Содержание

ИСП Численный анализ

1. О наилучшем приближении

Определение 1.1 (Наилучшее приближение)

Пусть B – нормированное пространство, фиксируем некоторое непустое подмножество M. Пусть $\|x\|$ обозначает норму элемента x в нормированном пространстве B.

Число

$$\varepsilon(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

называется **наилучшим приближением** элемента $x \in B$ на множестве M.

Элемент $y_* \in M$ называется **наименее уклоняющимся** от x, или **элементом наилучшего приближения** на множестве M, если

$$\|x - y_*\| = \varepsilon(x, M)$$

♣

Определение 1.2. Наилучшее приближение

Предложение 1.2 (Свойства наименьшего уклонения)

1. Для любого $M \subset B$ функция $\varepsilon(x, M)$ равномерно непрерывна по x.
2. Если $M \subset B$ – подпространство, то
   - $\varepsilon(\alpha x, M) = |\alpha|\varepsilon(x, M)$ для любых $x \in B$ и $\alpha \in \mathbb{R}$
   - $\varepsilon(x_1 + x_2, M) \le \varepsilon(x_1, M) + \varepsilon(x_2, M)$ для любых $x_1, x_2 \in B$
   - $\varepsilon(x, M) \le \|x\|$ для любого $x \in B$
3. Пусть $M \subset B$ – конечномерное линейное многообразие. Тогда отображение $\pi : P_M \to M$ непрерывно

♠

Предложение 1.3. Свойства наименьшего уклонения

Доказательство. Пункт 2 очевидно следует из свойств нормы.

Для пункта 1 докажем неравенство

$$|\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M)| \le \|x_1 - x_2\|$$

Для произвольного $y \in M$ имеем

$$\varepsilon(x_1, M) \le \|x_1 - y\| \le \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\| \Rightarrow \varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \le \|x_2 - y\|$$

Ввиду произвольности $y \in M$ получим

$$\varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \le \varepsilon(x_2, M)$$

Поэтому, выполняется неравенство

$$\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M) \le \|x_1 - x_2\|$$

Аналогично доказывается неравенство со знаком - и получили, что хотели.

Для пункта 3 рассмотрим сходящуюся в P_M последовательность x_n и пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Докажем сначала, что последовательность $\pi(x_n)$ ограничена

$$\|\pi(x_n)\| = \|\pi(x_n) - x_n + x_n\| \leq$$
$$\|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\| = \varepsilon(x_n, M) + \|x_n\| = \varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M) + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \leq$$
$$|\varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M)| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \underset{\text{п.1}}{\leq}$$
$$|x_n - x_0| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\|$$

Поскольку последовательность x_n сходится, все слагаемые последней суммы ограничены, следовательно, последовательность $\pi(x_n)$ ограничена.

Теперь необходимо доказать, что последовательность $\pi(x_n)$ сходится к $\pi(x_0)$. Пусть это не так. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность x_{n_k}, для которых выполняется неравенство

$$\left|\pi\left(x_{n_k}\right) - \pi(x_0)\right| > \varepsilon$$

Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность x_{n_k} совпадает со всей последовательностью x_n.

Поскольку последовательность $\pi(x_n)$ ограничена, а подпространство M конечномерно, из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Опять БОО будем считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\pi(x_n)$ и $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n) = y_0$. Тогда переходя к пределам в неравенстве из отрицания сходимости:

$$\|\pi(x_n) - \pi(x_0)\| > \varepsilon \Rightarrow \|y_0 - \pi(x_n)\| \geq \varepsilon > 0$$

Противоречие! $\square$