $\varphi(x)$. Согласно интерполяционной формуле Ньютона имеем

$$L_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n} n^k \frac{\Delta^k \varphi(-1)}{k!} (x - x_1)(x - x_2) \ \ldots (x - x_k) \qquad (2).$$

Пример Бернштейна

В силу п.4 свойств разностного оператора выполняется равенство

$$\Delta^k \varphi(-1) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \varphi\left(-1 + \frac{r}{n}\right).$$

Если $r \leq n$, то $\varphi\left(-1 + \dfrac{r}{n}\right) = 0$, поэтому при $k = 0, 1, \ \ldots, n$

$$\Delta^k \varphi(-1) = 0.$$

Если же $r = n + i$, где $i = 1, 2, \ \ldots, n$, то $\varphi\left(-1 + \dfrac{r}{n}\right) = \dfrac{i}{n}$.

Поэтому согласно формуле (1)

$$\begin{aligned} \Delta^{n+m} \varphi(-1) &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \binom{n+m}{n+i} \frac{i}{n} \\ &= (-1)^{m-1} \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!n!} \end{aligned}$$

при $m = 1, 2, \ \ldots, n$.

Пример Бернштейна

Поэтому равенство (2) приобретает вид

$$L_{2n+1}(x) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!n!} \frac{n^{n+m}}{(n+m)!} (x+1) \cdot$$

$$\cdot \left(x + \frac{n-1}{n}\right) \ \ldots \left(x + \frac{1}{n}\right) x \left(x - \frac{1}{n}\right) \ \ldots \left(x - \frac{m-1}{n}\right). \quad (3)$$

Заметим, что при всех $-1 \leq x \leq 0$ все знаки в последней сумме одинаковы и выполняется равенство

$$\frac{(n+n-2)!n^{n+n}}{(n-1)!n!(n+n)!} = \frac{n^{2n}}{2(2n-1)(n!)^2}.$$

Поэтому

$$|L_{2n+1}(x)| \geq \frac{\left|(x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right) \ \ldots \left(x-1+\frac{1}{n}\right)\right|}{2(2n-1)(n!)^2} \cdot n^{2n}.$$

Пример Бернштейна

Фиксируем значение $x \in (-1, 0]$. Тогда $x = -\frac{i}{n} - \frac{\theta_n}{n}$ при некотором $i = 0, \ \ldots, n-1$ и $0 \le \theta_n < 1$. Поэтому

$$|L_{2n+1}(x)| \ge \frac{n^{2n}}{2(2n-1)(n!)^2} \left(\frac{n-i}{n} - \frac{\theta_n}{n} \right) \left(\frac{n-i-1}{n} - \frac{\theta_n}{n} \right) \cdots$$
$$\left(\frac{1}{n} - \frac{\theta_n}{n} \right) \frac{\theta_n}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n} \right) \ \cdots \left(\frac{n+i-1}{n} + \frac{\theta_n}{n} \right)$$

Правая часть последнего неравенства не увеличится, если θ_n заменить на 1 в первых $n-i-1$ сомножителях и на 0 в последних $n-i+1$ сомножителях. Поэтому

$$|L_{2n+1}(x)| \ge \frac{(n-i-1)!(n+i-1)!}{2(2n-1)(n!)^2} \theta_n (1-\theta_n).$$

Оценим теперь множитель

$$\sigma_n = \frac{(n-i-1)!(n+i-1)!}{2(2n-1)(n!)^2}$$

Пример Бернштейна

Очевидно,

$$\sigma_n = \frac{1}{2n(n-1)(2n-1)}\left(1+\frac{i+1}{n-i}\right)\dots\left(1+\frac{i+1}{n-2}\right)$$
$$\geq \frac{1}{2n(n-1)(2n-1)}\left(1+\frac{i+1}{n-2}\right)^{i-1}.$$

Выполнено очевидное неравенство

$$x > -\frac{i+1}{n} > -\frac{i+1}{n-2}.$$

Следовательно, $i-1 > -nx-2$ и в силу второй половины неравенства

$$\sigma_n \geq \frac{1}{2n(n-1)(2n-1)}(1-x)^{-nx-2}.$$

Пример Бернштейна

Поэтому, (поскольку $1 - x > 2$ и $-nx - 2 \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty.$$

Выберем теперь число q, уловлетворяющее условию $0 < q < (1 + x)/2$. Тогда при любом натуральном i длина интервала $J_i = \left(\frac{i+q}{-x}, \frac{i+1-q}{-x}\right)$ больше 1. Следовательно, для каждого натурального i существует натуральное число $n_i \in J_i$ и, очевидно,

$$\lim_{i\to\infty} n_i = +\infty$$

и тогда

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{n_i} = +\infty.$$

Пример Бернштейна

Тогда

$$\frac{i}{n_i} + \frac{q}{n_i} < -x < \frac{i+1}{n_i} - \frac{q}{n_i}$$

Поэтому, $\theta_{n_i} > q$ и $1 - \theta_{n_i} > q$. Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} |L_{2n_i+1}(x)| \geq \lim_{i\to\infty} q^2 \cdot \sigma_{n_i} = +\infty,$$

т.е.

$$\lim_{i\to\infty} |L_{2n_i+1}(x)| = +\infty.$$

Линейные методы приближения и понятие насыщения

Пусть B — банахово пространство и для каждого достаточно большого натурального n задано конечномерное линейное подпространство $L_n \subset B$ и линейное непрерывное отображение $\pi_n : B \to L_n$. Рассмотрим аппроксимацию элемента $x \in B$ элементами $\pi_n(x)$. Величина $\delta_n(x) = \|x - \pi_n(x)\|$ называется погрешностью аппроксимации. Пусть также задано подмножество $W \subset B$ (обычно компактное или ограниченно компактное). Рассмотрим погрешность аппроксимации на множестве W

$$\delta_n W = \sup_{x \in W} \delta_n(x) = \sup_{x \in W} |x - \pi_n(x)\|.$$

Будем исследовать ассимптотику величин $\delta_n W$ при $n \to \infty$. Если π_n проектор, то имеет место абстрактое неравенство Лебега

$$\varepsilon(x, L_n) \leq \|x - \pi_n(x)\| \leq (1 + \|\pi_n\|)\varepsilon(x, L_n).$$

Линейные методы приближения

Следовательно,

$$\sup_{x \in W} \varepsilon(x, L_n) \leq \delta_n W \leq (1 + \|\pi_n\|) \sup_{x \in W} \varepsilon(x, L_n). \tag{4}$$

Определение

Последовательность $\pi_n : B \to L_n$, определенная для достаточно больших n и состоящая из линейных непрерывных отображений банахова пространства B в конечномерные линейные подпространства $L_n \subset B$, называется линейным методом приближения. Нормы $\|\pi_n\|$ называются абстрактными константами Лебега.

Пусть $\mathcal{R}, \prec$ — линейный порядок на множестве индексов и для каждого $r \in \mathcal{R}$ задано подмножество $W^r \subset B$, называемое классом, не содержащееся ни в каком конечномерном подпространстве B.

Линейные методы приближения

Определение

Линейный метод приближения $\pi_n : B \to L_n$ *имеет насыщение на классах* W^r, $r \in \mathcal{R}$, *если существует индекс* $r_0 \in \mathcal{R}$, *для которого выполнены следующие условия*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n W^r = 0$ *при любом* $r \preceq r_0$,
2. $\delta_n W^s = o(\delta_n W^r)$ *при* $n \to \infty$ *для любых* $r \prec s \preceq r_0$,
3. *если* $r_0 \prec r$, *то существуют* $x \in W^r$ *и* $C > 0$, *не зависящая то* n, *для которых при достаточно больших* n *выполняется неравенство*
$$\delta_n(x) \geq C\delta_n W^{r_0},$$
т.е. $\delta_n W^{r_0} = O(\delta_n(x))$.

Класс W^{r_0} *называется классом насыщения линейного метода приближения* π_n, *а класс последовательностей, слабо эквивалентных сходящейся к нулю последовательности* $\delta_n W^{r_0}$ — *порядком насыщения.*

Примеры

Пример 1. Пусть $B = C[I],\ I = [a, b],\ r_0 \geq 2$, $x^0_{n,k} = a + (b - a)(k - 1)/(n - 1)$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq r_0$ — равноотстоящие узлы на $[a, b]$, $\pi_n = l_{r_0}(\mathbf{x}^0_n) : C[I] \to \mathcal{L}^{(n)}_{r_0} = \mathcal{L}^{(n)}_{r_0}(\mathbf{x}^0_n) = L_n$ — оператор, сопоставляющий функции f ее лагранжев сплайн относительно системы узлов $\mathbf{x}^0_n = (x^0_{n,1},\ \dots, x^0_{n,n})$, $n \geq r_0$. Из свойств лагранжевых сплайнов следует, что π_n линейный метод приближения и $\|\pi\| \leq \lambda_{r_0}$, где λ_{r_0} — константа Лебега относительно системы r_0 равноотстоящих узлов. Положим, для заданного положительного числа M: $W^r = W^r(M, I),\ r \geq 1, r \in \mathbb{N}$. Тогда, как было ранее доказано, линейный метод приближения $\pi_n = l_{r_0}(\mathbf{x}^0_n)$ имеет насыщение, причем класс насыщения равен $W^{r_0}(M, I)$, а порядок насыщения есть $\delta_n W^{r_0}(M, I) \asymp n^{-r_0}$.

Примеры

Пример 2. Пусть $B = C[I],\ I = [a, b]$,

$$x^*_{n,k} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n$$

— чебышевские узлы на отрезке I, $\pi_n = \pi_n(\mathbf{x}^*_n) : C[I] \to \mathcal{P}_n = L_n$, $n \geq 1$ — оператор, сопоставляющий Р функции ее алгебраический интерполяционный полином степени меньшей n относительно системы узлов $\mathbf{x}^*_n = (x^*_{n,1},\ \ldots, x^*_{n,n})$ на отрезке I. Для интерполяционных полиномов с такими узлами было доказано, что π_n — линейный оператор и $\|\pi_n\| = \lambda_n$, где λ_n — соответствующая константа Лебега относительно узлов $\mathbf{x}^*_n$, т.е. определяет линейный метод приближения. Положим для $M > 0$: $W^r = W^r(M, I)$. Тогда полученный линейный метод не имеет насыщения на классах W^r. Поскольку π_n — проектор, то согласно формуле (4)

$$\sup_{f\in W^r} \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \leq \delta_n W^r \leq (1+\lambda_n) \sup_{f\in W^r} \varepsilon(f, \mathcal{P}_n),\ r \geq 1, n \geq 1.$$

Примеры

В силу неравенства Джексона при $n \geq r$ имеем
$\sup\limits_{f \in W^r} \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \leq M|I|^r C_1(r) h^{-r}$, где $C_1(r)$ некоторая константа, зависящая только от r. Далее будет доказано неравенство
$\sup\limits_{f \in W^r} \varepsilon(f, \mathcal{P}_n) \geq M|I|^r C_1(r) n^{-r}$, где $C_2(r)$ — унивесальная константа.
Наконец, по теореме Бернштейна $\lambda_n < 8 + \frac{4}{\pi} \ln n,\ n \geq 1$. Поэтому при $n \geq r \geq 1$

$$M|I|^r C_2(r) n^{-r} \delta_n W^r \leq (9 + \frac{4}{\pi} \ln n) M|I|^r C_1(r) n^{-r}. \qquad (5)$$

Из неравенства (5) следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n W^r = 0$ для всех r. При $s > r$ для всех $n \geq s$

$$\frac{\delta_n W^s}{\delta_n W^r} \leq \frac{C_1(s)|I|^s M(9 + \frac{4}{\pi}) n^{-s}}{M|I|^r C_2(r) n^{-r}} = \frac{C_1(s)}{C_2(r)} |I|^{s-r} \frac{9 + \frac{4}{\pi}}{n^{s-r}} \to 0.$$

Поэтому условие 2 определения насыщения выполнены для всех $s > r$. Поэтому, учитывая неравенство $\delta_n(f)/\delta_n W^r \leq \delta_n W^s / \delta_n W^r$, $f \in W^s$, получим, что условие 3 не выполняется ни при каком $r_0 \geq 1$, т.е. данный линейный метод приближения не имеет насыщения.

Примеры

Пример 3. Пусть $B = C[S^1]$, $L_n = \mathcal{T}_{2n+1}$, $\pi_n = S_n : B \to L_n$, оператор, сопоставляющий функции $f \in C[S^1]$ n-ю частичную сумму ее ряда Фурье

$$\pi_n(f) = S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)dt,$$

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}f(x)dx,\ k \geq 0.$$

Поэтому выполняется неравенство

$$|S_n(f)(x)| \leq \|f\|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt.$$

Поэтому

$$\|S_n\| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt. \tag{6}$$

Примеры

Задача 1. Доказать, что в формуле (6) выполняется равенство.
Найдем ассимптотику констант Лебега $\|S_n\|$.

Лемма (1)

$\|S_n\| = \frac{4}{\pi^2}\ln n + \alpha_n$, где $\alpha_n = O(1)$ и $|\alpha_n| \le C_0 = 3 + \frac{4}{\pi^2} + \frac{2\pi}{24-\pi^2}$, $n > 1$.

Из леммы следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n\| = +\infty$. Поэтому по теореме Банах-Штейнгауза существует $f \in C[S^1]$, для которой последовательность $S_n(f)$ не сходится равномерно к f. Следовательно, на непрерывных функциях предложенный метод линейного приближения аппроксимирует плохо. Рассмотрим теперь для фиксированного $M > 0$ пространство функций $W^r(M)$. Поскольку S_n проектор, применяя неравенства (4) и воспользовавшись теоремой Фавара: $\sup\limits_{f\in W^r(m)} \varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n+1}) = M\mathcal{K}_r(n+1)^{-r}$, где $\mathcal{K}_r$ — константы Фавара и C_0 — константа из леммы, получим

$$M\mathcal{K}_r(n+1)^{-r} \le \delta_n W^r \le (1 + C_0 + \frac{4}{\pi^2}\ln n)M\mathcal{K}_r(n+1)^{-r}, \qquad (7)$$

Примеры

Из неравенства (7) следует, что линейный метод приближения S_n не имеет насыщения на классах $W^r(M)$ при $r \geq 1$. Оценка сверху в (7) является точной по порядку.

Теорема (Колмогоров)

Для любого $r \geq 1$ и любого $M > 0$ выполняется

$$\delta_n W^r(M) = \sup_{f \in W^r(M)} \|f - S_n(f)\| = \frac{4M}{\pi^2} n^{-r} \ln n + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

В частности, $\delta_n W^r(M) \asymp 4M(\ln n) n^{-r}/\pi^2$.

Пример 4. Пусть $B = C[S^1]$, $L_n = \mathcal{T}_{2n-1}$, $\pi_n = \sigma_n : B \to L_n$ — оператор, сопоставляющий функции $f \in C[S^1]$ ее n-ю сумму Фейера

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} \Phi_n(t - x) f(t) dt,$$

где Φ_n — ядро Фейера, умноженное на π.

Примеры

Поскольку $\Phi_n(x)$ — положительное ядро, то $\|\sigma_n\| \le 1$. Но σ_n не проектор, например, $\sigma_n(\cos x) = \frac{n-1}{n}\cos x \neq \cos x$. Поэтому нельзя воспользоваться неравенством Лебега. Тем не менее, поскольку ядро Фейра положительно, для любой $f \in C[S^1]$ выполняется равенство $\delta_n(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \|f - \sigma_n(f)\| = 0$. Т.е. этот метод является универсальным на всех непрерывных периодических функциях. Однако имеется его серьезный недостаток: сходимость очень медленная, т.е. аппроксимация σ_n имеет насыщение.

Лемма (2)

Если для некоторой функции $f \in C[S^1]$ и некоторой последовательности натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ \dots$ выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} n_k \delta_{n_k}(f) = 0$, то $f = const$, и обратно, если $f = const$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n\delta_n(f) = 0$.

Линейные аппроксимации

Доказательство.

Пусть $n > m > 0$ — целые. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(f)(t)e^{imt}dt = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{imt}dt\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(t-x)\right)f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{imt}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(t-x)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{imt}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos k(t-x)\right)dt =$$

$$= \left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{imt}\cos m(t-x)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1-\frac{m}{n}\right)\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{imx}f(x)dx = \left(1-\frac{m}{n}\right)(a_m+ib_m).$$

Продолжение доказательства

Доказательство.

a_m, b_m — коэффициенты Фурье функции f. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\sigma_n(f)(x))e^{imx}dx = \frac{m}{n}(a_m+ib_m),\ n>m>0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |a_m+ib_m| &= \frac{n}{m\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\sigma_n(f)(x))e^{imx}dx\right| \\ &\le \frac{n}{m\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|(f(x)-\sigma_n(f)(x))|dx \le \frac{2n\delta_n(f)}{m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть теперь для функции f найдется последовательность $n_2 < n_2 < \ \ldots$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} n_k\delta_{n_k} = 0$. □

Продолжение доказательства

Доказательство.

Тогда для фиксированного $m > 0$ при всех достаточно больших k выполняется $n_k > m$. Тогда из (8) следует неравенство $|a_m + ib_m| < 2n_k\delta_{n_k}(f)/m$ для всех достаточно больших k. Тогда по условию леммы $a_m = b_m = 0$ при всех $m > 0$. Поэтому все коэффициенты Фурье $f - a_0/2$ равны нулю, т.е. $f = const$. Обратное очевидно. □

Докажем, что для фиксированного $M > 0$ для $W^r(M)$ линейный метод приближения обладает насыщением, найдем класс и порядок насыщения.

Лемма (3)

$$\delta_n W^1(M) \asymp \ln n/n, \ \delta_n W^2 \asymp 1/n \ \text{\textit{при}} \ n \to \infty.$$

Из лемм 2 и 3 следует, что $r_0 = 2$ удовлетворяет условиям 1 и 2 определения насыщения. Проверим выполнение условия 3.

Линейные аппроксимации

Пусть $f \in W^r(M)$ и $r > 2$. Докажем, что существует константа C, такая, что $\delta_n(f) > C/n$. В противном случае, последовательно полагая $C = 1, 1/2, \ \ldots, 1/k$, построим последовательность $n_1 < n_2 < \ \ldots < n_k < \ \ldots$, для которых $\delta_{n_k} \leq 1/(kn_k)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} n_k\delta_{n_k} = 0$. Тогда по лемме 2 $f = const$. Следовательно, константа C существует. Согласно лемме 3 $\delta_n W^2(M) \asymp 1/n$. В частности найдется константа $D > 0$, для которой $D/n \geq \delta_n W^2$ при всех достаточно больших n. Поэтому для достаточно больших n выполяются неравенства $\delta_n(f) > C/n \geq (C/D)\delta_n E^2(M)$. Т.е. условие 3 выполняется. Следовательно, порядок насыщения метода σ_n является $W^2(M)$, а порядок насыщения равен $\asymp n^{-1}$.

Примеры

Пример 5. Пусть $B = C[I_0],\ I_0 = [-1,1],\ L_n = \mathcal{P}_{n+1},\ n \geq 1$, а $\pi_n = c_n : C[I_0] \to \mathcal{P}_{n+1}$ — оператор, сопоставляющий функции $f \in C[I_0]$ ее частичную сумму Фурье-Чебышева

$$c_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k t_k(x),\ \ a_k = \int_{-1}^{1} \frac{t_k(x) f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

где $t_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x),\ k > 0,\ t_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ — ортогональные многочлены Чебышева. Операторы $c_n(f)$ — линейные операторы, являющиеся проекторами. Проверим их непрерывность и вычислим $\|c_n\|$.

Примеры

Имеем

$$
\begin{aligned}
c_n(f)(x) &= \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k(y)t_k(x)}{\sqrt{1-y^2}} f(y)dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt \cos ks\right) f(\cos t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \cos k(s+t) + \cos k(s-t)\right) f(\cos t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (D_n(s+t) + D_n(s-t)) f(\cos t)dt.
\end{aligned}
$$

Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}$

$$
|c_n(f)(x)| \le \|f\| \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt.
$$

Линейные аппроксимации

Следовательно, $c_n(f)$ непрерывны и

$$\|c_n\| \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt. \qquad (9)$$

Задача 2. Доказать, что неравенстве (9) стоит знак равенства. Поэтому $\|c_n\| = \|S_n\|$, где S_n — оператор, сопоставляющий периодической функции ее частичный ряд Фурье. Поэтому из оценки нормы S_n в лемме 1 следует, что $\|c_n\| = (4/\pi^2)\ln n + O(1)$ и $|O(1)| \leq C_0$, где $C_0 = 3 + \frac{4}{\pi^2} + \frac{2\pi}{24-\pi^2}$. Рассмотрим теперь классы $W^r = W^r(M, I_0)$ при некотором фиксированном M. Из неравенств Лебега (4) следует

$$\sup_{f \in W^r} \varepsilon(f, \mathcal{P}_{n+1}) \leq \delta_n W^r \leq (1 + \|c_n\|) \sup_{f \in W^r} \varepsilon(f, \mathcal{P}_{n+1}).$$

Примеры

Соласно неравенству Джексона при $n \geq r$ выполняется

$$\sup_{f \in W^r} \varepsilon(f, \mathcal{P}_{n+1}) \leq l_0 M C_1(r)(n+1)^{-r}.$$

Оказывается имеет место аналогичная оценка снизу

$$\sup_{f \in W^r} \varepsilon(f, \mathcal{P}_{n+1}) \geq l_0 M C_2(r)(n+1)^{-r}.$$

Тогда при $n > r$ выполняются неравенства

$$l_0 M C_2(r)(n+1)^{-r} \leq \delta_n W^r \leq \left(1 + c_0 + \frac{4}{\pi^2} \ln n\right) l_0 M C_1(r)(n+1)^{-r}.$$

Поэтому построенный линейный метод приближения отрезками Фурье-Чебышева не имеет насыщения на классах $W^r(M, l_0)$.

Доказательство леммы 1

Доказательство леммы 1.

Положим $\varphi(x) = D_n(x) - \frac{\sin x}{x}$. Тогда при $0 < x \le \pi$

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &= \left|\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{\sin nx}{x}\right| \le \left|\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{\sin(n+1/2)x}{x}\right| + \\
&+ \left|\frac{\sin(n+1/2)x}{x} - \frac{\sin nx}{x}\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{1}{x/2}\right| + \\
&2\left|\frac{\sin(x/4)\cos(n+1/4)x}{x}\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{1}{x/2}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\sin(x/4)}{x}\right|.
\end{aligned}$$

Тогда, учитывая неравенства $\sin y \ge y - y^3/6$ при $0 \le y \le \pi/2$ и $\sin y \le y$ при $y \ge 0$, получим

$$|\varphi(x)| \le \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)\right] + \frac{1}{2} = \frac{x}{24 - x^2} + \frac{1}{2} \le \frac{\pi}{24 - \pi^2} + \frac{1}{2} = C_1.$$

Следовательно, $D_n(x) = \frac{\sin nx}{x} + O(1)$, где $O(1) \le C_1$. $\square$

Доказательство.

При $n > 1$ имеем

$$A_n = \int\limits_0^{\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx = \int\limits_0^{\pi n} \frac{|\sin t|}{t} dt = C_2 + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + 2k\pi} dt,$$

где $C_2 = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \leq \pi$. Имеем

$$\frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{1}{(k+1)\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin t dt \leq \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt \leq \frac{1}{k\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{k\pi}.$$

Складывая последние равенства, получим

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt = A_n - C_2 \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Продолжение доказательства

Доказательство.

В тех же границах находится и $\ln n$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \le \ln n \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Поэтому

$$\left| A_n - \frac{2}{\pi} \ln n - C_2 \right| \le \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{n} \right), \quad n > 1.$$

Поэтому $A_n = \frac{2}{\pi} \ln n + C_2 + \gamma_n$, где $|\gamma_n| \le \frac{2}{\pi}$ при $n > 1$. Тогда по задаче о равенстве в формуле (6) имеем при $n > 1$

$$\|S_n\| = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{|\sin nt|}{t} dt + \beta_n,$$

$$|\beta_n| \le \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} |\varphi_n(t)| dt \le 2C_1.$$

Продолжение доказательства.

В итоге из полученных оценок имеем

$$\|S_n\| = \frac{2}{\pi}A_n + \beta_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + \frac{2}{\pi}C_2 + \frac{2}{\pi}\gamma_n + \beta_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + \alpha_n,$$

где

$$|\alpha_n| \leq 2 + \frac{4}{\pi^2} + 1 + \frac{2\pi}{24-\pi^2} = 3 + \frac{4}{\pi^2} + \frac{2\pi}{24-\pi^2} = C_0.$$

$\square$

Задача 3. Доказать равенство

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2(nt/2)}{t}dt = \frac{1}{2}\ln n + O(1).$$

Воспользуйтесь идеями доказательства леммы 1.

Доказательство леммы 3

Доказательство леммы 3.

Из четности и 2π-периодичности функции $\Phi_n(t)$ Имеем

$$[\sigma_n(f)(t) - f(t)] = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t))\Phi_n(\tau)d\tau, \;\; f \in C[S^1].$$

Пусть $f \in W^2(M)$, тогда для некоторых $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$

$$|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2f(t)| = \tau|f'(t+\theta_1\tau)-f'(t-\theta_2\tau)| \le \tau^2(\theta_1+\theta_2)M \le 2\tau^2 M.$$

Поэтому

$$\delta_n(t) \le \frac{2M}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\tau^2\Phi(\tau)d\tau = \frac{2M}{2\pi n}\int\limits_0^{\pi}\tau^2\frac{\sin^2(n\tau/2)}{\sin^2(\tau/2)}d\tau \le \frac{M\pi}{n}\int\limits_0^{\pi}\frac{\tau^2}{\tau^2}d\tau = \frac{M\pi^2}{n}.$$

Поскольку f — произвольное, то $\delta_n(W^2) \le M\pi^2/n$. С другой стороны, по лемме 2 для $f \in W^2$ не постоянной для достаточно больших n выполненяется $n\delta_n(f) \ge C > 0$, следовательно, $\delta_n(W^2) \asymp n^{-1}$. $\square$

Продолжение доказательства

Доказательство.

Пусть теперь $f \in W^1(M)$. Тогда

$$|(\sigma_n(f) - f)(t)| = \frac{1}{\pi} \int \left(\int\limits_0^{\pi/n} + \int\limits_{\pi/n}^{\pi} \right) |f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)| \Phi_n(t) d\tau \leq$$

$$\leq \frac{2M}{n} \int\limits_0^{\pi/n} \Phi_n(\tau) d\tau + \frac{2M}{\pi} \int\limits_{\pi/n}^{\pi} \frac{\tau}{2n} \cdot \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(\tau/2)} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{2M\pi}{n} + \frac{M\pi}{n} \int\limits_{\pi/n}^{\pi} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{M\pi}{n}(2 + \ln n) \leq \frac{3M\pi}{n} \ln n$$

при $n \geq 3$, использовалось неравенство $\sin(\tau/2) \geq \tau/\pi$ при $0 \leq \tau \leq \pi$. Из произвольности t и $f \in W^1(M)$ получаем неравенство $\delta_n(W^1(M)) \leq 3M^{-1} \ln n$.

Докажем оптимальность этой оценки. Пусть $f_0(t) = t(2\pi - t) \cdot \frac{M}{2\pi}$, где $0 \leq t \leq 2\pi$, и продолжим по периоду. Эта функция четная и $f_0 \in W^1(M)$. □

Продолжение доказательства

Доказательство.

Выполняется

$$\delta_n(f_0) \geq |\sigma_n(f_0)(0) - f_0(0)| = |\sigma_n(f_0)(0)| = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\tau) f_0(\tau) d\tau =$$

$$\tfrac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \Phi_n(\tau) f_0(\tau) d\tau = \tfrac{2M}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \Phi_n(\tau) \tau d\tau - \tfrac{M}{\pi^2} \int\limits_{0}^{\pi} \Phi_n(\tau) \tau^2 d\tau.$$

В первой части доказательства была получена оценка для второго слагаемого: это $O(1)$. Оценим первое слагаемое снизу

$$\int\limits_{0}^{\pi} \Phi_n(\tau) \tau d\tau = \frac{1}{2n} \int\limits_{0}^{\pi} \tau \cdot \frac{\sin^2(n\tau/2)}{\sin^2(\tau/2)} d\tau \geq \frac{2}{n} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^2(n\tau/2)}{\tau} d\tau = \frac{\ln n}{n} + O(\frac{1}{n}),$$

где первое равенство выполняется согласно задаче 3. Поэтому
$\delta_n(f_0) \geq \frac{2M}{\pi} \frac{\ln n}{n} + O(\frac{1}{n})$.
Следовательно, $\delta_n(W^1(M)) \asymp n^{-1} \ln n$. □

Понятие насыщения

Определение

Пусть B — банахово пространство, $\delta_n : B \to [0, +\infty]$ — определенная для всех достаточно больших n последовательность функционалов, $W^r \subset B$ — подмножества, называемые классами, заданные при всех $r \in \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ — линейно упарядоченное множество индексов. Последовательность функционалов δ_n имеет насыщение на классах W^r, если существует индекс r_0, для которого выполнены условия 1-3 определения насыщения, где $\delta_n(W^r) = \sup\limits_{f \in W^r} \delta_n(f)$. Класс W^{r_0} называется классом насыщения последовательности δ_n, а класс последовательностей, слабо эквивалентных сходящейся к нулю последовательности $\delta_n W^{r_0}$, порядком насыщения.
Предполагается, что $\delta_n(W^r) > 0$ для всех r и n. Тогда индекс r_0, задающий класс и порядок насыщения, определен условиями 1-3 однозначно.