

Содержание

1. О наилучшем приближении	2
2. О чебышевских пространствах	4
3. О Чебышеве	8
4. О ядрах	10
5. Об оптимальных константах	14
6. О интерполяции	18
7. О интерполяционном процессе	20

ИСП Численный анализ

1. О наилучшем приближении

Определение 1.1 (Наилучшее приближение)

Пусть B – нормированное пространство, фиксируем некоторое непустое подмножество M . Пусть $\|x\|$ обозначает норму элемента x в нормированном пространстве B .

Число

$$\varepsilon(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

называется **наилучшим приближением** элемента $x \in B$ на множестве M .

Элемент $y_* \in M$ называется **наименее уклоняющимся** от x , или **элементом наилучшего приближения** на множестве M , если

$$\|x - y_*\| = \varepsilon(x, M)$$



Определение 1.2. Наилучшее приближение

Предложение 1.2 (Свойства наименьшего уклонения)

1. Для любого $M \subset B$ функция $\varepsilon(x, M)$ равномерно непрерывна по x .
2. Если $M \subset B$ – подпространство, то
 - $\varepsilon(\alpha x, M) = |\alpha| \varepsilon(x, M)$ для любых $x \in B$ и $\alpha \in \mathbb{R}$
 - $\varepsilon(x_1 + x_2, M) \leq \varepsilon(x_1, M) + \varepsilon(x_2, M)$ для любых $x_1, x_2 \in B$
 - $\varepsilon(x, M) \leq \|x\|$ для любого $x \in B$
3. Пусть $M \subset B$ – конечномерное линейное многообразие. Тогда отображение $\pi : P_M \rightarrow M$ непрерывно



Предложение 1.3. Свойства наименьшего уклонения

Доказательство. Пункт 2 очевидно следует из свойств нормы.

Для пункта 1 докажем неравенство

$$|\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M)| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Для произвольного $y \in M$ имеем

$$\varepsilon(x_1, M) \leq \|x_1 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\| \Rightarrow \varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \|x_2 - y\|$$

Ввиду произвольности $y \in M$ получим

$$\varepsilon(x_1, M) - \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon(x_2, M)$$

Поэтому, выполняется неравенство

$$\varepsilon(x_1, M) - \varepsilon(x_2, M) \leq \|x_1 - x_2\|$$

Аналогично доказывается неравенство со знаком $-$ и получили, что хотели.

Для пункта 3 рассмотрим сходящуюся в P_M последовательность x_n и пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Докажем сначала, что последовательность $\pi(x_n)$ ограничена

$$\begin{aligned} \|\pi(x_n)\| &= \|\pi(x_n) - x_n + x_n\| \leq \\ \|\pi(x_n) - x_n\| + \|x_n\| &= \varepsilon(x_n, M) + \|x_n\| = \varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M) + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \leq \\ |\varepsilon(x_n, M) - \varepsilon(x_0, M)| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| &\stackrel{\text{п.1}}{\leq} \\ |x_n - x_0| + \varepsilon(x_0, M) + \|x_n\| \end{aligned}$$

Поскольку последовательность x_n сходится, все слагаемые последней суммы ограничены, следовательно, последовательность $\pi(x_n)$ ограничена.

Теперь необходимо доказать, что последовательность $\pi(x_n)$ сходится к $\pi(x_0)$. Пусть это не так. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность x_{n_k} , для которых выполняется неравенство

$$|\pi(x_{n_k}) - \pi(x_0)| > \varepsilon$$

Без ограничения общности можно считать, что подпоследовательность x_{n_k} совпадает со всей последовательностью x_n .

Поскольку последовательность $\pi(x_n)$ ограничена, а подпространство M конечномерно, из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Опять БОО будем считать, что этой подпоследовательностью является сама последовательность $\pi(x_n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x_n) = y_0$. Тогда переходя к пределам в неравенстве из отрицания сходимости:

$$\|\pi(x_n) - \pi(x_0)\| > \varepsilon \Rightarrow \|y_0 - \pi(x_n)\| \geq \varepsilon > 0$$

Согласно определению проекции π выполнены равенства

$$\|\pi(x_n) - x_n\| = \varepsilon(x_n, M)$$

Переходя к пределу в равенстве ввиду непрерывности функции ε

$$\|y_0 - x_0\| = \varepsilon(x_0, M)$$

Следовательно, y_0 – наименее уклоняющийся элемент пространства $M \Rightarrow y_0 = \pi(x_0)$.

Противоречие! □

2. О чебышевских пространствах

Определение 2.1 (Чебышевское пространство)

Пусть $C[D]$ – пространство вещественных непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$, состоящем из бесконечного числа точек, с нормой максимума модуля

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

Особо выделим два случая:

- $D = [a, b]$ при $m = 1$
- $D = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ при $m = 2$

Тогда подпространство $L \subset C[D]$ называется **чебышевским**, если любая ненулевая функция $f \in L$ имеет не более $n - 1$ корней на рассматриваемом множестве, где $n := \dim L$.



Определение 2.2. Чебышевское пространство

Определение 2.2

Элементы чебышевского подпространства L в пространстве функций будем называть **чебышевскими L -полиномами** или просто **чебышевскими полиномами**.

Пусть $f_1, \dots, f_n \in C[D]$ и $x_1, \dots, x_n \in D$. Тогда введём обозначение

$$\Delta_f(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix}$$



Определение 2.3.

Предложение 2.3

Пусть $L \subset C[D]$ – чебышевское подпространство и $\dim L = n$. Тогда

1. Элементы $e_1, \dots, e_n \in L$ линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\Delta_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

Для любых попарно различных точек $x_1, \dots, x_n \in D$

2. Для любых попарно различных точек $x_1, \dots, x_n \in D$ и любых n чисел c_1, \dots, c_n существует и притом единственный интерполяционный чебышевский многочлен $p \in L$, для которого $p(x_i) = c_i$ при $1 \leq i \leq n$
3. Для любых $n - 1$ попарно различных точек, пространство чебышевских многочленов, обращающихся в этих точках в нуль, имеет размерность 1.



Предложение 2.4.

Доказательство. 1 пункт.

Если $e_1, \dots, e_n \in L$ линейно зависимы, то найдутся такие числа $\alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$, не все равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(x) = 0$$

Тогда для любой последовательности точек $x_1, \dots, x_n \in D$ линейная однородная система уравнений $Ay = 0$, где $A = \|e_j(x_i)\|_{1 \leq i, j \leq n}$ имеет ненулевое решение $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$.

Следовательно, определитель системы равен нулю, но

$$\det A = \Delta_e(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n : \Delta_e(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$$

Обратно, пусть $e_1, \dots, e_n \in L$ и существуют n различных точек $x_1, \dots, x_n \in D$, для которых выполнено равенство

$$\Delta_e(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Тогда $\det A = 0$ и, следовательно, столбцы матрицы A линейно зависимы. Поэтому существуют такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(x_i) = 0$$

Это означает, что функция $\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j(x) = 0$ имеет n различных корней. Поскольку подпространство L чебышевское, то отсюда вытекает, что она – тождественный нуль. Следовательно, вектора e_1, \dots, e_n линейно зависимы.

Пункт 2.

Пусть e_1, \dots, e_n – базис в чебышевском пространстве L и c_1, \dots, c_n произвольные n чисел. Тогда, согласно уже доказанному, определитель системы линейных уравнений

$$Ay = c \quad A = \|e_j(x_i)\|_{1 \leq i, j \leq n}$$

не равен нулю и, следовательно, эта система имеет ненулевое решение $y^T = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда $p(x) = \sum_{k=1}^n y_k e_k(x)$ определяет искомым интерполяционный многочлен Чебышева.

Пункт 3.

Пусть даны n различных точек x_0, \dots, x_{n-1} . Согласно предыдущему пункту, существует единственный чебышевский многочлен $p_0(x)$, обращающийся в 0 в точках x_1, \dots, x_{n-1} и равный 1 в точке x_0 .

Тогда, согласно тому же предыдущему пункту, для любого чебышевского многочлена $q(x)$ обращающегося в 0 в точках x_1, \dots, x_{n-1} , выполнено равенство

$$q(x) = q(x_0)p_0(x)$$

□

Лемма 2.4

Пусть $r, g \in C[D]$, $M = M(r) = \{x \in D \mid |r(x)| = \|r\|\}$.

Тогда, если

$$a := \inf_{x \in M} r(x)g(x) > 0$$

то существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < k < \delta$ всегда выполнено неравенство

$$\|r - kg\| < \|r\|$$



Лемма 2.5.

Доказательство. Множество $M \subset I$ замкнуто и ограничено, поэтому компактно. Поэтому

$$\exists c > 0 : \forall x \in M : r(x)g(x) > 2c$$

Причём для каждой точки $x \in M$ имеется открытый шар радиуса $r_x > 0$, такой что для любой точки y этого шара выполняются условия

$$r(x)r(y) > 0 \quad r(y)g(y) > c \quad |r(y)| > \frac{\|r\|}{2}$$

Рассмотрим покрытие M открытыми шарами $U(x, \frac{r_x}{4})$. Поскольку M компактно, можно выделить его конечное подпокрытие

$$U(x_1, \frac{r_{x_1}}{4}), \dots, U(x_n, \frac{r_{x_n}}{4})$$

Дополнение в I объединения этих шаров – компактное множество N . Тогда

$$\|r\| > \max_{x \in N} |r(x)| = r_0$$

Пусть $\max_{x \in N} |g(x)| = g_0$. Тогда

$$\exists \delta_1 : \forall k, 0 < k < \delta_1 : 0 < r_0 - kg_0 < r_0 + kg_0 < \|r\|$$

Поэтому для любого $x \in N$ и любого $0 < k < \delta_1$ всегда

$$|r(x) - kg(x)| < r_0 + kg_0 < \|r\|$$

Выберем теперь такое $\delta_2 > 0$, что для всех $x \in I$ выполняется

$$\delta_2 |g(x)| < \frac{\|r\|}{4}$$

Тогда

$$\forall k, 0 < k < \delta_2 : \forall x \in \cup_{i=1}^n U(x_i, \frac{r_{x_i}}{4}) : |r(x) - kg(x)| < \|r\|$$

Пусть $N_1 = \cup_{i=1}^n B(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$. Тогда N_1 компакт и для любого $0 < k < \delta_2$ и $x \in N_1$ выполняется неравенство $\max_{x \in N_1} |r(x) - kg(x)| = a_k < \|r\|$.

Поскольку $I = N \cup N_1$, величина $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ удовлетворяет условиям леммы. □

Лемма 2.5

Пусть $r \in C[I]$ ненулевая функция,

$$M = M(r) = \{x \in I \mid |r(x)| = \|r\|\}$$

Тогда M представимо в виде объединения $M = \cup_{k=1}^m M_k$ где M_k – замкнутые непустые попарно непересекающиеся множества, причём

- $M_k < M_{k+1}, 1 \leq k \leq m$
- $\forall x \in M_k : \forall y \in M_{k+1} : \text{sign}(r(x)) = -\text{sign}(r(y))$

**Лемма 2.6.**

Доказательство. Представим $M = M^+ \cup M^-$, где

$$M^+ = \{x \in M \mid r(x) > 0\} \quad M^- = \{x \in M \mid r(x) < 0\}$$

Пусть $x \in M$, положим

$$M_x^+ = \{y \in M \mid r(y) > 0, \forall z \in (x, y) \cap M : r(z) > 0\}$$

$$M_x^- = \{y \in M \mid r(y) < 0, \forall z \in (x, y) \cap M : r(z) < 0\}$$

Возможно, что при некоторых $x_0 \neq x_1$ выполняется $M_{x_0}^+ = M_{x_1}^+$. Выберем по одному экземпляру таких множеств.

Пусть это множества M_a^+ при $a \in A$ и M_b^- при $b \in B$. Тогда

$$M^+ = \cup_{a \in A} M_a^+ \quad M^- = \cup_{b \in B} M_b^-$$

Множества A и B конечны, поскольку в противном случае имеется точка $x_0 \in I$ в любой окрестности которой бесконечно много элементов из A или B . БОО пусть из A . В этом случае $M_{x_0}^+$ пересекается с M_a^+ для бесконечного числа элементов $a \in A$.

Тогда, для некоторого $a \neq x_0$ выполняется $M_{x_0}^+ = M_a^+$. Что противоречит уникальности каждого взятого множества. Конечное число таких множеств доказано!

Осталось построить чередующиеся множества. Найдём $a' : a' \neq a$, причём $(a, a') \cap A = \emptyset$. Тогда множество $(a, a') \cap B$ состоит из одного элемента. Расположим теперь элементы множеств A и B в порядке чередования по этому алгоритму. \square

3. О Чебышеве

Теорема 3.1 (Чебышева)

Пусть $L \subset C[I]$ – чебышевское подпространство, $n = \dim L \geq 1$ и $f \in C[I]$ – произвольная функция. Тогда функция $p \in L$ наименее уклоняется от f тогда и только тогда, когда найдутся $n + 1$ различные точки $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$, для которых разность $r(x) = f(x) - p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\forall i = 1..n + 1 : |r(x_i)| = \|r\|$
- $r(x_1) = -r(x_2) = r(x_3) = \dots = (-1)^n r(x_{n+1})$

Такая разность r называется **чебышевским альтернансом**



Теорема 3.2. Чебышева

Доказательство. Необходимость.

Пусть $f \in C[I]$ и $p \in L$ наименее уклоняется от f . Рассмотрим разность $r = f - p$. При $r = 0$ утверждение теоремы очевидно. Если $r \neq 0$, рассмотрим

$$M = M(r) = \{x \in I \mid |r(x)| = \|r\|\}$$

Тогда множество M представимо в виде объединения $M = \cup_{k=1}^m M_k$ непустых замкнутых непересекающихся множеств, удовлетворяющим условиям вспомогательной леммы.

Если $m > n$, то r удовлетворяет требованиям теоремы. Иначе рассмотрим $m \leq n$. Поскольку все множества M_k компактны, существует последовательность точек

$$M_1 < y_1 < M_2 < y_2 < \dots < y_{m-1} < M_m$$

Рассмотрим многочлен $h(x) = \sigma(y_1 - x)(y_2 - x)\dots(y_{m-1} - x)$ степени $m - 1$, где $\sigma = \text{sign}(r(M_1))$. Тогда функции r, h удовлетворяют условию первой вспомогательной леммы, поэтому при некотором $\delta > 0$ выполнено неравенство $\|r - \delta h\| < \|r\|$. Следовательно, многочлен $p + \delta h \in L$ даст лучшее приближение, а не p , противоречие.

Достаточность.

Пусть $r = f - p$ – чебышевский альтернанс порядка $n + 1$, а наилучшим приближением является многочлен $q(x)$. Тогда

$$|f(x_k) - q(x_k)| < |f(x_k) - p(x_k)| = |r(x_k)| = \|r\|$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |q(x_k) - p(x_k)| &= |(f(x_k) - p(x_k)) - (f(x_k) - q(x_k))| \geq \\ ||f(x_k) - p(x_k)| - |f(x_k) - q(x_k)|| &= |f(x_k) - p(x_k)| - |f(x_k) - q(x_k)| > 0 \end{aligned}$$

Причём из этих неравенств будет следовать, что разность $|f(x_k) - p(x_k)|$ «зажимает» разность $|f(x_k) - q(x_k)|$ при смене знака в этих точках и не остаётся выбора, кроме как тоже сменить знак. Тогда

$$\exists y_1, \dots, y_n : x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_n < x_{n+1}$$

в которых $q(y_k) - p(y_k) = 0$, а так как $q - p \in L \Rightarrow q - p \equiv 0$, то есть многочлен p действительно даёт наилучшее приближение. \square

4. О ядрах

Определение 4.1 (Ядро)

Положительным ядро называется последовательность 2π -периодических функций $K_n(x)$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $K_n(x) \geq 0$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(x) dx = 1$ для всех $0 < \delta < \pi$

Если выполняются лишь свойства 2 и 3, последовательность K_n называется **ядром**.



Определение 4.2. Ядро

Лемма 4.2 (Об аппроксимации положительного ядра)

Пусть $K_n(x)$ – положительное ядро.

Тогда для любой 2π -периодической функции $f(x)$ последовательность функций $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)K_n(t) dt$ равномерно сходится к функции $f(x)$.



Лемма 4.3. Об аппроксимации положительного ядра

Доказательство. Ввиду свойств ядра имеем:

$$\begin{aligned} f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x+t))K_n(t) dt = \\ &= \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) (f(x) - f(x+t))K_n(t) dt \end{aligned}$$

В силу непрерывности и периодичности функции $f(x)$, эта функция равномерно непрерывна и ограничена на всей числовой прямой. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2, |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\exists M > 0 : \forall x : |f(x)| < M$$

Фиксируем такое $\delta < \pi$. Тогда ввиду неотрицательности $K_n(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x) - f(x+t))K_n(t) dt \right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x+t)|K_n(t) dt < \\ &\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} K_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt \end{aligned}$$

А в силу ограниченности функции $|f(x)| < M$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) |f(x) - f(x+t)|K_n(t) dt &\leq 2M \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) K_n(t) dt = \\ &= 2M \left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt \right) \end{aligned}$$

Получается,

$$\left| f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt + 2M \left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Лемма 4.3

Последовательность функций

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \cos kx = \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\pi \sin(\frac{x}{2})}$$

определяет ядро. Это ядро называется **ядром Дирихле**.

♡

Лемма 4.4.

Доказательство. По определению функции D_n :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt = 1$$

Далее, пусть $0 < \delta < \pi$. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1 - \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) D_n(t) dt$$

То есть, достаточно проверять, что $\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) D_n(t) dt$ бесконечно малая величина.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \delta \\ 1, & \delta \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

Положим $h(x) = \frac{g(x)}{\sin(\frac{x}{2})} \in L_2^*[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) D_n(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(n - \frac{1}{2})t dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos(\frac{t}{2}) \sin(nt) dt - \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin(\frac{t}{2}) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

Согласно неравенству Бесселя, последние два интеграла стремятся к нулю. □

Лемма 4.4

Последовательность функций

$$\Phi_n(x) = \frac{\sum_{k=1}^n D_k(x)}{n}$$

Определяет положительное ядро. Это ядро называется **ядром Фейера**.

♡

Лемма 4.5.

Доказательство. По определению функции $\Phi_n(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n D_k(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 1$$

Неравенство $\Phi_n(t) \geq 0$ следует из соотношения

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi n} \frac{1 - \cos(nt)}{\sin^2(\frac{t}{2})}$$

Фиксируем $0 < \delta \leq \pi$. Функция

$$\frac{1 - \cos nt}{\sin^2(\frac{t}{2\pi})}$$

ограничена на $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Следовательно, на этом множестве $\Phi_n(t) \rightarrow 0$. Поэтому требуемая бесконечная малость выполняется. \square

Лемма 4.5

Последовательность функций

$$J_n(x) = \frac{3n^3}{2\pi(2n^2+1)} \left(\frac{\sin(n\frac{x}{2})}{n \sin(\frac{x}{2})} \right)^4 = \frac{6\pi n}{2n^2+1} \Phi_n^2(x)$$

определяет положительное ядро. Это ядро называется **ядром Джексона**.



Лемма 4.6.

Определение 4.6

Пусть $M > 0$ и r натуральное. Классом $W^r(M)$ называется множество $r - 1$ дифференцируемых 2π -периодических функций, для которых $f^{(r-1)}(x)$ — M -липшецева.



Определение 4.7.

Теорема 4.7 (Джексона)

Существует такая константа C , что для любых $r, n, M > 0$ и $f \in W^r(M)$ выполняется неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C^r \frac{M}{n^r}$$



Теорема 4.8. Джексона

Доказательство. Заметим, что $J_n(x)$ тригонометрический многочлен степени $2(n-1)$. Следовательно, $\forall f \in C[S^1]$

$$T_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t-x) f(t) dt$$

тригонометрический многочлен степени $\leq 2(n-1)$.

Пусть $r = 1$ и $f \in W^1(M)$, для $m \geq 1$ рассмотрим тригонометрический многочлен $T(x)$. Учитывая чётность ядра Джексона и условие Липшица для функции f , получаем

$$\begin{aligned} |f(x) - T(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} J_m(t)(f(x) - f(x+t)) dt \right| \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_m(t) dt = \\ &= 2M \int_0^{\pi} t J_m(t) dt \end{aligned}$$

Ввиду неравенства $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$ при $0 \leq t \leq \pi$ получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t J_m(t) dt &\leq \frac{3\pi^3}{2m(2m^2+1)} \int_0^\pi \frac{\sin^4(\frac{m}{2}t)}{t^3} dt = \\ &= \frac{3\pi^3 m}{8(2m^2+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4(t)}{t^3} dt < \frac{C}{4m} \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f - t\| < \frac{CM}{2m}$.

Заметим, что $J_n(x) \in \mathcal{T}_{4n-1}$, когда нам нужно использовать многочлены, степени не более $2n - 1$. Определим стратегию уменьшения степени:

Если итоговый $n = 2m$, то с помощью ядра J_m построим рассмотренный выше тригонометрический многочлен, иначе $n = 2m + 1$, для которого также построим требуемый J_m . Таким образом,

$$\|f - T\| < \frac{CM}{2m} < \frac{CM}{n}$$

Пусть теперь теорема доказана для произвольного r и более того, если интеграл по периоду равен нулю, то и полученная аппроксимация удовлетворяет этому свойству.

Докажем, что тогда то же выполнено и для $r + 1$. Пусть $f \in W^{r+1}(M)$. Тогда $f' \in W^r(M)$. Причём, очевидно, интеграл по периоду от функции f' равен нулю.

Тогда, согласно индукционному предположению, существует $T(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, для которого выполнено неравенство $\|f' - T\| < C^r m n^{-r}$ и интеграл по периоду от T равен нулю.

Тогда свободный член тригонометрического многочлена T нулевой. Поэтому существует тригонометрический многочлен U той же степени с нулевым свободным членом, для которого $U' = T$. Следовательно

$$\|(f - U)'\| = \|f' - T\| < C^r M n^{-r}$$

Поэтому $t - U \in W^1(C^r M n^{-r})$. Следовательно, существует $t \in \mathcal{T}_{2n-1}$, такой, что

$$\|(f - U) - t\| < \frac{C(C^r M n^{-r})}{n} = C^{r+1} \frac{M}{n^{r+1}}$$

Причём, если интеграл по периоду функции f равен нулю, то это же справедливо и для многочлена $U + t \in \mathcal{T}_{2n-1}$. \square

5. Об оптимальных константах

Определение 5.1

Набор констант C_r называется **оптимальным**, если:

- Для любых $n \geq 1, r \geq 1, f \in W^r(M), M > 0$ для констант C_r выполнено неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) < C_r \frac{M}{n^r} \quad f \in W^r(M)$$

- Если $0 < c < C_r$ для некоторого $r \geq 1$, то

$$\forall n \geq 1 : \forall M > 0 : \exists f \in W^r(M) : \varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) > c \frac{M}{n^r}$$



Определение 5.2.

Определение 5.2 (Функция Бернулли)

Пусть $r \geq 1$. r -й функцией Бернулли называется функция

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi \frac{r}{2})}{k^r}$$



Определение 5.3. Функция Бернулли

Лемма 5.3 (О тригонометрической интерполяции)

1. Пусть $t_0, \dots, t_{n-1} \in (0, \pi)$ – попарно различные точки и $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. Тогда существует единственный чётный тригонометрический многочлен

$$T(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos(kt) \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

для которого $T(t_j) = b_j$ при $0 \leq j \leq n-1$.

1. Пусть $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} \in (0, \pi)$ – попарно различные точки и $d_1, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. Тогда существует единственный нечётный тригонометрический многочлен

$$T(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin(kt) \quad \beta_k \in \mathbb{R}$$

для которого $T(\tau_j) = d_j$ при $1 \leq j \leq n-1$.



Лемма 5.4. О тригонометрической интерполяции

Определение 5.4

Определим тригонометрические многочлены $T_{n,r}(t)$.

Пусть $n \geq 1$ и $t_j = \frac{(2j+1)\pi}{2n}$ – все нули функции $\cos(nt)$ на интервале $(0, \pi)$, а $\tau_k = \frac{k\pi}{n}$ – все нули функции $\sin(nt)$ на интервале $(0, \pi)$.

Для чётного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r}(t) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ – тригонометрический многочлен, для которого $T_{n,r}(t_j) = B_r(t_j)$.

Для нечётного $r \geq 2$ пусть $T_{n,r} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ – тригонометрический многочлен, для которого $T_{n,r}(\tau_k) = B_r(\tau_k)$. Согласно лемме о тригонометрической интерполяции, функции $T_{n,r}$ определены однозначно.



Определение 5.5.

Определение 5.5 (Класс гладких функций)

$$W_*^r(M) = \{f \in C^r[S^1] \mid \|f^{(r)}\| \leq M\}$$



Определение 5.6. Класс гладких функций

Лемма 5.6 (Формула обращения)

Пусть $f \in W_*^r(M)$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_r(t - \tau) f^{(r)}(\tau) d\tau$$



Лемма 5.7. Формула обращения

Лемма 5.7 (О нулях тригонометрической интерполяции)

Разность $\Delta(t) = \Delta_{n,r}(t) = B_r(t) - T_{n,r}(t)$ обращается в нуль на интервале $(0, \pi)$ при $n \geq 1$ и чётном r только в точках t_j , а в нечётном r только в точках τ_k .

При $n = 1$ и нечётном r корней на $(0, \pi)$ нет. Все корни являются простыми.



Лемма 5.8. О нулях тригонометрической интерполяции

Лемма 5.8

Пусть $n \geq 1$ – натуральное и $2\frac{\pi}{n}$ -периодическая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке.

Тогда для любого $1 \leq k \leq n-1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0$$



Лемма 5.9.

Лемма 5.9

Коэффициенты Фурье для функции Бернулли $B_r(t)$ выражаются формулой

$$\mu_{r,n} + i\nu_{r,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_r(t) d^{int} dt = \frac{i^r}{n^r} \quad n > 0$$

и

$$\mu_{r,0} + i\nu_{r,0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_r(t) dt = 0$$



Лемма 5.10.

Теорема 5.10 (Фавара)

Пусть

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^{r+1}} \quad r \geq 1$$

Тогда для любых $f \in W^r(M)$ и $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) \leq K_r \frac{M}{n^r} \quad r \geq 1 \quad n \geq 1$$



Теорема 5.11. Фавара

Доказательство. Согласно Лемма 5.11 выполняется равенство

$$f(t) = \frac{a}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_r(t - \tau) f^{(r)}(\tau) d\tau$$

Пусть $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ произвольный тригонометрический многочлен степени $< n$. Тогда

$$\Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(t - \tau) f^{(r)}(\tau) d\tau$$

также является тригонометрическим многочленом степени $< n$. Рассмотрим разность

$$f(t) - \frac{a}{2} - \Lambda(T)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (B_r(t - \tau) - T(t - \tau)) f^{(r)}(\tau) d\tau$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(t) - \frac{a}{2} - \Lambda(T)(t)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |B_r(t - \tau) - T(t - \tau)| |f^{(r)}(\tau)| d\tau \leq \\ &\frac{M}{\pi} \int_0^{2\pi} |B_r(z) - T(z)| dz \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varepsilon(f, \mathcal{T}_{2n-1}) \leq \frac{M}{\pi} \inf_{T \in \mathcal{T}_{2n-1}} \int_0^{2\pi} |B_r(z) - T(z)| dz$$

Значит достаточно проверить неравенство

$$\inf_{T \in \mathcal{T}_{2n-1}} \int_0^{2\pi} |B_r(z) - T(z)| dz \leq \pi K_r n^{-r}$$

А для этого достаточно проверить, что, например,

$$\int_0^{2\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)| dz \leq \pi K_r n^{-r}$$

Согласно Лемма 5.11 все корни разности $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ на интервале $(0, \pi)$ простые и совпадают с простыми корнями функции $\cos(nt)$ при чётном r и с корнями $\sin(nt)$ при нечётном r .

Поэтому знаки функций $B_r(t) - T_{n,r}(t)$ и $\cos(nt)$ при чётном r и, соответственно, $\sin(nt)$ при нечётном r , либо всюду совпадают, либо всюду противоположны. Поэтому при БОО чётном r выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)| dz &= 2 \int_0^{\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)| dz = \\ 2 \int_0^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z)) \operatorname{sign} \Delta(z) dz &= \pm 2 \int_0^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z)) \operatorname{sign} \cos(nz) dz = \\ 2 \left| \int_0^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z)) \operatorname{sign} \cos(nz) dz \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (B_r(z) - T_{n,r}(z)) \operatorname{sign} \cos(nz) dz \right| = \\ \left| \int_{-\pi}^{\pi} B_r(z) \operatorname{sign} \cos(nz) dz \right| \end{aligned}$$

где в последнем равенстве использована Лемма 5.11.

Абсолютно такое же равенство (но с $\operatorname{sign} \sin(nz)$) аналогично получаем для нечётного r .

Теперь воспользуемся обобщённым равенством Парсеваля в $L_2[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt = \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k)$$

где α_k, β_k и a_k, b_k – коэффициенты Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$ соответственно.

Для функции Бернулли коэффициенты Фурье вычислены в Лемма 5.11. Для функции $\operatorname{sign} \cos(nt)$ и $\operatorname{sign} \sin(nt)$ соответствующие ряды Фурье определяются формулами

$$\operatorname{sign} \cos(nt) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)nt}{2k+1}$$

и

$$\operatorname{sign} \sin(nt) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)nt}{2k+1}$$

Подставляя полученные коэффициенты в равенства Парсеваля получим при чётном $r = 2\nu$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu}(z) \operatorname{sign} \cos(nz) dz = (-1)^\nu \frac{4}{\pi n^{2\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\nu+1}} = \frac{(-1)^\nu K_r}{n^r}$$

и нечётном $r = 2\nu + 1$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_{2\nu+1}(z) \operatorname{sign} \sin(nz) dz = (-1)^\nu \frac{4}{\pi n^{2\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2\nu+2}} = \frac{(-1)^\nu K_r}{n^r}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |B_r(z) - T_{n,r}(z)| dz = K_r n^{-r}$$

Что и требовалось доказать. □

6. О интерполяции

Определение 6.1

Рассмотрим бесконечный компакт $D \subset \mathbb{C}$ и пространство непрерывных на нём функций $C[D]$. Пусть P_n – пространство полиномов степени меньшей n .

Фиксируем произвольные n точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in D$ и набор чисел $y = (y_1, \dots, y_n)$, где $y_i \in \mathbb{R}$.

Интерполяционным полиномом для этих данных называется многочлен $p_{n-1}(x, y) \in P_n$ для которого $p_{n-1}(x, y)(x_k) = y_k$.



Определение 6.2.

Определение 6.2

Полиномами Лагранжа называются интерполяционные полиномы

$$I_{k,n}(x) = p_{n-1}(x, y_k)$$

для $y_k = (\delta_{k,1}, \delta_{k,2}, \dots, \delta_{k,n})$, где

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Имеет место равенство

$$I_{k,n}(x)(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

При фиксации узлов интерполяции x обозначения для интерполяционного полинома обычно сокращается

$$p_{n-1}(x, y) = p_{n-1}(y) \quad I_{k,n}(x) = I_{k,n}$$



Определение 6.3.

Определение 6.3

Определим операторы

$$\pi_x^{(\nu)} : C[D] \rightarrow P_n$$

формулами

$$\pi_x^{(\nu)}(f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot I_{k,n}^{(\nu)}$$

Заметим, что оператор $\pi_x^{(0)} =: \pi_x$ является проектором.



Определение 6.4.

Определение 6.4

Числа

$$\lambda_n = \max_{x \in D} \sum_{k=1}^n |I_{k,n}(x)|$$

называются **константами Лебега**.

Определение 6.5.

Теорема 6.5 (Неравенство Лебега)Для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f выполняется неравенство

$$\|f - \pi_x(f)\| \leq (1 + \lambda_n)\varepsilon(f, P_n)$$



Теорема 6.6. Неравенство Лебега

Доказательство. Пусть $q \in P_n$ – произвольный элемент. Тогда, поскольку π_x проектор

$$\begin{aligned} \|f - \pi_x(f)\| &= \|f - q + q - \pi_x(f)\| \leq \|f - q\| + \|\pi_x(q) - \pi_x(f)\| = \\ &= \|f - q\| + \lambda_n \|f - q\| = (1 + \lambda_n)\|f - q\| \end{aligned}$$

Пусть теперь q_δ такой полином из P_n , для которого выполняется неравенство $\|f - q_\delta\| < \varepsilon(f, P_n) + \delta$.

Тогда

$$\|f - \pi_x(f)\| \leq (1 + \lambda_n)\|f - q_\delta\| < (1 + \lambda_n)(\varepsilon(f, P_n) + \delta)$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим требуемое.

7. О интерполяционном процессе

Определение 7.1

Матрицей X **интерполяционных узлов** на отрезке $I = [a, b]$ называется бесконечная треугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & & & & \\ x_{2,1} & x_{2,2} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

для которой

1. $x_{n,k} \in I$ при $1 \leq k \leq n$
2. При любом n выполняются неравенства $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$



Определение 7.2.

Определение 7.2

Для $f \in C[a, b]$ матрицы интерполяции определяет последовательность интерполяционных полиномов

$$p_{n-1} = p_{n-1}(X, f) = \pi_n(x_n, f) \in P_n$$

Эта последовательность называется **интерполяционным процессом**, отвечающим данной матрице интерполяционных узлов X и данной функции f



Определение 7.3.

Определение 7.3

Интерполяционный процесс $p_{n-1}(X, f)$ называется **сходящимся** для данной матрицы интерполяционных узлов X и данной функции $f \in [a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ существует предел и выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}(X, f)(x) = f(x) \quad x \in I$$

Интерполяционный процесс $p_{n-1}(X, f)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке I для данной матрицы интерполяционных узлов X и данной функции $f \in [a, b]$, если указанная выше сходимость является равномерной.



Определение 7.4.

Теорема 7.4 (Банаха-Штейнгауза)

Пусть X – банахово пространство, Y – нормированное векторное пространство, F – семейство линейных непрерывных операторов из X в Y .

Предположим, что для любого $x \in X$ выполняется

$$\sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y < \infty$$

Тогда

$$\sup_{T \in F, \|x\|=1} \|T(x)\|_Y = \sup_{T \in F} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$$



Теорема 7.5. Банаха-Штейнгауза

Следствие 7.4.1

Если последовательность ограниченных операторов на банаховом пространстве сходится поточечно, то её поточечный предел является ограниченным оператором.



Следствие 7.4.2.

Теорема 7.5 (Фабера-Бернштейна)

Для любой матрицы интерполяционных узлов X выполняются неравенства

$$\lambda_n = \lambda_n(x_n) = \|\pi_n(x_n)\| > \frac{1}{8} \sqrt{\pi} \ln(n) \quad n \geq 1$$



Теорема 7.6. Фабера-Бернштейна

Следствие 7.5.1

Для любой матрицы интерполяционных узлов X существует функция $f \in C[a, b]$, для которой последовательность интерполяционных полиномов $p_{n-1}(X, f)$ не сходится равномерно на I к f и, более того, последовательность $\|p_{n-1}(X, f)\|_{C[I]}$ неограниченна



Следствие 7.5.2.

Доказательство. Допустим, что это не так и для некоторой матрицы X при любом $f \in C[a, b]$ последовательность $p_{n-1}(X, f)$ равномерно сходится к f на I .

Следовательно, последовательность линейных непрерывных операторов $\pi_n(x_n) : C[a, b] \rightarrow P_n \subset C[a, b]$ поточечно сходится.

Тогда, поскольку $C[a, b]$ – полным нормированное пространство, по теореме Банаха-Штейнгауза, нормы операторов $\|\pi_n(x_n)\| = \lambda_n$ ограничены, что противоречит теореме Фабера-Бернштейна. \square

Теорема 7.6

Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда существует матрица интерполяционных узлов X на отрезке $[a, b]$, для которой интерполяционный процесс для функции f сходится равномерно.

**Теорема 7.7.**

Доказательство. Если f – алгебраический полином, то подходит любая матрица X . Будем предполагать теперь, что f не является алгебраическим полиномом.

Пусть $p_{n-1} \in P_n$ – его наилучшее приближение в пространстве P_n . Согласно теореме Чебышева на отрезке $[a, b]$ разность $\Delta_n = f - p_{n-1}$ имеет альтернанс порядка $n + 1$, то есть существуют точки

$$a \leq y_{1,n} < y_{2,n} < \dots < y_{n+1,n} \leq b$$

для которых $|\Delta_n(y_{k,n})| = \|\Delta_n\|$ и знаки $\Delta_n(y_{k,n})$ чередуются. Тогда существуют нули функции Δ_n :

$$y_{1,n} < x_{1,n} < y_{2,n} < \dots < x_{n,n} < y_{n+1,n}$$

Рассмотрим матрицу интерполяции X , соответствующую полученным нулям. По построению, выполняются равенства $p_{n-1}(x_{k,n}) = f(x_{k,n})$ при $1 \leq k \leq n$. Тогда выполняется равенство

$$p_{n-1} = p_{n-1}(x_n, f) = \pi_n(x_n, f)$$

Погрешность интерполяции равна

$$\|f - p_{n-1}\| = \|f - \pi_n(x_n, f)\| = \varepsilon(f, P_n)$$

и, следовательно, по теореме Вейерштрасса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_{n-1}\| = 0$$

**Определение 7.7**

Чебышевской системой узлов порядка n на отрезке $I_0 = [0, 1]$ называется система точек

$$x_k^* = (x_{1,n}^*, x_{2,n}^*, \dots, x_{n,n}^*)$$

где

$$x_{k,n}^* = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad n \geq 1 \quad 1 \leq k \leq n$$

**Определение 7.8.**

Теорема 7.8 (Бернштейна)

Пусть $I = I_0 = [0, 1]$ и X^* – интерполяционная матрица из чебышевских узлов на отрезке I_0 . Тогда

$$\lambda_n = \lambda_n(x_k^*) < 8 + \frac{4}{\pi} \ln n \quad n \geq 1$$

**Теорема 7.9. Бернштейна**

Пример Берштейна. Пусть $I = I_0 = [-1, 1]$, $f_0(x) = |x|$.

Тогда $f_0 \in W^1(1, I_0)$, но интерполяционный процесс, отвечающий функции f_0 и матрице равноотстоящих узлов на отрезке I_0 , расходится всюду на отрезке I_0 , кроме концов отрезка и точки $x = 0$.

