Содержание

ГОС по матану

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

`Экзамен - это тропа`

Коновалов Сергей Петрович

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 1.1.1: Пусть имеется правило, которое каждому натуральному числу n ставит в соответствие некоторое x_n из множества G. Тогда **последовательностью** называется множество всевозможных упорядоченных пар $(n, x_n), n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1.2: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если

$$\exists M(m) : x_n \leq M \ (x_n \geq M) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Определение 1.1.3: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу.

Определение 1.1.4: Последовательность называется **строго возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1} \ (x_n > x_{n+1}).$$

Определение 1.1.5: Последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

$$\forall k \in \mathbb{N} : \exists n = n_k : y_k = x_{n_k},$$

где последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ - строго возрастающая. Эта последовательность обозначается $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 1.1.6: Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется **последовательностью вложенных отрезков**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

Теорема 1.1.1 (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Определение 1.1.7: Число x_0 называется **пределом последовательности** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Теорема 1.1.2 (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть $[a_2, b_2]$ – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз, получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, причём так, чтобы $n_k > n_{k-1}$. Очевидно, $n_1 = 1$. Существование предела также очевидно:

$$0 \leq \left|c - x_{n_k}\right| \leq b_k - a_k = \frac{b_1-a_1}{2^k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

$\square$

1.2. Критерий Коши

Определение 1.2.1: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **фундаментальной**, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Теорема 1.2.1 (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.

Доказательство: $\Rightarrow$ По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |x_n - l| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|x_{n+p} - l + l - x_n\right| \le \left|x_{n+p} - l\right| + |x_n - l| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon \coloneqq 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1) \le x_n \le \max(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : \ \left|x_{n_k} - l\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max\left(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}\right) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| \le \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}\right| + \left|x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| < \varepsilon$$

□

2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Определение 2.1.1: Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху (снизу)**, если

$$\exists M(m) \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \le M(x \ge m).$$

В таком случае $M(m)$ называется **верхней (нижней) гранью** множества E.

Определение 2.1.2: Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным**, если оно ограниченно и сверху, и снизу.

Определение 2.1.3: Число M называется **точной верхней гранью** множества E и обозначается $\sup E$, если

1. $\forall x \in E : x \le M$;
2. $\forall M' < M : \exists x \in E : x > M'$.

Определение 2.1.4: Число m называется **точной нижней гранью** множества E и обозначается $\inf E$, если
1. $\forall x \in E : x \geq m$;
2. $\forall m' > m : \exists x \in E : x < m'$.

Теорема 2.1.1 (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Теорема 2.1.2 (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

Определение 2.1.5: Пусть D и Y – два произвольных множества, и задано некоторое правило f, которое каждому элементу $x \in D$ ставит в соответствие один и только один некоторый элемент $y = f(x)$ из Y. Тогда множество всевозможных пар $(x, f(x)), x \in D$ называется **функцией**.

Определение 2.1.6: Пусть f - функция, а D_f – ее бласть определения. Тогда c называется **пределом по Коши** функции f в точке $x_0 \in D_f$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f : |x - x_0| < \delta : |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Определение 2.1.7: **Последовательностью Гейне** функции f в точке x_0 называется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f$, если
1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$;
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Определение 2.1.8: Пусть f - функция, а D_f – ее бласть определения. Тогда c называется **пределом по Гейне** функции f в точке $x_0 \in D_f$, если

$$\forall \{x_n\} - \text{последовательности Гейне}: \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Теорема 2.1.3: Определения функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Определение 2.1.9: Пусть f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$.

Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется **непрерывной в точке** x_0.

Определение 2.1.10: f называется **непрерывной на множестве** $X \subset \mathbb{R}$, если
$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \underbrace{\forall x \in X}_{!!!}, |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.4 (Первая теорема Вейшерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если f непрерывна на $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство: От противного, пусть f неограничена сверху. Тогда
$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = +\infty$$

То есть
$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : \ f(x_n) > n$$

Причём $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$, то есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса
$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

Однако из $f(x_n) > n$ следует, что $f(x_0) = \infty$. Противоречие. $\square$

2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

Теорема 2.2.1 (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если f непрерывна на $[a, b]$, то
$$\exists x', x'' \in [a, b] : \ f(x') = \sup_{x \in [a,b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

Доказательство: Пусть $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Тогда по определению супремума
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : \ M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

В том числе для $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$:
$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : \ M - \tfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:
$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением $k \to \infty$ в неравенстве $M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq M$.

Таким образом, M действительно достижим функцией f в точке x_0. Для инфимума аналогично. $\square$

3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема 3.1 (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда
$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \ \forall e \in (c, d) : \exists \gamma \in [a, b] : f(\gamma) = e$

Доказательство: Рассмотрим частный случай $c < e = 0 < d$.

Построим последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, где $[a_1, b_1] = \{x_1, x_2\}$ (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Рассмотрим $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Какие могут быть случаи?

- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то мы победили и останавливаемся.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, то $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, то $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$.

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:

$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \gamma \in [a, b]$$

Тогда в силу непрерывности f:

$$f(\gamma) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n)$$

Заметим, что после каждой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим

$$f^2(\gamma) \leq 0$$

Из чего следует $f(\gamma) = 0$.

В общем случае рассматривается вспомогательная функция $F(x) = f(x) - e$. $\square$

4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

4.1. Теорема Ролля

Определение 4.1.1: Пусть f определена в некоторой δ_0 окрестности точки x_0. Если

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) \le f(x_0)$$

то x_0 – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения **локального минимума**, а также **строгие** экстремумы, в которых неравенство строгое.

Определение 4.1.2: Пусть f – функция, D_f – ее область определения, $x_0 \in D_f$. Тогда **производной** f в точке x_0 называется

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Определение 4.1.3: Число A называется **правосторонним пределом** функции f в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 4.1.4: Число A называется **левосторонним пределом** функции f в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 4.1.5: **Правой производной** функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Определение 4.1.6: **Левой производной** функции f в точке x_0 называется

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Теорема 4.1.1: Функция f, определенная в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет обе односторонние производные в этой точке, и эти производные равны.

Определение 4.1.7: Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке имееет конечную производную.

Теорема 4.1.2 (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $y = f(x)$, дифференцируемой в x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: БОО x_0 – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в x_0 остаётся лишь быть равной нулю. □

Теорема 4.1.3 (Ролля): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), причём $f(a) = f(b)$, то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Доказательство: Заметим, что если $f \equiv \mathrm{const}$, то утверждение тривиально.

Иначе, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m, M : m < M : \ m = \min_{x \in [a,b]} f(x); \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Заметим, что либо $m \neq f(a)$, либо $M \neq f(a)$.

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке $c \in (a, b)$, а по теореме Ферма мы знаем, что $f'(c) = 0$. □

4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 4.2.1 (Обобщённая теорема о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Доказательство: Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что h всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$

То есть h удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано. □

Теорема 4.2.2 (Лагранжа о среднем): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Доказательство: В обобщённой теореме о среднем возьмём $g(x) = x$. □

Теорема 4.2.3 (Коши о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$, то
$$\exists c \in (a, b) : \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство: Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему $g(b) - g(a) \neq 0$, чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists c : \ g'(c) = 0$, что противоречит с условием текущей теоремы. □

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

5.1. Остаточный член в форме Лагранжа

Лемма 5.1.1: Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $\exists!$ многочлен $P_n(f, x)$ степени $\leq n$ такой, что
$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P_n'(f, x_0); ...; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$
Этот многочлен имеет вид
$$P_n(f, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
и называется **многочленом Тейлора** степени n относительно точки x_0.

Доказательство: Проверяется банальной подстановкой. □

Лемма 5.1.2 (Об отношении): Если φ, ψ $(n + 1)$ раз дифференцируемы в $U_\delta(x_0)$, причём
$$\forall k = \overline{0, \text{n}} : \ \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$
но
$$\forall k = \overline{0, \text{n}} : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \ \psi^{(k)}(x) \neq 0$$
то
$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

Доказательство: Заметим, что φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда
$$\exists \xi_{...} \in (x_0, x) : \ \frac{\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{0}}{\psi(x) - \underbrace{\psi(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \underbrace{\varphi'(x_0)}_{0}}{\psi'(\xi_1) - \underbrace{\psi'(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = ... = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$
□

Теорема 5.1.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа): Если f $(n+1)$ раз дифференцируема в $U_\delta(x_0), \delta > 0$, то

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \ f(x) - P_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство: Сведём к предыдущей лемме об отношении:

$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_n(f,x); \quad \psi(x) \coloneqq (x-x_0)^{n+1}$$

Все требуемые свойства проверяются очевидно. □

5.2. Остаточный член в форме Пеано

Определение 5.2.1: Пусть функции $f(x), g(x)$ определены на множестве X.

Тогда $f(x)$ есть **о-малое** от $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует окрестность $\dot{U}(x_0)$ такая, что

$$\forall x \in \dot{U}(x_0) : f(x) = g(x)\alpha(x),$$

где $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 5.2.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) - P_n(f,x) = o\big((x-x_0)^n\big), x \to x_0$$

где $P_n(f,x)$ – многочлен Тейлора степени n функции f относительно x_0.

Доказательство: По определению, если f n раз дифференцируема в точке, то она $n-1$ раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая $n-1$:

$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_n(f,x); \quad \psi(x) = (x-x_0)^n$$

Получим, что

$$\exists \xi \in (x_0, x) : \ \frac{f(x)-P_n(f,x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f,\xi)}{n!(\xi - x_0)}$$

Заметим, что при $x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(f,x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f,\xi)}{n!(\xi - x_0)} = \frac{1}{n!}\big(f(x_0) - P_n(f,x_0)\big)^{(n)} = 0$$

□

6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Теорема 6.1.1 (Предельный переход в неравенстве): Пусть заданы две последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого $N : \forall n > N : x_n \le y_n$, то $a \le b$.

Теорема 6.1.2: Пусть f дифференцируема на (a, b). Тогда
1. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow f$ – неубывающая на (a, b)
2. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \le 0 \Leftrightarrow f$ – невозрастающая на (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ – возрастающая на (a, b)
4. $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ – убывающая на (a, b)

Доказательство:

1. $f'(x) \ge 0 \Rightarrow$ По теореме Лагранжа:
   $\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \ge 0$
   То есть для произвольных $x_1 < x_2 : f(x_1) \le f(x_2)$.
   Обратно, пусть $f(x)$ неубывающая. Тогда
   $\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign } (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign } \Delta x$
   Ну и тогда при $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$:
   $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$
   Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.
2. Аналогично предыдущему пункту
3. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = x^3$ в точке 0
4. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = -x^3$ в точке 0

$\square$

6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

Теорема 6.2.1 (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дифференцируема в $\dot{U}_{\delta_0}(x_0), \delta_0 > 0$:
1. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума f
2. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума f

Доказательство: По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы. $\square$

Теорема 6.2.2 (Второе достаточное условие локального экстремума): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, $f^{(n)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, \text{n-1}} : f^{(k)}(x_0) = 0$, то

1. Если n чётно, то f имеет в точке x_0 локальный минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.
2. Если n нечётное, то f не имеет локального экстремума в точке x_0.

Доказательство:

1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \to x_0$$
Так как n чётно, то $n = 2m$:
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \to x_0$$
Левая часть в некоторой окрестности точки x_0 имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность $f(x) - f(x_0)$ одного знака с n-ой производной.
2. Рассмотрим $f(x) = x^3$.

$\square$

6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

Определение 6.3.1: f называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на (a, b), если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

f называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на (a, b), если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

Определение 6.3.2: Для числовой функции выпуклость вверх (вниз) можно определить как выполнение **неравенства Йенсена**:
$$\forall x, y : \forall t \in [0, 1] : f(tx + (1 - t)y) \geq (\leq)\ tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Теорема 6.3.1: Пусть f дважды дифференцируема на (a, b):

1. f выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$.
2. f выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$
3. f строго выпукла вниз на $(a, b) \Leftarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$.
4. f строго выпукла вверх на $(a, b) \Leftarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$

Доказательство:

1. $\Leftarrow$ Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:

$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0,1] :$$
$$x_t \coloneqq tx_0 + (1-t)x_1 : \ f(x_t) \le tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим f в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x_t:

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$
$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:

$$f(x_0) \ge f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$
$$f(x_1) \ge f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на t, второе на $1-t$ и сложим их:

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \ge f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_{0}$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и достаточно малую окрестность $\delta \coloneqq \min(x_0 - a, b - x_0)$. Тогда

$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - u) + \frac{1}{2}(x_0 + u) : \ f(x_0) \le \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u)$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря $\pm$, давайте умножим каждое на $\frac{1}{2}$ и сложим их:

$$\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

Тогда при достаточно малых u $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$ обязано будет стать такого же знака, как и $\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \ge 0$

2. Аналогично
3. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x) = x^4$
4. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x) = -x^4$

$\square$

7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

Определение 7.1: **Метрическим пространством** (X, ρ) называется множество X такое, что на $X \times X$ определена числовая функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ такая что:

1. $\rho(x,y) \ge 0$, причём $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\forall x, y, z \in X : \ \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Определение 7.2: **Компактным** множеством в метрическом пространстве X называется такое множество K, что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 7.3: Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется **ограниченным**, если:

$$\exists r \geq 0 : \forall M \in E : |OM| \leq r,$$

где $O = (0, 0, ..., 0)$.

Определение 7.4: Точка $x_0 \in E$ называется **изолированной**, если:

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap E = \{x_0\}.$$

Определение 7.5: Точка $x_0 \in E$ называется **внутренней**, если:

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq E.$$

Определение 7.6: Точка $x_0 \in E$ называется точкой **прикосновения**, если:

$$\forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap E \neq \emptyset.$$

Определение 7.7: Множество всех точек прикосновения E называется **замыканием** этого множества $\overline{E}$.

Определение 7.8: Множество E называется **замкнутым**, если $E = \overline{E}$.

Определение 7.9: Множество всех внутренних точек E называется **внутренностью** этого множества $\operatorname{int} E$.

Определение 7.10: Множество E называется **открытым**, если $E = \operatorname{int} E$.

Теорема 7.1: Дополнение замкнутого множества – открытое множество, и наоборот.

Теорема 7.2: В $\mathbb{R}^n$ верно следующее утверждение:

$$E - \text{компактное} \Leftrightarrow \begin{cases} E \text{ ограниченное} \\ E \text{ замкнутое} \end{cases}$$

Теорема 7.3: Множество E является компактным в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E :$ $\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in E$

Определение 7.11: Функция $f : X \to \mathbb{R}$, где X – метрическое пространство, называется равномерно непрерывной на множестве $X' \subset X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X' : \rho(x_1, x_2) < \delta : \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема 7.4 (Кантора о равномерной непрерывности): Если $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на K.

Доказательство: От противного, выпишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in K : \|x_1 - x_2\| < \delta : \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Выбирая $\delta := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{m}, ...$ построим последовательность пар из отрицания непрерывности: $\left\{\left(x_{1,m}, x_{2,m}\right)\right\}_{m=1}^{\infty} \subset K^2$.

Причём

$$\forall m \in \mathbb{N} : \left\|x_{1,m} - x_{2,m}\right\| < \tfrac{1}{m} : \left|f\left(x_{1,m}\right) - f\left(x_{2,m}\right)\right| \geq \varepsilon$$

По одному из определений компактности выделим из последовательности пар подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты:

$$\exists \left\{\left(x_{1,m_k}, x_{2,m_k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{1,m_k} = x_0 \in K$$

Причём заметим, что (комбинируем то, как мы строили последовательность пар и сходимости первых координат подпоследовательности):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > 0 : \left\|x_{2,m_k} - x_0\right\| \leq$$

$$\left\|x_{1,m_k} - x_0\right\| + \left\|x_{1,m_k} - x_{2,m_k}\right\| < 2\varepsilon$$

То есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{1,m_k} = \lim_{k\to\infty} x_{2,m_k} = x_0 \overset{\text{непрерывность } f}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(f\left(x_{1,m_k}\right) - f\left(x_{2,m_k}\right)\right) = 0$$

Противоречие! □

8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

Определение 8.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$. **Полным приращением** f в точке x_0 называется
$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n} + \Delta x_n\big) - f\big(x_{0,1}, ..., x_{0,n}\big)$

f называется **дифференцируемой** в x_0, если

$$\Delta f(x_0) = (A, \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$$

где $A \in \mathbb{R}^n$ называется **градиентом**: grad $f(x_0) = A$

Определение 8.2: **Дифференциалом** дифференцируемой в x_0 функции f назовём выражение $(A, \Delta x)$ из определения дифференцируемости.

Определение 8.3: **Частной производной** в точке x_0 называется предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_{0,1}, ..., x_{0,j} + \Delta x, ..., x_{0,n}) - f(x_{0,1}, ..., x_{0,j}, ..., x_{0,n})}{\Delta x}$$

Теорема 8.1 (Необходимое условие дифференцируемости): Если f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то существуют частные производные $\forall j = \overline{1,\mathrm{n}}$, причём

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Доказательство: Сразу следует из определения - есть предел по всем многомерным приращениям, а значит и по однокоординатным в том числе. □

Теорема 8.2 (Достаточное условие дифференцируемости): Если f определена в некоторой окрестности точки x_0, вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в x_0, то f дифференцируема в x_0.

Доказательство: Воспользуемся n раз «умным нулём», каждый из которых будет «снимать» приращение по одной из координат:

$$\Delta f(x_0) =$$
$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n} + \Delta x_n\big) - f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}\big) +$$
$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}\big) - f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1}, x_{0,n}\big)$$
$$+ ... +$$
$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, x_{0,2}, ..., x_{0,n}\big) - f\big(x_{0,1}, ..., x_{0,n}\big) \overset{\text{т. Лагранжа}}{=}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, \xi_n\big)\Delta x_n +$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-2} + \Delta x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_{0,n}\big)\Delta x_{n-1}$$
$$+ ... +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\xi_1, x_{0,2}, ..., x_{0,n}\big)\Delta x_1 \overset{\Delta x \to 0 \Rightarrow \forall n : \xi_n \to 0}{=}$$
$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + o(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$$

□

9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

Определение 9.1: **Кубом** радиуса δ вокруг точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ назовём
$$K_{\delta, \boldsymbol{x_0}} = \bigtimes_{k=1}^n \big(x_0^k - \delta, x_0^k + \delta\big)$$
где под $\times$ подразумевается декартово произведение.

Теорема 9.1: Пусть $F(\boldsymbol{x}, y) = F(x_1, ..., x_n, y)$ дифференцируема в окрестности точки $(\boldsymbol{x_0}, y_0) = \big(x_0^1, ..., x_0^n, y_0\big)$.

Её производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в этой окрестности, причём $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$:
$$\forall x \in K_{\delta, x_0} : \exists! y = \varphi(x) : \forall (x, y) \in K_{\delta, x_0} \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) :$$
$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x), \text{причём } \exists \varphi'(x_0)$$

Доказательство: БОО будем считать, что $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

По непрерывности частной производной, $\exists$ окрестность точки (x_0, y_0), в которой $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$.

Тогда из непрерывности F по y и знакоопределённости производной следует
$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \ F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \land F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$
Расширяем территорию дальше, из непрерывности F по x следут
$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K_{\delta, x_0} : F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \land F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$$
Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции берём существование, а из знакоопределённости производной единственность:
$$\exists! \varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Заметим, что φ непрерывна по построению в (x_0, y_0): мы брали x из 2δ окрестности точки x_0, а значение лежало в 2ε окрестности точки y_0.

Теперь докажем дифференцируемость φ, для этого распишем дифференцируемость F:

$$F(x,y) - \underbrace{F(x_0,y_0)}_{0} =$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,y_0)\cdot\left(x_k - x_0^k\right) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \alpha(x,y)$$

где $\alpha = o(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|), (x,y)\to(x_0,y_0)$.

Воспользуемся умножением на «умную единицу»:

$$\alpha(x,y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(x,y)\cdot\left(x_i - x_0^i\right)^2}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2^2} + \frac{\alpha(x,y)\cdot(y-y_0)^2}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2^2}$$

Введём новые обозначения:

$$\alpha_i(x,y) \coloneqq \frac{\alpha(x,y)\cdot\left(x_i - x_0^i\right)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2^2};\quad \beta(x,y) \coloneqq \frac{\alpha(x,y)\cdot(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2^2}$$

Тогда

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,y_0) + \alpha_k(x,y)\right)\left(x_k - x_0^k\right) +$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) + \beta(x,y)\right)(y-y_0)$$

Подставляя $y=\varphi(x)$ в выражение выше, будем использовать новые обозначения:

$$\tilde{\alpha}_k(x) \coloneqq \alpha_k(x,\varphi(x));\quad \tilde{\beta}(x) \coloneqq \beta(x,\varphi(x))$$

Таким образом,

$$\underbrace{F(x,\varphi(x))}_{0} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)\right)\left(x_k - x_0^k\right) +$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)\right)(\varphi(x)-\varphi(x_0))$$

Выразим приращение φ:

$$\varphi(x)-\varphi(x_0) = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))} + \gamma_k(x)\right)\left(x_k - x_0^k\right)$$

где

$$\gamma_k(x) \coloneqq -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))+\tilde{\alpha}_k(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))+\tilde{\beta}(x)}$$

Остаётся заметить, что $\tilde{\alpha}_k(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0; \tilde{\beta}(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$, а это значит, что

$$\varphi(x)-\varphi(x_0) = \sum_{k=1}^n A_k\left(x_k - x_0^k\right) + \gamma(x);\quad \gamma(x) = o(\|x-x_0\|), x\to x_0$$

Что и является требуемой дифференцируемостью φ в x_0. □

10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

10.1. Необходимые условия

Определение 10.1.1: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists\delta>0 : \forall x \in U_\delta(x_0):\ f(x) \le f(x_0)$$

Определение 10.1.2: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) \geq f(x_0)$$

Определение 10.1.3: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) < f(x_0)$$

Определение 10.1.4: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) > f(x_0)$$

Теорема 10.1.1 (Необходимые условия локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в окрестности точки x_0, то $\mathrm{d}f(x) \equiv 0$.

Доказательство: Рассмотрим для каждого $k = \overline{1, \mathrm{n}}$:

$$\psi(x_k) = f\left(x_0^1, ..., x_0^{k-1}, x_k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n\right), \quad \text{где } x_0 = \left(x_0^1, ..., x_0^n\right)$$

Тогда заметим, что ψ дифференцируема в окрестности x_0^k, применяя теорему о необходимом условии экстремума функции одного переменного, получим

$$\psi'\left(x_0^k\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

В силу произвольности k и того, что дифференциал – это вектор частных производных, получим требуемое. □

10.2. Достаточные условия

Определение 10.2.1: Если f дифференцируема в окрестности точки x_0 и $\mathrm{d}f(x_0) \equiv 0$, то x_0 называется **стационарной точкой** функции f.

Теорема 10.2.1 (Достаточные условия локального экстремума): Если x_0 – стационарная точка функции f, дважды дифференцируемой в точке x_0, то
1. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – положительно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального минимума функции f
2. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – отрицательно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального максимума функции f
3. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – неопределённая квадратичная форма, то x_0 не является точкой локального экстремума

Доказательство:
1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:
$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) + \tfrac{1}{2}d^2 f(x_0) + o(\rho^2), \rho \to 0$$
где
$$\mathrm{d}x_k = x_k - x_0^k, k = \overline{1,\mathrm{n}}; \quad \rho = \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n \left(x_k - x_0^k\right)^2} = \|\mathrm{d}x\|_2$$
Тогда (в условиях $\mathrm{d}f(x_0) \equiv 0$ и $\xi_k := \frac{\mathrm{d}x_k}{\|\mathrm{d}x\|}$) :
$$f(x) - f(x_0) = \tfrac{1}{2}d^2 f(x_0) + o(\rho^2) =$$
$$\tfrac{1}{2}\rho^2 \left(\underbrace{\textstyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\xi_i\xi_j}_{F(\xi_1,\ldots,\xi_n)} + o(1), \right) \rho \to 0$$
В следствие нормировки, очевидно, $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$.
Таким образом, минимум введённого функционала F на сфере (компактной в $\mathbb{R}^n$) будет достигаться:
$$\min_{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2=1} F(\xi_1, \ldots, \xi_n) =: C > 0$$
Таким образом, для достаточно маленьких ρ:
$$f(x) - f(x_0) \geq \tfrac{C}{4}\rho^2 > 0$$
2. Аналогично
3. Вводим $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ аналогично предыдущим пунктам, из-за того что $\mathrm{d}^2 f$ – неопределённая, то
$$\exists \xi_1(x_1), \xi_2(x_2): \ F(\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n) > 0 \land F(\xi_2^1, \ldots, \xi_2^n) < 0$$
Тогда при достаточно малых ρ:
$$\mathrm{sign}\ (f(x_1) - f(x_0)) = \mathrm{sign}\ F(\xi_1) > 0; \mathrm{sign}\ (f(x_2) - f(x_0)) = \mathrm{sign}\ F(\xi_2) < 0$$
Что и требовалось.

□

11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Определение 11.1.1: **Разбиением** P отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек отрезка $[a, b]$:
$$P : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b; \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}; k = \overline{1,\ \mathrm{n}}$$

Определение 11.1.2: **Диаметром разбиения** P называется
$$\Delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

Определение 11.1.3: **Верхней суммой Дарбу** разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.4: **Нижней суммой Дарбу** разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.5: Функция f называется **интегрируемой по Риману** на $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}[a, b]$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P : \ U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Определение 11.1.6: **Интегралом Римана** интегрируемой по Риману на $[a, b]$ функции f называется

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f)$$

Теорема 11.1.1 (Основные свойства интеграла Римана):

1. (Линейность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$, причём
$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) \, \mathrm{d}x = \int f_1(x) \, \mathrm{d}x + \int f_2(x) \, \mathrm{d}x$$
Кроме того, $\forall c \in \mathbb{R}$ выполняется, что $cf_1 \in \mathcal{R}[a, b]$, причём
$$\int_a^b cf_1(x) \, \mathrm{d}x = c \int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x$$
2. (Монотонность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] : \ f_1(x) \leq f_2(x)$, то
$$\int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2(x) \, \mathrm{d}x$$
3. (Аддитивность):
$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall c \in (a, b) : \ f \in \mathcal{R}[a, c] \wedge f \in \mathcal{R}[c, b]$$
Причём $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x$
4. (Оценка) Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] : \ |f(x)| \leq M$, то
$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq M(b - a)$$

Теорема 11.1.2 (Критерий Лебега): Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет нулевую меру Лебега.

Теорема 11.1.3 (Достаточные условия интегрируемости по Риману):
1. Непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем;
2. Ограниченная на отрезке функция, разрывная в конечном числе его точек, интегрируема на этом отрезке;
3. Монотонная на отрезке функция, интегрируема на нем;
4. Произведение интегрируемой функции на число интегрируемо;
5. Сумма интегрируемых функций интегрируема;
6. Произведение интегрируемых функций интегрируемо;
7. Если отношение двух интегрируемых функций ограничено, то оно интегрируемо. Частный случай – если множество значений знаменателя не имеет 0 предельной точкой;
8. Модуль интегрируемой функции интегрируем.;

Определение 11.1.7: Пусть $\forall b' \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, b']$. Тогда $F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Будем считать, что $F(a) = 0$, а для $\alpha > \beta$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

Теорема 11.1.4 (Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом): Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то интеграл с перменным верхним пределом $F(x)$ непрерывен на $[a, b]$.

Если, кроме того, f непрерывна в $x_0 \in [a, b]$, то $F(x)$ дифференцируема в x_0, причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство: Непрерывность следует из комбинирования свойств аддитивности и оценки:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \wedge x_2 - x_1 < \tfrac{\varepsilon}{M} : \ |F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M(x_2 - x_1) < \varepsilon$$

В условиях непрерывности f, докажем, что производная интеграла действительно равна $f(x_0)$:

$$\left|\tfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\tfrac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} |f(t) - f(x_0)|$$

Благодаря непрерывности f мы знаем, что при $x \to x_0$ сможем оценить итоговый супремум сверху ε. $\square$

11.2. Формула Ньютона-Лейбница

Определение 11.2.1: **Первообразной** функции f на $[a, b]$ называется такая дифференцируемая на $[a, b]$ функция F, что

$$\forall t \in [a, b] : \ F'(t) = f(t)$$

Определение 11.2.2: **Интегральной суммой** $S\big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\big)$ называется

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

где $P : a = x_0 < ... < x_n = b, \forall i = \overline{1, \text{n}} : t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Теорема 11.2.1 (Интеграл как предел интегральных сумм):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta(P)\to 0} S\big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\big)$$

При этом $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta(P)\to 0} S\big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\big)$

Теорема 11.2.2 (Основная теорема интегрального исчисления): Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ имеет первообразную F на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Доказательство: Для любого разбиения P:

$$F(b) - F(a) \overset{\text{телескопическая сумма}}{=} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=}$$

$$\sum_{k=1}^n F'(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Устремляя $\Delta(P) \to 0$ получим, что $F(b) - F(a)$ равно требуемому интегралу по эквивалентному определению. □

12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

12.1. Непрерывность суммы функционального ряда

Определение 12.1.1: **Функциональная последовательность** $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ **сходится равномерно** на E к функции $f(x)$ ($f_n \rightrightarrows f$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in E : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Определение 12.1.2: Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится поточечно** на E к функции $f(x)$, если

$$\forall x \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Теорема 12.1.1 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \ \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

Определение 12.1.3: **Фукнциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится** на E, если равномерно сходится на E функциональная последовательность $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

Теорема 12.1.2 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ равномерно сходится на } E \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \ \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

Теорема 12.1.3 (Предельный переход в равномерно сходящихся последовательностях): Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к f на множестве E метрического пространства, x_0 – предельная точка E, причём

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n$$

То есть оба предела существуют и равны.

Доказательство: Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \ \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

Совершим предельный переход $x \to x_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|a_{n+p} - a_n\right| \leq \varepsilon$$

То есть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет какой-то предел a, теперь нужно установить, что он равен пределу предельной функции:

$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

Стоит упомянуть про кванторы:

- Берём номер N больший N_1 для равномерного предела функций и N_2 для числового предела $a_n \underset{n \to \infty}{\to} a$
- δ-окрестность x_0 меньшую требуемой для фиксированного $f_N(x) \underset{x \to x_0}{\to} a_N$

□

Следствие 12.1.3.1: Если $f_n(x)$ непрерывна на E, $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f непрерывна на E.

Теорема 12.1.4 (Предельный переход в функциональных рядах): Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E, x_0 – предельная точка E, $\forall n \in \mathbb{N}:$ $\lim_{x \to x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \to x_0, x \in E} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Доказательство: Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда

Теорема 12.2.1 (Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности): Если $\forall n \in \mathbb{N}:$ f_n интегрируемы по Риману на $[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство: Воспользуемся тем, что каждый элемент функциональной последовательности интегрируем:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \; U(P, f_n) - L(P, f_n) < \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Далее определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : \; |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Итак, оценим верхнюю сумму Дарбу предела:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k \le$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x) + \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}\Big) \Delta x_k = U(P, f_n) + \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично для нижней:

$$L(P, f) \ge L(P, f_n) - \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом,

$$U(P, f) - L(P, f) \le U(P, f_n) - L(P, f_n) + \tfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Мы доказали интегрируемость f, осталось доказать, что интеграл равен тому, что надо:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \le \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon$$

□

Теорема 12.2.2 (Интегрирование функциональных рядов): Если $f_n \in \mathcal{R}[a, b], \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство: Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. $\square$

12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда

Теорема 12.3.1 (Дифференцирование функциональных последовательностей): Если
1. f_n дифференцируемы на (a,b)
2. $f_n' \rightrightarrows$ на (a,b)
3. $\exists x_0 \in (a,b): \ f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\to}$

То
1. $f_n \rightrightarrows f$ на (a,b)
2. f дифференцируема на (a,b)
3. $f_n' \to f'$ на (a,b)

Доказательство: Используем равномерную сходимость производных:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (a,b) : \ \left|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
А также сходимость самих функций в точке x_0:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$
Применим теорему Лагранжа для непрерывных f_n между произвольной точкой x и фиксированной x_0:
$$\exists \xi \in \{x, x_0\} : \ \left|\left(f_{n+p}(x) - f_n(x)\right) - \left(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right)\right| = \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right||x - x_0|$$
Тогда мы можем доказать фундаментальность самой последовательнсоти:
$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \le \left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| + \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right||x - x_0| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_0| < \varepsilon$$
Значит по критерию Коши $f_n \rightrightarrows f$ на (a,b).

Остаётся доказать дифференцируемость f в произвольной точке $x \in (a,b)$, для этого введём вспомогательные функции:
$$\varphi_n(t) := \tfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}; \quad \varphi(t) := \tfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$$
Докажем фундаментальность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$:
$$\left|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)\right| = \frac{\left|\left(f_{n+p}(t) - f_n(t)\right) - \left(f_{n+p}(x) - f_n(x)\right)\right|}{t - x} \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=} \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
Получили, что $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $A := (a,b) \setminus \{x\}$.

Заметим, что x – предельная точка A, тогда применим теорему о непрерывном поточечном пределе:
$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x, t\in A} \varphi_n(t) = \lim_{t\to x, t\in A} \varphi(t) = f'(x)$$
Заметим, что этими равенствами мы доказываем как существование, так и равенство пределов. $\square$

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда

Определение 13.1.1: Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, где $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ называется **степенным рядом** с центром в точке z_0 и коэффициентами $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Определение 13.1.2: **Радиусом сходимости** степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ называется

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}; \quad 0 \leq R \leq +\infty$$

Теорема 13.1.1 (Коши-Адамара): Если $R \in [0, +\infty]$ – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, то
1. $\forall z, |z-z_0| < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится, притом абсолютно
2. $\forall z, |z-z_0| > R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ расходится

Доказательство:
1. Пусть $|z-z_0| =: r < R$.

   Возьмём произвольный $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$. По определению верхнего предела:
   $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho}$$
   Тогда:
   $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |c_n(z-z_0)^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \quad \frac{r}{\rho} < 1$$
   По теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимя числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказано.
2. Пусть $|z-z_0| > R$, то есть $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{R}$. Значит по плотности действительных чисел:
   $$\exists \varepsilon > 0 : \ \frac{1}{|z-z_0|} \leq \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z-z_0| \geq \frac{1}{\frac{1}{R}-\varepsilon}$$
   По определению верхнего предела:
   $$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \forall k \in \mathbb{N} : \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow$$
   $$|a_{n_k} z^{n_k}| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R}-\varepsilon}\right)^{n_k} \geq 1$$
   Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

Теорема 13.1.2 (Равномерная сходимость степенного ряда): Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$, то он сходится равномерно в любом круге $|z - z_0| \leq r$, где $0 < r < R$

Доказательство: $|z - z_0| = r < R \Rightarrow$ по теореме Коши-Адамара $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ сходится абсолютно, то есть $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$

Тогда для любого z из рассматриваемого круга справедлива оценка

$$\left|c_n (z-z_0)^n\right| \leq |c_n| r^n$$

А значит по теореме Вейерштрасса имеется равномерная сходимость. □

Теорема 13.1.3 (Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов): Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, где $|x - x_0| < R, R > 0$. Тогда

1. $f(x)$ бесконечно дифференцируема $\forall x, |x - x_0| < R$, причём
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)...(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$$
2. $f(x)$ интегрируема по Риману $\forall x, |x - x_0| < R$ на отрезке с концами x_0, x, причём
$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$
3. Все степенные ряды, упомянутые в пунктах 1, 2 имеют радиус сходимости R.
4. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Доказательство: Если мы возьмём $x : |x - x_0| = r < R$, то на отрезке $[x_0, x]$ ряд для $f(x)$ сходится равеномерно, а значит мы можем его почленно интегрировать по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

Радиус сходимости дифференцированного (и, вообще говоря, интегрированного) ряда не меняется, так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. А значит он также равномерно сходится на $[x_0, x]$, поэтому мы можем применить теорему о дифференцировании функционального ряда.

Заметим, что $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$, что и требовалось. □

13.2. Ряд Тейлора

Определение 13.2.1: Если f бесконечно дифференцируема в точке x_0, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

называется её **рядом Тейлора** с центром в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называется **рядом Маклорена**.

Теорема 13.2.1 (Достаточное условие представимости функции рядом Тейлора): Если f бесконечно дифференцируема на $(x_0 - h, x_0 + h)$, причём

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : \ \left|f^{(n)}(x)\right| \le M$$

То $f(x)$ представима своим рядом Тейлора в точке x_0 при всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Доказательство: По теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}; \quad \xi \in (x_0, x)$$

Следовательно

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right| \le M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Почему $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$? Заметим, что n-ый элемент разложения экспоненты (имеющий бесконечный радиус сходимости, поэтому для неё априори он существует) в ряд Маклорена – это $\frac{x^n}{n!}$, а по необходимому условию сходимости ряда, он стремится к 0 равномерно. □

14. Теорема об ограниченной сходимости для интеграла Лебега

Определение 14.1: Пусть $\langle a, b\rangle$ – конечный промежуток $([a, b], (a, b), (a, b], [a, b))$

Брусом в $\mathbb{R}^n$ назовём

$$P = \bigtimes_{k=1}^{n} \langle a_k, b_k\rangle$$

Объёмом бруса P назовём число $|P| = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$

Определение 14.2: **M** называется **элементарным множеством**, если оно представимо дизъюнктным объёдинением конечного числа брусьев.

Объёмом элементарного множества $M = \bigsqcup_{i=1}^{n} P_i$ назовём $|M| = \sum_{i=1}^{n}|P_i|$

Лемма 14.1: Совокупность элементарных множеств является кольцом множеств.

В качестве единицы будем брать $K_I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.

Совокупность элементарных подмножеств K_I образует алгебру множеств.

Определение 14.3: **Внешней мерой Жордана** множества A называется

$$\mu^*_{\mathcal{J}}(A) = \inf_{A\subset \cup_{i=1}^{r} M_i} \sum_{i=1}^{r}|M_i|$$

где инфимум берётся по всем покрытиям множества A конечным числом элементарных множеств.

Определение 14.4: **Внешней мерой Лебега** множества A называется

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup_{i=1}^{\infty} M_i} \sum_{i=1}^{\infty} |M_i|$$

где инфимум берётся по всем покрытиям множества A счётным числом элементарных множеств.

Определение 14.5: Пусть $A \subset K_I$.

Тогда **внутренней мерой Лебега (Жордана)** назовём

$$\mu_*^{(\mathcal{J})}(A) := 1 - \mu^*_{(\mathcal{J})}(K_I \setminus A)$$

Определение 14.6: Множество $A \subset K_I$ называется измеримым по Лебегу (Жордану), если

$$\mu^*_{(\mathcal{J})}(A) = \mu_*^{(\mathcal{J})}(A)$$

При этом общее значение соответствующих внешних и внутренних мер называется просто мерой.

Теорема 14.1 (Критерий измеримости): Множество $A \subset K_I$ измеримо по Лебегу (Жордану) тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M_\varepsilon \text{ элементарное}: \ \mu^*_{(\mathcal{J})}(A \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Определение 14.7: **Лебеговым множеством** функции $f : E \to \mathbb{R}, R \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$E_a(f) = \{x \in E \mid f(x) < a\}$$

Определение 14.8: Функция $f : E \to \mathbb{R}$, где E – измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, называется **измеримой**, если

$$\forall a \in \mathbb{R} : \ E_a(f) \text{ измеримое}$$

Определение 14.9: Пусть f – ограниченная измеримая функция, определённая на измеримом по Лебегу множестве E. И Q – разбиение области значений функции f.

Тогда **интегральной суммой Лебега** назовём

$$S\Big(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^n\Big) = \sum_{i=1}^N f(t_i)\mu(E_i)$$

где $E_i = \{x \in E \mid f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}$

Теорема 14.2 (Критерий/определение интеграла Лебега для ограниченных функций): Если f – ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то она интегрируема по Лебегу на E, причём

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} S\big(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^n\big)$$

Определение 14.10: Назовём **срезкой** неотрицательной функции f для $N \in \mathbb{N}$:

$$f_{[N]}(x) = \begin{cases} f(x), f(x) \leq N \\ N, f(x) > N \end{cases}$$

Теорема 14.3 (Критерий/определение интеграла Лебега для измеримых неотрицательных функций): Если f – измеримая неотрицательная функция, определённая на измеримом множестве E конечной меры, то

$$\lim_{N\to\infty} \int_E f_{[N]} \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Теорема 14.4 (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла): Пусть

- $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – измеримые на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры
- $f_m \overset{\text{п.н.}}{\to} f$ на E
- $\forall n \in \mathbb{N}: \ |f_n(x)| \leq F(x)$ при почти всех $x \in E$, где F – произвольная суммируемая функция на E

Тогда f суммируема на E, причём

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство: Совершив предельный переход $n \to \infty$ мы можем утверждать, что $|f(x)| \leq F(x)$ при почти всех $x \in E$ – значит f суммируемая на E.

Осталось доказать равенство интеграла и предела интегралов.

Как мы знаем, из сходимости почти всюду следует сходимость по мере:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu(E_m(\varepsilon) := \{x \in E \mid \|f_m - f\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Другими словами

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m > M : \ \mu(E_m(\varepsilon)) < \delta$$

Оценим разность интеграла и предела интегралов:

$$\left|\int_E (f - f_m) \, \mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \int_{E_m} |f_m - f| \, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{E \setminus E_m} |f_m - f| \, \mathrm{d}\mu(x) \leq$$

$$2 \int_{E_m} F \, \mathrm{d}\mu(x) + \varepsilon\mu(E \setminus E_m) < \varepsilon(\mu(E) + 2)$$

Что и требовалось. $\square$

15. Дифференциальные формы на открытых подмножествах евклидова пространства, оператор внешнего дифференцирования d и его независимость от криволинейной замены координат

15.1. Дифференциальные формы, оператор внешнего дифференцирования

В этом и других билетов, связанных с дифференциальными формами введём понятия $E = \mathbb{R}^n$ – евклидово пространство.

E^* – сопряжённое к нему, aka пространство линейных функционалов aka линейных форм aka ковекторов.

Если мы будем употреблять $p \in \mathbb{N}$, то мы имеем ввиду количество векторов
$$x_1, ..., x_p \in E$$
Если мы будем употреблять $q \in \mathbb{N}$, то мы имеем ввиду количество ковекторов
$$y^1, ..., y^q \in E^*$$
Обратите внимание на индексы, это важно.

Определение 15.1.1: **Полилинейной формой валентности** (p, q) называется функция $U : E^p \times (E^*)^q \to \mathbb{R}$, линейная по каждому из аргументов.

Утверждение 15.1.1: Полилинейная форма однозначно определяется значениями на базисных элементах E и E^*, то есть числами
$$\omega_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{j}} := \omega_{i_1,...,i_p}^{j_1,...,j_q} = U\left(e_{i_1}, ..., e_{i_p}, e^{j_1}, ..., e^{j_q}\right)$$
где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис E, а $\left\{e^j\right\}_{j=1}^q$ – двойственный базис E^*.

Доказательство: Очевидно из линейности. □

Определение 15.1.2: Набор чисел $\left\{\omega_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{j}} \mid i \in \left(\overline{1, \mathrm{n}}\right)^p, j \in \left(\overline{1, \mathrm{n}}\right)^q\right\}$ (то есть мы рассматриваем значения на всех комбинациях базисных векторов и ковекторов) называется **тензором**

Утверждение 15.1.2: Множество полилинейных форм валентности (p, q) образует **линейное пространство** Ω_p^q.

Определение 15.1.3: **Тензорным произведением** форм $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}; V \in \Omega_{p_2}^{q_2}$ называется форма $U \otimes V \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}$, задаваемая формулой.

$$\forall \boldsymbol{x} \in E^{p_1+p_2} : \forall \boldsymbol{y} \in E^{q_1+q_2} :$$

$$U \otimes V\Big(x_1, ..., x_{p_1}, x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^1, ..., y^{q_1}, y^{q_1+1}, ..., y^{q_1+q_2}\Big) =$$

$$U\Big(x_1, ..., x_{p_1}, y^1, ..., y^{q_1}\Big) \cdot V\Big(x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, ..., y^{q_1+q_2}\Big)$$

Определение 15.1.4: $W \in \Omega_p^0$ называется **симметрической**, если она не изменяется при любой перестановке её аргументов.

Определение 15.1.5: $W \in \Omega_p^0$ называется **антисимметрической (кососимметрической)**, если при любой перестановке пары её аргументов она меняет знак.

Введём линейное пространство антисимметрических форм:

$$\Lambda_p := \left\{W \in \Omega_p^0 \mid W - \text{антисимметрическая}\right\}$$

Определение 15.1.6: Пусть $\pi_p = \left(i_1, ..., i_p\right)$ – перестановка индексов $\{1, ..., p\}$. Тогда

$$\forall W \in \Omega_p^0 : \forall \boldsymbol{x} \in E^p : \ \left(\pi_p W\right)\left(x_1, ..., x_p\right) := W\Big(x_{i_1}, ..., x_{i_p}\Big)$$

Определение 15.1.7: **Симметризацией формы** $W \in \Omega_p^0$ называется форма

$$\operatorname{sym} W := \tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\pi_p \in S_p} \pi_p W$$

Определение 15.1.8: **Антисимметризацией формы** $W \in \Omega_p^0$ называется форма

$$\operatorname{asym} W := \tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\pi_p \in S_p} \operatorname{sgn} \pi_p \cdot \pi_p W$$

Определение 15.1.9: Если $U \in \Lambda_p, V \in \Lambda_q$, то их **внешним произведением** называется

$$U \wedge V := \tfrac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{asym} (U \otimes V)$$

Теорема 15.1.1 (Основные свойства внешнего произведения):
1. Линейность
   - $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2) \wedge V = \alpha_1(U_1 \wedge V) + \alpha_2(U_2 \wedge V)$
   - $U \wedge (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \alpha_1(U \wedge V_1) + \alpha_2(U \wedge V_2)$
2. Ассоциативность
   - $(U \wedge V) \wedge W = U \wedge (V \wedge W)$
3. Антикоммутативность
   - $\forall U \in \Lambda_p : \forall V \in \Lambda_q :\ U \wedge V = (-1)^{pq}(V \wedge U)$

Утверждение 15.1.3: Базисом в пространстве Λ_p является система

$$\left\{f^{i_1} \wedge ... \wedge f^{i_p} \mid 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n\right\}$$

где $\{f_i\}_{i=1}^n$ – базис в $E^* = \Lambda_1$. (Принято брать базис проекторов)

Определение 15.1.10: **p-формой (дифференциальной формой валентности (степени) p)** на множестве $U \subset E$ называется отображение $\Omega : U \to \Lambda_p$.

В силу линейности пространства Λ_p, нам достаточно задать поведение получаемой формы лишь на базисе, поэтому

$$\forall x \in U :\ \Omega(x) \coloneqq \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1,...,i_p}(x) f^{i_1} \wedge ... \wedge f^{i_p}$$

Таким образом, дифференциальная форма однозначно задаётся наобором действительнозначных функций

$$\left\{\omega_{i_1,...,i_p}(x) \mid 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n\right\}$$

Определение 15.1.11: **Внешнее дифференцирование p-формы** определяется как $(p+1)$-форма

$$\mathrm{d}\Omega : U \to \Lambda_{p+1}$$

По правилу

$$\forall x \in U :\ \ \mathrm{d}\Omega(x) \coloneqq (p+1)\ \mathrm{asym}\ (\Omega'(x))$$

где под производной подразумевается производная по Фреше.

Стоит заметить, что, формально $\Omega' : U \to U \to \Lambda_p$, однако мы считаем, что $U \to \Lambda_p \subset \Omega^0_{p+1}$ (Действительно, линейно по $p+1$ вектору получаем число).

Также стоит упомянуть, что для любого базиса $(e_1, ..., e_n)$ из E и двойственного к нему базиса $(e^1, ..., e^n)$ существует соглашение, что

$$\forall i = \overline{1, \mathrm{n}} :\ e^i = \mathrm{d} e_i$$

Которое не лишено смысла, ведь e_i – это 0-форма. А e^i – это функционал, то есть 1-форма.

Теорема 15.1.2 (Основные свойства операции внешнего дифференцирования):
1. $\mathrm{d}(\Omega \wedge \Pi) = (\mathrm{d}\Omega \wedge \Pi) + (-1)^p(\Omega \wedge \mathrm{d}\Pi)$, где Ω – p-форма, а Π – q-форма.
2. $d(d\Omega) = 0$

Доказательство:
1. Для простоты считаем, что форма – одночлен, по линейности всё очевидно доказывается для произвольной формы.

   Фиксируем базис, в котором
   $$\Omega(x) = \omega(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}; \quad \Pi(x) = \pi(x)\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$
   Тогда
   $$\mathrm{d}(\Omega \wedge \Pi) = \mathrm{d}\big(\omega(x)\pi(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}\big) =$$
   $$\mathrm{d}(\omega(x)\pi(x)) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q} =$$
   $$\pi(x)\sum_{i=1}^n \frac{\partial\omega}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q} +$$
   $$\omega(x)\sum_{i=1}^n \frac{\partial\pi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q} =$$
   $$d\Omega \wedge \Pi(x) + (-1)^p(\Omega \wedge \mathrm{d}\Pi)$$
   В последнем переходе мы воспользовались свойством антикоммутативности внешнего произведения для перестановки всех $\mathrm{d}x^{j_{\ldots}}$ перед всеми $\mathrm{d}x^{i_{\ldots}}$, остальное свернули по определению
2. Распишем двойной дифференциал:
   $$\mathrm{d}(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}\Big(\sum_{j,\forall k: j\neq i_k} \frac{\partial\omega}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}\Big) =$$
   $$\sum_{l, l\neq j, \forall k: l\neq l_k} \sum_{j,\forall k: j\neq i_k} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_l \partial x_j}\,\mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} =$$
   $$\sum_{j,l,j<l,\forall k: j\neq i_k \wedge l\neq i_k} \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_j \partial x_l}\right)\mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} = 0$$

□

15.2. Независимость внешнего дифференцирования от замены координат

Определение 15.2.1: Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$.

D называется **связным**, если
$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 : \ \exists \gamma(t) \subset D \text{ кривая} : \ \gamma(0) = x_1 \wedge \gamma(1) = x_2$$

Определение 15.2.2: **Областью** называется открытое связное множество.

Определение 15.2.3: Непрерывно дифференцируемое взаимооднозначное отображение φ называется **диффеоморфизмом**.

Определение 15.2.4: Пусть
- Ω – дифференциальная p-форма в области $U \subset \mathbb{R}^n$
- $\varphi : V \to U$ – диффеоморфизм области $V \subset \mathbb{R}^n$ на U

Тогда $\varphi^* \Omega$ – дифференциальная p-форма в области V, определяемая как
$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n : \ (\varphi^* \Omega)(y)(\boldsymbol{b}) := \Omega(\varphi(y))\big(\varphi'(y)b_1, ..., \varphi'(y)b_p\big)$$

Утверждение 15.2.1 (Правило подсчёта): Мы можем выразить форму после замены координат через упомянутое выше базисное представление:
$$(\varphi^* \Omega)(y) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_p \le n} \omega_{i_1, ..., i_p}(\varphi(y))\, \mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

Доказательство: Заметим, что для произвольного вектора $b \in \mathbb{R}^n$ верно
$$\mathrm{d}\varphi^i(y)(b) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(y)\, \mathrm{d}f^l(b) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(y) b^l = (\varphi'(y)b)^i = \mathrm{d}f^i(\varphi'(y)b)$$

Не забывайте, что в качестве $\mathrm{d}f^i$ мы берём проекцию на i-ую координату.

Что и требовалось. □

Лемма 15.2.1 (Независимость внешнего дифференцирования от замены координат):
$$\varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}(\varphi^* \Omega)$$

Доказательство: БОО считаем, что Ω – это одночлен, для многочленов обобщается очевидно по линейности.

Зафиксируем $\Omega = \omega(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$

Тогда по свойствам внешнего дифференцирования:
$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\omega(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

Тогда по правилу подсчёта
$$\varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}\omega(\varphi(y)) \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

С другой стороны, по определению замены координат
$$\varphi^*(\Omega) = \omega(\varphi(y))\, \mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

Применим оба свойства внешнего дифференцирования (двойной дифференциал нулевой и псевдодистрибутивность):
$$\mathrm{d}(\varphi^* \Omega) = \mathrm{d}\omega(\varphi(y)) \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

□

16. Интегрирование дифференциальной формы с компактным носителем. Зависимость интеграла от замены координат.

Из Утверждение 15.1.3 Пространство Λ_n одномерно. Иными словами, если $(f^1, ..., f^n)$ – базис E^*, то
$$\{c f^1 \wedge ... \wedge f^n \mid c \in \mathbb{R}\} = \Lambda_n$$

Тогда если $(e_0^1, ..., e_0^n)$ – ортонормированный базис в E^* сопряжённый к $(e_1^0, ..., e_n^0)$ – ортонормированному базису в E^*.

Введём форму **ориентированного объёма**

$$V_{e^0} = e_0^1 \wedge ... \wedge e_0^n \overset{\text{соглашение}}{=} \mathrm{d}e_1^0 \wedge ... \mathrm{d}e_n^0$$

Возьмём произвольный базис $(e_1^0, ..., e_n^*)$ в E, связанный с исходным матрицей перехода T:

$$\forall j: \ e_j = t_j^i e_i^0$$

Рассмотрим действие:

$$V_{e_0}(e_1, ..., e_n) = \mathrm{d}e_1^0 \wedge ... \mathrm{d}e_n^0(e_1, ..., e_n) = \det\left(\mathrm{d}e_i^0(e_j)\right)_{i,j=1}^n = \det T$$

Причём $\forall$ базиса форма ориентированного объёма на нём самом равна 1:

$$V_{e_0} = \det T \cdot V_e$$

В начале определим интеграл от форм из Λ_n.

Определение 16.1: **Интегралом от формы** $\Omega(x) = \alpha(x) V_{e_0}$ по области $D \subset E$ называется

$$\int_D \Omega = \int_D \alpha(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Определение 16.2: **Стандартным кубом** K называется

$$x_0 \in K \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, \mathrm{n}}: \ 0 < x_0^i < 1$$

в ортономированном базизе $e_1^0, ..., e_n^0$.

Определение 16.3: **Цепь стандартных кубов** – это формальная линейная комбинация

$$\Pi = \sum_{i=1}^m n_i K_i; \quad n_i \in \mathbb{Z}, K_i - \text{стандартный куб}$$

Определение 16.4: **Интегралом от формы** $\Omega(x) = \alpha(x) V_{e_0}$ по цепи кубов Π называется

$$\int_\Pi \Omega = \sum_{i=1}^m n_i \int_{K_i} \Omega$$

Определение 16.5: **Граница стандартного куба** – цепь стандартных $(n-1)$-мерных кубов с коэффицентами ± 1, в зависимости от направления внешней нормали.

Теорема 16.1 (Формула Стокса-Пуанкаре для стандартного куба): Если Ω – гладкая $n-1$ форма, заданная на замыкании куба $K \subset \mathbb{R}$, то

$$\int_{\partial K} \Omega = \int_K \mathrm{d}\Omega$$

Доказательство: Пусть V_j – форма ориентированного объёма в $n-1$-мерном подпространстве n-мерного пространства, в которой отсутствует $\mathrm{d}e_j^0$.

Тогда БОО
$$\Omega(x) = \alpha(x)V_j$$
Значит её дифференциал
$$\mathrm{d}\Omega(x) = \mathrm{d}\alpha(x) \wedge V_j = \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}e_j^0 \wedge V_j = (-1)^{j-1}\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_j}V_{e_0}$$
Тогда распишем интеграл, к которому хотим свести:
$$\int_K \mathrm{d}\Omega = (-1)^{j-1}\int_K \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{Фубини } x=(y,x_j)}{=} (-1)^{j-1}\int_{K_j}\int_{[0,1]} \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}e_j^0\,\mathrm{d}\mu_{n-1}(y) =$$
$$(-1)^{j-1}\int_{K_j}(\alpha(y,1)-\alpha(y,0))\,\mathrm{d}\mu_{n-1}(y)$$

С другой стороны, от изначального интеграла по границе останутся лишь те слагаемые линейной кобинации, в которых также нет $\mathrm{d}e_j^0$, так как в остальных какая-то координата, участвующая в V_j фиксирована, а значит интеграл будет нулевым:
$$\int_{\partial K}\Omega = \int_{(-1)^{j+1}K_{j,1}+(-1)^j K_{j,0}} \alpha(x)V_j =$$
$$(-1)^{j+1}\int_{(-1)^{j+1}K_{j,1}} \alpha(x)V_{j,1} + (-1)^j\int_{(-1)^j K_{j,0}} \alpha(x)V_{j,0} =$$
$$(-1)^{j-1}\int_{K_j}(\alpha(y,1)-\alpha(y,0))\,\mathrm{d}\mu_{n-1}(y)$$

□

Определение 16.6: **Клеткой** называется диффеоморфный образ куба

Определение 16.7: Для формы Ω и диффеоморфизма $\varphi : U \to V$, $M \subset U$ – клетки, $K \subset V$ – куба:
$$\int_M \Omega = \int_K \varphi^*\Omega$$

17. Общая формула Стокса

Определение 17.1: **Границей клетки** $M = \varphi(K)$ называется
$$\partial M \coloneqq \varphi(\partial K)$$

Теорема 17.1 (Теорема Стокса для клетки): Если Ω – гладкая $m-1$ форма, заданная в окрестности m-мерной клетки, то
$$\int_{\partial M}\Omega = \int_M \mathrm{d}\Omega$$

Доказательство: Используя Теорему Стокса для куба (aka определение интеграла по формам меньших размерностей) и свойство инвариантности внешнего дифференцирования от замены координат:
$$\int_{\partial M}\Omega = \int_{\partial K}\varphi^*\Omega = \int_K \mathrm{d}(\varphi^*\Omega) = \int_K \varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \int_M \mathrm{d}\Omega$$
□

18. Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

В доказательствах некоторых теорем этого и следующего билетов используется интересный трюк: если у нас есть цепочка равенств $a = b$, то мы с лёгкостью сможем продолжить её, написав $a = b = \frac{a+b}{2}$. Если вы понимаете, что в доказательстве теоремы с интегралами происходит какая-то дичь, то вспоминайте этот трюк!

Определение 18.1:
$$L_{2\pi} \coloneqq \{f \in L_1[-\pi, \pi] \mid f - 2\pi \text{ периодическая}\}$$

Определение 18.2: **Ядром Дирихле** $D_n(u)$ называется выражение
$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

Определение 18.3: Пусть $f \in L_{2\pi}$, тогда **частичной суммой тригонометрического ряда Фурье** называется
$$S_n(f, x) \coloneqq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$
где
$$a_k \coloneqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, \mathrm{d}\mu(t); \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

Лемма 18.1 (О представлении частичной суммы): Если $f \in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье может быть представлена
$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) \, \mathrm{d}\mu(u)$$

Теорема 18.1 (Теорема Римана об осцилляции): Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то
$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) \, \mathrm{d}\mu(x) = 0$$

Теорема 18.2 (Признак Дини): Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta), \delta > 0$, где
$$\varphi_{x_0}(t) \coloneqq \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t}$$
то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$

Доказательство: Рассмотрим разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как
$$S_n(f, x_0) - S(x_0) \overset{\text{трюк}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0)) D_n(u) \, \mathrm{d}\mu(u)$$

В данном переходе мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится.

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв в формуле ядра Дирихле

$$\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right) = \sin(nt)\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) + \cos(nt)\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

А также добавим и вычтем интеграл

$$\tfrac{1}{\pi}\int_0^\delta \tfrac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t}\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

Итак, приступим

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) =$$

$$\tfrac{1}{\pi}\int_0^\delta \tfrac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t}\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) +$$

$$\tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\tfrac{\cos(nt)}{2}\,\mathrm{d}\mu(t) +$$

$$\tfrac{1}{\pi}\int_\delta^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\tfrac{\sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}\mu(t) +$$

$$\tfrac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\sin(nt)\left(\tfrac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \tfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}\mu(t)$$

По условию φ_{x_0} сумирумая, значит по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)$ суммируема как сумма суммируемых и константы, значит по теореме Римана об осцилляции второе слагаемое стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \in L_1[\delta, \pi]$, так как мы отделились от нуля и по теореме Римана об осцилляции третье слагаемое стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\tfrac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \tfrac{1}{t} \overset{t\to 0}{\sim} \tfrac{1-\frac{t^2}{8}}{2\left(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}\right)}) - \tfrac{1}{t} = \tfrac{t-\frac{t^3}{8}-t+\frac{t^3}{24}}{t^2} = 0$$

Значит мы умножили суммируемую функцию $f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)$ на другую, имеющую устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\left(\tfrac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \tfrac{1}{t}\right) \in L_1[0, \delta]$$

И опять применяем теорему об осцилляции. □

Определение 18.4: Будем говорить, что функция f удовлетворяет **условию Гёльдера** порядка $\alpha \in (0, 1]$ в точке x_0, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C > 0, \delta > 0$ такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta: \ |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le Ct^\alpha \land |f(x_0-t) - f(x_0-0)| \le Ct^\alpha$$

Теорема 18.3 (Признак Липшица): Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Доказательство: По условию теоремы, хотим
$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$
Значит функция φ_{x_0} из признака Дини будет иметь вид
$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+(f(x_0-t)-f(x_0-0))}{t}$$
То что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла
$$\left|\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right| \leq \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\,\mathrm{d}\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}\,\mathrm{d}\mu(t) \leq$$
$$2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\mu(t) = 2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$
Значит мы можем применить признак Дини и всё доказано. □

19. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье

Утверждение 19.1: Анализ доказательства признака Дини (Теорема 18.2) показывает, что критерием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) = 0$$

Лемма 19.1: Пусть $f \in L_{2\pi}, g$ – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x.

Теорема 19.1 (Признак Жордана): Если $f \in L_{2\pi}$ и является функцией ограниченной вариации на $[a,b]$, то тригонометрический ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in (a,b)$ непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва $x_0 \in [a,b]$.

Если, кроме того, $f \in C[a,b]$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a',b'] \subset (a,b)$.

Доказательство: Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждения для неубывающих функций.

По (Утверждение 19.1) нам надо доказать лишь
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) = 0$$
Раскроем φ_{x_0} и $S(x_0)$ и будем доказывать лишь для
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) = 0$$
А для слагаемого с минусами аналогично.

По определению правостороннего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : \ 0 \le f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонна и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 : \ \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt)\,\mathrm{d}t =$$

$$(f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0)) \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ сходится, поэтому интеграл с переменным верхним пределом ограничен:

$$\exists C > 0 : \ \left|\int_0^u \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \le C$$

Но теперь рассмотрим:

$$\forall A > 0 : \ \left|\int_0^A \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \overset{nt=:u}{=} \left|\int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right| \le C$$

Используя эту оценку, получим, что

$$\left|\int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \le 2\varepsilon C$$

Таким образом, разобьём исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ.

Получим, что предел интеграла действительно равен нулю, применим признак Дини и получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости.

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых в доказательстве признака Дини (Теорема 18.2).

Применим к каждому из трёх последних слагаемых вспомогательную лемму (Лемма 19.1) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела первого слагаемого (который мы уже рассматривали в текущем доказательстве).

Это сделать несложно, заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы можем найти δ_1 из текущего доказательства независимо от x_0.

Также независимо от x_0 мы ограничиваем интеграл от $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утвеждение текущец теоремы доказано. □

20. Непревность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

20.1. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции

Определение 20.1.1: **Преобразование Фурье** функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется

$$F[f] := \hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}\mu(t)$$

Теорема 20.1.1 (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра): Пусть
- $A \subset \mathbb{R}^n; E \subset \mathbb{R}^m; \alpha_0 \in A$
- Функция $f(x, \alpha)$ сумируема при всех $\alpha \in A$, как функция от $x \in E$.
- Функция $f(x, \alpha)$ при почти всех $x \in E$ является непрерывной в α_0.
- При почти всех $x \in E$ и для всех $\alpha \in A$ справедлива оценка $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ некоторая суммируемая на E функция.

Тогда
$$F(\alpha) = \int_E f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu(x)$$
является непрерывной в α_0.

Теорема 20.1.2 (Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра): Пусть
- $E \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^n$
- $f(x, \alpha)$ вместе с $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ суммируема на E при всех $\alpha \in U(\alpha_0)$
- При всех $\alpha \in (\alpha_0)$: $\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq \varphi(x)$, где φ суммируема на E

Тогда
$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Теорема 20.1.3: Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\lim_{\lambda \to \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$

Доказательство: Распишем комплексную экспоненту в сумму тригонометрических функций и сведём к теореме об осцилляции, утверждение о нулевом пределе доказано.

Почему преобразование Фурье непрерывно? Хотим применить теорему о непрерывности интеграла, зависящего от предела. Для этого оценим подынтегральную функцию:
$$|f(t, \lambda)| = \left|f(t)e^{-i\lambda t}\right| \leq |f(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

От λ рассматриваемая функция непрерывна из-за непрерывности экспоненты. Суммируемость следует из той же оценки сверху.

Значит применяем теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра. □

20.2. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

Теорема 20.2.1 (Преобразование Фурье производной): Если $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$: $f \in L_1([a,b])$ и $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, то
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \hat{f}'(\lambda) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

Доказательство: Перепишем $f(x)$ через формулу Ньютона-Лейбница:
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \,\mathrm{d}\mu(t), x > 0$$

Устремляя $x \to +\infty$ увидим, что правая часть имеет предел, а значит и левая тоже:
$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x), f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(+\infty) = 0$$

Аналогично получим, что $f(-\infty) = 0$.

Тогда рассмотрим следующее преобразование Фурье:
$$\hat{f}'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i\lambda i} \,\mathrm{d}\mu(t) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\lambda t}\big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(e^{-i\lambda t}\right)'_t \,\mathrm{d}\mu(t) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

□

Теорема 20.2.2 (Производная преобразования Фурье): Если $f(t), tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ дифференцируемо, причём
$$\left(\hat{f}\right)'(\lambda) = -\widehat{itf(t)}(\lambda)$$

Доказательство: Нам нужно лишь доказать, что мы имеем право продифференцировать интеграл, зависящий от параметра:
$$\left(\hat{f}\right)'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(e^{-i\lambda t}\right)'_\lambda \,\mathrm{d}\mu(t) = -\widehat{itf(t)}(\lambda)$$

Для этого оценим выражение:
$$\left|f(t)\left(e^{-i\lambda t}\right)\right| = \left|-itf(t)e^{-i\lambda t}\right| \le |tf(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

Значит мы имеем право применить теорему о дифференцировании интеграла с параметром. □

21. Прямые и плоскости в пространстве. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве. Углы между прямыми и плоскостями.

21.1. Прямые и плоскости в пространстве

Определение 21.1.1: **Линейной комбинацией** элементов $v_1, ..., v_n$ (для которых определены сложение и умножение на числа) с коэффициентами $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ называется следующая величина:
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

Определение 21.1.2: **Направленным отрезком** называется отрезок, концы которого упорядочены.

Обозначение $\overline{AB}$.

Направленные отрезки называются равными, если они сонаправлены и равны.

Определение 21.1.3: **Вектором** называется ~~элемент векторного пространства~~ класс эквивалентности направленных отрезков.

Формульно, если $\overline{AB}$ – представитель класса $\boldsymbol{v}$, то $\overline{AB} \in \boldsymbol{v}$, но в дальнейшем это будет обозначаться как $\overline{AB} = \boldsymbol{v}$.

Определение 21.1.4: Ниже перечислены обозначения множеств векторов и точек:

- V_0 – нулевое пространство, состоящее только из нулевого вектора $\mathbf{0}$
- V_1, P_1 – множества всех векторов и всех точек **на прямой**
- V_2, P_2 – множества всех векторов и всех точек **на плоскости**
- V_3, P_3 – множества всех векторов и всех точек **в пространстве**

Определение 21.1.5: Система $(\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_2})$ векторов из V_n называется **линейно независимой**, если для любых $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ выполнено следующее условие:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v_i} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$$

Определение 21.1.6: Система $(\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n})$ векторов из V_n называется **линейно зависимой**, если существует её нетривиальная линейная комбинация, равная $\mathbf{0}$.

Определение 21.1.7: **Базисом** в V_n называется линейно независимая система векторов, через которую выражаются все векторы V_n.

Определение 21.1.8: Пусть e – базис в $V_n, \boldsymbol{v} = \alpha e \in V_n$. Столбец коэффициентов α называется **координатным столбцом** вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе e.

Обозначение $\boldsymbol{v} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$.

Определение 21.1.9: **Скалярным произведением** ненулевых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n$ называется следующая величина:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$$

Определение 21.1.10: Векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n$ называются **перпендикулярными (ортогональными)**, если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$.

Обозначение $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

Определение 21.1.11: Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, от точки $O \in P_n$ отложны направленные отрезки $\overline{OA} = \boldsymbol{a}; \overline{OB} = \boldsymbol{b}$.

Проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется такой класс эквивалентности, представителем которого является вектор $\overline{OA'}$, где A' – ортогональная проекция точки A на прямую OB.

Обозначение $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$

Утверждение 21.1.1: Для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_n, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ выполнено следующее равенство:

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \boldsymbol{b}$$

Определение 21.1.12: Базис в V_n называется:
- **Ортогональным**, если его векторы попарно ортогональны
- **Ортонормированным**, если он ортогонален и все его векторы имеют длину 1.

Определение 21.1.13: **Декартовой системой координат** в P_n называется набор (O, e), где $O \in P_n$ – начало системы координат, e – базис в V_n.

Точка $A \in P_n$ имеет координатный столбец α в данной системе координат, если $\overline{OA} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$.

Обозначение $A \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \alpha$.

Декартова система координат называется прямоугольной, если базис e – ортонормированный.

Определение 21.1.14: **Направляющим вектором** прямой $l \subset P_3$ называется вектор $\boldsymbol{a} \in V_3, \boldsymbol{a} \neq 0$, представителем которого является направленный отрезок, лежащий в l.

Определение 21.1.15: Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_3$.

Векторным произведением векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ называется единственный вектор $\boldsymbol{c} := [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ такой, что выполнены следующие условия:
1. $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$
2. $|c| = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, где $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ – площадь паралелограма, натянутого на вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$
3. $$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} > 0$$

Альтернативное обозначание $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

Определение 21.1.16: Пусть $l \subset P_3$ – прямая, с направляющим вектором $\boldsymbol{a} \in V_3, M \in l$ и в декартовой системе координат (O, e) в P_3 выполнены соотношения $\boldsymbol{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$, $M \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r_0} := \overline{OM}$. Тогда

- **Векторно-параметрическим** уравнением прямой называется следующее семейство уравнений:
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a}, t \in \mathbb{R}$$
- **Параметрическим** уравнением прямой называется следующее семейство систем:
$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha_1 \\ y = y_0 + t\alpha_2 \\ z = z_0 + t\alpha_3 \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$
- **Каноническим** уравнением прямой называется следующая система уравнений:
$$\frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3}$$

Определение 21.1.17: Пусть $l \subset P_3$ – прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, и пусть $M \in l, \boldsymbol{r_0} := \overline{OM}$. **Векторным** уравнением прямой называется следующее уравнение:
$$[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$$

Определение 21.1.18: Пусть $\nu \subset P_3$ – плоскость, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V_3$ – не сонаправленные векторы, представители которых лежат в ν, $M \in l$ и в декартовой системе координат (O, e) в P_3 выполнены соотношения $\boldsymbol{a} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha, \boldsymbol{b} \underset{e}{\leftrightarrow} \beta, M \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{r_0} \coloneqq \overline{OM}$. Тогда

- **Векторно-параметрическим** уравнением плоскости называется следующее семейство уравнений:
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}; \quad t, s \in \mathbb{R}$$
- **Параметрическим** уравнением плоскости называется следующее семейство систем:
$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha_1 + s\beta_1 \\ y = y_0 + t\alpha_2 + s\beta_2 \\ z = z_0 + t\alpha_3 + s\beta_3 \end{cases}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Определение 21.1.19: Пусть $A, B, C, D \in \mathbb{R}; A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. **Общим** уравнением плоскости называется следующее уравнение:
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Определение 21.1.20: **Вектором нормали плоскости** $\nu \subset P_3$ называется вектор $\boldsymbol{n} \in V_3, \boldsymbol{n} \neq 0$, представителем которого является направленный отрезок, ортогональный каждой прямой из плоскости ν.

Определение 21.1.21: Пусть $\nu \subset P_3$ – плоскость с вектором нормали $\boldsymbol{n} \in V_3$ и пусть $M \in \nu, \boldsymbol{r_0} \coloneqq \overline{OM}$.

Нормальным уравнением плоскости называется следующее уравнение:
$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n}) = 0$$

21.2. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве

Утверждение 21.2.1 (Расстояние от точки до прямой): Пусть прямая $l \subset P_3$ задана векторно-параметрическим уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{a}t, A \in P_3, \boldsymbol{r_A} \coloneqq \overline{OA}$.

Тогда расстояние ρ от точки A до прямой l равно следующей величине:
$$\rho = \frac{|[\boldsymbol{r_A} - \boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{a}]|}{|\boldsymbol{a}|}$$

Доказательство: Искомое расстояние ρ является длиной высоты параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r_A} - \boldsymbol{r_0}$, проведённой к стороне, образованной вектором $\boldsymbol{a}$ и имеющей длину $\boldsymbol{a}$, из чего и следует требуемое. □

Утверждение 21.2.2 (Расстояние от точки до плоскости): Пусть в прямоугольной декартовой системе координат (O, e) в P_3 плоскость ν задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0, M \in P_3, M \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

Тогда расстояние ρ от точки M до плоскости ν равно следующей величине:

$$\rho = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Доказательство: Пусть $\boldsymbol{n} \in V_3, \boldsymbol{n} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ – вектор нормали плоскости $\nu, \boldsymbol{r_0} := \overline{OM}$, и пусть $X \in \nu, \boldsymbol{r} := \overline{OX}$. Тогда

$$\rho = |\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r})| = \left|\frac{(\boldsymbol{r_0}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n}\right| = \frac{|(\boldsymbol{r_0}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

□

Утверждение 21.2.3 (Расстояние между прямыми в плоскости): Пусть скрещивающиеся прямые $l_1, l_2 \subset P_3$ заданы уравнениями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{a_1}t, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} + \boldsymbol{a_2}t$.

Тогда расстояние ρ между ними равно следующей величине:

$$\rho = \frac{|([\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}],\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2})|}{|[\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}]|}$$

Доказательство: Искомое расстояние ρ является длиной высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}$, проведённой к грани, образованной векторами $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ и имеющей площадь $|\boldsymbol{a_1}||\boldsymbol{a_2}|\sin\angle(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$, из чего и следует требуемое. □

21.3. Углы между прямыми и плоскостями

Утверждение 21.3.1 (Углы между прямыми): Пусть прямые $l_1, l_2 \subset P_3$ имеют направляющие вектора $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$.

Тогда угол φ между ними удовлетворяет следующему равенству:

$$\cos\varphi = \frac{|(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2})|}{|\boldsymbol{a_1}||\boldsymbol{a_2}|}$$

Доказательство: Углом между прямыми по определению является угол φ равный меньшему из углов α и $\pi - \alpha$, где α – угол между их направляющими векторами, поэтому в числителе именно модуль скалярного произведения.

Дальнейшие рассуждения очевидны из определения скалярного произведения. □

Утверждение 21.3.2 (Углы между плоскостями): Пусть в прямоугольной декартовой системе координат (O, e) в P_3 плоскости ν_1, ν_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Тогда угол φ между ними удовлетворяет равнеству:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Доказательство: Пусть $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2} \in V_3; \boldsymbol{n_1} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{n_2} \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$ – нормальные векторы плоскостей $\nu_1, \nu_2, \alpha := \angle(\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2})$.

Тогда угол φ равен меньшему из углов α и $\pi - \alpha$. В каждом из случае выполнено следующее:

$$\cos\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|(\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2})|}{|n_1||n_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1c_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

□

22. Кривые второго порядка, их геометрические свойства

Определение 22.1: Пусть $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Кривой второго порядка называется алгебраическая кривая, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в P_2 задаётся следующим уравнением:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

22.1. Эллипс

Определение 22.1.1: **Эллипсом** называется кривая второго порядка, которая в канонической системе координат (O, e) задаётся следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$$

- **Вершинами** эллипса называются точки с координатами $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$ в системе (O, e). Число $|a|$ называется **длиной большой полуоси** эллипса, число $|b|$ – **длиной малой полуоси** эллипса.
- **Фокусным расстоянием** эллипса называется величина $c := \sqrt{a^2 - b^2}$. **Фокусами** эллипса называются точки $F_1, F_2 \in P_2$ такие, что $F_1 \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}; F_2 \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Эксцентриситетом** эллипса называется величина $\varepsilon := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
- **Директрисами** эллипса называются прямые d_1, d_2, задаваемые в системе (O, e) уравнениями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

Теорема 22.1.1: Пусть эллипс задан в каноническая системе координат (O, ε); $A \in P_2; A \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \binom{x}{y}$. Тогда

$$A \text{ лежит на эллипсе} \Leftrightarrow AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow AF_2 = |a + \varepsilon x|$$

Доказательство: Будем доказывать первую эквивалентность, вторая аналогично. Для этого заметим, что выполнены следующие равенства:

$$AF_1^2 - |a - \varepsilon x|^2 = (x - c)^2 + y^2 - |a - \varepsilon x|^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

Значит, $AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow A$ лежит на эллипсе. □

Теорема 22.1.2: Пусть эллипс задан в канонической системе координат (O, e). Тогда он является геометрическим местом точек $A \in P_2; A \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \binom{x}{y}$, таких, что выполнены следующие равенства:

$$\frac{AF_1}{\rho(A, d_1)} = \frac{AF_2}{\rho(A, d_2)} = \varepsilon$$

Доказательство: Докажем равенство эксцентриситету лишь первого отношения, для второого аналогично.

Заметим, что выполнены следующие равенства:

$$\rho(A, d_1) = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{\varepsilon}|a - \varepsilon x|$$

Значит, A лежит на эллипсе $\Leftrightarrow |a - \varepsilon x| = AF_1 \Leftrightarrow \varepsilon\rho(A, d_1) = AF_1$ □

Теорема 22.1.3: Пусть эллипс задан в канонической системе координат (O, e). Тогда он является геометрическим местом точек $A \in P_2; A \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \binom{x}{y}$, таких, что выполнено равенство

$$|AF_1| + |AF_2| = 2a$$

Доказательство: $\Rightarrow$ Пусть A лежит на эллипсе, тогда

$$AF_1 = a - \varepsilon x; AF_2 = a + \varepsilon x \Rightarrow AF_1 + AF_2 = 2a$$

$\Leftarrow$ Зафиксируем произвольное число $x_0 \in \mathbb{R}$ и заметим, что при движении точки $X \in P_2; X \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \binom{x_0}{0}$ вдоль прямой $x = x_0$ вверх или вниз величина $XF_1 + XF_2$ строго возрастает. Рассмотрим возможные случаи:

1. Если $|x_0| < a$, то таких точек, что $XF_1 + XF_2 = 2a$, на прямой $x = x_0$ две.
2. Если $|x_0| = a$, то такая точка, что $XF_1 + XF_2 = 2a$, на прямой $x = x_0$ одна.
3. Если $|x_0| > 0$, то таких точек, что $XF_1 + XF_2 = 2a$, на прямой $x = x_0$ нет.

Полученное число точек совпадает с множеством точек эллипса. □

22.2. Гипербола

Определение 22.2.1: **Гиперболой** называется кривая второго порядка, которая в канонической системе координат (O, e) задаётся следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a, b > 0$$

- **Вершинами** гиперболы называются точки с координатами $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$ в системе (O, e).

  Число $|a|$ называется **длиной действительной полуоси** гиперболы, число $|b|$ – **длиной мнимой полуоси** гиперболы.
- **Фокусным расстоянием** гиперболы называется величина $c := \sqrt{a^2 + b^2}$.

  Фокусами гиперболы называются точки $F_1, F_2 \in P_2$ такие, что $F_1 \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}; F_2 \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина $\varepsilon := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
- **Директрисами** гиперболы называются прямые d_1, d_2, задаваемые в системе (O, e) уравнениями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Теорема 22.2.1: Пусть гипербола задана в канонической системе координат (O, e); $A \in P_2$; $A \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \text{ лежит на гиперболе} \Leftrightarrow AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow AF_2 = |a + \varepsilon x|$$

Доказательство: Будем доказывать первую эквивалентность, вторая аналогично. Для этого заметим, что выполнены следующие равенства:

$$AF_1^2 - |a - \varepsilon x|^2 = (x - c)^2 + y^2 - |a - \varepsilon x|^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

Значит, $AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow A$ лежит на гиперболе. □

Теорема 22.2.2: Пусть гипербола задана в канонической системе координат (O, e). Тогда она является геометрическим местом точек $A \in P_2$; $A \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, таких, что выполнены следующие равенства:

$$\frac{AF_1}{\rho(A, d_1)} = \frac{AF_2}{\rho(A, d_2)} = \varepsilon$$

Доказательство: Докажем равенство эксцентриситету лишь первого отношения, для второоого аналогично.

Заметим, что выполнены следующие равенства:

$$\rho(A, d_1) = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{\varepsilon}|a - \varepsilon x|$$

Значит, A лежит на эллипсе $\Leftrightarrow |a - \varepsilon x| = AF_1 \Leftrightarrow \varepsilon\rho(A, d_1) = AF_1$ □

Теорема 22.2.3: Пусть гипербола задана в канонической системе координат (O, e). Тогда она является геометрическим местом точек $A \in P_2; A \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \binom{x}{y}$, таких, что выполнено равенство
$$|AF_1 - AF_2| = 2a$$

Доказательство: $\Rightarrow$ БОО пусть A лежит на правой ветви гиперболы. Тогда
$$AF_1 = \varepsilon x - a \wedge AF_2 = a + \varepsilon x \Rightarrow |AF_1 - AF_2| = 2a$$

$\Leftarrow$ Зафиксируем произвольное число $x_0 \in \mathbb{R}$ и заметим, что при движении точки $X \in P_2; X \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \binom{x_0}{0}$ вдоль прямой $x = x_0$ вверх или вниз величина $|XF_1 - XF_2|$ строго убывает. Рассмотрим возможные случаи:
1. Если $|x_0| < a$, то таких точек, что $|XF_1 - XF_2| = 2a$, на прямой $x = x_0$ нет.
2. Если $|x_0| = a$, то такая точка, что $|XF_1 - XF_2| = 2a$, на прямой $x = x_0$ одна.
3. Если $|x_0| > 0$, то таких точек, что $|XF_1 - XF_2| = 2a$, на прямой $x = x_0$ две.

Полученное число точек совпадает с множеством точек эллипса. □

22.3. Парабола

Определение 22.3.1: **Параболой** называется кривая второго порядка, которая в канонической системе координат (O, e) задаётся следующим уравнением:
$$y^2 = 2px; \quad p > 0$$
- **Вершиной** параболы называется точка с координатами $\binom{0}{0}$ в системе (O, e)
- **Фокусом** параболы называется точка F такая, что $F \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \binom{\frac{p}{2}}{0}$
- **Эксцентриситетом** параболы называется величина $\varepsilon := 1$
- **Директрисой** параболы называется прямая d, задаваемая в системе (O, e) уравнением $x = -\frac{p}{2}$

Теорема 22.3.1: Пусть парабола задана в канонической системе координат $(O, e); A \in P_2; A \underset{(O,e)}{\leftrightarrow} \binom{x}{y}$. Тогда
$$A \text{ лежит на параболе} \Leftrightarrow AF = \rho(A, d)$$

Доказательство: Заметим, что выполнены следующие равенства:
$$AF^2 - \rho^2(A, d) = \left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2 = y^2 - 2px$$
Значит $AF = \rho(A, d) = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Leftrightarrow y^2 = 2px \Leftrightarrow A$ лежит на параболе □

23. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

23.1. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений

Определение 23.1.1: **Группой** называется множество G с определённой на нём бинарной операцией умножения $\cdot : G \times G \to G$, удовлетворяющей следующим условиям:

- (Ассоциативность)
  $$\forall a, b, c \in G : \ (ab)c = a(bc)$$
- (Существование нейтрального элемента)
  $$\exists e \in G : \forall a \in G : \ ae = ea = a$$
- (Существование нейтрального элемента)
  $$\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : \ aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

Определение 23.1.2: Группа $(G, \cdot)$ называется **абелевой**, если умножение в ней коммутативно, то есть
$$\forall a, b \in G : \ ab = ba$$

Определение 23.1.3: **Кольцом** называется множество R с определёнными на нём бинарными операциями сложения $+ : R \times R \to R$ и умножения $\cdot : R \times R \to R$, удовлетворяющая следующим условиям:

- $(R, +)$ – абелева группа, нейтральный элемент в которой обозначается через 0.
- (Ассоциативность умножения)
  $$\forall a, b, c \in R : \ (ab)c = a(bc)$$
- (Дистрибутивность умножения относительно сложения)
  $$\forall a, b, c \in R : \ a(b + c) = ab + ac \land (a + b)c = ac + bc$$
- (Существование нейтрального элемента относительно умножения)
  $$\exists 1 \in R : \forall a \in R : \ a1 = 1a = a$$

Определение 23.1.4: Кольцо $(R, +)$ называется **коммутативным**, если умножение в нём коммутативно, то есть
$$\forall a, b \in R : \ ab = ba$$

Определение 23.1.5: Пусть $(R, +, \cdot)$ – кольцо.

Элемент $a \in R$ называется **обратимым**, если
$$\exists a^{-1} \in R : \ aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

Группой обратимых элементов кольца $(R, +, \cdot)$ называется множество R^* его обратимых элементов.

Определение 23.1.6: **Полем** называется такое коммутативное кольцо $(\mathbb{F}, +, \cdot)$, для которого выполнено равенство $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Определение 23.1.7: **Линейным пространством**, или **векторным пространством** над полем $\mathbb{F}$ называется абелева группа $(V, +)$, на которой определено умножение на элементы поля $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} : \forall v \in V : \ (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- $\forall \alpha \in \mathbb{F} : \forall u, v \in V : \ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} : \forall v \in V : \ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
- $\forall v \in V : \ 1v = v$

Элементы поля $\mathbb{F}$ называются **скалярами**, элементы группы V – **векторами**.

Определение 23.1.8: Пусть $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{k \times n}(\mathbb{F}); b = (b_i) \in \mathbb{F}^n$.

Системой линейных уравнений $Ax = b$ называется следующая система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Матрица A называется **матрицей системы**, матрица $(A \mid b)$ – **расширенной матрицей системы**

Определение 23.1.9: Система линейных уравнений $Ax = b$ называется:

- **Однородной**, если $b = 0$
- **Совместной**, если множество её решений непусто

Определение 23.1.10: **Фундаментальной системой решений** однородной системы $Ax = 0$ называется базис пространства её решений.

Матрица, образованная столбцами фундаментальной системы решений, называется **фундаментальной матрицей системы** и обозначается через Φ.

Утверждение 23.1.1: Множество решений однородной системы $Ax = 0$ является линейным пространством.

Доказательство: Все требования линейного пространства очевидны. □

Утверждение 23.1.2: Пусть $Ax = b$ – совместная система, $x_0 \in \mathbb{F}^n$ – решение системы, V – пространство решений однородной системы $Ax = 0$.

Тогда множество решений системы $Ax = b$ имеет вид

$$x_0 + V = \{x_0 + v \mid v \in V\}$$

Доказательство: Пусть U – множество решений системы $Ax = b$.
- Если $v \in V$, то $A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b \Rightarrow x_0 + v \in U$.
- Если $u \in U$, то $A(u - x_0) = 0 \Rightarrow u - x_0 \in V$

Таким образом, $U = x_0 + V$ □

23.2. Теорема Кронекера-Капелли

Определение 23.2.1: Системы $Ax = b$ и $A'x = b'$ называются **эквивалентными**, если множества их решений совпадают.

Определение 23.2.2: **Элементарными преобразованиями** строк матрицы $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ называются следующие операции:
- Прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на скаляр $\alpha \in \mathbb{F}$; $\quad i, j \in \overline{1,\mathrm{n}}; i \neq j$
- Умножение i-й строки на скаляр $\lambda \in \mathbb{F}^*; i = \overline{1,\ \mathrm{n}}$
- Перестановка i-й и j-й строк местами; $i, j \in \overline{1,\ \mathrm{n}}; i \neq j$

Определение 23.2.3: **Элементарными матрицами** порядка $n \in \mathbb{N}$ называются матрицы, умножение слева на которые приводит к осуществлению соответствующего элементарного преобразования строк над матрицей с n строками:
- $D_{ij}(\alpha) := E + \alpha E_{i,j}; \quad i, j \in \overline{1,\mathrm{n}}; i \neq j$
- $T_{i(\lambda)} := E + (\lambda - 1)E_{ii}; \quad i \in \overline{1,\mathrm{n}}$
- $P_{ij} := E - \left(E_{ii} + E_{jj}\right) + \left(E_{ij} + E_{ji}\right)$

Определение 23.2.4: Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется **обратимой**, если существует матрица $A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Утверждение 23.2.1: Элементарные матрицы любого порядка n обратимы

Доказательство: Предъявим обратные матрицы в явном виде:
- $\left(D_{ij}(\alpha)\right)^{-1} = D_{ji}(-\alpha)$
- $(T_i(\lambda))^{-1} = T_i(\lambda^{-1})$

- $\left(P_{ij}\right)^{-1} = P_{ij}$

□

Утверждение 23.2.2: Элементарные преобразования строк расширенной матрицы переводят её в эквивалентную.

Определение 23.2.5: **Главным элементом** строки называется её первый ненулевой элемент.

Определение 23.2.6: Матрица $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ имеет **ступенчатый вид**, если номера главных элементов её строк строго возрастают.

При этом если в матрице есть нулевые строки, то они расположены внизу матрицы.

Теорема 23.2.1 (Метод Гаусса): Любую матрицу $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду

Доказательство: Предъявим алгоритм:
1. Если $A = 0$, то она уже имеет ступенчатый вид, завершаем процедуру.
2. Пусть $j \in \overline{1,\ \mathrm{k}}$ – наименьший номер ненулевого столбца. Переставим строки так, чтобы a_{1j} стал ненулевым.
3. Для всех $i \in \overline{2,\ \mathrm{n}}$ к i-й строке прибавим первую, умноженную на $-a_{ij}\left(a_{1j}\right)^{-1}$. Тогда все элементы $a_{2j}, ..., a_{nj}$ станут нулевыми
4. Пусть матрица была приведена к виду A'. Если она ступенчатая, то останавливаемся. Если она не ступенчатая, то начинаем заново для подматрицы B расположенной на пересечении строк с номерами $\overline{2{,}\mathrm{n}}$ и столбцом с номерами $\left(\overline{\mathrm{j}{+}1{,}\mathrm{k}}\right)$. Дальнейшие преобразования не изменят элементов за пределами этой подматрицы.

□

Определение 23.2.7: Пусть V – конечномерное линейное пространство, $X \subset V$.

Рангом системы X называется наибольший размер линейно независимой подсистемы в X.

Обозначение – $\mathrm{rk}\ X$.

Определение 23.2.8: Пусть $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$
- **Строчным рангом** матрицы A называется ранг $\mathrm{rk}_r A$ системы её строк.
- **Столбцовым рангом** матрицы A называется ранг $\mathrm{rk}_c A$ системы её столбцов.

Теорема 23.2.2: Для любой матрицы $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ выполнено следующее равенство:

$$\mathrm{rk}_r A = \mathrm{rk}_c A$$

Определение 23.2.9: **Рангом матрицы** $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ называется её строчный или столбцовый ранг.

Обозначение – $\mathrm{rk}\ A$.

Утверждение 23.2.3: Пусть $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F}); B \in M_{k\times M}(\mathbb{F})$, причём столбцы матрицы A линейно независимы. Тогда

$$\mathrm{rk}\ AB = \mathrm{rk}\ B$$

Замечание 23.2.1: В том числе, элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Утверждение 23.2.4: Ранг ступенчатой матрицы $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ равен числу ступеней.

Теорема 23.2.3 (Кронекера-Капелли):

$$\text{Система } Ax = b \text{ совместна} \Leftrightarrow \mathrm{rk}\ A = \mathrm{rk}\ (A \mid b)$$

Доказательство: Приведём расширенную матрицу системы $(A \mid b)$ к упрощённому виду $(A' \mid b')$.

Тогда система совместна $\Leftrightarrow$ в $(A' \mid b')$ нет ступеньки, начинающейся в столбце b' $\Leftrightarrow$ у A' и $(A' \mid b')$ одно и то же число ступенек $\Leftrightarrow \mathrm{rk}\ A = \mathrm{rk}\ (A \mid b)$.
□

24. Линейное пространство, базис и размерность. Линейное отображение конечномерных пространств, его матрица.

24.1. Линейное пространство, базис и размерность

Определение 24.1.1: Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{F}$; $\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_k} \in V$.

Линейной оболочкой векторов $\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_k}$ называется множество линейных комбинаций этих векторов:

$$\langle \boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_k} \rangle \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{b_i} \mid \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$$

Определение 24.1.2: Линейное пространство V называется **конечнопорождённым**, если существуют векторы $\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n} \in V$ такие, что

$$\langle \boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n} \rangle = V$$

Определение 24.1.3: Пусть V – конечнопорождённое линейное пространство.

Его **размерностью** называется количество векторов в любом его базисе. Обозначение – $\dim V$.

24.2. Линейное отображение конечномерных пространств, его матрица

Определение 24.2.1: Пусть U, V – линейные пространства над полем $\mathbb{F}$.

Линейным отображением, или **линейным оператором** называется отображение $\varphi : U \to V$, обладающее свойством линейности:
- $\forall \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \in U :\ \varphi(\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}) = \varphi(\boldsymbol{u_1}) + \varphi(\boldsymbol{u_2})$
- $\forall \alpha \in \mathbb{F} : \forall \boldsymbol{u} \in U :\ \varphi(\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha \varphi(\boldsymbol{u})$

Определение 24.2.2: Пусть $\varphi : U \to V$ – линейное отображение
- **Образом** отображения φ называется $\operatorname{Im} \varphi \coloneqq \varphi(U)$
- **Ядром** отображения φ называется $\operatorname{Ker} \varphi \coloneqq \{ \boldsymbol{u} \in U \mid \varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \}$

Утверждение 24.2.1: Пусть $\varphi : U \to V$ – линейное отображение, $e = (\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_k})$ – базис в пространстве U. Тогда

$$\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(\boldsymbol{e_1}), ..., \varphi(\boldsymbol{e_k}) \rangle$$

Доказательство: $\subset$ Любой вектор $\boldsymbol{u} \in U$ представляется в виде линейной комбинации базисных векторов, поэтому по линейности $\varphi(\boldsymbol{u}) \in \langle \varphi(\boldsymbol{e_1}), ..., \varphi(\boldsymbol{e_k}) \rangle$

$\supset$ Все векторы $\varphi(\boldsymbol{e_1}), ..., \varphi(\boldsymbol{e_k})$ лежат в $\mathrm{Im}\ \varphi$ и $\mathrm{Im}\ \varphi$ – линейное пространство, поэтому $\langle \varphi(e) \rangle \subset \mathrm{Im}\ \varphi$ □

Определение 24.2.3: Пусть $\varphi : U \to V$ – линейное отображение.

Тогда оно называется **инъективным**, если

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}\ \varphi : \exists! \boldsymbol{u} \in U : \ \varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$$

Утверждение 24.2.2: Пусть $\varphi : U \to V$ – линейное отображение. Тогда

$$\varphi \text{ инъективно} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ \varphi = \{\boldsymbol{0}\}$$

Доказательство: $\Rightarrow$ Если φ инъективно, то существует единственный вектор $\boldsymbol{0} \in U$, для которого $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.

$\Leftarrow$ От противного. Пусть для некоторых $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \in U$ выполнено $\varphi(\boldsymbol{u_1}) = \varphi(\boldsymbol{u_2})$, тогда $\varphi(\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}) = \boldsymbol{0}$, откуда $\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{u_2}$ □

25. Собственные значения и собственные векторы линейных преобразованийю Диагонализуемость линейных преобразований.

Определение 25.1: Линейное отображение $\varphi : V \to V$ называется **линейным преобразованием**.

Множество всех линейных преобразований на V обозначается как $\mathcal{L}(V)$.

Определение 25.2: Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.

Вектор $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ называется **собственным вектором** оператора φ с собственным значением $\lambda \in \mathbb{F}$, если $\varphi(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{v}$.

Скаляр $\mu \in \mathbb{F}$ называется **собственным значением** оператора φ, если существует собственный вектор с собственным значением μ.

Определение 25.3: **Подпространством** линейного пространства V над полем $\mathbb{F}$ называется такое его непустое подмножество $U \subset V$, что выполнены следующие условия:
- $(U, +)$ – подгруппа в $(V, +)$
- $\forall \alpha \in F : \forall \boldsymbol{u} \in U : \ \alpha \boldsymbol{u} \in U$

Обозначение $U \leq V$.

Определение 25.4: Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V); \lambda \in \mathbb{F}$ – собственное значение оператора φ.

Подпространство $V_\lambda \coloneqq \operatorname{Ker}\, (\varphi - \lambda) \le V$ называется **собственным подпространством** оператора φ, соответствующим собственному значению λ.

Определение 25.5: Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Характеристическим многочленом матрицы A называется многочлен $\chi_A(\lambda) \coloneqq \det(A - \lambda E)$

Определение 25.6: Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ называются **подобными**, если

$$\exists S \in M_n(\mathbb{F}), S \text{ обратимая}: \ A = SBS^{-1}$$

Определение 25.7: Оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется **диагонализуемым**, если существует базис в V, в котором матрица φ имеет диагональный вид.

Матрица $A \in M_n(F)$ называется **диагонализуемой**, если она подобна некоторой диагональной.

Определение 25.8: Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V), \lambda_0 \in \mathbb{F}$ – собственное значение оператора φ.

Алгебраической кратностью собственного значения λ_0 называется кратность корня λ_0 в $\chi_\varphi(\lambda)$.

Геометрической кратностью – величина $\dim V_{\lambda_0}$

Определение 25.9: Пусть V – линейное пространство, $U_1, U_2 \le V$.

Суммой подпространств U_1, U_2 называется следующее множество:

$$U_1 + U_2 \coloneqq \{\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} \mid \boldsymbol{u_1} \in U_1, \boldsymbol{u_2} \in U_2\}$$

Аналогично определяется сумма k подпространств.

Определение 25.10: Пусть V – линейное пространство, $U_1, ..., U_k \le V$.

Сумма подпространств $U \coloneqq U_1 + ... + U_k$ называется **прямой**, если для любого вектора $\boldsymbol{u} \in U$ существует единственный набор векторов $\boldsymbol{u_1} \in U_1, ..., \boldsymbol{u_k} \in U_k$ такой, что $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + ...\boldsymbol{u_k}$.

Обозначение – $U = U_1 \oplus ... \oplus U_k$

Теорема 25.1: Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда равносильны следующие условия:
1. Оператор φ диагонализуем
2. Алгебраическая кратность каждого собственного значения оператора φ равна геометрической, и χ_φ раскладывается на линейные сомножители, то есть имеет следующий вид при некоторых $\lambda_1, ...\lambda_k \in \mathbb{F}; \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$ таких, что $\sum_{i=1}^k \alpha_i = n$:
$$\chi_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha)^{\alpha_i}$$
3. $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$, где $V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_k}$ – собственные подпространства оператора φ
4. В V есть базис, состоящий из собственных векторов оператора φ

Доказательство: $(1 \Rightarrow 2)$ Пусть в некотором базисе e в V матрица оператора φ имеет диагональный вид, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{F}$ – различные элементы на диагонали, $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}$ – количества их вхождений в матрицу.

Тогда $\chi_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$. Для любого $i \in \overline{1, \mathrm{k}}$ алгебраическая кратность значения λ_i равна α_i, при этом α_i базисных вектором из e являются собственными векторами со значениями λ_i, откуда $\dim V_{\lambda_i} \geq \alpha_i$, а обратное неравенство верно всегда.

$(2 \Rightarrow 3)$ Пусть $V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_j} \leq V$ – собственные подпространства оператора φ. Их сумма – прямая (т.к. базис) и по условию $\sum_{i=1}^k \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^k \alpha_i = n$, поэтому $V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k} = V$

$(3 \Rightarrow 4)$ Выберем базисы $e_1, ..., e_k$ в пространствах $V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_k}$. Тогда, так как сумма этих подпространств прямая, то объединение этих базисов даёт базис в V.

$(4 \Rightarrow 1)$ Если e – базис из собственных векторов, то именно в этом базисе матрица оператора φ имеет требуемый диагональный вид. □

26. Самосопряжённые преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов.

Определение 26.1: Пусть $\varphi: U \to V$ – линейное отображение, $e = (\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_k})$ – базис в U, $\mathcal{F} = (\boldsymbol{f_1}, ..., \boldsymbol{f_n})$ – базис в V.

Матрицей отображения φ в базисах e и $\mathcal{F}$ называется матрица $A \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$ такая, что
$$(\varphi(\boldsymbol{e_1}), ..., \varphi(\boldsymbol{e_k})) = \mathcal{F}A$$

Определение 26.2: **Билинейной формой** на V называется функция $b: V \times V \to \mathbb{F}$, линейная по обоим аргументам.

Множество всех билинейных форм на V обозначается через $\mathcal{B}(V)$.

Определение 26.3: **Матрицей формы** $b \in \mathcal{B}(V)$ в базисе $(\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_n}) =: e$ называется следующая матрица B:

$$B = \big(b(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j})\big)_{i,j=1}^{n}$$

Обозначение $b \underset{e}{\leftrightarrow} B$

Определение 26.4: Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$.

Форма b называется **симметрической**, если

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : \ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

Пространство симметрических форм на V обозначается через $\mathcal{B}^{+}(V)$

Определение 26.5: Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$.

Форма b называется **кососимметрической**, если выполнены следующие условия;

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} : \ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$
2. $\forall \boldsymbol{u} \in V : \ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$

Определение 26.6: **Квадратичной формой**, соответствующей форме $b \in \mathcal{B}(V)$, называется функция $h : V \to \mathbb{F}$ такая, что

$$\forall \boldsymbol{v} \in V : h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

Квадратичные формы на V образуют линейное пространство над $\mathbb{F}$, обозначаемое через $\mathcal{Q}(V)$

Определение 26.7: Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда h называется

- **Положительно определённой**, если $\forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} : \ h(\boldsymbol{v}) > 0$
- **Положительно полуопределённой**, если $\forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} : \ h(\boldsymbol{v}) \geq 0$
- **Отрицательно определённой**, если $\forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} : \ h(\boldsymbol{v}) < 0$
- **Отрицательно полуопределённой**, если $\forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} : \ h(\boldsymbol{v}) \leq 0$

Определение 26.8: **Полуторалинейной формой** на V называется функция $b : V \times V \to \mathbb{C}$ такая, что

1. b линейна по первому аргументу
2. b сопряжённо-линейна по второму аргументу

Полуторалинейные формы на V образуют линейное пространство над $\mathbb{F}$, обозначаемое через $\mathcal{S}(V)$.

Определение 26.9: **Матрицей формы** $b \in \mathcal{S}(V)$ в базисе $(\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_n}) =: e$ называется следующая матрица B:

$$B = \left(b(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j})\right)_{i,j=1}^n$$

Обозначение $b \underset{e}{\leftrightarrow} B$

Определение 26.10: Пусть $b \in \mathcal{S}(V)$.

Форма b называется **эрмитовой**, если

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : \ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$$

Матрица $B \in M_n(\mathbb{C})$ называется **эрмитовой**, если $B^T = \overline{B}$, или $B = B^*$, где $B^* := \overline{B^T}$ – **эрмитово сопряжённая** к B матрица.

Определение 26.11: **Евклидовым** пространством называется линейное пространство V над $\mathbb{R}$, на котором определена положительно определённая симметрическая билинейная форма $(\cdot, \cdot)$ – **скалярное произведение**

Определение 26.12: **Эрмитовым** пространством называется линейное пространство V над $\mathbb{C}$, на котором определена положительно определённая эрмитова форма $(\cdot, \cdot)$ – **эрмитово скалярное произведение**

Определение 26.13: Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.

Для всех $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ положим

$$f_\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := (\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}); \quad g_\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := (\boldsymbol{u}, \varphi(\boldsymbol{v}))$$

Определение 26.14: Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.

Оператором, **сопряжённым** к φ называется оператор $\varphi^* \in \mathcal{L}(V)$ такой, что $f_\varphi = g_{\varphi^*}$.

Определение 26.15: Оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется **самосопряжённым**, если $\varphi^* = \varphi$.

Утверждение 26.1: Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ – самосопряжённый. Тогда его характеристический многочлен χ_φ раскладывается на линейные сомножители над $\mathbb{R}$.

Доказательство: Пусть V – евклидово пространство с ортонормированным базисом e, тогда $\varphi_e \leftrightarrow A \in M_n(\mathbb{R}), A = A^T$.

Рассмотрим U – эрмитово пространство той же размерности с ортонормированным базисом $\mathcal{F}$ и оператор $\psi \in \mathcal{L}(U), \psi \underset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A$.

Если V изначально эрмитово, то ничего не делаем и сразу рассматриваем данный оператор.

Тогда ψ – тоже самосопряжённый, имеющий одинаковый характеристический многочлен с φ.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – корень χ_ψ. Тогда существует соотвествующий ему собственный вектор $\boldsymbol{u} \in U$, причём

$$\lambda\|\boldsymbol{u}\|^2 = (\psi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \psi(\boldsymbol{u})) = \overline{\lambda}\|u\|^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

□

Утверждение 26.2: Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ – самосопряжённый, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ – два различных собственных значения φ. Тогда $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$

Доказательство: Пусть $\boldsymbol{v_1} \in V_{\lambda_1}; \boldsymbol{v_2} \in V_{\lambda_2}$. Тогда

$$\lambda_1(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = (\varphi(\boldsymbol{v_1}), \boldsymbol{v_2}) = (\boldsymbol{v_1}, \varphi(\boldsymbol{v_2})) = \lambda_2(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) \Rightarrow (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = 0$$

□

27. Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

27.1. Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду.

Определение 27.1.1: Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$.

- Векторы $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ называются **ортогональными относительно** b, если $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$
- **Ортогональным дополнением** подпространства $U \leq V$ относительно b называется подпространство

$$U^{\perp} \coloneqq \{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall \boldsymbol{u} \in U : b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\} \leq V$$

Определение 27.1.2: Пусть $\mathbb{F}$ – поле.

Его **характеристикой** называется наименьшее число $k \in \mathbb{N}$ такое, что в полне выполнено равенство $\underbrace{1 + ... + 1}_{k} = 0$.

Если такого k не существует, то характеристикой поля считается 0.

Обозначение – $\operatorname{char} \mathbb{F}$

Определение 27.1.3: Пусть $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2, h \in \mathcal{Q}(V)$.

Симметрическая билинейная форма $b \in \mathcal{B}^+(V)$ называется **полярной** к h, если

$$\forall \boldsymbol{v} \in V: \ h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

Матрицей квадратичной формы h в базисе e называется матрица B полярной к ней формы b в базисе e. Обозначение $h \underset{e}{\leftrightarrow} B$.

Теорема 27.1.1 (Метод Якоби): Пусть $h \in \mathcal{Q}(V), h \underset{e}{\leftrightarrow} B$, причём все главные миноры матрицы B отличны от нуля.

Тогда существует такой базис $e' = eS$, что матрица перехода S – верхнетреугольная с единицами на главной диагонали, $h \underset{e'}{\leftrightarrow} B'$ и B' диагональна.

Более того, тогда $B' = \operatorname{diag}\Big(\Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, ..., \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)}\Big)$

Доказательство: Докажем индукцией по $n := \dim V$, что матрица формы h приводится к диагональному виду в базисе e' с матрицей перехода из условия.

База, $n = 1$, тривиальна: подходит исходный базис e.

Пусть теперь $n > 1$, тогда $(U := \langle \boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_{n-1}} \rangle) \cap \operatorname{Ker} h = \{\boldsymbol{0}\}$, так как $\Delta_{n-1}(B) \neq 0$.

Значит $V = U \oplus U^\perp$. Представим $\boldsymbol{e_n}$ в виде $\boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{e'_n}, \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{e'_n} \in U^\perp, \boldsymbol{e'_n} \neq \boldsymbol{0}$.

По предположению индукции, в U можно выбрать подходящий базис $(\boldsymbol{e'_1}, ..., \boldsymbol{e'_{n-1}})$, тогда его объединение с $\boldsymbol{e'_n}$ будет искомым.

Матрица перехода S действительно будет верхнетреугольной с единицами на главной диагонали: для первых $n-1$ столбцов это верно в силу предположения индукции, а для последнего – в силу $\boldsymbol{e'_n} = \boldsymbol{e_n} - \boldsymbol{u}$

Заметим, что, поскольку базис e' получен описанным выше способом:

$$\forall i \in \overline{1, \text{n}}: \ \boldsymbol{e'_i} \in \langle \boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_i} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_i} \rangle = \langle \boldsymbol{e'_1}, ..., \boldsymbol{e'_i} \rangle$$

Пусть B_i – подматрица B в левом верхнем углу, а B'_i – аналогичная подматрица B'.

Тогда $B'_i = S_i^T B_i S_i$, где S_i – соответствующая подматрица S, также являющаяся верхнетреугольной с единицами на диагонали, поэтому

$$\Delta_i(B') = \det B'_i = \det(S_i^T B_i S_i) = \det B_i = \Delta_i(B)$$

Значит

$$\forall i \in \overline{1, \text{n}}: \ \Delta_i(B) = \Delta_i(B')$$

Откуда, в силу диагональности B', поскольку его i-й главный минор равен произведению i диагональных элементов:

$$B' = \operatorname{diag}\Big(\Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, ..., \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)}\Big)$$

□

27.2. Критерий Сильвестра

Определение 27.2.1: Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{F}$.

Отображение $g : V^n \to \mathbb{F}$ называется **полилинейным**, если оно линейно по каждому из n аргументов.

Определение 27.2.2: Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{F}$.

Отображение $g : V^n \to \mathbb{F}$ называется **кососимметричным**, если для любых позиций аргументов $i, j \in \overline{1,\text{n}}, i < j$ выполнены следующие условия:

1.
$$\forall \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \in V : g\left(..., \underbrace{\boldsymbol{v_i}}_{i}, ..., \underbrace{\boldsymbol{v_j}}_{j}, ...\right) = -g\left(..., \underbrace{\boldsymbol{v_j}}_{i}, ..., \underbrace{\boldsymbol{v_i}}_{j}, ...\right)$$

2.
$$\forall \boldsymbol{v} \in V : g\left(..., \underbrace{\boldsymbol{v}}_{i}, ..., \underbrace{\boldsymbol{v}}_{j}, ...\right) = 0$$

Определение 27.2.3: **Группой перестановок** S_n называется следующее множество:

$$S_n \coloneqq \left\{\sigma : \overline{1,\text{ n}} \to \overline{1,\text{ n}} \mid \sigma - \text{биекция}\right\}$$

Данной множество является группой с операцией композиции $\circ$.

Элементы группы S_n называются **перестановками**.

Определение 27.2.4: **Беспорядком**, или **инверсией** в перестановке $\sigma \in S_n$ называется пара индексов $(i, j); i, j \in \overline{1,\text{ n}}$ такая, что, $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Числа беспорядков в σ обозначается через $N(\sigma)$. **Знаком** перестановки $\sigma \in S_n$ называется величина $(-1)^{N(\sigma)}$.

Обозначения – $\operatorname{sgn} \sigma, (-1)^\sigma$

Определение 27.2.5: Пусть $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{F})$.

Определителем, или **детерминантом**, матрицы A называется следующая величина:

$$\det A \coloneqq \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$$

Определение 27.2.6: Пусть $B \in M_{n(\mathbb{R})}$ – симметричная матрица.

Её **главным минором порядка** i называется $\Delta_i(B)$ – определитель подматрицы размера $i \times i$, расположенной в левом верхнем углу B.

Определение 27.2.7: Пусть $B \in M_n(\mathbb{R})$ – симметрическая матрица.

B называется **положительно** или **отрицательно** определённой, если она задаёт квадратичную форму, обладающую этим свойством.

Определение 27.2.8: Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется **невырожденной**, если $\operatorname{rk} A = n$

Определение 27.2.9: Пусть $\mathbb{F}$ – поле, $n \in \mathbb{N}$
- Группа невырожденных матриц порядка n над $\mathbb{F}$ обозначается через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$

Утверждение 27.2.1: $B \in M_n(\mathbb{R})$ положительно определена $\Leftrightarrow \exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : B = A^T A$

Теорема 27.2.1 (Критерий Сильвестра): Пусть $h \in \mathcal{Q}(V), h \underset{e}{\leftrightarrow} B$. Тогда

$$h \text{ положительно определена} \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1,\, \mathrm{n}} : \ \Delta_i(B) > 0$$

Доказательство: Пусть $n \coloneqq \dim V$

$\Rightarrow$ Если h положительно определена, то $\exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : B = A^T A$. Тогда $\Delta_n(B) = \det B = (\det A)^2 > 0$.

Поскольку главному минору порядка $i \in \overline{1,\, \mathrm{n}\text{ - }1}$ соответствует ограниче h на $U \coloneqq \langle \boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_i} \rangle$, которое тоже положительно определено, то аналогично $\Delta_i(B) > 0$

$\Leftarrow$ Согласно методу Якоби, существует базис e' в V такой, что матрица h в нём диагональна, причём $h \underset{e'}{\leftrightarrow} \left(\Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, ..., \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)}\right)$.

Все элементы на главной диагонали положительны, поэтому h положительно определена. $\square$

28. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью - квазимногочленом

Определение 28.1: Уравнение вида

$$F\left(x, y, ..., y^{(n)}\right) = 0$$

называется **обыкновенным дифференциальным уравнением** n-го порядка.

Определение 28.2: Функция $\varphi(x)$, определённая на I вместе со своими n производными, называется решением ОДУ, если
1. φ и все её n производных непрерывны на I
2. $\forall x \in I : \ \big(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\big) \in \Omega$, где Ω – область определения F
3. $\forall x \in I : F\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\big) = 0$

Определение 28.3: Пусть $n \geq 2, f_1, ..., f_n$ – непрерывные функции, определённые на области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{x,\boldsymbol{y}}$.

Назовём **нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка** следующую систему:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), ..., y_n(x)) = f_1(x, \boldsymbol{y}) \\ ... \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), ..., y_n(x)) = f_n(x, \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

Определение 28.4: **Задачей Коши** называется

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y_0} \end{cases}$$

Теорема 28.1 (О существовании и единственности для системы): Пусть вектор-функция $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ непрерывна в области G вместе со своими производными по $y_j, j \in \overline{1, \text{n}}$, и точка $(x_0, \boldsymbol{y_0})$ тоже лежит в G.

Тогда задача Коши локально разрешима единственным образом:
1. $\exists \delta > 0$, такое, что на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ решение задачи Коши существует
2. Решение единственно в смысле: Если $\boldsymbol{y_1} \equiv \boldsymbol{\varphi}(x)$ – решение задачи Коши в δ_1-окрестности точки x_0, а $\boldsymbol{y_2} \equiv \boldsymbol{\psi}(x)$ – решение задачи Коши в δ_2-окрестности точки x_0, то в окрестности точки x_0 с радиусом $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$: $\boldsymbol{\varphi}(x) \equiv \boldsymbol{\psi}(x)$

Теорема 28.2 (О существовании и единственности для уравнения): Пусть функция $f(x, y, p_1, ..., p_{n-1})$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по переменным $y, p_1, ..., p_{n-1}$ в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ и точка $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in G$.

Тогда существует замкнутая δ-окрестность точки x_0, в которой существует единственное решение задачи Коши.

Определение 28.5: **Линейное обыкновенные дифференциальное уравнениу с постоянными коэффициентами и правой частью - квазимногочленом** имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$$

где $f(x)$ – **квазимногочлен**:

$$f(x) = e^{\mu x} P_m(x); \quad \mu \in \mathbb{C}, P_m(x) - \text{многочлен степени } m$$

Замечание 28.1: Существование и единственность решения такого уравнения очевидна применением соответствующей теоремы.

Определение 28.6: **Характеристическим многочленом** $L(x)$ назовём многочлен

$$L(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$

Определение 28.7: Если число μ из формулы квазимногочлена является корнем характеристического уравнения

$$L(\lambda) = 0$$

то говорят, что в уравнении **резонансный** случай.

Если же μ не является корнем, то имеем **нерезонансный** случай.

Определение 28.8: **Дифференциальным многочленом** назовём многочлен вида

$$L(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} (D - \lambda_2)^{k_2} ... (D - \lambda_s)^{k_2}$$

где k_i соответствует кратности корней характеристического уравнения, а D – оператор формального дифференцирования.

Замечание 28.2: Решение рассматриваемого уравнения эквивалентно решению уравнения

$$L(D) y = 0$$

Теорема 28.3 (О структуре решения ЛНУ с правой частью в виде квазимногочлена): Для рассматриваемого уравнения существует и единственно решение вида

$$y(x) = x^k e^{\mu x} Q_m(x)$$

где $Q_m(x)$ – многочлен одинаковой с $P_m(x)$ степени m, а число k равно кратности корня μ в уравнении $L(\lambda) = 0$ в резонансном случае и $k = 0$ в нерезонансном.

Доказательство: Если $\mu \neq 0$, то заменой $y = ze^{\mu x}$ всегда можно избавиться от $e^{\mu x}$ в правой части.

В самом деле, после замены имеем, что

$$L(D)y = L(D)(e^{\mu x}z) = e^{\mu x}L(\mu)z + e^{\mu x}L(D)z = e^{\mu x}L(D+\mu)z = e^{\mu x}P_m(x)$$

Разделим на экспоненту и получим

$$L(D+\mu)z = P_m(x)$$

Таким образом, доказательство теоремы достаточно провести для уравнения вида (БОО $\mu = 0$):

$$L(D)y = P_m(x)$$

Рассмотрим нерезонансный случай $L(\mu) \neq 0$. Пусть

$$P_m(x) = p_m x^m + ... + p_0; \quad Q_m(x) = q_m x^m + ... + q_0$$

Если подставить и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x, получим линейную алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $q_0, ..., q_m$.

Матрица систему треугольная с числами $a_n = L(\mu) \neq 0$ на диагонали, значит коэффициенты определяются из неё однозначно.

В резонансном случае имеем

$$L(\lambda) = \lambda^k\left(\lambda^{n-k} + a_1\lambda^{n-k-1} + ... + a_{n-k}\right)$$

Следовательно,

$$L(D) = \begin{cases} D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-k}D^k, \ k<n \\ D^n, \ k=n \end{cases}$$

В первом случае замена $D^k y = z$ приводит уравнение к уравнению с нерезонансным случаем.

Иначе получаем уравнение

$$D^n y = P_m(x)$$

Которое очевидно решается интегрированием n раз. □

29. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения

Определение 29.1: Пусть $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}; A \in M_n(\mathbb{C})$

Тогда **Нормальная линейная однородная система уравнений** выглядит так:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

Где под $\cdot$ подразумевается дифференцирование по t.

Теорема 29.1: Если $\boldsymbol{h_1}, ..., \boldsymbol{h_n}$ – базис из собственных векторов матрицы A, то $\boldsymbol{x_i} = e^{\lambda_i t}\boldsymbol{h_i}$ – ФСР для исходной однородной системы.

Доказательство: Заметим, что

$$A\left(e^{\lambda t}\boldsymbol{h}\right) = e^{\lambda t}(A\boldsymbol{h}) = e^{\lambda t}\lambda\boldsymbol{h} = \left(e^{\lambda t}\boldsymbol{h}\right)'$$

Значит собственный вектор является решением.

Их линейная независимость следует из того, что их вронскиан в точке $t = 0$ равен определителю из координатных столбцов этого базиса, а значит не равен нулю. $\square$

Определение 29.2: Пусть t – действительная переменная, $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Тогда **матричной экспонентой** называется ряд

$$e^{tA} := E_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Лемма 29.1: Свойства матричной экспоненты:
1. Если S невырожденная и $A = SBS^{-1}$, то $\forall t \in \mathbb{R} : e^{tA} = Se^{tB}S^{-1}$
2. $\left(e^{tA}\right)'_t = Ae^{tA} = e^{tA}A$

Теорема 29.2 (Матричная экспонента для ФСР): Матрица e^{tA} является фундаментальной матрицей для системы линейный уравнений $\boldsymbol{\dot{x}} = A\boldsymbol{x}$.

Доказательство: По свойствам экспоненты

$$\left(e^{tA}\right)'_t = Ae^{tA}$$

Значит каждый столбец матрицы e^{tA} является решением исходной системы.

Поскольку $\forall t \in \mathbb{R} : \det e^{tA} \neq 0$, то e^{tA} фундаментальна. $\square$

30. Линейные обыкновыенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского.

Определение 30.1: Вектор-функции $\boldsymbol{y_1}(x), ..., \boldsymbol{y_k}(x)$, определённые на промежутке I, называются **линейно зависимыми**, если

$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} : \exists i : \alpha_i \neq 0 : \ \sum_{j=1}^{k} a_j \boldsymbol{y_j}(x) \equiv 0$$

Определение 30.2: Пусть $\boldsymbol{y_1}(x), ..., \boldsymbol{y_n}(x)$ – вектор-функции с n компонентами.

Тогда **определителем Вронского** для заданных вектор-функций называется функция

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & ... & y_n^1(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & ... & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

Лемма 30.1: Если вронскиан системы $\boldsymbol{y_1}(x), ..., \boldsymbol{y_n}(x)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке, то все эти функции линейно независимы.

Лемма 30.2: Если вектор-функции $\boldsymbol{y_1}(x), ..., \boldsymbol{y_n}(x)$ – решения некоторой системы линейных уравнений на промежутке I и $\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$, то $\boldsymbol{y_1}(x), ..., \boldsymbol{y_n}(x)$ линейно зависимы на I.

Определение 30.3: **Фундаментальная система решений** для СЛДУ – набор n линейно независимых решений системы.

Теорема 30.1 (Лиувилля-Остроградского): Пусть $W(x)$ – вронскиан решений $y_1(x), ..., y_n(x)$ системы $y'(x) = A(x)y(x)$ на промежутке I, $x_0 \in I$.

Тогда $\forall x \in I$ имеет место формула Лиувилля-Остроградского:

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Доказательство: Докажем, что $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W'(x) = \operatorname{tr} A(x) \cdot W(x)$$

Пусть $y_{ij}(x), i \in \overline{1,\, \mathrm{n}}$ – компоненты решения $y_j(x), j \in \overline{1,\, \mathrm{n}}$.

Тогда $W(x)$ является функцией от всех этих компонент:

$$W(x) = W[y_{11}(x), y_{21}(x), ..., y_{nn}(x)]$$

По формуле производной сложной функции получаем, что

$$W'(x) = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial y_{pq}}(x) y'_{pq}(x)$$

Пусть $W_{pr}(x)$ – алгебраическое дополнение $y_{pr}(x)$ в $W(x)$.

Тогда разложение $W(x)$ по p-й строке даёт

$$W(x) = \sum_{r=1}^{n} y_{pr}(x) W_{pr}(x)$$

Отсюда получим, что

$$\frac{\partial W}{\partial y_{pq}}(x) = W_{pq}(x)$$

А так как каждая вектор-функция удовлетворяет системе $y'(x) = A(x)y(x)$, то есть

$$y'_q(x) = A(x) y_q(x); \quad q \in \overline{1,\, \mathrm{n}}$$

Отсюда по определению матричного умножения:

$$y'_{pq} = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x)$$

Подставляя найденные выражения в формулу $W'(x)$ получим, что

$$W'(x) = \sum_{p,q=1}^{n} W_{pq}(x) \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x) = \sum_{p,r=1}^{n} a_{pr}(x) \sum_{q=1}^{n} y_{rq} W_{pq}(x)$$

Но по кососимметричности определителя мы знаем, что

$$\sum_{q=1}^{n} y_{rq} W_{pq}(x) = \delta_{pr} W(x)$$

А значит

$$W'(x) = W(x)\sum_{p,r=1}^n a_{pr}\sigma_{pr} = W(x)\sum_{i=1}^n a_{pp}(x) = W(x)\cdot \operatorname{tr} A(x)$$

Интегрирование этого линейного однородного первого порядка даёт искомую формулу. □

31. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия локального экстремума.

Замечание 31.1: Вспомнин C-нормы:

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :\ \|f\|_{C^k[a,b]} = \sum_{i=0}^k \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(i)}(x)\right|$$

Определение 31.1: Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $M \subset X$.

Отображение $F : M \to \mathbb{R}$ называется **функционалом** с областью определения M.

Пусть $F(x, y, p)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b] \times \mathbb{R}^2$. В этом билете будем рассматривать функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x; \quad y(a) = A, y(b) = B$$

Определённый на множестве

$$M \coloneqq \{y(x) \in C^1[a, b] \mid y(a) = a, y(b) = b\}$$

Определение 31.2: Функция $\hat{y}(x) \in M$ называется **слабым локальным минимумом** (максимумом) функционала J, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) \in M :\ \|\hat{y} - y\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon :\ J(y) \geq (\leq)\ J(\hat{y})$$

Определение 31.3: Задача на отыскание слабого локального экстремума функционала J называется **простейшей вариационной задачей** или **задачей с закреплёнными концами**.

Определение 31.4: Выражение $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} J(y + \alpha\nu)|_{\alpha=0}$, где $\eta \in C^1[a, b]$ называется **первой вариацией** функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ и обозначается $\partial J[y, \eta(x)]$

Теорема 31.1: Если $\hat{y}(x) \in M$ является решением простейшей вариационной задачи, то

$$\forall \eta(x) \in C^1[a, b] :\ \partial J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$$

Доказательство: Пусть, БОО, $\hat{y}$ – слабый локальный минимум $J(y)$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) \in M : \|\hat{y} - y\|_{C^1[a,b]} :\ J(y) \geq J(\hat{y})$$

Зафиксировав $\eta(x)$, подберём $\alpha_0 : \|\alpha_0\eta\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$. Тогда

$$\forall\alpha : |\alpha| < \alpha_0 : \ \|\alpha\eta\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$$

Рассмотрим числовую функцию $\Phi(\alpha) \coloneqq J(\hat{y} + \alpha\eta)$. Так как $\hat{y}$ – слабый локальный экстремум $J(y)$, то 0 – локальный минимум функции Φ.

Получается, что $\Phi'(0) = 0$ по необходимому условию минимума числовой функции, это и означает, что

$$\forall\eta \in C^1[a,b] : \ \partial J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$$

□

Теорема 31.2 (Лемма Лагранжа / основная лемма вариационного исчисления): Если $f(x) \in C[a,b]$ и

$$\forall\eta(x) \in C^1[a,b] : \ \int_a^b f(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство: Пусть это не так, тогда БОО $\exists x_0 : f(x_0) > 0$.

Из-за непрерывности f следует, что

$$\exists\varepsilon > 0 : \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : f(x) > 0$$

Тогда выберем η_0, как гладкую положительную шапочку на даннном интервале, которая гладко спускается к нулю.

Получим что

$$\int_a^b f(x)\eta_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\eta_0(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

Противоречие □

Теорема 31.3: Пусть $F(x,y,p)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция $\forall(x,y,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$.

Если непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}$ является решением простейшей вариационной задачи для J, то эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера на $[a,b]$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \equiv 0$$

Доказательство: Распишем первую вариацию:

$$\partial J[y, \eta(x)] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_a^b F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$\left[\int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')}{\partial y}\eta + \frac{\partial F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')}{\partial y'}\eta'\right)\mathrm{d}x\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\eta + \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta'\right)\mathrm{d}x$$

Проинтегрируем одно из подыинтегральных слагаемых по частям:

$$\int_a^b \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta'\,\mathrm{d}x = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\eta\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\eta\,\mathrm{d}x$$

Первое слагаемое равно нулю в силу ограничений на допустимое приращение η. Тогда

$$\partial J[y, \eta(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\right)\eta\,\mathrm{d}x$$

Так как y – локальный экстремум, то по предыдущему необходимому условию

$$\forall \eta \in C^1[a,b]: \ \partial J[y, \eta(x)] = 0$$

Теперь по лемме Лагранжа получим требуемое. □

32. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства. Вычисление для нормального распределения.

32.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.

Определение 32.1.1: Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется **алгеброй**, если
1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

Определение 32.1.2: Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется **σ-алгеброй**, если
1. $\mathcal{F}$ – алгебра
2. $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Определение 32.1.3: P называется **вероятностной мерой** на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $P : \mathcal{F} \to [0,1]$, удовлетворяющая свойствам:
1. $P(\Omega) = 1$
2. $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty}: \ P(\sqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Определение 32.1.4: **Вероятностное пространство** – это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где
- Ω – множество **элементарных исходов**
- $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω, элементы $\mathcal{F}$ называются **событиями**
- P – вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$

Далее будем предполагать, что $(E, \mathcal{E})$ – произвольное измеримое пространство.

Определение 32.1.5: **Борелевской сигма-алгеброй** называется наименьшая σ-алгебра над $\mathbb{R}$, содержащая все интервалы (или отрезки).

Обозначение – $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Определение 32.1.6: Отображение $X : \Omega \to E$ называется **случайным элементом**, если оно измеримо, то есть

$$\forall B \in \mathcal{E} : \ X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Определение 32.1.7: Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то случайный элемент называется **случайной величиной**.

Определение 32.1.8: Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, то случайный элемент называется **случайным вектором**.

Определение 32.1.9: **Распределением** случайной величины (вектора) ξ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $((\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)))$, определённая по правилу:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ P_\xi(B) \coloneqq P(\xi \in B) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\})$$

Определение 32.1.10: **Простой случайной величиной** называется случайная величина ξ:

$$\xi(\omega) = \textstyle\sum_{k=1}^n x_k \mathbb{I}_{A_k}(\omega)$$

где $x_1, ..., x_n$ – все различные значения ξ, а события $A_1, ..., A_n$ образуют разбиение Ω.

Определение 32.1.11: **Математическим ожиданием** простой случайной величины ξ называется величина $\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^n x_k P_\xi(A_k)$

Лемма 32.1.1 (Свойства матожидания): Пусть ξ и η – простые случайные величины. Тогда
1. Линейность. Если $a, b \in \mathbb{R}$, то $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$
2. Если $\xi \geq 0$, то $\mathbb{E}\xi \geq 0$
3. Если $\xi \geq \eta$, то $\mathbb{E}\xi \geq \mathbb{E}\eta$

Определение 32.1.12: Пусть $\xi \geq 0$ – неотрицательная случайная величина. Рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, которой монотонно к ней сходится.

Математическим ожиданием неотрицательной случайной величины ξ называется величина $\mathbb{E}\xi = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\xi_n$

Определение 32.1.13: Пусть ξ – произвольная случайная величина. Рассмотрим $\xi^{=} = \max(\xi, 0); \xi^{-} = \max(-\xi, 0)$. Это неотрицательные случайные величины, при этом $\xi = \xi^{+} - \xi^{-}$.

1. Если $\mathbb{E}\xi^{+} < +\infty, \mathbb{E}\xi^{-} < +\infty$, то математическим ожиданием величины ξ назовём $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^{+} - \mathbb{E}\xi^{-}$
2. Если $\mathbb{E}\xi^{+} = +\infty, \mathbb{E}\xi^{-} = +\infty$, то математическое ожидание случайной величины ξ не определено
3. Иначе $\mathbb{E}\xi^{\pm} = +\infty$. Тогда математическим ожиданием случайной величины ξ будем считать $\pm\infty$

Замечание 32.1.1: Математическое ожидание – это интеграл Лебега по вероятностной мере P.

Лемма 32.1.2 (Дополнительные свойства матожидания):
1. $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$
2. Если $\xi = 0$ почти наверное, то $\mathbb{E}\xi = 0$
3. Если $\xi = \eta$ почти наверное и $\mathbb{E}\xi$ конечно, то $\mathbb{E}\eta$ конечно и $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta$
4. Если $\xi \geq 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi = 0$ почти наверное
5. Пусть $\mathbb{E}\eta$ и $\mathbb{E}\eta$ конечны. Тогда
$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{E}(\xi \mathbb{I}_A) \leq \mathbb{E}(\eta \mathbb{I}_A) \Rightarrow \xi \leq \eta$$

Доказательство: Все свойства очевидным образом следует из соответствующих свойств интеграла Лебега. □

Определение 32.1.14: Если $\mathbb{E}\xi$ конечно, то **дисперсией** случайной величины ξ называется
$$\mathbb{V}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

Лемма 32.1.3 (Свойства дисперсии):
1. $\forall c \in \mathbb{R} : \ \mathbb{V}(c\xi) = c^2\mathbb{V}(\xi); \quad \mathbb{V}(\xi + c) = \mathbb{V}(\xi)$
2. $\mathbb{V}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

Доказательство: Очевидно следуют из свойств матожидания. □

32.2. Вычисление для нормального распределения

Определение 32.2.1: **Функцией распределения** вероятностной меры P на $\mathbb{R}$ называется

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

Определение 32.2.2: Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а F – её функция распределения.

Она называется **абсолютно непрерывной**, если

$$\exists p(t) \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} p(t)\,\mathrm{d}t = 1 \wedge F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$$

В этом случае $p(t)$ называтся **плотностью** функции распределения F и меры P.

Определение 32.2.3: Распределение называется **нормальным** с параметрами $a \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^{++}$, если его плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Обозначение – $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Утверждение 32.2.1: Если ξ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(a, \sigma)$, то

$$\mathbb{E}\xi = a$$

Доказательство:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} x \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\mu(x) \overset{t=\frac{x-a}{\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\mu(t) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sigma t e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\text{нечётная}} \mathrm{d}\mu(t) + \int_{\mathbb{R}} a e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\mu(t) \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}\mu(t)$$

Получили интеграл Эйлера-Пуассона. Напомним, как его вычислять:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho^2\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \pi$$

Мы вычисляли квадрат интеграла, а значит сам интеграл равен $\sqrt{\pi}$.

Таким образом матожидание равно a. □

33. Неравенство Чебышева и закон больших чисел

33.1. Неравенство Чебышева

Лемма 33.1.1 (Неравенство Маркова): Пусть $\xi \geq 0$ – случайная величина, $a \in \mathbb{R}^{++}$. Тогда
$$P(\xi \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{a}$$

Доказательство: Распишем цепочку очевидных неравенств:
$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\xi\mathbb{I}(\xi \geq a) + \xi\mathbb{I}(\xi < a)) = \mathbb{E}(\xi\mathbb{I}(\xi \geq a) + \mathbb{E}(\xi\mathbb{I}(\xi < a))) \geq$$
$$\mathbb{E}(\xi\mathbb{I}(\xi \geq a)) \geq a\mathbb{E}(\mathbb{I}(\xi \geq a)) = aP(\xi \geq a)$$
□

Лемма 33.1.2 (Неравенство Чебышева): Пусть ξ – случайная величина. Тогда
$$\forall \varepsilon > 0 : \ P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}\xi}{\varepsilon^2}$$

Доказательство: Подставим в неравенство Маркова неотрицательную случайную величину $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ и $a = \varepsilon^2$. □

33.2. Закон больших чисел

Определение 33.2.1: События A и B называются **независимыми**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Определение 33.2.2: События $A_1, ..., A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если
$$\forall i_1, ..., i_k \in \overline{1, \mathrm{n}} : \ P\left(A_{i_1} ... A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) ... P\left(A_{i_k}\right)$$

Определение 33.2.3: σ-алгебры $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ называются **независимыми в совокупности**, если независимы в совокупности любые их конечные наборы.

Определение 33.2.4: Случайные величины ξ, η называются **независимыми**, если независимы σ-алгебры, порождённые их распределениями.

Утверждение 33.2.1: Если ξ, η независимые случайные величины, то
$$\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$
Более того, их дисперсия линейна
$$\mathbb{V}(\xi + \eta) = \mathbb{V}\xi + \mathbb{V}\eta$$

Теорема 33.2.1: Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин и $\exists \mathbb{V}\xi_1, a = \mathbb{E}\xi$. Тогда
$$\forall \varepsilon > 0: \ P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Доказательство: Подставим в неравенство Чебышева $\xi = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$.

Заметим, что, благодаря линейности, $\mathbb{E}\xi = a$.

Тогда
$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon) \le \frac{\mathbb{V}\xi}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(\xi_1+\ldots+\xi_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

Так как величины независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Получаем
$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon) \le \frac{n\mathbb{V}\xi_1}{n^2\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

□

34. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией

Определение 34.1: Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к случайной величине ξ **по распределению**, если $\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывной ограниченной функции выполнено
$$\mathbb{E}f(\xi_n) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}f(\xi)$$

Обозначение $\xi_n \underset{d}{\to} \xi$.

Определение 34.2: Пусть ξ – случайная величина.

Характеристической функцией случайной величины ξ называется ~~преобразование Фурье~~
$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{i\xi t}$$

Теорема 34.1 (Непрерывности для характеристической функции): Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность случайных величин, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – соотстветствующая последовательность характеристических функций.

Тогда если
$$\forall t \in \mathbb{R}: \exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

где $\varphi(t)$ непрерывна в нуле, то $\varphi(t)$ является характеристической функцией некоторой случайной величины ξ, причём $\xi_n \underset{d}{\to} \xi$.

Теорема 34.2 (О производных характеристической функции): Пусть $\mathbb{E}|\xi|^n < +\infty$ для $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\forall s \leq n$:

1. $\varphi^{(s)}(t) = \mathbb{E}\big((i\xi)^s e^{it\xi}\big)$
2. $\mathbb{E}\xi^s = \frac{\varphi_\xi^{(s)}(0)}{i^s}$
3. $\varphi_\xi(t)$ раскладывается в вид

$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!}\mathbb{E}\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$

где $|\varepsilon_n(t)| \leq 3\mathbb{E}|\xi|^n$ и $\varepsilon_n(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$

Теорема 34.3 (ЦПТ для НОРСВ): Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ – независимые одинаково распределённые случайные величины, $\mathbb{E}\xi_1 = a, 0 < \mathbb{V}\xi_1 < +\infty$.

Обозначим $S_n \coloneqq \xi_1 + ... + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{V}S_n}} \underset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1)$$

Доказательство: Обозначим $T_n \coloneqq \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{V}S_n}}$. По теореме непрерывности достаточно проверить, что характеристическая функция T_n сходится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – характеристической функции $\mathcal{N}(0,1)$ (которая равна также $e^{-\frac{t^2}{2}}$)

Обозначим $\eta_j \coloneqq \frac{\xi_j - a}{\sigma}$. Тогда $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ – тоже НОРСВ, причём $\mathbb{E}\eta_j = 0, \mathbb{V}\eta_j = \mathbb{E}\eta_j^2 = 1$. Тогда

$$T_n = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + ... + \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Посчитаем характеристическую функцию T_n:

$$\varphi_{T_n}(t) = \mathbb{E}e^{itT_n} = \mathbb{E}e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(\eta_1 + ... + \eta_n)} \overset{\text{независимость}}{=}$$

$$\prod_{k=1}^n \varphi_{\eta_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{\eta_1}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \overset{\text{т. о производных}}{=}$$

$$\left(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\eta_1 - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}\eta_1^2 + o\big(\tfrac{1}{n}\big)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2}n + o\big(\tfrac{1}{n}\big)\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

□

35. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши.

35.1. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Замечание 35.1.1: В ТФКП используются следующие станартные оборзначения z - комплексная переменная

$z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$

$f(z)$ - исследуемая функция

$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) : u, v \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Определение 35.1.1: Функция $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ называется *дифференцируемой* в z_0 если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \to 0$$

Теорема 35.1.1: $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема тогда и только тогда когда

1. $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в (x_0, y_0)
2. Выполняются *условия Коши-Римана*:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

При этом $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$

Доказательство:

$(\Longrightarrow)$

Пусть f дифференцируема. Тогда $\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z) = A\Delta z + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$

Обозначим $A = a + ib$ и распишем Δf по координатно.

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \end{cases}$$

Из того, что $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z)$ следует α_1, α_2 тоже $o(\Delta x, \Delta y)$

Отсюда по определению u, v дифференцируемы. Причем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b$

$(\Longleftarrow)$

Пусть u, v дифференцируемы и выполняются УКР, тогда

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

Что и означает дифференцируемость.

$\square$

35.2. Интегральная теорема Коши

Лемма 35.2.1: Пусть D область f голоморфна в ней. Тогда
1. Если f полный диференциал $\Rightarrow$ $\forall\gamma$ кусочно гладкая замкнутая $\int_\gamma fdz = 0$
2. Если интеграл по любой замкнутой ломанной 0 $\Rightarrow$ f - полный диференциал

Теорема 35.2.1 (Лемма Гурса): Пусть D область, f голоморфна в ней.
Тогда

$$\forall \text{ треугольника } \Delta : \overline{\Delta} \in D \ \int_{\partial\Delta} fdz = 0$$

Доказательство: Обозначим $I = \int_{\partial\Delta} f$. Разобъем каждую сторону треугольника пополам, и получим 4 треугольника: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Тогда $I = \left(\int_{\partial\Delta_1} + \int_{\partial\Delta_2} + \int_{\partial\Delta_3} + \int_{\partial\Delta_4}\right) fdz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

Тогда найдется треугольник (б.о.о. Δ_1), такой что $|I_1| \geq \left|\frac{I}{4}\right|$.

Продолжая так делать получим последовательность треугольников $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$.

Заметим, что в силу компактности $\exists z_0 = \bigcap_0^\infty \overline{\Delta_n}$.

В силу дифференцируемости

$\forall\varepsilon > 0 : \forall z \in O_\delta(z_0) : \ |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon(z - z_0)$

Заметим, что $-f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$ это полный диференциал, тогда

$$\int_{\Delta_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)dz = \int_{\Delta_n} f(z)dz + 0$$

Следовательно для достаточно больших n

$$|I_n| = \left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \leq \int_{\Delta_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \ |dz| \leq \varepsilon \cdot \left(\frac{l}{2^n}\right)^2$$

Где l периметр Δ, и соответсвенно $\frac{l}{2^n}$ периметр Δ_n.

Но по построению $|I_n| \geq \frac{I}{4^n}$, следовательно $\forall\varepsilon > 0$ $|I| < \varepsilon \Rightarrow I = 0$ □

Лемма 35.2.2: *Усиленная Лемма Гурса*

Следствие предыдущей теоремы верно и в условиях, что f голоморфна в $D \setminus \{a\}$, непрерывна в D

Доказательство: Картиночки порисовать. □

Теорема 35.2.2 (Коши для выпуклой области): Пусть D выпуклая область, f голоморфна в ней.

Тогда $\forall \gamma$ - кусочно гладкой замкнутой $\int_\gamma f dz = 0$.

Доказательство: Явно предъявим полный дифференциал $F(z) = \int_{[a;z]} f(\zeta) d\zeta$.

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[a;z]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[a;z_0]} f(\zeta) d\zeta \overset{\text{Лемма Гурса}}{=} \int_{[z_0;z]} f(z_0) dz$$

Тогда очевидно, что

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \to f(z_0)$$

□

Определение 35.2.1: Пусть γ - кусочно гладкая кривая в D - области.

Тогда *приращением аргумента функции вдоль кривой* $\Delta_\gamma f$ называется $Im \int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)}$

Определение 35.2.2: Пусть γ - кусочно гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{C}$, $a \in C \setminus \gamma$.

Тогда *индексом a относительно* γ называется

$$J_\gamma(a) = \frac{\Delta_\gamma(z-a)}{2\pi}$$

Определение 35.2.3: Пусть γ - кусочно гладкая кривая лежит в области D.

Тогда говорят что $\gamma \sim 0 \pmod D$ *гомологично эквивалентна нулю*, если

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus D : \ J_\gamma(a) = 0$$

Определение 35.2.4: Циклом Γ называется формальная линейная комбинация с целыми коэфициентами кусочно-гладких замкнутых кривых. Все определения и теоремы для кривых тривиально переносятся на циклы.

Определение 35.2.5: Пусть γ кусочно гладкая кривая, φ непрерывна на γ. Тогда интегралом Коши называется

$$F_n(z, \varphi) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

Утверждение 35.2.1: Свойства интеграла Коши
1. F_n голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2. $F_n'(z, \varphi) = nF_{n+1}(z, \varphi)$

Лемма 35.2.3 (Общая теорема Коши): Пусть D - область в $\mathbb{C}$, f - голоморфна в D

Тогда
1. $g(\xi, z) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}, \xi \neq z \\ (f'(z)), z = \xi \end{cases}$

непрерывна в $D \times D$
2. Для любой кусочно гладкой $\gamma \in D$

$$h(z) = \int_\gamma g(\xi, z) d\xi$$

голоморфна в D

Теорема 35.2.3 (Лиувиля): Пусть f голоморфная в $\mathbb{C}$ и

$$\exists M, m, R : \forall z, |z| > R : \quad |f(z)| < Mz^m,$$

тогда f полином степени m. В частности, если f ограничена, то она константа.

Теорема 35.2.4 (Интегральная теорема + формула Коши): Пусть D - область в $\mathbb{C}$, f - голоморфна в D.

Пусть Γ - цикл в D, причем $\Gamma \sim 0 \pmod D$, тогда
1. (формула) $\forall z \in D \setminus \Gamma : J_\Gamma(z) f(z) \frac{1}{2\pi i} = \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$
2. (теорема) $\int_\Gamma f(z) dz = 0$

Доказательство: (Необязательно) Пусть $G = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_\Gamma(z) = 0\}$ оно открытое. Рассмотрим две функции

1. $2\pi i \; \tilde{h}(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$

   Она голоморфна в G как интеграл Коши.

2. $2\pi i \; h(z) = \int_\Gamma \left(\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right) d\xi$

   Она голоморфна в D по 2 пункту общей теоремы Коши

Заметим, что $\forall z \in G \cap D : \; h(z) = \tilde{h}(z)$ так как

$$h(z) - \tilde{h}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{\xi - z}d\xi = J_{\Gamma(z)}f(z) = 0$$

Из того, что $\Gamma \sim 0(\operatorname{mod} D)$ следует $\mathbb{C} \setminus D \subset G$ Тогда рассмотрим новую функцию:

$$F(z) = \begin{cases} h(z), z \in D \\ \tilde{h}(z) \\ z \in \mathbb{C} \setminus D \subset G \end{cases}$$

Она голоморфна в каждой из компонент. А так как на границе h и $\tilde{h}$ равны, то голоморфна и в $\mathbb{C}$.

Заметим, что

$$|\tilde{h}(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\max_\Gamma |f| \; |d\xi|}{dist(z,\Gamma)} \underset{dist(z,\Gamma)\to\infty}{\to} 0$$

А следовательно по теореме Лиувиля $F(z) \equiv 0$.

Следовательно в $D \setminus \Gamma$ $h(z) = 0$. То есть

$$\frac{f(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

$$f(z)J_{\Gamma(z)} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

$(1 \Rightarrow 2)$

Применим 1 к $\tilde{f}(z) = (z-a)(f(z))$, где $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ (естественно в области определения f) Тогда

$$0 = J_{\Gamma(a)}(a-a)f(a) = J_{\Gamma(a)}\tilde{f}(a) = \int_\Gamma \frac{\tilde{f}(\xi)d\xi}{\xi - a} = \int_\Gamma f(\xi)d\xi$$

□

36. Интегральная формула Коши. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.

36.1. Интегральная формула Коши.

Теорема 36.1.1: *Формула Коши для круга* Пусть f голоморфна в D, $\overline{O_\rho(a)} \in D$ тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

Доказательство: В силу $\overline{O_\rho(a)} \in D \Rightarrow \exists R > \rho:\ O_R(a) \in D$. Зафиксируем $z \in O_\rho(a)$

Рассмотрим следующую функцию

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{z-\zeta}, \zeta \neq z \\ f'(z), z = \zeta \end{cases}$$

Она удовлетворяет условиям усиленной Леммы Гурса, следовательно

$$0 = \int_{|\zeta-a|=\rho} g(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta = \int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - f(z)\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

Обозначим $G(z) = \int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$.

Она голоморфна в области как интеграл Коши. $G' = \int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} \equiv 0$

Следовательно $G(z) = \text{const} = G(a) = 2\pi i$

Отсюда элементарно получим требуемое. □

Замечание 36.1.1: Фомулировку для более общего случая смотри в прошлом билете

36.2. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.

Теорема 36.2.1: Пусть f - голоморфная в D, $O_R(a) \subset D$, тогда
$\forall z \in O_R(a) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Доказательство: Возьмем $0 < r < R$, тогда f голоморфна в $\overline{O_r(a)}$. Тогда по теореме Коши $2\pi i\ f(z) = \int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$.

Распишем
$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{1}{(\xi-a)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} \overset{(|z-a|<|\xi-a|)}{=} \frac{1}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$

Полученный ряд сходится равномерно, а значит можно почленно интегрировать.

$2\pi i\ f(z) = \int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_r} f(\xi)\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i c_n(z-a)^n$

Причем по следтвию формулы Коши для круга, $2\pi i \cdot c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Ну раз верно для любого $r < R$, то и для R верно. $\square$

37. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера.

37.1. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана.

Теорема 37.1.1:
Пусть f голоморфна в кольце $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$. Тогда
$$\forall z \in K: \ f(z) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$
где
$$c_n = \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_{\gamma_\rho} \tfrac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$$

где γ_ρ положительно определеная окружность радиуса $\rho \in (r, R)$ с центром в a.

Доказательство: Для начала покажем независимость коэфициентов от выбора ρ. Возьмем две окружности радиусов ρ и ρ'. Применим для $\Gamma = \rho - \rho'$ интегральную теорему Коши и получим требуемое.

Рассмотрим $r < r' < R' < R$. Тогда $\forall z \in K'_{r',R'}$
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = (2\pi i)\left(\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}\right) =: f_1 + f_2$$
Заметим, что $f_1 = \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$ голоморфна в $O_{R'}(a)$. А значит раскладывается в ряд Тейлора. $f_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$

Вновь раскладываем $\frac{1}{z-\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ при $|\frac{\xi-a}{z-a}| < 1$

Значит
$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^{-n-1} \cdot \left(c_{-n-1} := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}} f(\xi)(\xi-a)^n d\xi\right)$$
Итого получили требуемое, не зависящее от r', R' $\square$

Определение 37.1.1: Такое представление голоморфной функции называется *рядом Лорана*

Лемма 37.1.1: *Единсвенность ряда Лорана*

Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ в кольце К, то f голоморфна в этом кольце, причем ряд лорана совпадает с данным. То есть $c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$

Доказательство: f голоморфна как предел сходящегося ряда.

Проверка равенства коэфициентов. Для $n = -1$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\rho} c_n(z-a)^n dz = c_{-1}$$

Для $n \neq -1$ двигаем ряд так чтобы нужный коэфициент встал на -1. □

37.2. Изолированные особые точки однозначного характера.

Здесь пусть $f(z)$ функция имеющая изолированную особую точку a, тогда:

Определение 37.2.1: a - устранимая особенная точка, если $\exists A \in \mathbb{C}$: $\lim_{z\to a} f(z) = A$

Определение 37.2.2: a - полюс, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$

Определение 37.2.3: a - существенная особенная точка, если

$$\nexists \lim_{z\to a} f(z)$$

Теорема 37.2.1: a - УОТ $\Leftrightarrow$ f ограничена в какой-то $\dot{O}_{\delta(a)}$

Доказательство: ($\Rightarrow$) очевидно из определения предела.

($\Leftarrow$) Положим $M_\rho(f) = \max_{\gamma_\rho} |f|$ Тогда оценим

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \left(|f| \frac{|d\xi|}{\rho^{n+1}} \right) \leq \frac{M_\rho(f)}{\rho^n}$$

Из ограниченности, можно оценить M_ρ как константу. А значит при $n < 0, \rho \to 0 :\quad |c_n| \to 0$. Следовательно |c_n|. А значит есть только регулярная часть ряда Лорана, а следовательно a - УОТ. □

Теорема 37.2.2: a - полюс $\Leftrightarrow$ существует лишь конечное число ненулевых членов в главной части ряда Лорана.

Доказательство:

($\Leftarrow$) аккурано посчитаем предел и получим требуемое.

($\Rightarrow$) По условию $\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$. Т.е функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в a УОТ.

В силу изолированности a, $\frac{1}{f(z)}$ голоморфна в окрестности a, причем отлична от 0. А значит из предыдущего доказтельства получим разложение в Тейлора.

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m h(z), h(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

$\frac{1}{h(z)}$ голоморфная в окрестности $\Rightarrow$ раскладывается в Тейлора

□

Теорема 37.2.3: *Сохоцкого*

Если a - СОТ, то $\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{z_n\} \to a, f(z_n) \to A$

Доказательство: (Необязательно) Для $A = \infty$ очевидно. Если не существует, то ограничена $\Rightarrow$ УОТ.

Если $A \neq \infty$, то рассмотрим $g(z) \coloneqq \frac{1}{f(z)-A}$.

Если A не предельная, то $f(z) - A$ отделена от нуля, а значит g(z) ограничена. Следовательно a - УОТ для g. Причем $g(z) \neq 0$ в области определения.

Тогда заметим, что $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$.

Если $g(a) \neq 0$, то a - УОТ для f.

Иначе полюс. Противоречие. □

38. Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов

Определение 38.1: Пусть f голоморфна в $\dot{O_r}(a), a \in \mathbb{C}$, то определим вычет как

$$\mathrm{res}_a\, f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$$

Лемма 38.1: Вычеты определены корректно (не завият от γ)

Доказательство: Пусть $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,\ z \in \dot{O}_{r(a)}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n = c_{-1}$$

Не зависит от γ □

Теорема 38.1: *Коши о вычетах* (a.k.a *Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов*)

Пусть D ограничена циклом $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 - ... - \gamma_n$. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_N\} \subseteq D$. f голоморфна в $D' \setminus A$ где $D' \supset D$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \sum^N \operatorname{res}_{a_i} f$$

Доказательство: Окужаем каждую особую точку кругом радиуса R. Добавляем и вычитаем из Γ эти круги (δ_i). В части с минусами получаем новый цикл $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \sum \delta_i$, такой что в нем f голоморфна.

Проверяем что $\tilde{\Gamma} \sim 0 \big(\operatorname{mod} \tilde{D}\big)$

- В точках вне D он так и остался 0.
- В новых точках (внутри δ_i) $1 - 1 = 0$

Следовательно интеграл по $\tilde{\Gamma}$ равен 0, а оставшая часть это $\sum \int_{\delta_i} f dz = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{a_i} f$. □

39. Определения и формулировки

Тут собраны всякие общие определния, которые вас могут спросить и примерные идеи их доказательств

39.1. $\mathbb{N}$

Вводим аксиоматически. То есть говорим,

Определение 39.1.1:

Если множесто $\mathbb{N}$ и функция $\mathrm{Sc} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ удовлетворяют следующим аксиомам, то это множество называется множеством натуральных чисел. (Ну или как то так. Вряд ли это спросят кончено.)

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!\ \mathrm{Sc}(n) \in \mathbb{N}$. (Sc - «следующее число»)
3. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{Sc}(n) \neq 0$
4. $\mathrm{Sc}(n) = \mathrm{Sc}(m) \Rightarrow n = m$ (равенство в теоретико-множественном смысле)
5. (индукция) $\forall \mathrm{M} \subseteq \mathbb{N} :\ 0 \in \mathrm{M} \wedge (n \in \mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{Sc}(n) \in \mathrm{M}) \Rightarrow \mathrm{M} = \mathbb{N}$

Операция + вводится как рекурсивное перекладывание Sc

Операция $\leq$ вводится как $n \leq m \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N} : n + k = m$

39.2. $\mathbb{R}$

Считаем, что $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ как ни будь определите.

Аксиоматически:

Определение 39.2.1: $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, 0, 1)$ удовлетворяют следующим свойствам

I Операция $+ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - в смылсе поля

II Операция $\times :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - в смылсе поля

III Операция $\leq$ - линейный порядок, уважает сложнение/умножение с положительными и

IV $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists p \in \mathbb{Z} :\ py > x$ ($\mathbb{Z}$ получается как $1 + 1 + 1 + 1...$)

V Полнота

1 вариант: в смысле функана - каждая фундаментальная сходится.

2 вариант: по лектору $\forall A, B \subseteq \mathbb{R} :\ A \cup B = \mathbb{R} \wedge A \cap B = \emptyset \wedge (\forall a \in A, b \in B\ a \leq b) \Rightarrow \exists c :\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leq c \leq b$

Замечание 39.2.1: Построение $\mathbb{R}$. Строится как множество классов эквивалентности над фундаментальными последовательностями (у лектора: стягивающимися рациональными отрезками). Все свойства кроме полноты в полуавтоматическом режиме переносятся с $\mathbb{Q}$.

Полнота(в смысле лектора):

Строим приближающую последовательность десятичных приближений. То есть сначала берем наибольшее целое в A, наименьшее целое в B. Затем среди чисел с 1 знаком после запятой. И так далее. Получаем последоват стягивающихся отрезков. (Или если поочерди брать, то просто фундаментальную последовательность).

Она и будет представителем искомого c.

39.3. $\mathbb{C}$

Строится как $\mathbb{R}^2$ с базисом $(1, i)$ сложение покомпонентное.

Умножение $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $(a1 + bi) * (c1 + di) = (ac - bd)1 + (bc + ad)i$