

## Содержание

<b>1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности .....</b>	<b>5</b>
1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса .....	5
1.2. Критерий Коши .....	6
<b>2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней .....</b>	<b>7</b>
2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке .....	7
2.2. Достижение точных верхних и нижних граней .....	9
<b>3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции .....</b>	<b>10</b>
<b>4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций. ....</b>	<b>10</b>
4.1. Теорема Ролля .....	10
4.2. Теоремы Лагранжа и Коши .....	12
<b>5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа</b>	<b>13</b>
5.1. Остаточный член в форме Лагранжа .....	13
5.2. Остаточный член в форме Пеано .....	14
<b>6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия. ....</b>	<b>14</b>
6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции .....	14
6.2. Достаточные условия локальных экстремумов .....	15
6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости .....	16
<b>7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте .....</b>	<b>17</b>
<b>8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных .....</b>	<b>20</b>
<b>9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением .....</b>	<b>21</b>
<b>10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия. ....</b>	<b>22</b>
10.1. Необходимые условия .....	22
10.2. Достаточные условия .....	23
10.3. Условный экстремум .....	24
<b>11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница. ....</b>	<b>26</b>
11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом .....	26
11.2. Формула Ньютона-Лейбница .....	28
<b>12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда. ....</b>	<b>29</b>
12.1. Непрерывность суммы функционального ряда .....	29

12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда .....	30
12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда .....	31
<b>13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируе-</b> <b>мость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора. ....</b>	<b>32</b>
13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда .....	32
13.2. Ряд Тейлора .....	34
<b>14. Теорема об ограниченной сходимости для интеграла Лебега .....</b>	<b>35</b>
<b>15. Дифференциальные формы на открытых подмножествах евклидова</b> <b>пространства, оператор внешнего дифференцирования <math>d</math> и его независи-</b> <b>мость от криволинейной замены координат .....</b>	<b>37</b>
15.1. Дифференциальные формы, оператор внешнего дифференцирования .	37
15.2. Независимость внешнего дифференцирования от замены координат ...	41
<b>16. Интегрирование дифференциальной формы с компактным носите-</b> <b>лем. Зависимость интеграла от замены координат. ....</b>	<b>42</b>
<b>17. Общая формула Стокса .....</b>	<b>44</b>
<b>18. Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье</b> <b>в точке .....</b>	<b>44</b>
<b>19. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического</b> <b>ряда Фурье .....</b>	<b>47</b>
<b>20. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функ-</b> <b>ции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования</b> <b>Фурье. ....</b>	<b>48</b>
20.1. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функ-	48
20.2. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фу-	49
<b>21. Прямые и плоскости в пространстве. Формулы расстояния от точки</b> <b>до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве. Углы между</b> <b>прямыми и плоскостями. ....</b>	<b>50</b>
21.1. Прямые и плоскости в пространстве .....	50
21.2. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в	54
пространстве .....	54
21.3. Углы между прямыми и плоскостями .....	55
<b>22. Кривые второго порядка, их геометрические свойства .....</b>	<b>56</b>
22.1. Эллипс .....	56
22.2. Гипербола .....	57
22.3. Парабола .....	59
<b>23. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений. Тео-</b> <b>рема Кронекера-Капелли. ....</b>	<b>59</b>
23.1. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений .....	60
23.2. Теорема Кронекера-Капелли .....	62
<b>24. Линейное пространство, базис и размерность. Линейное отображение</b> <b>конечномерных пространств, его матрица. ....</b>	<b>65</b>

24.1. Линейное пространство, базис и размерность .....	65
24.2. Линейное отображение конечномерных пространств, его матрица .....	65
<b>25. Собственные значения и собственные векторы линейных преобразований. Диагонализуемость линейных преобразований. ....</b>	<b>66</b>
<b>26. Самосопряжённые преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов. ....</b>	<b>68</b>
<b>27. Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра. ....</b>	<b>71</b>
27.1. Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду. ....	71
27.2. Критерий Сильвестра .....	72
<b>28. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью - квазимногочленом .....</b>	<b>74</b>
<b>29. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения .....</b>	<b>77</b>
<b>30. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского. ....</b>	<b>78</b>
<b>31. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия локального экстремума. ....</b>	<b>80</b>
<b>32. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства. Вычисление для нормального распределения. ....</b>	<b>82</b>
32.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства. ....	82
32.2. Вычисление для нормального распределения .....	84
<b>33. Неравенство Чебышева и закон больших чисел .....</b>	<b>85</b>
33.1. Неравенство Чебышева .....	85
33.2. Закон больших чисел .....	86
<b>34. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией .....</b>	<b>87</b>
<b>35. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши. ....</b>	<b>88</b>
35.1. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана .....	88
35.2. Интегральная теорема Коши .....	90
<b>36. Интегральная формула Коши. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора. ....</b>	<b>93</b>
36.1. Интегральная формула Коши. ....	93
36.2. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора. ....	94
<b>37. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера. ....</b>	<b>95</b>

37.1. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. ....	95
37.2. Изолированные особые точки однозначного характера. ....	96
<b>38. Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов .....</b>	<b>97</b>
<b>39. Определения и формулировки .....</b>	<b>98</b>
39.1. $\mathbb{N}$ .....	98
39.2. $\mathbb{R}$ .....	98
39.3. $\mathbb{C}$ .....	99

# ГОС по матану

**Disclaymer:** доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

Экзамен - это тропя

---

*Коновалов Сергей Петрович*

## 1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

### 1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Определение 1.1.1:** Пусть имеется правило, которое каждому натуральному числу  $n$  ставит в соответствие некоторое  $x_n$  из множества  $G$ . Тогда **последовательностью** называется множество всевозможных упорядоченных пар  $(n, x_n), n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 1.1.2:** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется **ограниченной сверху (снизу)**, если

$$\exists M(m) : x_n \leq M \ (x_n \geq M) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Определение 1.1.3:** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу.

**Определение 1.1.4:** Последовательность называется **строго возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1} \ (x_n > x_{n+1}).$$

**Определение 1.1.5:** Последовательность  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  называется **подпоследовательностью** последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если

$$\forall k \in \mathbb{N} : \exists n = n_k : y_k = x_{n_k},$$

где последовательность  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  - строго возрастающая. Эта последовательность обозначается  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ .

**Определение 1.1.6:** Последовательность отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  называется **последовательностью вложенных отрезков**, если

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

**Теорема 1.1.1** (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

**Определение 1.1.7:** Число  $x_0$  называется **пределом последовательности**  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_{\varepsilon} : |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

**Теорема 1.1.2** (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство:* Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков  $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$  содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть  $[a_2, b_2]$  – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз, получим последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать  $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ , причём так, чтобы  $n_k > n_{k-1}$ . Очевидно,  $n_1 = 1$ . Существование предела также очевидно:

$$0 \leq |c - x_{n_k}| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

□

## 1.2. Критерий Коши

**Определение 1.2.1:** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется **фундаментальной**, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

**Теорема 1.2.1** (Критерий Коши сходимости числовой последовательности):  
Числовая последовательность сходится  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна.

*Доказательство:*  $\Rightarrow$  По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - l + l - x_n| \leq |x_{n+p} - l| + |x_n - l| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$  Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon := 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1) \leq x_n \leq \max(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l| \leq |x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}| + |x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l| < \varepsilon$$

□

## 2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

### 2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

**Определение 2.1.1:** Множество  $E \subset \mathbb{R}$  называется **ограниченным сверху** (снизу), если

$$\exists M(m) \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq M(x \geq m).$$

В таком случае  $M(m)$  называется **верхней** (нижней) **гранью** множества  $E$ .

**Определение 2.1.2:** Множество  $E \subset \mathbb{R}$  называется **ограниченным**, если оно ограничено и сверху, и снизу.

**Определение 2.1.3:** Число  $M$  называется **точной верхней гранью** множества  $E$  и обозначается  $\sup E$ , если

1.  $\forall x \in E : x \leq M$ ;
2.  $\forall M' < M : \exists x \in E : x > M'$ .

**Определение 2.1.4:** Число  $m$  называется **точной нижней гранью** множества  $E$  и обозначается  $\inf E$ , если

1.  $\forall x \in E : x \geq m$ ;
2.  $\forall m' > m : \exists x \in E : x < m'$ .

**Теорема 2.1.1** (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество  $E \subset \mathbb{R}$  имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

**Теорема 2.1.2** (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

**Определение 2.1.5:** Пусть  $D$  и  $Y$  – два произвольных множества, и задано некоторое правило  $f$ , которое каждому элементу  $x \in D$  ставит в соответствие один и только один некоторый элемент  $y = f(x)$  из  $Y$ . Тогда множество всевозможных пар  $(x, f(x)), x \in D$  называется **функцией**.

**Определение 2.1.6:** Пусть  $f$  – функция, а  $D_f$  – её область определения. Тогда  $c$  называется **пределом по Коши** функции  $f$  в точке  $x_0 \in D_f$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f : |x - x_0| < \delta : |f(x) - c| < \varepsilon.$$

**Определение 2.1.7:** Последовательностью Гейне функции  $f$  в точке  $x_0$  называется последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f$ , если

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

**Определение 2.1.8:** Пусть  $f$  – функция, а  $D_f$  – её область определения. Тогда  $c$  называется **пределом по Гейне** функции  $f$  в точке  $x_0 \in D_f$ , если

$$\forall \{x_n\} - \text{последовательности Гейне} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

**Теорема 2.1.3:** Определения функции по Коши и по Гейне эквивалентны.



**Определение 2.1.9:** Пусть  $f$  определена в некоторой окрестности  $U_{\delta_0}(x_0)$ , где  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется **непрерывной в точке**  $x_0$ .

**Определение 2.1.10:**  $f$  называется **непрерывной на множестве**  $X \subset \mathbb{R}$ , если

$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \underbrace{\forall x \in X, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}_{!!!}$$

**Теорема 2.1.4** (Первая теорема Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $f$  ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство:* От противного, пусть  $f$  неограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = +\infty$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Причём  $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$ , то есть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

Однако из  $f(x_n) > n$  следует, что  $f(x_0) = \infty$ . Противоречие.  $\square$

## 2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

**Теорема 2.2.1** (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\exists x', x'' \in [a, b] : f(x') = \sup_{x \in [a, b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

*Доказательство:* Пусть  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Тогда по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

В том числе для  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением  $k \rightarrow \infty$  в неравенстве  $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$ .

Таким образом,  $M$  действительно достигим функцией  $f$  в точке  $x_0$ . Для инфимума аналогично.  $\square$

### 3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

**Теорема 3.1** (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \forall e \in (c, d) : \exists \gamma \in [a, b] : f(\gamma) = e$$

*Доказательство:* Рассмотрим частный случай  $c < e = 0 < d$ .

Построим последовательность отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $[a_1, b_1] = [x_1, x_2]$  (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что  $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ .

Рассмотрим  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ . Какие могут быть случаи?

- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ , то мы победили и останавливаемся.
- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$ , то  $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ .
- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$ , то  $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$ .

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:

$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора  $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ , причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma \in [a, b]$$

Тогда в силу непрерывности  $f$ :

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Заметим, что после каждой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим

$$f^2(\gamma) \leq 0$$

Из чего следует  $f(\gamma) = 0$ .

В общем случае рассматривается вспомогательная функция  $F(x) = f(x) - e$ . □

### 4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

#### 4.1. Теорема Ролля

**Определение 4.1.1:** Пусть  $f$  определена в некоторой  $\delta_0$  окрестности точки  $x_0$ . Если

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

то  $x_0$  – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения **локального минимума**, а также **строгие** экстремумы, в которых неравенство строгое.

**Определение 4.1.2:** Пусть  $f$  – функция,  $D_f$  – ее область определения,  $x_0 \in D_f$ . Тогда **производной**  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

**Определение 4.1.3:** Число  $A$  называется **правосторонним пределом** функции  $f$  в точке  $a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Определение 4.1.4:** Число  $A$  называется **левосторонним пределом** функции  $f$  в точке  $a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Определение 4.1.5:** **Правой производной** функции  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

**Определение 4.1.6:** **Левой производной** функции  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

**Теорема 4.1.1:** Функция  $f$ , определенная в некоторой окрестности точки  $x_0$  имеет производную в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда она имеет обе односторонние производные в этой точке, и эти производные равны.

**Определение 4.1.7:** Функция  $f$  называется **дифференцируемой** в точке  $x_0$ , если она определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и в этой точке имеет конечную производную.

**Теорема 4.1.2** (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если  $x_0$  – точка локального экстремума функции  $y = f(x)$ , дифференцируемой в  $x_0$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство:* БОО  $x_0$  – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в  $x_0$  остаётся лишь быть равной нулю.  $\square$

**Теорема 4.1.3** (Ролля): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ , причём  $f(a) = f(b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

*Доказательство:* Заметим, что если  $f \equiv \text{const}$ , то утверждение тривиально.

Иначе,  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m, M : m < M : m = \min_{x \in [a, b]} f(x); \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Заметим, что либо  $m \neq f(a)$ , либо  $M \neq f(a)$ .

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке  $c \in (a, b)$ , а по теореме Ферма мы знаем, что  $f'(c) = 0$ .  $\square$

## 4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

**Теорема 4.2.1** (Обобщённая теорема о среднем): Если  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

*Доказательство:* Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что  $h$  всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$

То есть  $h$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано.  $\square$

**Теорема 4.2.2** (Лагранжа о среднем): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

*Доказательство:* В обобщённой теореме о среднем возьмём  $g(x) = x$ .  $\square$

**Теорема 4.2.3** (Коши о среднем): Если  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ , то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство:* Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему  $g(b) - g(a) \neq 0$ , чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы  $g(b) = g(a)$ , то по теореме Ролля  $\exists c : g'(c) = 0$ , что противоречит с условием текущей теоремы.  $\square$

## 5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

### 5.1. Остаточный член в форме Лагранжа

**Лемма 5.1.1:** Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $\exists!$  многочлен  $P_n(f, x)$  степени  $\leq n$  такой, что

$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P'_n(f, x_0); \dots; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$

Этот многочлен имеет вид

$$P_n(f, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

и называется **многочленом Тейлора** степени  $n$  относительно точки  $x_0$ .

*Доказательство:* Проверяется банальной подстановкой.  $\square$

**Лемма 5.1.2** (Об отношении): Если  $\varphi, \psi$   $(n+1)$  раз дифференцируемы в  $U_\delta(x_0)$ , причём

$$\forall k = \overline{0, n} : \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$

но

$$\forall k = \overline{0, n} : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \psi^{(k)}(x) \neq 0$$

то

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

*Доказательство:* Заметим, что  $\varphi, \psi$  удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда

$$\exists \xi_{\dots} \in (x_0, x) : \frac{\overbrace{\varphi(x) - \varphi(x_0)}^0}{\underbrace{\psi(x) - \psi(x_0)}_0} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\overbrace{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}^0}{\underbrace{\psi'(\xi_1) - \psi'(x_0)}_0} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

$\square$

**Теорема 5.1.1** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа):

Если  $f$   $(n+1)$  раз дифференцируема в  $U_\delta(x_0)$ ,  $\delta > 0$ , то  

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

*Доказательство:* Сведём к предыдущей лемме об отношении:

$$\varphi(x) := f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) := (x - x_0)^{n+1}$$

Все требуемые свойства проверяются очевидно.  $\square$

## 5.2. Остаточный член в форме Пеано

**Определение 5.2.1:** Пусть функции  $f(x), g(x)$  определены на множестве  $X$ .

Тогда  $f(x)$  есть **о-малое** от  $g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если существует окрестность  $\dot{U}(x_0)$  такая, что

$$\forall x \in \dot{U}(x_0) : f(x) = g(x)\alpha(x),$$

где  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

**Теорема 5.2.1** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано):

Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , то

$$f(x) - P_n(f, x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

где  $P_n(f, x)$  — многочлен Тейлора степени  $n$  функции  $f$  относительно  $x_0$ .

*Доказательство:* По определению, если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке, то она  $n-1$  раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая  $n-1$ :

$$\varphi(x) := f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$

Получим, что

$$\exists \xi \in (x_0, x) : \frac{f(x) - P_n(f, x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)}$$

Заметим, что при  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \xi \rightarrow x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(f, x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)} = \frac{1}{n!} (f(x_0) - P_n(f, x_0))^{(n)} = 0$$

$\square$

## 6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

### 6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

**Теорема 6.1.1** (Предельный переход в неравенстве): Пусть заданы две последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  и, начиная с некоторого  $N : \forall n > N : x_n \leq y_n$ , то  $a \leq b$ .

**Теорема 6.1.2:** Пусть  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда

1.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$  — неубывающая на  $(a, b)$
2.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$  — невозрастающая на  $(a, b)$
3.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$  — возрастающая на  $(a, b)$
4.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$  — убывающая на  $(a, b)$

*Доказательство:*

1.  $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$  По теореме Лагранжа:

$$\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$$

То есть для произвольных  $x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Обратно, пусть  $f(x)$  неубывающая. Тогда

$$\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign}(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign } \Delta x$$

Ну и тогда при  $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$ :

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.

2. Аналогично предыдущему пункту
3. Контрпримером для  $\Leftarrow$  является  $f(x) = x^3$  в точке 0
4. Контрпримером для  $\Leftarrow$  является  $f(x) = -x^3$  в точке 0

□

## 6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

**Теорема 6.2.1** (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть  $f$  непрерывна в  $U_{\delta_0}(x_0)$  и дифференцируема в  $\dot{U}_{\delta_0}(x_0), \delta_0 > 0$ :

1. Если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$ , то  $x_0$  — точка строгого локального максимума  $f$
2. Если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$ , то  $x_0$  — точка строгого локального минимума  $f$

*Доказательство:* По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы. □

**Теорема 6.2.2** (Второе достаточное условие локального экстремума): Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, n-1} : f^{(k)}(x_0) = 0$ , то

1. Если  $n$  чётно, то  $f$  имеет в точке  $x_0$  локальный минимум при  $f^{(n)}(x_0) > 0$  и локальный максимум при  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .
2. Если  $n$  нечётное, то  $f$  не имеет локального экстремума в точке  $x_0$ .

*Доказательство:*

1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

Так как  $n$  чётно, то  $n = 2m$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \rightarrow x_0$$

Левая часть в некоторой окрестности точки  $x_0$  имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность  $f(x) - f(x_0)$  одного знака с  $n$ -ой производной.

2. Рассмотрим  $f(x) = x^3$ .

□

### 6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

**Определение 6.3.1:**  $f$  называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на  $(a, b)$ , если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над  $(a, b)$ .

$f$  называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на  $(a, b)$ , если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над  $(a, b)$ .

**Определение 6.3.2:** Для числовой функции выпуклость вверх (вниз) можно определить как выполнение **неравенства Йенсена**:

$$\forall x, y : \forall t \in [0, 1] : f(tx + (1 - t)y) \geq (\leq) tf(x) + (1 - t)f(y).$$

**Теорема 6.3.1:** Пусть  $f$  дважды дифференцируема на  $(a, b)$ :

1.  $f$  выпукла вниз на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$ .
2.  $f$  выпукла вверх на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$ .
3.  $f$  строго выпукла вниз на  $(a, b) \Leftarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$ .
4.  $f$  строго выпукла вверх на  $(a, b) \Leftarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$ .

*Доказательство:*

1.  $\Leftarrow$  Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:



$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0, 1] :$$

$$x_t := tx_0 + (1-t)x_1 : f(x_t) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим  $f$  в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке  $x_t$ :

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$

$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:

$$f(x_0) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$

$$f(x_1) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на  $t$ , второе на  $1-t$  и сложим их:

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \geq f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_0$$

$\Rightarrow$  Рассмотрим произвольную точку  $x_0 \in (a, b)$  и достаточно малую окрестность  $\delta := \min(x_0 - a, b - x_0)$ . Тогда

$$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - u) + \frac{1}{2}(x_0 + u) : f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u)$$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \rightarrow 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря  $\pm$ , давайте умножим каждое на  $\frac{1}{2}$  и сложим их:

$$\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \rightarrow 0$$

Тогда при достаточно малых  $u$   $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$  обязано будет стать такого же знака, как и  $\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \geq 0$

2. Аналогично
3.  $\Leftarrow$  аналогично только со строгими неравенствами, а  $\Rightarrow$  вообще говоря не верно, например, для  $f(x) = x^4$
4.  $\Leftarrow$  аналогично только со строгими неравенствами, а  $\Rightarrow$  вообще говоря не верно, например, для  $f(x) = -x^4$

□

## 7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

**Определение 7.1:** Метрическим пространством  $(X, \rho)$  называется множество  $X$  такое, что на  $X \times X$  определена числовая функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  такая что:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ , причём  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

**Определение 7.2:** Компактным множеством в метрическом пространстве  $X$  называется такое множество  $K$ , что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**Определение 7.3:** Множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  называется **ограниченным**, если:  

$$\exists r \geq 0 : \forall M \in E : |OM| \leq r,$$
 где  $O = (0, 0, \dots, 0)$ .

**Определение 7.4:** Точка  $x_0 \in E$  называется **изолированной**, если:  

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap E = \{x_0\}.$$

**Определение 7.5:** Точка  $x_0 \in E$  называется **внутренней**, если:  

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq E.$$

**Определение 7.6:** Точка  $x_0 \in E$  называется точкой **прикосновения**, если:  

$$\forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap E \neq \emptyset.$$

**Определение 7.7:** Множество всех точек прикосновения  $E$  называется **замыканием** этого множества  $\overline{E}$ .

**Определение 7.8:** Множество  $E$  называется **замкнутым**, если  $E = \overline{E}$ .

**Определение 7.9:** Множество всех внутренних точек  $E$  называется **внутренностью** этого множества  $\text{int } E$ .

**Определение 7.10:** Множество  $E$  называется **открытым**, если  $E = \text{int } E$ .

**Теорема 7.1:** Дополнение замкнутого множества – открытое множество, и наоборот.

**Теорема 7.2:** В  $\mathbb{R}^n$  верно следующее утверждение:

$$E - \text{компактное} \Leftrightarrow \begin{cases} E \text{ ограниченное} \\ E \text{ замкнутое} \end{cases}$$

**Теорема 7.3:** Множество  $E$  является компактным в  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E : \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in E$

**Определение 7.11:** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $X$  – метрическое пространство, называется равномерно непрерывной на множестве  $X' \subset X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X' : \rho(x_1, x_2) < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

**Теорема 7.4** (Кантора о равномерной непрерывности): Если  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на компактном множестве  $K \subset \mathbb{R}^n$ , то она равномерно непрерывна на  $K$ .

*Доказательство:* От противного, выпишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in K : \|x_1 - x_2\| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Выбирая  $\delta := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, \dots$  построим последовательность пар из отрицания непрерывности:  $\{(x_{1,m}, x_{2,m})\}_{m=1}^{\infty} \subset K^2$ .

Причём

$$\forall m \in \mathbb{N} : \|x_{1,m} - x_{2,m}\| < \frac{1}{m} : |f(x_{1,m}) - f(x_{2,m})| \geq \varepsilon$$

По одному из определений компактности выделим из последовательности пар подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты:

$$\exists \{(x_{1,m_k}, x_{2,m_k})\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,m_k} = x_0 \in K$$

Причём заметим, что (комбинируем то, как мы строили последовательность пар и сходимости первых координат подпоследовательности):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > 0 : \|x_{2,m_k} - x_0\| \leq$$

$$\|x_{1,m_k} - x_0\| + \|x_{1,m_k} - x_{2,m_k}\| < 2\varepsilon$$

То есть

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,m_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2,m_k} = x_0 \xRightarrow{\text{непрерывность } f} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{1,m_k}) - f(x_{2,m_k})) &= 0 \end{aligned}$$

Противоречие! □

## 8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

**Определение 8.1:** Пусть  $f$  определена в некоторой окрестности  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Полным приращением**  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$$

$f$  называется **дифференцируемой** в  $x_0$ , если

$$\Delta f(x_0) = (A, \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \Delta x \rightarrow 0$$

где  $A \in \mathbb{R}^n$  называется **градиентом**:  $\text{grad } f(x_0) = A$

**Определение 8.2:** Дифференциалом дифференцируемой в  $x_0$  функции  $f$  назовём выражение  $(A, \Delta x)$  из определения дифференцируемости.

**Определение 8.3:** Частной производной в точке  $x_0$  называется предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j} + \Delta x, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j}, \dots, x_{0,n})}{\Delta x}$$

**Теорема 8.1** (Необходимое условие дифференцируемости): Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , то существуют частные производные  $\forall j = \overline{1, n}$ , причём

$$\text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

*Доказательство:* Сразу следует из определения - есть предел по всем многомерным приращениям, а значит и по однокоординатным в том числе.  $\square$

**Теорема 8.2** (Достаточное условие дифференцируемости): Если  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в  $x_0$ , то  $f$  дифференцируема в  $x_0$ .

*Доказательство:* Воспользуемся  $n$  раз «умным нулём», каждый из которых будет «снимать» приращение по одной из координат:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0) &= \\
&f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) + \\
&f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1}, x_{0,n}) \\
&\quad + \dots + \\
&f(x_{0,1} + \Delta x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, \xi_n) \Delta x_n + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-2} + \Delta x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_{0,n}) \Delta x_{n-1} \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \Delta x_1 \stackrel{\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \forall n: \xi_n \rightarrow 0}{=} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \Delta x_i + o(\|\Delta x\|), \Delta x \rightarrow 0
\end{aligned}$$

□

## 9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

**Определение 9.1:** Кубом радиуса  $\delta$  вокруг точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  назовём

$$K_{\delta, x_0} = \times_{k=1}^n (x_0^k - \delta, x_0^k + \delta)$$

где под  $\times$  подразумевается декартово произведение.

**Теорема 9.1:** Пусть  $F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$  дифференцируема в окрестности точки  $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0)$ .

Её производная  $\frac{\partial F}{\partial y}$  непрерывна в этой окрестности, причём  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$ :

$$\forall x \in K_{\delta, x_0} : \exists! y = \varphi(x) : \forall (x, y) \in K_{\delta, x_0} \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) :$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x), \text{ причём } \exists \varphi'(x_0)$$

*Доказательство:* БОО будем считать, что  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ .

По непрерывности частной производной,  $\exists$  окрестность точки  $(x_0, y_0)$ , в которой  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ .

Тогда из непрерывности  $F$  по  $y$  и знакоопределённости производной следует

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Расширяем территорию дальше, из непрерывности  $F$  по  $x$  следует

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K_{\delta, x_0} : F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции берём существование, а из знакоопределённости производной единственность:

$$\exists! \varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Заметим, что  $\varphi$  непрерывна по построению в  $(x_0, y_0)$ : мы брали  $x$  из  $2\delta$  окрестности точки  $x_0$ , а значение лежало в  $2\varepsilon$  окрестности точки  $y_0$ .

Теперь докажем дифференцируемость  $\varphi$ , для этого распишем дифференцируемость  $F$ :

$$F(x, y) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_0 =$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) \cdot (x_k - x_0^k) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha(x, y)$$

где  $\alpha = o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|)$ ,  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ .

Воспользуемся умножением на «умную единицу»:

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(x, y) \cdot (x_i - x_0^i)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2} + \frac{\alpha(x, y) \cdot (y - y_0)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Введём новые обозначения:

$$\alpha_i(x, y) := \frac{\alpha(x, y) \cdot (x_i - x_0^i)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}; \quad \beta(x, y) := \frac{\alpha(x, y) \cdot (y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Тогда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) + \alpha_k(x, y) \right) (x_k - x_0^k) + \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(x, y) \right) (y - y_0)$$

Подставляя  $y = \varphi(x)$  в выражение выше, будем использовать новые обозначения:

$$\tilde{\alpha}_k(x) := \alpha_k(x, \varphi(x)); \quad \tilde{\beta}(x) := \beta(x, \varphi(x))$$

Таким образом,

$$\underbrace{F(x, \varphi(x))}_0 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x) \right) (x_k - x_0^k) + \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x) \right) (\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Выразим приращение  $\varphi$ :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))} + \gamma_k(x) \right) (x_k - x_0^k)$$

где

$$\gamma_k(x) := - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)}$$

Остаётся заметить, что  $\tilde{\alpha}_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ ;  $\tilde{\beta}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ , а это значит, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \sum_{k=1}^n A_k(x_k - x_0^k) + \gamma(x); \quad \gamma(x) = o(\|x - x_0\|), x \rightarrow x_0$$

Что и является требуемой дифференцируемостью  $\varphi$  в  $x_0$ .  $\square$

## 10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

### 10.1. Необходимые условия

**Определение 10.1.1:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **локального максимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

**Определение 10.1.2:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **локального минимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$$

**Определение 10.1.3:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **строгого локального максимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) < f(x_0)$$

**Определение 10.1.4:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **строгого локального минимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) > f(x_0)$$

**Теорема 10.1.1** (Необходимые условия локального экстремума): Если  $x_0$  – точка локального экстремума функции  $f(x)$ , дифференцируемой в окрестности точки  $x_0$ , то  $df(x) \equiv 0$ .

*Доказательство:* Рассмотрим для каждого  $k = \overline{1, n}$ :

$$\psi(x_k) = f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n), \quad \text{где } x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$$

Тогда заметим, что  $\psi$  дифференцируема в окрестности  $x_0^k$ , применяя теорему о необходимом условии экстремума функции одного переменного, получим

$$\psi'(x_0^k) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

В силу произвольности  $k$  и того, что дифференциал – это вектор частных производных, получим требуемое.  $\square$

## 10.2. Достаточные условия

**Определение 10.2.1:** Если  $f$  дифференцируема в окрестности точки  $x_0$  и  $df(x_0) \equiv 0$ , то  $x_0$  называется **стационарной точкой** функции  $f$ .

**Теорема 10.2.1** (Достаточные условия локального экстремума): Если  $x_0$  – стационарная точка функции  $f$ , дважды дифференцируемой в точке  $x_0$ , то

1. Если  $d^2f(x_0)$  – положительно определённая квадратичная форма, то  $x_0$  – точка строгого локального минимума функции  $f$
2. Если  $d^2f(x_0)$  – отрицательно определённая квадратичная форма, то  $x_0$  – точка строгого локального максимума функции  $f$
3. Если  $d^2f(x_0)$  – неопределённая квадратичная форма, то  $x_0$  не является точкой локального экстремума

*Доказательство:*

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(\rho^2), \rho \rightarrow 0$$

где

$$dx_k = x_k - x_0^k, k = \overline{1, n}; \quad \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_0^k)^2} = \|dx\|_2$$

Тогда (в условиях  $df(x_0) \equiv 0$  и  $\xi_k := \frac{dx_k}{\|dx\|}$ ):

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(\rho^2) = \frac{1}{2}\rho^2 \left( \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \xi_i \xi_j}_{F(\xi_1, \dots, \xi_n)} + o(1) \right), \rho \rightarrow 0$$

В следствие нормировки, очевидно,  $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$ .

Таким образом, минимум введённого функционала  $F$  на сфере (компактной в  $\mathbb{R}^n$ ) будет достигаться:

$$\min_{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1} F(\xi_1, \dots, \xi_n) =: C > 0$$

Таким образом, для достаточно маленьких  $\rho$ :

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{C}{4}\rho^2 > 0$$

2. Аналогично

3. Вводим  $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$  аналогично предыдущим пунктам, из-за того что  $d^2f$  – неопределённая, то

$$\exists \xi_1(x_1), \xi_2(x_2) : F(\xi_1^1, \dots, \xi_1^n) > 0 \wedge F(\xi_2^1, \dots, \xi_2^n) < 0$$

Тогда при достаточно малых  $\rho$ :

$$\text{sign}(f(x_1) - f(x_0)) = \text{sign} F(\xi_1) > 0; \text{sign}(f(x_2) - f(x_0)) = \text{sign} F(\xi_2) < 0$$

Что и требовалось.

□

### 10.3. Условный экстремум

**Определение 10.3.1:** Пусть  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  заданы на множестве  $G \subset R^n$ , причем  $m < n$ .

Тогда  $x_0 \in G$  называется точкой *условного локального экстремума* если  $\forall x \in U_{\delta(x_0)} \wedge \varphi_i(x) = 0 : f(x) \leq (\geq) f(x_0)$

**Лемма 10.3.1:**

Пусть  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  непрерывно дифференцируемы в окрестности  $x_0$ , причем ранг якобины  $\frac{\partial \varphi_1 \dots \varphi_m}{\partial x_1 \dots x_n}$  максимален ( $= m$ )

БОО считаем, что главный минор не нулевой

Тогда задача поиска локального экстремума эквивалентна задаче поиска безусловного

*Доказательство:* В силу теоремы о неявной функции,  $\exists \psi_1 \dots \psi_n$

$$x_i = \psi_{i(x_m, \dots, x_n)} \Leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$



Отсюда

$$dx_i = d\psi_{i(x_m, \dots, x_n)} \Leftrightarrow d\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Тогда:  $F(x_1, \dots, x_n) = F(\psi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \psi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n)$ . То есть это действительно задача безусловного экстремума.

□

**Определение 10.3.2:** Функцией Лагранжа в условиях задачи поиска экстремума для функции  $F$  называется функция  $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = F + \sum \lambda_i \varphi_i$

**Теорема 10.3.1:** *Необходимые условия локального экстремума*

Пусть  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  дифференцируемы в окрестности  $x_0$ .  $x_0$  точка локального экстремума, при выполнении условий связи, и максимальности ранга Якобина.

Тогда  $\exists! \lambda_1, \dots, \lambda_m : (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$  стационарная точка функции Лагранжа.

*Доказательство:* Сведем как показано выше задачу к безусловному экстремуму  $F(x_{m+1}, \dots, x_n)$ , тогда  $dF = 0 \Rightarrow \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = 0$ . Где  $dx_i = d\psi_i \forall i \in 1 \dots m$ .

Тогда в силу продифференцированных условий связи  $d\varphi_i = 0$ .

Отсюда  $dF + \sum \lambda_j d\varphi_j = 0$ . То есть  $\sum_{j=m+1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right) dx_j = 0$

Тогда в точке  $x_0$  составим систему уравнений на  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , чтобы  $\sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right) dx_j = 0$ . У неё существует единственное решение.

Следовательно  $\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j}(x_0) dx_j = 0$

Заметим, что  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = \varphi_k = 0$ .

Итого  $dL = 0$

□

**Определение 10.3.3:** Обозначим  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0)$  второй дифференциал функции Лагранжа как функции только от  $x$ . Причем эта квадратичная форма рассматривается как форма от переменных  $dx_1 \dots dx_n$  починенных уравнению связи.

**Теорема 10.3.2:** *Достаточное условие условного экстремума* Пусть  $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности  $x_0$ .  $x_0$  точка локального экстремума, при выполнении условий связи, и максимальности ранга Якобина,  $(x_0, \lambda_0)$  стационарная точка функции Лагранжа. Тогда если

1.  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0)$  положительно определена то это усл минимум
2.  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0)$  отрицательно определена то это усл максимум
3.  $d_{xx}^2 L(x_0, \lambda_0)$  неопределённая то это не экстремум

## 11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

### 11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

**Определение 11.1.1:** Разбиением  $P$  отрезка  $[a, b]$  называется конечное множество точек отрезка  $[a, b]$ :

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}; k = \overline{1, n}$$

**Определение 11.1.2:** Диаметром разбиения  $P$  называется

$$\Delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

**Определение 11.1.3:** Верхней суммой Дарбу разбиения  $P$  функции  $f$  называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

**Определение 11.1.4:** Нижней суммой Дарбу разбиения  $P$  функции  $f$  называется

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

**Определение 11.1.5:** Функция  $f$  называется интегрируемой по Риману на  $[a, b]$  ( $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P : U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

**Определение 11.1.6:** Интегралом Римана интегрируемой по Риману на  $[a, b]$  функции  $f$  называется

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f)$$

**Теорема 11.1.1** (Основные свойства интеграла Римана):

1. (Линейность) Если  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , причём

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

Кроме того,  $\forall c \in \mathbb{R}$  выполняется, что  $cf_1 \in \mathcal{R}[a, b]$ , причём

$$\int_a^b cf_1(x) dx = c \int_a^b f_1(x) dx$$

2. (Монотонность) Если  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] : f_1(x) \leq f_2(x)$ , то

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

3. (Аддитивность):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, c] \wedge f \in \mathcal{R}[c, b]$$

$$\text{Причём } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. (Оценка) Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

**Теорема 11.1.2** (Критерий Лебега): Функция интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ , тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет нулевую меру Лебега.

**Теорема 11.1.3** (Достаточные условия интегрируемости по Риману):

1. Непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем;
2. Ограниченная на отрезке функция, разрывная в конечном числе его точек, интегрируема на этом отрезке;
3. Монотонная на отрезке функция, интегрируема на нем;
4. Произведение интегрируемой функции на число интегрируемо;
5. Сумма интегрируемых функций интегрируема;
6. Произведение интегрируемых функций интегрируемо;
7. Если отношение двух интегрируемых функций ограничено, то оно интегрируемо. Частный случай – если множество значений знаменателя не имеет 0 предельной точкой;
8. Модуль интегрируемой функции интегрируем.

**Определение 11.1.7:** Пусть  $\forall b' \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, b']$ . Тогда  $F(b') = \int_a^{b'} f(x) dx$  называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Будем считать, что  $F(a) = 0$ , а для  $\alpha > \beta$ :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

**Теорема 11.1.4** (Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом): Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , то интеграл с переменным верхним пределом  $F(x)$  непрерывен на  $[a, b]$ .

Если, кроме того,  $f$  непрерывна в  $x_0 \in [a, b]$ , то  $F(x)$  дифференцируема в  $x_0$ , причём  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

*Доказательство:* Непрерывность следует из комбинирования свойств аддитивности и оценки:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \wedge x_2 - x_1 < \frac{\varepsilon}{M} : |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \leq M(x_2 - x_1) < \varepsilon$$

В условиях непрерывности  $f$ , докажем, что производная интеграла действительно равна  $f(x_0)$ :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} |f(t) - f(x_0)|$$

Благодаря непрерывности  $f$  мы знаем, что при  $x \rightarrow x_0$  сможем оценить итоговый супремум сверху  $\varepsilon$ .  $\square$

## 11.2. Формула Ньютона-Лейбница

**Определение 11.2.1:** Первообразной функции  $f$  на  $[a, b]$  называется такая дифференцируемая на  $[a, b]$  функция  $F$ , что

$$\forall t \in [a, b] : F'(t) = f(t)$$

**Определение 11.2.2:** Интегральной суммой  $S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$  называется

$$\sum_{i=1}^n \overline{f(t_i)} \Delta x_i$$

где  $P : a = x_0 < \dots < x_n = b, \forall i = \overline{1, n} : t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

**Теорема 11.2.1** (Интеграл как предел интегральных сумм):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$$

При этом  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$

**Теорема 11.2.2** (Основная теорема интегрального исчисления): Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  имеет первообразную  $F$  на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

*Доказательство:* Для любого разбиения  $P$ :

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{телескопическая сумма}}{=} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \stackrel{\text{теорема Лагранжа}}{=} \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Устремляя  $\Delta(P) \rightarrow 0$  получим, что  $F(b) - F(a)$  равно требуемому интегралу по эквивалентному определению.  $\square$

## 12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

### 12.1. Непрерывность суммы функционального ряда

**Определение 12.1.1:** Функциональная последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится равномерно на  $E$  к функции  $f(x)$  ( $f_n \rightrightarrows f$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Определение 12.1.2:** Функциональная последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится поточечно на  $E$  к функции  $f(x)$ , если

$$\forall x \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Теорема 12.1.1** (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n \rightrightarrows_E f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

**Определение 12.1.3:** Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ , если равномерно сходится на  $E$  функциональная последовательность  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$

**Теорема 12.1.2** (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ равномерно сходится на } E \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

**Теорема 12.1.3** (Предельный переход в равномерно сходящихся последовательностях): Если  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится к  $f$  на множестве  $E$  метрического пространства,  $x_0$  – предельная точка  $E$ , причём

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

То есть оба предела существуют и равны.

*Доказательство:* Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Совершим предельный переход  $x \rightarrow x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon$$

То есть числовая последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет какой-то предел  $a$ , теперь нужно установить, что он равен пределу предельной функции:

$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

Стоит упомянуть про кванторы:

- Берём номер  $N$  больший  $N_1$  для равномерного предела функций и  $N_2$  для числового предела  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$
- $\delta$ -окрестность  $x_0$  меньшую требуемой для фиксированного  $f_N(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_N$

□

**Следствие 12.1.3.1:** Если  $f_n(x)$  непрерывна на  $E$ ,  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ , то  $f$  непрерывна на  $E$ .

**Теорема 12.1.4** (Предельный переход в функциональных рядах): Если  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ ,  $x_0$  – предельная точка  $E$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} :$   
 $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

*Доказательство:* Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

## 12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда

**Теорема 12.2.1** (Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности): Если  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$  интегрируемы по Риману на  $[a, b]$  и  $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$ , то  $f$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

*Доказательство:* Воспользуемся тем, что каждый элемент функциональной последовательности интегрируем:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \exists P : U(P, f_n) - L(P, f_n) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Далее определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Итак, оценим верхнюю сумму Дарбу предела:

$$\begin{aligned} U(P, f) &= \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k \leq \\ &\sum_{k=1}^n \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) \Delta x_k = U(P, f_n) + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Аналогично для нижней:

$$L(P, f) \geq L(P, f_n) - \frac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом,

$$U(P, f) - L(P, f) \leq U(P, f_n) - L(P, f_n) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Мы доказали интегрируемость  $f$ , осталось доказать, что интеграл равен тому, что надо:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon$$

□

**Теорема 12.2.2** (Интегрирование функциональных рядов): Если  $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $[a, b]$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

*Доказательство:* Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

### 12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда

**Теорема 12.3.1** (Дифференцирование функциональных последовательностей): Если

1.  $f_n$  дифференцируемы на  $(a, b)$
2.  $f'_n \rightrightarrows$  на  $(a, b)$
3.  $\exists x_0 \in (a, b) : f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

То

1.  $f_n \rightrightarrows f$  на  $(a, b)$
2.  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$
3.  $f'_n \rightarrow f'$  на  $(a, b)$

*Доказательство:* Используем равномерную сходимость производных:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (a, b) : |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

А также сходимость самих функций в точке  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Применим теорему Лагранжа для непрерывных  $f_n$  между произвольной точкой  $x$  и фиксированной  $x_0$ :

$$\exists \xi \in \{x, x_0\} : |(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))| = |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0|$$

Тогда мы можем доказать фундаментальность самой последовательности:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| + |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| < \varepsilon$$

Значит по критерию Коши  $f_n \rightrightarrows f$  на  $(a, b)$ .

Остаётся доказать дифференцируемость  $f$  в произвольной точке  $x \in (a, b)$ , для этого введём вспомогательные функции:

$$\varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}; \quad \varphi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Докажем фундаментальность  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ :

$$|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| = \frac{|(f_{n+p}(t) - f_n(t)) - (f_{n+p}(x) - f_n(x))|}{t - x} \stackrel{\text{теорема Лагранжа}}{=} |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Получили, что  $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$  на  $A := (a, b) \setminus \{x\}$ .

Заметим, что  $x$  — предельная точка  $A$ , тогда применим теорему о непрерывном поточечном пределе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x, t \in A} \varphi_n(t) = \lim_{t \rightarrow x, t \in A} \varphi(t) = f'(x)$$

Заметим, что этими равенствами мы доказываем как существование, так и равенство пределов.  $\square$

## 13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

### 13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда

**Определение 13.1.1:** Ряд  $\sum_{n=0}^\infty c_n(z - z_0)^n$ , где  $\{c_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$  называется степенным рядом с центром в точке  $z_0$  и коэффициентами  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ .

**Определение 13.1.2:** Радиусом сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^\infty c_n(z - z_0)^n$  называется

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}; \quad 0 \leq R \leq +\infty$$



**Теорема 13.1.1** (Коши-Адамара): Если  $R \in [0, +\infty]$  – радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ , то

1.  $\forall z, |z - z_0| < R$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  сходится, притом абсолютно
2.  $\forall z, |z - z_0| > R$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  расходится

*Доказательство:*

1. Пусть  $|z - z_0| =: r < R$ .

Возьмём произвольный  $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$ . По определению верхнего предела:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho}$$

Тогда:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |c_n(z - z_0)^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \quad \frac{r}{\rho} < 1$$

По теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимся числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказано.

2. Пусть  $|z - z_0| > R$ , то есть  $\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{R}$ . Значит по плотности действительных чисел:

$$\exists \varepsilon > 0 : \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z - z_0| \geq \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$

По определению верхнего предела:

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \forall k \in \mathbb{N} : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow$$

$$|a_{n_k} z^{n_k}| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geq 1$$

Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

**Теорема 13.1.2** (Равномерная сходимость степенного ряда): Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  имеет радиус сходимости  $R > 0$ , то он сходится равномерно в любом круге  $|z - z_0| \leq r$ , где  $0 < r < R$

*Доказательство:*  $|z - z_0| = r < R \Rightarrow$  по теореме Коши-Адамара  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  сходится абсолютно, то есть  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$

Тогда для любого  $z$  из рассматриваемого круга справедлива оценка

$$|c_n(z - z_0)^n| \leq |c_n| r^n$$

А значит по теореме Вейерштрасса имеется равномерная сходимость. □

**Теорема 13.1.3** (Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов): Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ , где  $|x-x_0| < R, R > 0$ . Тогда

1.  $f(x)$  бесконечно дифференцируема  $\forall x, |x-x_0| < R$ , причём
 
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$$
2.  $f(x)$  интегрируема по Риману  $\forall x, |x-x_0| < R$  на отрезке с концами  $x_0, x$ , причём

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

3. Все степенные ряды, упомянутые в пунктах 1, 2 имеют радиус сходимости  $R$ .
4.  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

*Доказательство:* Если мы возьмём  $x : |x-x_0| = r < R$ , то на отрезке  $[x_0, x]$  ряд для  $f(x)$  сходится равномерно, а значит мы можем его почленно интегрировать по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

Радиус сходимости дифференцированного (и, вообще говоря, интегрированного) ряда не меняется, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . А значит он также равномерно сходится на  $[x_0, x]$ , поэтому мы можем применить теорему о дифференцировании функционального ряда.

Заметим, что  $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$ , что и требовалось.  $\square$

## 13.2. Ряд Тейлора

**Определение 13.2.1:** Если  $f$  бесконечно дифференцируема в точке  $x_0$ , то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

называется её **рядом Тейлора** с центром в точке  $x_0$ .

Если  $x_0 = 0$ , то ряд Тейлора называется **рядом Маклорена**.

**Теорема 13.2.1** (Достаточное условие представимости функции рядом Тейлора): Если  $f$  бесконечно дифференцируема на  $(x_0-h, x_0+h)$ , причём

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in (x_0-h, x_0+h) : |f^{(n)}(x)| \leq M$$

То  $f(x)$  представима своим рядом Тейлора в точке  $x_0$  при всех  $x \in (x_0-h, x_0+h)$

*Доказательство:* По теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}; \quad \xi \in (x_0, x)$$

Следовательно

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \right| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Почему  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ? Заметим, что  $n$ -ый элемент разложения экспоненты (имеющий бесконечный радиус сходимости, поэтому для неё априори он существует) в ряд Маклорена – это  $\frac{x^n}{n!}$ , а по необходимому условию сходимости ряда, он стремится к 0 равномерно.  $\square$

## 14. Теорема об ограниченной сходимости для интеграла Лебега

**Определение 14.1:** Пусть  $\langle a, b \rangle$  – конечный промежуток  $([a, b], (a, b), (a, b], [a, b))$

Брусом в  $\mathbb{R}^n$  назовём

$$P = \times_{k=1}^n \langle a_k, b_k \rangle$$

Объёмом бруса  $P$  назовём число  $|P| = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$

**Определение 14.2:**  $M$  называется элементарным множеством, если оно представимо дизъюнктивным объединением конечного числа брусев.

Объёмом элементарного множества  $M = \bigsqcup_{i=1}^n P_i$  назовём  $|M| = \sum_{i=1}^n |P_i|$

**Лемма 14.1:** Совокупность элементарных множеств является кольцом множеств.

В качестве единицы будем брать  $K_I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ .

Совокупность элементарных подмножеств  $K_I$  образует алгебру множеств.

**Определение 14.3:** Внешней мерой Жордана множества  $A$  называется

$$\mu_{\mathcal{J}}^*(A) = \inf_{A \subset \cup_{i=1}^r M_i} \sum_{i=1}^r |M_i|$$

где инфимум берётся по всем покрытиям множества  $A$  конечным числом элементарных множеств.

**Определение 14.4:** Внешней мерой Лебега множества  $A$  называется

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup_{i=1}^{\infty} M_i} \sum_{i=1}^{\infty} |M_i|$$

где инфимум берётся по всем покрытиям множества  $A$  счётным числом элементарных множеств.

**Определение 14.5:** Пусть  $A \subset K_I$ .

Тогда внутренней мерой Лебега (Жордана) назовём

$$\mu_{*}^{(\mathcal{J})}(A) := 1 - \mu_{\mathcal{J}}^*(K_I \setminus A)$$

**Определение 14.6:** Множество  $A \subset K_I$  называется измеримым по Лебегу (Жордану), если

$$\mu_{(\mathcal{J})}^*(A) = \mu_*(A)$$

При этом общее значение соответствующих внешних и внутренних мер называется просто мерой.

**Теорема 14.1** (Критерий измеримости): Множество  $A \subset K_I$  измеримо по Лебегу (Жордану) тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M_\varepsilon \text{ элементарное} : \mu_{(\mathcal{J})}^*(A \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

**Определение 14.7:** Лебеговым множеством функции  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R \subset \mathbb{R}^n$  называется

$$E_a(f) = \{x \in E \mid f(x) < a\}$$

**Определение 14.8:** Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $E$  – измеримое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , называется **измеримой**, если

$$\forall a \in \mathbb{R} : E_a(f) \text{ измеримое}$$

**Определение 14.9:** Пусть  $f$  – ограниченная измеримая функция, определённая на измеримом по Лебегу множестве  $E$ . И  $Q$  – разбиение области значений функции  $f$ .

Тогда **интегральной суммой Лебега** назовём

$$S(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^N f(t_i) \mu(E_i)$$

где  $E_i = \{x \in E \mid f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}$

**Теорема 14.2** (Критерий/определение интеграла Лебега для ограниченных функций): Если  $f$  – ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве  $E \subset \mathbb{R}^n$ , то она интегрируема по Лебегу на  $E$ , причём

$$\int_E f d\mu(x) = \lim_{\Delta(Q) \rightarrow 0} S(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$$

**Определение 14.10:** Назовём **срезкой** неотрицательной функции  $f$  для  $N \in \mathbb{N}$ :

$$f_{[N]}(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq N \\ N, & f(x) > N \end{cases}$$

**Теорема 14.3** (Критерий/определение интеграла Лебега для измеримых неотрицательных функций): Если  $f$  – измеримая неотрицательная функция, определённая на измеримом множестве  $E$  конечной меры, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E f_{[N]} d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$$

**Теорема 14.4** (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла): Пусть

- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  – измеримые на множестве  $E \subset \mathbb{R}^n$  конечной меры
- $f_m \xrightarrow{\text{п.н.}} f$  на  $E$
- $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq F(x)$  при почти всех  $x \in E$ , где  $F$  – произвольная суммируемая функция на  $E$

Тогда  $f$  суммируема на  $E$ , причём

$$\int_E f d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu(x)$$

*Доказательство:* Совершив предельный переход  $n \rightarrow \infty$  мы можем утверждать, что  $|f(x)| \leq F(x)$  при почти всех  $x \in E$  – значит  $f$  суммируемая на  $E$ .

Осталось доказать равенство интеграла и предела интегралов.

Как мы знаем, из сходимости почти всюду следует сходимость по мере:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n(\varepsilon)) := \{x \in E \mid \|f_n - f\| \geq \varepsilon\} = 0$$

Другими словами

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m > M : \mu(E_m(\varepsilon)) < \delta$$

Оценим разность интеграла и предела интегралов:

$$\left| \int_E (f - f_m) d\mu(x) \right| \leq \int_{E_m} |f_m - f| d\mu(x) + \int_{E \setminus E_m} |f_m - f| d\mu(x) \leq$$

$$2 \int_{E_m} F d\mu(x) + \varepsilon \mu(E \setminus E_m) < \varepsilon (\mu(E) + 2)$$

Что и требовалось. □

## 15. Дифференциальные формы на открытых подмножествах евклидова пространства, оператор внешнего дифференцирования $d$ и его независимость от криволинейной замены координат

### 15.1. Дифференциальные формы, оператор внешнего дифференцирования

В этом и других билетах, связанных с дифференциальными формами введём понятия  $E = \mathbb{R}^n$  – евклидово пространство.

$E^*$  – сопряжённое к нему, ака пространство линейных функционалов ака линейных форм ака ковекторов.

Если мы будем употреблять  $p \in \mathbb{N}$ , то мы имеем ввиду количество векторов

$$x_1, \dots, x_p \in E$$

Если мы будем употреблять  $q \in \mathbb{N}$ , то мы имеем ввиду количество ковекторов  $y^1, \dots, y^q \in E^*$

Обратите внимание на индексы, это важно.

**Определение 15.1.1:** Полилинейной формой валентности  $(p, q)$  называется функция  $U : E^p \times (E^*)^q \rightarrow \mathbb{R}$ , линейная по каждому из аргументов.

**Утверждение 15.1.1:** Полилинейная форма однозначно определяется значениями на базисных элементах  $E$  и  $E^*$ , то есть числами

$$\omega_i^j := \omega_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = U(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q})$$

где  $\{e_i\}_{i=1}^n$  – базис  $E$ , а  $\{e^j\}_{j=1}^q$  – двойственный базис  $E^*$ .

*Доказательство:* Очевидно из линейности. □

**Определение 15.1.2:** Набор чисел  $\{\omega_i^j \mid i \in (\overline{1, n})^p, j \in (\overline{1, n})^q\}$  (то есть мы рассматриваем значения на всех комбинациях базисных векторов и ковекторов) называется **тензором**

**Утверждение 15.1.2:** Множество полилинейных форм валентности  $(p, q)$  образует линейное пространство  $\Omega_p^q$ .

**Определение 15.1.3:** Тензорным произведением форм  $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}; V \in \Omega_{p_2}^{q_2}$  называется форма  $U \otimes V \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}$ , задаваемая формулой.

$$\forall x \in E^{p_1+p_2} : \forall y \in E^{q_1+q_2} :$$

$$U \otimes V(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^1, \dots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2}) = \\ U(x_1, \dots, x_{p_1}, y^1, \dots, y^{q_1}) \cdot V(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2})$$

**Определение 15.1.4:**  $W \in \Omega_p^0$  называется **симметрической**, если она не изменяется при любой перестановке её аргументов.

**Определение 15.1.5:**  $W \in \Omega_p^0$  называется **антисимметрической** (косо-симметрической), если при любой перестановке пары её аргументов она меняет знак.

Введём линейное пространство антисимметрических форм:

$$\Lambda_p := \{W \in \Omega_p^0 \mid W - \text{антисимметрическая}\}$$

**Определение 15.1.6:** Пусть  $\pi_p = (i_1, \dots, i_p)$  – перестановка индексов  $\{1, \dots, p\}$ . Тогда

$$\forall W \in \Omega_p^0 : \forall x \in E^p : (\pi_p W)(x_1, \dots, x_p) := W(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$$

**Определение 15.1.7:** Симметризацией формы  $W \in \Omega_p^0$  называется форма

$$\text{sym } W := \frac{1}{p!} \sum_{\pi_p \in S_p} \pi_p W$$

**Определение 15.1.8:** Антисимметризацией формы  $W \in \Omega_p^0$  называется форма

$$\text{asym } W := \frac{1}{p!} \sum_{\pi_p \in S_p} \text{sgn } \pi_p \cdot \pi_p W$$

**Определение 15.1.9:** Если  $U \in \Lambda_p, V \in \Lambda_q$ , то их **внешним произведением** называется

$$U \wedge V := \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{asym } (U \otimes V)$$

**Теорема 15.1.1** (Основные свойства внешнего произведения):

1. Линейность
  - $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2) \wedge V = \alpha_1 (U_1 \wedge V) + \alpha_2 (U_2 \wedge V)$
  - $U \wedge (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \alpha_1 (U \wedge V_1) + \alpha_2 (U \wedge V_2)$
2. Ассоциативность
  - $(U \wedge V) \wedge W = U \wedge (V \wedge W)$
3. Антикоммутативность
  - $\forall U \in \Lambda_p : \forall V \in \Lambda_q : U \wedge V = (-1)^{pq} (V \wedge U)$

**Утверждение 15.1.3:** Базисом в пространстве  $\Lambda_p$  является система

$$\{f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

где  $\{f_i\}_{i=1}^n$  – базис в  $E^* = \Lambda_1$ . (Принято брать базис проекторов)

**Определение 15.1.10:**  $p$ -формой (дифференциальной формой валентности (степени)  $p$ ) на множестве  $U \subset E$  называется отображение  $\Omega : U \rightarrow \Lambda_p$ .

В силу линейности пространства  $\Lambda_p$ , нам достаточно задать поведение получаемой формы лишь на базисе, поэтому

$$\forall x \in U : \Omega(x) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_p}(x) f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p}$$

Таким образом, дифференциальная форма однозначно задаётся набором действительнзначных функций

$$\{\omega_{i_1, \dots, i_p}(x) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

**Определение 15.1.11:** Внешнее дифференцирование  $p$ -формы определяется как  $(p+1)$ -форма

$$d\Omega : U \rightarrow \Lambda_{p+1}$$

По правилу

$$\forall x \in U : d\Omega(x) := (p+1) \text{ asym } (\Omega'(x))$$

где под производной подразумевается производная по Фреше.

Стоит заметить, что, формально  $\Omega' : U \rightarrow U \rightarrow \Lambda_p$ , однако мы считаем, что  $U \rightarrow \Lambda_p \subset \Omega_{p+1}^0$  (Действительно, линейно по  $p+1$  вектору получаем число).

Также стоит упомянуть, что для любого базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  из  $E$  и двойственного к нему базиса  $(e^1, \dots, e^n)$  существует соглашение, что

$$\forall i = \overline{1, n} : e^i = de_i$$

Которое не лишено смысла, ведь  $e_i$  – это 0-форма. А  $e^i$  – это функционал, то есть 1-форма.

**Теорема 15.1.2** (Основные свойства операции внешнего дифференцирования):

1.  $d(\Omega \wedge \Pi) = (d\Omega \wedge \Pi) + (-1)^p(\Omega \wedge d\Pi)$ , где  $\Omega$  –  $p$ -форма, а  $\Pi$  –  $q$ -форма.
2.  $d(d\Omega) = 0$

*Доказательство:*

1. Для простоты считаем, что форма – одночлен, по линейности всё очевидно доказывается для произвольной формы.

Фиксируем базис, в котором

$$\Omega(x) = \omega(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}; \quad \Pi(x) = \pi(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

Тогда



$$\begin{aligned}
d(\Omega \wedge \Pi) &= d(\omega(x)\pi(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}) = \\
&= d(\omega(x)\pi(x)) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\
&= \pi(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} + \\
&+ \omega(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial x_i}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\
&= d\Omega \wedge \Pi(x) + (-1)^p (\Omega \wedge d\Pi)
\end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались свойством антикоммутативности внешнего произведения для перестановки всех  $dx^{j_{\dots}}$  перед всеми  $dx^{i_{\dots}}$ , остальное свернули по определению

2. Распишем двойной дифференциал:

$$\begin{aligned}
d(d\Omega) &= d\left(\sum_{j, \forall k: j \neq i_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\right) = \\
&= \sum_{l, l \neq j, \forall k: l \neq i_k} \sum_{j, \forall k: j \neq i_k} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_l \partial x_j} dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\
&= \sum_{j, l, j < l, \forall k: j \neq i_k \wedge l \neq i_k} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_l}\right) dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = 0
\end{aligned}$$

□

## 15.2. Независимость внешнего дифференцирования от замены координат

**Определение 15.2.1:** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

$D$  называется **связным**, если

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 : \exists \gamma(t) \subset D \text{ кривая} : \gamma(0) = x_1 \wedge \gamma(1) = x_2$$

**Определение 15.2.2:** Областью называется открытое связное множество.

**Определение 15.2.3:** Непрерывно дифференцируемое взаимнооднозначное отображение  $\varphi$  называется **диффеоморфизмом**.

**Определение 15.2.4:** Пусть

- $\Omega$  – дифференциальная  $p$ -форма в области  $U \subset \mathbb{R}^n$
- $\varphi : V \rightarrow U$  – диффеоморфизм области  $V \subset \mathbb{R}^n$  на  $U$

Тогда  $\varphi^*\Omega$  – дифференциальная  $p$ -форма в области  $V$ , определяемая как

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : (\varphi^*\Omega)(\mathbf{b}) := \Omega(\varphi(\mathbf{y}))(\varphi'(\mathbf{y})b_1, \dots, \varphi'(\mathbf{y})b_p)$$

**Утверждение 15.2.1 (Правило подсчёта):** Мы можем выразить форму после замены координат через упомянутое выше базисное представление:

$$(\varphi^*\Omega)(\mathbf{y}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_p}(\varphi(\mathbf{y})) d\varphi^{i_1}(\mathbf{y}) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}(\mathbf{y})$$

*Доказательство:* Заметим, что для произвольного вектора  $b \in \mathbb{R}^n$  верно  

$$d\varphi^i(y)(b) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(y) df^l(b) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(y) b^l = (\varphi'(y)b)^i = df^i(\varphi'(y)b)$$
  
 Не забывайте, что в качестве  $df^i$  мы берём проекцию на  $i$ -ую координату.  
 Что и требовалось.  $\square$

**Лемма 15.2.1** (Независимость внешнего дифференцирования от замены координат):

$$\varphi^*(d\Omega) = d(\varphi^*\Omega)$$

*Доказательство:* БОО считаем, что  $\Omega$  – это одночлен, для многочленов обобщается очевидно по линейности.

Зафиксируем  $\Omega = \omega(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$

Тогда по свойствам внешнего дифференцирования:

$$d\Omega = d\omega(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Тогда по правилу подсчёта

$$\varphi^*(d\Omega) = d\omega(\varphi(y)) \wedge d\varphi^{i_1}(y) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}(y)$$

С другой стороны, по определению замены координат

$$\varphi^*(\Omega) = \omega(\varphi(y)) d\varphi^{i_1}(y) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}(y)$$

Применим оба свойства внешнего дифференцирования (двойной дифференциал нулевой и псевдодистрибутивность):

$$d(\varphi^*\Omega) = d\omega(\varphi(y)) \wedge d\varphi^{i_1}(y) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}(y)$$

$\square$

## 16. Интегрирование дифференциальной формы с компактным носителем. Зависимость интеграла от замены координат.

Из Утверждение 15.1.3 Пространство  $\Lambda_n$  одномерно. Иными словами, если  $(f^1, \dots, f^n)$  – базис  $E^*$ , то

$$\{cf^1 \wedge \dots \wedge f^n \mid c \in \mathbb{R}\} = \Lambda_n$$

Тогда если  $(e_0^1, \dots, e_0^n)$  – ортонормированный базис в  $E^*$  сопряжённый к  $(e_1^0, \dots, e_n^0)$  – ортонормированному базису в  $E$ .

Введём форму **ориентированного объёма**

$$V_{e_0} = e_0^1 \wedge \dots \wedge e_0^n \stackrel{\text{соглашение}}{=} de_1^0 \wedge \dots \wedge de_n^0$$

Возьмём произвольный базис  $(e_1^0, \dots, e_n^0)$  в  $E$ , связанный с исходным матрицей перехода  $T$ :

$$\forall j: e_j = t_j^i e_i^0$$

Рассмотрим действие:

$$V_{e_0}(e_1, \dots, e_n) = de_1^0 \wedge \dots \wedge de_n^0(e_1, \dots, e_n) = \det(de_i^0(e_j))_{i,j=1}^n = \det T$$

Причём  $\forall$  базиса форма ориентированного объёма на нём самом равна 1:

$$V_{e_0} = \det T \cdot V_e$$

В начале определим интеграл от форм из  $\Lambda_n$ .

**Определение 16.1:** Интегралом от формы  $\Omega(x) = \alpha(x)V_{e_0}$  по области  $D \subset E$  называется

$$\int_D \Omega = \int_D \alpha(x) d\mu(x)$$

**Определение 16.2:** Стандартным кубом  $K$  называется

$$x_0 \in K \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n} : 0 < x_0^i < 1$$

в ортономированном базисе  $e_1^0, \dots, e_n^0$ .

**Определение 16.3:** Цепь стандартных кубов – это формальная линейная комбинация

$$\Pi = \sum_{i=1}^m n_i K_i; \quad n_i \in \mathbb{Z}, K_i - \text{стандартный куб}$$

**Определение 16.4:** Интегралом от формы  $\Omega(x) = \alpha(x)V_{e_0}$  по цепи кубов  $\Pi$  называется

$$\int_{\Pi} \Omega = \sum_{i=1}^m n_i \int_{K_i} \Omega$$

**Определение 16.5:** Граница стандартного куба – цепь стандартных  $(n-1)$ -мерных кубов с коэффициентами  $\pm 1$ , в зависимости от направления внешней нормали.

**Теорема 16.1** (Формула Стокса-Пуанкаре для стандартного куба): Если  $\Omega$  – гладкая  $n-1$  форма, заданная на замыкании куба  $K \subset \mathbb{R}$ , то

$$\int_{\partial K} \Omega = \int_K d\Omega$$

*Доказательство:* Пусть  $V_j$  – форма ориентированного объёма в  $n-1$ -мерном подпространстве  $n$ -мерного пространства, в которой отсутствует  $de_j^0$ .

Тогда БОО

$$\Omega(x) = \alpha(x)V_j$$

Значит её дифференциал

$$d\Omega(x) = d\alpha(x) \wedge V_j = \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_j} de_j^0 \wedge V_j = (-1)^{j-1} \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_j} V_{e_0}$$

Тогда распишем интеграл, к которому хотим свести:

$$\begin{aligned} \int_K d\Omega &= (-1)^{j-1} \int_K \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_j} d\mu(x) \stackrel{\text{Фубини } x=(y, x_j)}{=} (-1)^{j-1} \int_{K_j} \int_{[0,1]} \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_j} de_j^0 d\mu_{n-1}(y) = \\ &= (-1)^{j-1} \int_{K_j} (\alpha(y, 1) - \alpha(y, 0)) d\mu_{n-1}(y) \end{aligned}$$

С другой стороны, от изначального интеграла по границе останутся лишь те слагаемые линейной комбинации, в которых также нет  $de_j^0$ , так как в остальных какая-то координата, участвующая в  $V_j$  фиксирована, а значит интеграл будет нулевым:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \Omega &= \int_{(-1)^{j+1} K_{j,1} + (-1)^j K_{j,0}} \alpha(x) V_j = \\
&= (-1)^{j+1} \int_{(-1)^{j+1} K_{j,1}} \alpha(x) V_{j,1} + (-1)^j \int_{(-1)^j K_{j,0}} \alpha(x) V_{j,0} = \\
&= (-1)^{j-1} \int_{K_j} (\alpha(y, 1) - \alpha(y, 0)) d\mu_{n-1}(y)
\end{aligned}$$

□

**Определение 16.6:** Клеткой называется диффеоморфный образ куба

**Определение 16.7:** Для формы  $\Omega$  и диффеоморфизма  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $M \subset U$  – клетки,  $K \subset V$  – куба:

$$\int_M \Omega = \int_K \varphi^* \Omega$$

## 17. Общая формула Стокса

**Определение 17.1:** Границей клетки  $M = \varphi(K)$  называется  $\partial M := \varphi(\partial K)$

**Теорема 17.1** (Теорема Стокса для клетки): Если  $\Omega$  – гладкая  $m-1$  форма, заданная в окрестности  $m$ -мерной клетки, то

$$\int_{\partial M} \Omega = \int_M d\Omega$$

*Доказательство:* Используя Теорему Стокса для куба (ака определение интеграла по формам меньших размерностей) и свойство инвариантности внешнего дифференцирования от замены координат:

$$\int_{\partial M} \Omega = \int_{\partial K} \varphi^* \Omega = \int_K d(\varphi^* \Omega) = \int_K \varphi^*(d\Omega) = \int_M d\Omega$$

□

## 18. Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

В доказательствах некоторых теорем этого и следующего билетов используется интересный трюк: если у нас есть цепочка равенств  $a = b$ , то мы с лёгкостью сможем продолжить её, написав  $a = b = \frac{a+b}{2}$ . Если вы понимаете, что в доказательствах теоремы с интегралами происходит какая-то дичь, то вспоминайте этот трюк!

**Определение 18.1:**

$$L_{2\pi} := \{f \in L_1[-\pi, \pi] \mid f - 2\pi \text{ периодическая}\}$$

**Определение 18.2:** Ядром Дирихле  $D_n(u)$  называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

**Определение 18.3:** Пусть  $f \in L_{2\pi}$ , тогда **частичной суммой тригонометрического ряда Фурье** называется

$$S_n(f, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

где

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) d\mu(t); \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) d\mu(t)$$

**Лемма 18.1** (О представлении частичной суммы): Если  $f \in L_{2\pi}$ , то  $n$ -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье может быть представлена

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) d\mu(u)$$

**Теорема 18.1** (Теорема Римана об осцилляции): Если  $f \in L_1(I)$ , где  $I$  – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

**Теорема 18.2** (Признак Дини): Если  $f \in L_{2\pi}$  и  $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к  $S(x_0)$

*Доказательство:* Рассмотрим разность  $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ , пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) \stackrel{\text{трюк}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S(x_0)) D_n(u) d\mu(u)$$

В данном переходе мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно  $u$
- Интеграл по  $[-\pi, \pi]$  от ядра Дирихле равен  $\pi$
- Если заменить в представлении частичной суммы  $t$  на  $-t$ , то ничего не изменится.

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв в формуле ядра Дирихле

$$\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right) = \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

А также добавим и вычтем интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t)$$

Итак, приступим

$$\begin{aligned}
S_n(f, x_0) - S(x_0) = & \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(nt)}{2} d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\sin(nt) \cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \sin(nt) \left( \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) d\mu(t)
\end{aligned}$$

По условию  $\varphi_{x_0}$  суммируемая, значит по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)$  суммируема как сумма суммируемых и константы, значит по теореме Римана об осцилляции второе слагаемое стремится к нулю.

В третьем слагаемом  $(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta, \pi]$ , так как мы отделились от нуля и по теореме Римана об осцилляции третье слагаемое стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1 - \frac{t^2}{8}}{2(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48})} - \frac{1}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{8} - t + \frac{t^3}{24}}{t^2} = 0$$

Значит мы умножили суммируемую функцию  $f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)$  на другую, имеющую устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \left( \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) \in L_1[0, \delta]$$

И опять применяем теорему об осцилляции.  $\square$

**Определение 18.4:** Будем говорить, что функция  $f$  удовлетворяет **условию Гёльдера** порядка  $\alpha \in (0, 1]$  в точке  $x_0$ , если существуют конечные односторонние пределы  $f(x_0 \pm 0)$  и константы  $C > 0, \delta > 0$  такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta: |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq Ct^\alpha \wedge |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| \leq Ct^\alpha$$

**Теорема 18.3** (Признак Липшица): Если  $f \in L_{2\pi}$  удовлетворяет условию Гёльдера порядка  $\alpha$  в точке  $x_0$ , то тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в точке  $x_0$  к  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$

*Доказательство:* По условию теоремы, хотим

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

Значит функция  $\varphi_{x_0}$  из признака Дини будет иметь вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + (f(x_0-t) - f(x_0-0))}{t}$$

То что  $\varphi$  измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) d\mu(t) \right| &\leq \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t} d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-0)|}{t} d\mu(t) \leq \\
&2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} d\mu(t) = 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha}
\end{aligned}$$

Значит мы можем применить признак Дини и всё доказано.  $\square$

## 19. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье

**Утверждение 19.1:** Анализ доказательства признака Дини (Теорема 18.2) показывает, что критерием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции  $f \in L_{2\pi}$  к  $S(x_0)$  в точке  $x_0$  является равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

**Лемма 19.1:** Пусть  $f \in L_{2\pi}$ ,  $g$  – измеримая,  $2\pi$ -периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции  $\chi(t) = f(x+t)g(t)$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$ .

**Теорема 19.1** (Признак Жордана): Если  $f \in L_{2\pi}$  и является функцией ограниченной вариации на  $[a, b]$ , то тригонометрический ряд Фурье  $f$  сходится к  $f(x_0)$  в каждой точке  $x_0 \in (a, b)$  непрерывности  $f(x)$  и к  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$  в каждой точке разрыва  $x_0 \in [a, b]$ .

Если, кроме того,  $f \in C[a, b]$ , то тригонометрический ряд Фурье функции  $f$  сходится к ней равномерно на любом отрезке  $[a', b'] \subset (a, b)$ .

*Доказательство:* Так как  $f$  ограниченной вариации, то она представима в виде  $f = f_1 - f_2$ , где  $f_1, f_2$  – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждения для неубывающих функций.

По (Утверждение 19.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Раскроем  $\varphi_{x_0}$  и  $S(x_0)$  и будем доказывать лишь для

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

А для слагаемого с минусами аналогично.

По определению правостороннего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : 0 \leq f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как  $f$  монотонна и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 : \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} \sin(nt) dt =$$

$$(f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0)) \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sin(nt)}{t} dt$$

Но мы знаем, что  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  сходится, поэтому интеграл с переменным верхним пределом ограничен:

$$\exists C > 0 : \left| \int_0^u \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq C$$

Но теперь рассмотрим:

$$\forall A > 0 : \left| \int_0^A \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| \stackrel{nt=:u}{=} \left| \int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u} du \right| \leq C$$

Используя эту оценку, получим, что

$$\left| \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt) dt \right| \leq 2\varepsilon C$$

Таким образом, разобьём исходный интеграл от 0 до  $\delta$  на сумму интегралов от 0 до  $\delta_1$  и от  $\delta_1$  до  $\delta$ .

Получим, что предел интеграла действительно равен нулю, применим признак Дини и получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости.

Вспомним, как мы расписывали разность  $S_n(f, x_0) - S(x_0)$  на четыре слагаемых в доказательстве признака Дини (Теорема 18.2).

Применим к каждому из трёх последних слагаемых вспомогательную лемму (Лемма 19.1) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела первого слагаемого (который мы уже рассматривали в текущем доказательстве).

Это сделать несложно, заметим, что если  $f$  непрерывна на  $[a', b']$ , то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы можем найти  $\delta_1$  из текущего доказательства независимо от  $x_0$ .

Также независимо от  $x_0$  мы ограничиваем интеграл от  $\frac{\sin(nx)}{x}$ , поэтому второе утверждение текущей теоремы доказано.  $\square$

## 20. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

### 20.1. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции

**Определение 20.1.1:** Преобразование Фурье функции  $f \in L_1(\mathbb{R})$  называется

$$F[f] := \hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t)$$



**Теорема 20.1.1** (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра):

Пусть

- $A \subset \mathbb{R}^n; E \subset \mathbb{R}^m; \alpha_0 \in A$
- Функция  $f(x, \alpha)$  суммируема при всех  $\alpha \in A$ , как функция от  $x \in E$ .
- Функция  $f(x, \alpha)$  при почти всех  $x \in E$  является непрерывной в  $\alpha_0$ .
- При почти всех  $x \in E$  и для всех  $\alpha \in A$  справедлива оценка  $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  некоторая суммируемая на  $E$  функция.

Тогда

$$F(\alpha) = \int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$$

является непрерывной в  $\alpha_0$ .

**Теорема 20.1.2** (Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра): Пусть

- $E \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^n$
- $f(x, \alpha)$  вместе с  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$  суммируема на  $E$  при всех  $\alpha \in U(\alpha_0)$
- При всех  $\alpha \in U(\alpha_0)$ :  $\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq \varphi(x)$ , где  $\varphi$  суммируема на  $E$

Тогда

$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) d\mu(x)$$

**Теорема 20.1.3:** Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $\hat{f}(\lambda)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$

*Доказательство:* Распишем комплексную экспоненту в сумму тригонометрических функций и сведём к теореме об осцилляции, утверждение о нулевом пределе доказано.

Почему преобразование Фурье непрерывно? Хотим применить теорему о непрерывности интеграла, зависящего от предела. Для этого оценим подынтегральную функцию:

$$|f(t, \lambda)| = |f(t)e^{-i\lambda t}| \leq |f(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

От  $\lambda$  рассматриваемая функция непрерывна из-за непрерывности экспоненты. Суммируемость следует из той же оценки сверху.

Значит применяем теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.  $\square$

## 20.2. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

**Теорема 20.2.1** (Преобразование Фурье производной): Если  $\forall [a, b] \subset \mathbb{R} : f \in L_1([a, b])$  и  $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$ , то

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \hat{f}'(\lambda) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

*Доказательство:* Перепишем  $f(x)$  через формулу Ньютона-Лейбница:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) d\mu(t), x > 0$$

Устремляя  $x \rightarrow +\infty$  увидим, что правая часть имеет предел, а значит и левая тоже:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(+\infty) = 0$$

Аналогично получим, что  $f(-\infty) = 0$ .

Тогда рассмотрим следующее преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (e^{-i\lambda t})'_t d\mu(t) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda) \end{aligned}$$

□

**Теорема 20.2.2** (Производная преобразования Фурье): Если  $f(t), tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$ , то преобразование Фурье  $\hat{f}(\lambda)$  дифференцируемо, причём

$$(\hat{f})'(\lambda) = -it\widehat{f(t)}(\lambda)$$

*Доказательство:* Нам нужно лишь доказать, что мы имеем право продифференцировать интеграл, зависящий от параметра:

$$(\hat{f})'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (e^{-i\lambda t})'_\lambda d\mu(t) = -it\widehat{f(t)}(\lambda)$$

Для этого оценим выражение:

$$|f(t)(e^{-i\lambda t})'| = |-itf(t)e^{-i\lambda t}| \leq |tf(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

Значит мы имеем право применить теорему о дифференцировании интеграла с параметром. □

## 21. Прямые и плоскости в пространстве. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве. Углы между прямыми и плоскостями.

### 21.1. Прямые и плоскости в пространстве

**Определение 21.1.1:** **Линейной комбинацией** элементов  $v_1, \dots, v_n$  (для которых определены сложение и умножение на числа) с коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  называется следующая величина:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

**Определение 21.1.2:** **Направленным отрезком** называется отрезок, концы которого упорядочены.

Обозначение  $\overline{AB}$ .

Направленные отрезки называются равными, если они сонаправлены и равны.

**Определение 21.1.3:** **Вектором** называется элемент векторного пространства класс эквивалентности направленных отрезков.

Формульно, если  $\overline{AB}$  – представитель класса  $v$ , то  $\overline{AB} \in v$ , но в дальнейшем это будет обозначаться как  $\overline{AB} = v$ .

**Определение 21.1.4:** Ниже перечислены обозначения множеств векторов и точек:

- $V_0$  – нулевое пространство, состоящее только из нулевого вектора  $0$
- $V_1, P_1$  – множества всех векторов и всех точек **на прямой**
- $V_2, P_2$  – множества всех векторов и всех точек **на плоскости**
- $V_3, P_3$  – множества всех векторов и всех точек **в пространстве**

**Определение 21.1.5:** Система  $(v_1, \dots, v_n)$  векторов из  $V_n$  называется **линейно независимой**, если для любых  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  выполнено следующее условие:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

**Определение 21.1.6:** Система  $(v_1, \dots, v_n)$  векторов из  $V_n$  называется **линейно зависимой**, если существует её нетривиальная линейная комбинация, равная  $0$ .

**Определение 21.1.7:** **Базисом** в  $V_n$  называется линейно независимая система векторов, через которую выражаются все векторы  $V_n$ .

**Определение 21.1.8:** Пусть  $e$  – базис в  $V_n$ ,  $v = \alpha e \in V_n$ . Столбец коэффициентов  $\alpha$  называется **координатным столбцом** вектора  $v$  в базисе  $e$ .

Обозначение  $v \overset{e}{\leftrightarrow} \alpha$ .

**Определение 21.1.9:** **Скалярным произведением** ненулевых векторов  $a, b \in V_n$  называется следующая величина:

$$(a, b) = |a||b| \cos(\angle(a, b))$$

**Определение 21.1.10:** Векторы  $a, b \in V_n$  называются **перпендикулярными (ортогональными)**, если  $(a, b) = 0$ .

Обозначение  $a \perp b$ .

**Определение 21.1.11:** Пусть  $a, b \in V_n, b \neq 0$ , от точки  $O \in P_n$  отложны направленные отрезки  $\overline{OA} = a; \overline{OB} = b$ .

**Проекцией** вектора  $a$  на вектор  $b$  называется такой класс эквивалентности, представителем которого является вектор  $\overline{OA'}$ , где  $A'$  – ортогональная проекция точки  $A$  на прямую  $OB$ .

Обозначение  $\text{pr}_b a$

**Утверждение 21.1.1:** Для любых  $a, b \in V_n, b \neq 0$  выполнено следующее равенство:

$$\text{pr}_b a = \frac{(a, b)}{(a, a)} b$$

**Определение 21.1.12:** Базис в  $V_n$  называется:

- **Ортогональным**, если его векторы попарно ортогональны
- **Ортонормированным**, если он ортогонален и все его векторы имеют длину 1.

**Определение 21.1.13:** **Декартовой системой координат** в  $P_n$  называется набор  $(O, e)$ , где  $O \in P_n$  – начало системы координат,  $e$  – базис в  $V_n$ .

Точка  $A \in P_n$  имеет координатный столбец  $\alpha$  в данной системе координат, если  $\overline{OA} \xleftrightarrow{e} \alpha$ .

Обозначение  $A \xleftrightarrow{(O, e)} \alpha$ .

Декартова система координат называется **прямоугольной**, если базис  $e$  – ортонормированный.

**Определение 21.1.14:** **Направляющим вектором** прямой  $l \subset P_3$  называется вектор  $a \in V_3, a \neq 0$ , представителем которого является направленный отрезок, лежащий в  $l$ .

**Определение 21.1.15:** Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3$ .

**Векторным произведением** векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  называется единственный вектор  $\mathbf{c} := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  такой, что выполнены следующие условия:

1.  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \perp \mathbf{b}$
2.  $|\mathbf{c}| = S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , где  $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  – площадь параллелограмма, натянутого на вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$
3.  $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} > 0$

Альтернативное обозначение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

**Определение 21.1.16:** Пусть  $l \subset P_3$  – прямая, с направляющим вектором  $\mathbf{a} \in V_3$ ,  $M \in l$  и в декартовой системе координат  $(O, e)$  в  $P_3$  выполнены соотношения  $\mathbf{a} \xleftrightarrow[e]{\alpha} \alpha$ ,  $M \xleftrightarrow{(O,e)} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{r}_0 := \overline{OM}$ . Тогда

- **Векторно-параметрическим** уравнением прямой называется следующее семейство уравнений:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, t \in \mathbb{R}$$

- **Параметрическим** уравнением прямой называется следующее семейство систем:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha_1 \\ y = y_0 + t\alpha_2 \\ z = z_0 + t\alpha_3 \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}$$

- **Каноническим** уравнением прямой называется следующая система уравнений:

$$\frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3}$$

**Определение 21.1.17:** Пусть  $l \subset P_3$  – прямая с направляющим вектором  $\mathbf{a}$ , и пусть  $M \in l$ ,  $\mathbf{r}_0 := \overline{OM}$ . **Векторным** уравнением прямой называется следующее уравнение:

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$$

**Определение 21.1.18:** Пусть  $\nu \subset P_3$  – плоскость,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3$  – не сонаправленные векторы, представители которых лежат в  $\nu$ ,  $M \in l$  и в декартовой системе координат  $(O, e)$  в  $P_3$  выполнены соотношения  $\mathbf{a} \xleftrightarrow[e]{\alpha}$ ,  $\mathbf{b} \xleftrightarrow[e]{\beta}$ ,  $M \xleftrightarrow[(O,e)]{\gamma}$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}_0 := \overline{OM}$ . Тогда

- **Векторно-параметрическим** уравнением плоскости называется следующее семейство уравнений:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}; \quad t, s \in \mathbb{R}$$

- **Параметрическим** уравнением плоскости называется следующее семейство систем:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha_1 + s\beta_1 \\ y = y_0 + t\alpha_2 + s\beta_2; \\ z = z_0 + t\alpha_3 + s\beta_3 \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

**Определение 21.1.19:** Пусть  $A, B, C, D \in \mathbb{R}; A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . **Общим** уравнением плоскости называется следующее уравнение:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

**Определение 21.1.20:** Вектором нормали плоскости  $\nu \subset P_3$  называется вектор  $\mathbf{n} \in V_3, \mathbf{n} \neq 0$ , представителем которого является направленный отрезок, ортогональный каждой прямой из плоскости  $\nu$ .

**Определение 21.1.21:** Пусть  $\nu \subset P_3$  – плоскость с вектором нормали  $\mathbf{n} \in V_3$  и пусть  $M \in \nu, \mathbf{r}_0 := \overline{OM}$ .

**Нормальным** уравнением плоскости называется следующее уравнение:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$$

## 21.2. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве

**Утверждение 21.2.1** (Расстояние от точки до прямой): Пусть прямая  $l \subset P_3$  задана векторно-параметрическим уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + at, A \in P_3, \mathbf{r}_A := \overline{OA}$ .

Тогда расстояние  $\rho$  от точки  $A$  до прямой  $l$  равно следующей величине:

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}$$

*Доказательство:* Искомое расстояние  $\rho$  является длиной высоты параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_0$ , проведённой к стороне, образованной вектором  $\mathbf{a}$  и имеющей длину  $|\mathbf{a}|$ , из чего и следует требуемое.  $\square$

**Утверждение 21.2.2** (Расстояние от точки до плоскости): Пусть в прямоугольной декартовой системе координат  $(O, e)$  в  $P_3$  плоскость  $\nu$  задана уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ ,  $M \in P_3$ ,  $M \overset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ .

Тогда расстояние  $\rho$  от точки  $M$  до плоскости  $\nu$  равно следующей величине:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

*Доказательство:* Пусть  $\mathbf{n} \in V_3$ ,  $\mathbf{n} \overset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  – вектор нормали плоскости  $\nu$ ,  $\mathbf{r}_0 := \overline{OM}$ , и пусть  $X \in \nu$ ,  $\mathbf{r} := \overline{OX}$ . Тогда

$$\rho = |\text{pr}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})| = \left| \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \right| = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

□

**Утверждение 21.2.3** (Расстояние между прямыми в плоскости): Пусть скрещивающиеся прямые  $l_1, l_2 \subset P_3$  заданы уравнениями  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ .

Тогда расстояние  $\rho$  между ними равно следующей величине:

$$\rho = \frac{|(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}$$

*Доказательство:* Искомое расстояние  $\rho$  является длиной высоты параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , проведённой к грани, образованной векторами  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  и имеющей площадь  $|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2| \sin \angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ , из чего и следует требуемое. □

### 21.3. Углы между прямыми и плоскостями

**Утверждение 21.3.1** (Углы между прямыми): Пусть прямые  $l_1, l_2 \subset P_3$  имеют направляющие вектора  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ .

Тогда угол  $\varphi$  между ними удовлетворяет следующему равенству:

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}$$

*Доказательство:* Углом между прямыми по определению является угол  $\varphi$  равный меньшему из углов  $\alpha$  и  $\pi - \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между их направляющими векторами, поэтому в числителе именно модуль скалярного произведения.

Дальнейшие рассуждения очевидны из определения скалярного произведения. □

**Утверждение 21.3.2** (Углы между плоскостями): Пусть в прямоугольной декартовой системе координат  $(O, e)$  в  $P_3$  плоскости  $\nu_1, \nu_2$  заданы уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ;  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ .

Тогда угол  $\varphi$  между ними удовлетворяет равенству:

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

*Доказательство:* Пусть  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \in V_3$ ;  $\mathbf{n}_1 \leftrightarrow_e \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{n}_2 \leftrightarrow_e \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$  – нормальные векторы плоскостей  $\nu_1, \nu_2$ ,  $\alpha := \angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ .

Тогда угол  $\varphi$  равен меньшему из углов  $\alpha$  и  $\pi - \alpha$ . В каждом из случаев выполнено следующее:

$$\cos \varphi = |\cos \alpha| = \frac{|(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

□

## 22. Кривые второго порядка, их геометрические свойства

**Определение 22.1:** Пусть  $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ ,  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ .

**Кривой второго порядка** называется алгебраическая кривая, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат в  $P_2$  задаётся следующим уравнением:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

### 22.1. Эллипс

**Определение 22.1.1:** **Эллипсом** называется кривая второго порядка, которая в канонической системе координат  $(O, e)$  задаётся следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$$

- **Вершинами** эллипса называются точки с координатами  $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$  в системе  $(O, e)$ . Число  $|a|$  называется **длиной большой полуоси** эллипса, число  $|b|$  – **длиной малой полуоси** эллипса.
- **Фокусным расстоянием** эллипса называется величина  $c := \sqrt{a^2 - b^2}$ . **Фокусами** эллипса называются точки  $F_1, F_2 \in P_2$  такие, что  $F_1 \leftrightarrow_{(O,e)} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}; F_2 \leftrightarrow_{(O,e)} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Эксцентриситетом** эллипса называется величина  $\varepsilon := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
- **Директрисами** эллипса называются прямые  $d_1, d_2$ , задаваемые в системе  $(O, e)$  уравнениями  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$



**Теорема 22.1.1:** Пусть эллипс задан в канонической системе координат  $(O, \varepsilon)$ ;  $A \in P_2$ ;  $A \xleftrightarrow{(O, \varepsilon)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Тогда

$$A \text{ лежит на эллипсе} \Leftrightarrow AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow AF_2 = |a + \varepsilon x|$$

*Доказательство:* Будем доказывать первую эквивалентность, вторая аналогично. Для этого заметим, что выполнены следующие равенства:

$$AF_1^2 - |a - \varepsilon x|^2 = (x - c)^2 + y^2 - |a - \varepsilon x|^2 = b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\text{Значит, } AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow A \text{ лежит на эллипсе.} \quad \square$$

**Теорема 22.1.2:** Пусть эллипс задан в канонической системе координат  $(O, e)$ . Тогда он является геометрическим местом точек  $A \in P_2$ ;  $A \xleftrightarrow{(O, e)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , таких, что выполнены следующие равенства:

$$\frac{AF_1}{\rho(A, d_1)} = \frac{AF_2}{\rho(A, d_2)} = \varepsilon$$

*Доказательство:* Докажем равенство эксцентриситету лишь первого отношения, для второго аналогично.

Заметим, что выполнены следующие равенства:

$$\rho(A, d_1) = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{1}{\varepsilon} |a - \varepsilon x|$$

$$\text{Значит, } A \text{ лежит на эллипсе} \Leftrightarrow |a - \varepsilon x| = AF_1 \Leftrightarrow \varepsilon \rho(A, d_1) = AF_1 \quad \square$$

**Теорема 22.1.3:** Пусть эллипс задан в канонической системе координат  $(O, e)$ . Тогда он является геометрическим местом точек  $A \in P_2$ ;  $A \xleftrightarrow{(O, e)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , таких, что выполнено равенство

$$|AF_1| + |AF_2| = 2a$$

*Доказательство:*  $\Rightarrow$  Пусть  $A$  лежит на эллипсе, тогда

$$AF_1 = a - \varepsilon x; AF_2 = a + \varepsilon x \Rightarrow AF_1 + AF_2 = 2a$$

$\Leftarrow$  Зафиксируем произвольное число  $x_0 \in \mathbb{R}$  и заметим, что при движении точки  $X \in P_2$ ;  $X \xleftrightarrow{(O, e)} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  вдоль прямой  $x = x_0$  вверх или вниз величина  $XF_1 + XF_2$  строго возрастает. Рассмотрим возможные случаи:

1. Если  $|x_0| < a$ , то таких точек, что  $XF_1 + XF_2 = 2a$ , на прямой  $x = x_0$  две.
2. Если  $|x_0| = a$ , то такая точка, что  $XF_1 + XF_2 = 2a$ , на прямой  $x = x_0$  одна.
3. Если  $|x_0| > a$ , то таких точек, что  $XF_1 + XF_2 = 2a$ , на прямой  $x = x_0$  нет.

Полученное число точек совпадает с множеством точек эллипса.  $\square$

## 22.2. Гипербола

**Определение 22.2.1:** Гиперболой называется кривая второго порядка, которая в канонической системе координат  $(O, e)$  задаётся следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a, b > 0$$

- **Вершинами** гиперболы называются точки с координатами  $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$  в системе  $(O, e)$ .

Число  $|a|$  называется **длиной действительной полуоси** гиперболы, число  $|b|$  – **длиной мнимой полуоси** гиперболы.

- **Фокусным расстоянием** гиперболы называется величина  $c := \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Фокусами** гиперболы называются точки  $F_1, F_2 \in P_2$  такие, что  $F_1 \overset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}; F_2 \overset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$

- **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина  $\varepsilon := \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$
- **Директрисами** гиперболы называются прямые  $d_1, d_2$ , задаваемые в системе  $(O, e)$  уравнениями  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

**Теорема 22.2.1:** Пусть гипербола задана в канонической системе координат  $(O, e); A \in P_2; A \overset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Тогда

$$A \text{ лежит на гиперболе} \Leftrightarrow AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow AF_2 = |a + \varepsilon x|$$

*Доказательство:* Будем доказывать первую эквивалентность, вторая аналогично. Для этого заметим, что выполнены следующие равенства:

$$AF_1^2 - |a - \varepsilon x|^2 = (x - c)^2 + y^2 - |a - \varepsilon x|^2 = b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\text{Значит, } AF_1 = |a - \varepsilon x| \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow A \text{ лежит на гиперболе.} \quad \square$$

**Теорема 22.2.2:** Пусть гипербола задана в канонической системе координат  $(O, e)$ . Тогда она является геометрическим местом точек  $A \in P_2; A \overset{(O,e)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , таких, что выполнены следующие равенства:

$$\frac{AF_1}{\rho(A, d_1)} = \frac{AF_2}{\rho(A, d_2)} = \varepsilon$$

*Доказательство:* Докажем равенство эксцентриситету лишь первого отношения, для второго аналогично.

Заметим, что выполнены следующие равенства:

$$\rho(A, d_1) = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{1}{\varepsilon} |a - \varepsilon x|$$

$$\text{Значит, } A \text{ лежит на эллипсе} \Leftrightarrow |a - \varepsilon x| = AF_1 \Leftrightarrow \varepsilon \rho(A, d_1) = AF_1 \quad \square$$

**Теорема 22.2.3:** Пусть гипербола задана в канонической системе координат  $(O, e)$ . Тогда она является геометрическим местом точек  $A \in P_2; A \xleftrightarrow{(O,e)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , таких, что выполнено равенство

$$|AF_1 - AF_2| = 2a$$

*Доказательство:*  $\Rightarrow$  БОО пусть  $A$  лежит на правой ветви гиперболы. Тогда

$$AF_1 = \varepsilon x - a \wedge AF_2 = a + \varepsilon x \Rightarrow |AF_1 - AF_2| = 2a$$

$\Leftarrow$  Зафиксируем произвольное число  $x_0 \in \mathbb{R}$  и заметим, что при движении точки  $X \in P_2; X \xleftrightarrow{(O,e)} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  вдоль прямой  $x = x_0$  вверх или вниз величина  $|XF_1 - XF_2|$  строго убывает. Рассмотрим возможные случаи:

1. Если  $|x_0| < a$ , то таких точек, что  $|XF_1 - XF_2| = 2a$ , на прямой  $x = x_0$  нет.
2. Если  $|x_0| = a$ , то такая точка, что  $|XF_1 - XF_2| = 2a$ , на прямой  $x = x_0$  одна.
3. Если  $|x_0| > a$ , то таких точек, что  $|XF_1 - XF_2| = 2a$ , на прямой  $x = x_0$  две.

Полученное число точек совпадает с множеством точек эллипса.  $\square$

## 22.3. Парабола

**Определение 22.3.1:** **Параболой** называется кривая второго порядка, которая в канонической системе координат  $(O, e)$  задаётся следующим уравнением:

$$y^2 = 2px; \quad p > 0$$

- **Вершиной** параболы называется точка с координатами  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  в системе  $(O, e)$
- **Фокусом** параболы называется точка  $F$  такая, что  $F \xleftrightarrow{(O,e)} \begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Эксцентриситетом** параболы называется величина  $\varepsilon := 1$
- **Директрисой** параболы называется прямая  $d$ , задаваемая в системе  $(O, e)$  уравнением  $x = -\frac{p}{2}$

**Теорема 22.3.1:** Пусть парабола задана в канонической системе координат  $(O, e); A \in P_2; A \xleftrightarrow{(O,e)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Тогда

$$A \text{ лежит на параболе} \Leftrightarrow AF = \rho(A, d)$$

*Доказательство:* Заметим, что выполнены следующие равенства:

$$AF^2 - \rho^2(A, d) = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 - 2px$$

Значит  $AF = \rho(A, d) = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Leftrightarrow y^2 = 2px \Leftrightarrow A \text{ лежит на параболе} \quad \square$

## 23. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

## 23.1. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений

**Определение 23.1.1:** Группой называется множество  $G$  с определённой на нём бинарной операцией умножения  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ , удовлетворяющей следующим условиям:

- (Ассоциативность)  

$$\forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$$
- (Существование нейтрального элемента)  

$$\exists e \in G : \forall a \in G : ae = ea = a$$
- (Существование обратного элемента)  

$$\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

**Определение 23.1.2:** Группа  $(G, \cdot)$  называется **абелевой**, если умножение в ней коммутативно, то есть

$$\forall a, b \in G : ab = ba$$

**Определение 23.1.3:** Кольцом называется множество  $R$  с определёнными на нём бинарными операциями сложения  $+$  :  $R \times R \rightarrow R$  и умножения  $\cdot$  :  $R \times R \rightarrow R$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- $(R, +)$  – абелева группа, нейтральный элемент в которой обозначается через 0.
- (Ассоциативность умножения)  

$$\forall a, b, c \in R : (ab)c = a(bc)$$
- (Дистрибутивность умножения относительно сложения)  

$$\forall a, b, c \in R : a(b + c) = ab + ac \wedge (a + b)c = ac + bc$$
- (Существование нейтрального элемента относительно умножения)  

$$\exists 1 \in R : \forall a \in R : a1 = 1a = a$$

**Определение 23.1.4:** Кольцо  $(R, +)$  называется **коммутативным**, если умножение в нём коммутативно, то есть

$$\forall a, b \in R : ab = ba$$

**Определение 23.1.5:** Пусть  $(R, +, \cdot)$  – кольцо.

Элемент  $a \in R$  называется **обратимым**, если

$$\exists a^{-1} \in R : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

**Группой обратимых элементов** кольца  $(R, +, \cdot)$  называется множество  $R^*$  его обратимых элементов.

**Определение 23.1.6:** Полем называется такое коммутативное кольцо  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ , для которого выполнено равенство  $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ .

**Определение 23.1.7:** Линейным пространством, или векторным пространством над полем  $\mathbb{F}$  называется абелева группа  $(V, +)$ , на которой определено умножение на элементы поля  $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} : \forall v \in V : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- $\forall \alpha \in \mathbb{F} : \forall u, v \in V : \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} : \forall v \in V : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
- $\forall v \in V : 1v = v$

Элементы поля  $\mathbb{F}$  называются **скалярами**, элементы группы  $V$  – **векторами**.

**Определение 23.1.8:** Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$ ;  $b = (b_i) \in \mathbb{F}^n$ .

**Системой линейных уравнений**  $Ax = b$  называется следующая система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Матрица  $A$  называется **матрицей системы**, матрица  $(A \mid b)$  – **расширенной матрицей системы**

**Определение 23.1.9:** Система линейных уравнений  $Ax = b$  называется:

- **Однородной**, если  $b = 0$
- **Совместной**, если множество её решений непусто

**Определение 23.1.10:** **Фундаментальной системой решений** однородной системы  $Ax = 0$  называется базис пространства её решений.

Матрица, образованная столбцами фундаментальной системы решений, называется **фундаментальной матрицей системы** и обозначается через  $\Phi$ .

**Утверждение 23.1.1:** Множество решений однородной системы  $Ax = 0$  является линейным пространством.

*Доказательство:* Все требования линейного пространства очевидны. □

**Утверждение 23.1.2:** Пусть  $Ax = b$  – совместная система,  $x_0 \in \mathbb{F}^n$  – решение системы,  $V$  – пространство решений однородной системы  $Ax = 0$ .

Тогда множество решений системы  $Ax = b$  имеет вид

$$x_0 + V = \{x_0 + v \mid v \in V\}$$

*Доказательство:* Пусть  $U$  – множество решений системы  $Ax = b$ .

- Если  $v \in V$ , то  $A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b \Rightarrow x_0 + v \in U$ .
- Если  $u \in U$ , то  $A(u - x_0) = 0 \Rightarrow u - x_0 \in V$

Таким образом,  $U = x_0 + V$  □

## 23.2. Теорема Кронекера-Капелли

**Определение 23.2.1:** Системы  $Ax = b$  и  $A'x = b'$  называются **эквивалентными**, если множества их решений совпадают.

**Определение 23.2.2:** **Элементарными преобразованиями** строк матрицы  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$  называются следующие операции:

- Прибавление к  $i$ -й строке  $j$ -й строки, умноженной на скаляр  $\alpha \in \mathbb{F}$ ;  $i, j \in \overline{1, n}; i \neq j$
- Умножение  $i$ -й строки на скаляр  $\lambda \in \mathbb{F}^*$ ;  $i \in \overline{1, n}$
- Перестановка  $i$ -й и  $j$ -й строк местами;  $i, j \in \overline{1, n}; i \neq j$

**Определение 23.2.3:** **Элементарными матрицами** порядка  $n \in \mathbb{N}$  называются матрицы, умножение слева на которые приводит к осуществлению соответствующего элементарного преобразования строк над матрицей с  $n$  строками:

- $D_{ij}(\alpha) := E + \alpha E_{ij}$ ;  $i, j \in \overline{1, n}; i \neq j$
- $T_{i(\lambda)} := E + (\lambda - 1)E_{ii}$ ;  $i \in \overline{1, n}$
- $P_{ij} := E - (E_{ii} + E_{jj}) + (E_{ij} + E_{ji})$

**Определение 23.2.4:** Матрица  $A \in M_n(\mathbb{F})$  называется **обратимой**, если существует матрица  $A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$  такая, что  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ .

**Утверждение 23.2.1:** Элементарные матрицы любого порядка  $n$  обратимы

*Доказательство:* Предъявим обратные матрицы в явном виде:

- $(D_{ij}(\alpha))^{-1} = D_{ij}(-\alpha)$
- $(T_{i(\lambda)})^{-1} = T_{i(\lambda^{-1})}$

$$\bullet (P_{ij})^{-1} = P_{ij}$$

□

**Утверждение 23.2.2:** Элементарные преобразования строк расширенной матрицы переводят её в эквивалентную.

**Определение 23.2.5:** Главным элементом строки называется её первый ненулевой элемент.

**Определение 23.2.6:** Матрица  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$  имеет **ступенчатый вид**, если номера главных элементов её строк строго возрастают.

При этом если в матрице есть нулевые строки, то они расположены внизу матрицы.

**Теорема 23.2.1** (Метод Гаусса): Любую матрицу  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$  элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду

*Доказательство:* Предъявим алгоритм:

1. Если  $A = 0$ , то она уже имеет ступенчатый вид, завершаем процедуру.
2. Пусть  $j \in \overline{1, k}$  – наименьший номер ненулевого столбца. Переставим строки так, чтобы  $a_{1j}$  стал ненулевым.
3. Для всех  $i \in \overline{2, n}$  к  $i$ -й строке прибавим первую, умноженную на  $-a_{ij}(a_{1j})^{-1}$ . Тогда все элементы  $a_{2j}, \dots, a_{nj}$  станут нулевыми.
4. Пусть матрица была приведена к виду  $A'$ . Если она ступенчатая, то останавливаемся. Если она не ступенчатая, то начинаем заново для подматрицы  $B$  расположенной на пересечении строк с номерами  $\overline{2, n}$  и столбцом с номерами  $\overline{(j+1, k)}$ . Дальнейшие преобразования не изменят элементов за пределами этой подматрицы.

□

**Определение 23.2.7:** Пусть  $V$  – конечномерное линейное пространство,  $X \subset V$ .

**Рангом** системы  $X$  называется наибольший размер линейно независимой подсистемы в  $X$ .

Обозначение –  $\text{rk } X$ .

**Определение 23.2.8:** Пусть  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$

- **Строчным рангом** матрицы  $A$  называется ранг  $\text{rk}_r A$  системы её строк.
- **Столбцовым рангом** матрицы  $A$  называется ранг  $\text{rk}_c A$  системы её столбцов.

**Теорема 23.2.2:** Для любой матрицы  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$  выполнено следующее равенство:

$$\text{rk}_r A = \text{rk}_c A$$

**Определение 23.2.9:** Рангом матрицы  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$  называется её строчный или столбцовый ранг.

Обозначение –  $\text{rk } A$ .

**Утверждение 23.2.3:** Пусть  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$ ;  $B \in M_{k \times M}(\mathbb{F})$ , причём столбцы матрицы  $A$  линейно независимы. Тогда

$$\text{rk } AB = \text{rk } B$$

**Замечание 23.2.1:** В том числе, элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

**Утверждение 23.2.4:** Ранг ступенчатой матрицы  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$  равен числу ступеней.

**Теорема 23.2.3 (Кронекера-Капелли):**

$$\text{Система } Ax = b \text{ совместна} \Leftrightarrow \text{rk } A = \text{rk } (A \mid b)$$

*Доказательство:* Приведём расширенную матрицу системы  $(A \mid b)$  к упрощённому виду  $(A' \mid b')$ .

Тогда система совместна  $\Leftrightarrow$  в  $(A' \mid b')$  нет ступеньки, начинающейся в столбце  $b' \Leftrightarrow$  у  $A'$  и  $(A' \mid b')$  одно и то же число ступенек  $\Leftrightarrow \text{rk } A = \text{rk } (A \mid b)$ .

□



## 24. Линейное пространство, базис и размерность. Линейное отображение конечномерных пространств, его матрица.

### 24.1. Линейное пространство, базис и размерность

**Определение 24.1.1:** Пусть  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{F}$ ;  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

**Линейной оболочкой** векторов  $v_1, \dots, v_k$  называется множество линейных комбинаций этих векторов:

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$$

**Определение 24.1.2:** Линейное пространство  $V$  называется **конечнопорождённым**, если существуют векторы  $v_1, \dots, v_n \in V$  такие, что

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$$

**Определение 24.1.3:** Пусть  $V$  – конечнопорождённое линейное пространство.

Его **размерностью** называется количество векторов в любом его базисе. Обозначение –  $\dim V$ .

### 24.2. Линейное отображение конечномерных пространств, его матрица

**Определение 24.2.1:** Пусть  $U, V$  – линейные пространства над полем  $\mathbb{F}$ .

**Линейным отображением**, или **линейным оператором** называется отображение  $\varphi : U \rightarrow V$ , обладающее свойством линейности:

- $\forall u_1, u_2 \in U : \varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{F} : \forall u \in U : \varphi(\alpha u) = \alpha \varphi(u)$

**Определение 24.2.2:** Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  – линейное отображение

- **Образом** отображения  $\varphi$  называется  $\text{Im } \varphi := \varphi(U)$
- **Ядром** отображения  $\varphi$  называется  $\text{Ker } \varphi := \{u \in U \mid \varphi(u) = 0\}$

**Утверждение 24.2.1:** Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  – линейное отображение,  $e = (e_1, \dots, e_k)$  – базис в пространстве  $U$ . Тогда

$$\text{Im } \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$$

*Доказательство:*  $\subset$  Любой вектор  $u \in U$  представляется в виде линейной комбинации базисных векторов, поэтому по линейности  $\varphi(u) \in \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k) \rangle$

$\supset$  Все векторы  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k)$  лежат в  $\text{Im } \varphi$  и  $\text{Im } \varphi$  – линейное пространство, поэтому  $\langle \varphi(e) \rangle \subset \text{Im } \varphi$   $\square$

**Определение 24.2.3:** Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  – линейное отображение.

Тогда оно называется **инъективным**, если

$$\forall v \in \text{Im } \varphi : \exists! u \in U : \varphi(u) = v$$

**Утверждение 24.2.2:** Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  – линейное отображение. Тогда  $\varphi$  инъективно  $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi = \{0\}$

*Доказательство:*  $\Rightarrow$  Если  $\varphi$  инъективно, то существует единственный вектор  $0 \in U$ , для которого  $\varphi(u) = 0$ .

$\Leftarrow$  От противного. Пусть для некоторых  $u_1, u_2 \in U$  выполнено  $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$ , тогда  $\varphi(u_1 - u_2) = 0$ , откуда  $u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$   $\square$

## 25. Собственные значения и собственные векторы линейных преобразований. Диагонализуемость линейных преобразований.

**Определение 25.1:** Линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$  называется **линейным преобразованием**.

Множество всех линейных преобразований на  $V$  обозначается как  $\mathcal{L}(V)$ .

**Определение 25.2:** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ .

Вектор  $v \in V \setminus \{0\}$  называется **собственным вектором** оператора  $\varphi$  с собственным значением  $\lambda \in \mathbb{F}$ , если  $\varphi(v) = \lambda v$ .

Скаляр  $\mu \in \mathbb{F}$  называется **собственным значением** оператора  $\varphi$ , если существует собственный вектор с собственным значением  $\mu$ .

**Определение 25.3:** Подпространством линейного пространства  $V$  над полем  $\mathbb{F}$  называется такое его непустое подмножество  $U \subset V$ , что выполнены следующие условия:

- $(U, +)$  – подгруппа в  $(V, +)$
- $\forall \alpha \in F : \forall u \in U : \alpha u \in U$

Обозначение  $U \leq V$ .

**Определение 25.4:** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ;  $\lambda \in \mathbb{F}$  – собственное значение оператора  $\varphi$ .

Подпространство  $V_\lambda := \text{Ker}(\varphi - \lambda) \leq V$  называется **собственным подпространством** оператора  $\varphi$ , соответствующим собственному значению  $\lambda$ .

**Определение 25.5:** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{F})$ .

**Характеристическим многочленом** матрицы  $A$  называется многочлен  $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$

**Определение 25.6:** Матрицы  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  называются **подобными**, если  $\exists S \in M_n(\mathbb{F}), S$  обратимая :  $A = SBS^{-1}$

**Определение 25.7:** Оператор  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$  называется **диагонализуемым**, если существует базис в  $V$ , в котором матрица  $\varphi$  имеет диагональный вид.

Матрица  $A \in M_n(F)$  называется **диагонализуемой**, если она подобна некоторой диагональной.

**Определение 25.8:** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  – собственное значение оператора  $\varphi$ .

**Алгебраической кратностью** собственного значения  $\lambda_0$  называется кратность корня  $\lambda_0$  в  $\chi_\varphi(\lambda)$ .

**Геометрической кратностью** – величина  $\dim V_{\lambda_0}$

**Определение 25.9:** Пусть  $V$  – линейное пространство,  $U_1, U_2 \leq V$ .

**Суммой** подпространств  $U_1, U_2$  называется следующее множество:

$$U_1 + U_2 := \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_1 \in U_1, \mathbf{u}_2 \in U_2\}$$

Аналогично определяется сумма  $k$  подпространств.

**Определение 25.10:** Пусть  $V$  – линейное пространство,  $U_1, \dots, U_k \leq V$ .

Сумма подпространств  $U := U_1 + \dots + U_k$  называется **прямой**, если для любого вектора  $\mathbf{u} \in U$  существует единственный набор векторов  $\mathbf{u}_1 \in U_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U_k$  такой, что  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_k$ .

Обозначение –  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$

**Теорема 25.1:** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ . Тогда равносильны следующие условия:

1. Оператор  $\varphi$  диагонализуем
2. Алгебраическая кратность каждого собственного значения оператора  $\varphi$  равна геометрической, и  $\chi_\varphi$  раскладывается на линейные сомножители, то есть имеет следующий вид при некоторых  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}; \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$  таких, что  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = n$ :
 
$$\chi_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i - \lambda)^{\alpha_i}$$
3.  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ , где  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$  – собственные подпространства оператора  $\varphi$
4. В  $V$  есть базис, состоящий из собственных векторов оператора  $\varphi$

*Доказательство:*  $(1 \Rightarrow 2)$  Пусть в некотором базисе  $e$  в  $V$  матрица оператора  $\varphi$  имеет диагональный вид,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$  – различные элементы на диагонали,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$  – количества их вхождений в матрицу.

Тогда  $\chi_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$ . Для любого  $i \in \overline{1, k}$  алгебраическая кратность значения  $\lambda_i$  равна  $\alpha_i$ , при этом  $\alpha_i$  базисных векторов из  $e$  являются собственными векторами со значениями  $\lambda_i$ , откуда  $\dim V_{\lambda_i} \geq \alpha_i$ , а обратное неравенство верно всегда.

$(2 \Rightarrow 3)$  Пусть  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_j} \leq V$  – собственные подпространства оператора  $\varphi$ . Их сумма – прямая (т.к. базис) и по условию  $\sum_{i=1}^k \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^k \alpha_i = n$ , поэтому  $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = V$

$(3 \Rightarrow 4)$  Выберем базисы  $e_1, \dots, e_k$  в пространствах  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ . Тогда, так как сумма этих подпространств прямая, то объединение этих базисов даёт базис в  $V$ .

$(4 \Rightarrow 1)$  Если  $e$  – базис из собственных векторов, то именно в этом базисе матрица оператора  $\varphi$  имеет требуемый диагональный вид.  $\square$

## 26. Самосопряжённые преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов.

**Определение 26.1:** Пусть  $\varphi: U \rightarrow V$  – линейное отображение,  $e = (e_1, \dots, e_k)$  – базис в  $U$ ,  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  – базис в  $V$ .

**Матрицей отображения**  $\varphi$  в базисах  $e$  и  $\mathcal{F}$  называется матрица  $A \in M_{n \times k}(\mathbb{F})$  такая, что

$$(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k)) = \mathcal{F}A$$

**Определение 26.2:** Билинейной формой на  $V$  называется функция  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ , линейная по обоим аргументам.

Множество всех билинейных форм на  $V$  обозначается через  $\mathcal{B}(V)$ .

**Определение 26.3:** Матрицей формы  $b \in \mathcal{B}(V)$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n) =: e$  называется следующая матрица  $B$ :

$$B = (b(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$$

Обозначение  $b \leftrightarrow_e B$

**Определение 26.4:** Пусть  $b \in \mathcal{B}(V)$ .

Форма  $b$  называется **симметрической**, если

$$\forall u, v \in V : b(u, v) = b(v, u)$$

Пространство симметрических форм на  $V$  обозначается через  $\mathcal{B}^+(V)$

**Определение 26.5:** Пусть  $b \in \mathcal{B}(V)$ .

Форма  $b$  называется **кососимметрической**, если выполнены следующие условия;

1.  $\forall u, v : b(u, v) = -b(v, u)$
2.  $\forall u \in V : b(u, u) = 0$

**Определение 26.6:** Квадратичной формой, соответствующей форме  $b \in \mathcal{B}(V)$ , называется функция  $h : V \rightarrow \mathbb{F}$  такая, что

$$\forall v \in V : h(v) = b(v, v)$$

Квадратичные формы на  $V$  образуют линейное пространство над  $\mathbb{F}$ , обозначаемое через  $\mathcal{Q}(V)$

**Определение 26.7:** Пусть  $h \in \mathcal{Q}(V)$ . Тогда  $h$  называется

- **Положительно определённой**, если  $\forall v \in V : v \neq 0 : h(v) > 0$
- **Положительно полуопределённой**, если  $\forall v \in V : v \neq 0 : h(v) \geq 0$
- **Отрицательно определённой**, если  $\forall v \in V : v \neq 0 : h(v) < 0$
- **Отрицательно полуопределённой**, если  $\forall v \in V : v \neq 0 : h(v) \leq 0$

**Определение 26.8:** Полуторалинейной формой на  $V$  называется функция  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что

1.  $b$  линейна по первому аргументу
2.  $b$  сопряжённо-линейна по второму аргументу

Полуторалинейные формы на  $V$  образуют линейное пространство над  $\mathbb{F}$ , обозначаемое через  $\mathcal{S}(V)$ .

**Определение 26.9:** Матрицей формы  $b \in \mathcal{S}(V)$  в базисе  $(e_1, \dots, e_n) =: e$  называется следующая матрица  $B$ :

$$B = (b(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$$

Обозначение  $b \leftrightarrow_e B$

**Определение 26.10:** Пусть  $b \in \mathcal{S}(V)$ .

Форма  $b$  называется **эрмитовой**, если

$$\forall u, v \in V : b(u, v) = \overline{b(v, u)}$$

Матрица  $B \in M_n(\mathbb{C})$  называется **эрмитовой**, если  $B^T = \overline{B}$ , или  $B = B^*$ , где  $B^* := \overline{B^T}$  – эрмитово сопряжённая к  $B$  матрица.

**Определение 26.11:** Евклидовым пространством называется линейное пространство  $V$  над  $\mathbb{R}$ , на котором определена положительно определённая симметрическая билинейная форма  $(\cdot, \cdot)$  – **скалярное произведение**

**Определение 26.12:** Эрмитовым пространством называется линейное пространство  $V$  над  $\mathbb{C}$ , на котором определена положительно определённая эрмитова форма  $(\cdot, \cdot)$  – **эрмитово скалярное произведение**

**Определение 26.13:** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ .

Для всех  $u, v \in V$  положим

$$f_\varphi(u, v) := (\varphi(u), v); \quad g_\varphi(u, v) := (u, \varphi(v))$$

**Определение 26.14:** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ .

Оператором, **сопряжённым** к  $\varphi$  называется оператор  $\varphi^* \in \mathcal{L}(V)$  такой, что  $f_\varphi = g_{\varphi^*}$ .

**Определение 26.15:** Оператор  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$  называется **самосопряжённым**, если  $\varphi^* = \varphi$ .

**Утверждение 26.1:** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$  – самосопряжённый. Тогда его характеристический многочлен  $\chi_\varphi$  раскладывается на линейные сомножители над  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство:* Пусть  $V$  – евклидово пространство с ортонормированным базисом  $e$ , тогда  $\varphi_e \leftrightarrow A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $A = A^T$ .

Рассмотрим  $U$  – эрмитово пространство той же размерности с ортонормированным базисом  $\mathcal{F}$  и оператор  $\psi \in \mathcal{L}(U)$ ,  $\psi \xleftrightarrow{\mathcal{F}} A$ .

Если  $V$  изначально эрмитово, то ничего не делаем и сразу рассматриваем данный оператор.

Тогда  $\psi$  – тоже самосопряжённый, имеющий одинаковый характеристический многочлен с  $\varphi$ .

Пусть  $\lambda \in \mathbb{C}$  – корень  $\chi_\psi$ . Тогда существует соответствующий ему собственный вектор  $u \in U$ , причём

$$\lambda \|u\|^2 = (\psi(u), u) = (u, \psi(u)) = \bar{\lambda} \|u\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

□

**Утверждение 26.2:** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$  – самосопряжённый,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  – два различных собственных значения  $\varphi$ . Тогда  $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$

*Доказательство:* Пусть  $v_1 \in V_{\lambda_1}$ ;  $v_2 \in V_{\lambda_2}$ . Тогда

$$\lambda_1 (v_1, v_2) = (\varphi(v_1), v_2) = (v_1, \varphi(v_2)) = \lambda_2 (v_1, v_2) \Rightarrow (v_1, v_2) = 0$$

□

## 27. Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

### 27.1. Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду.

**Определение 27.1.1:** Пусть  $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$ .

- Векторы  $u, v \in V$  называются **ортогональными относительно  $b$** , если  $b(u, v) = 0$
- **Ортогональным дополнением** подпространства  $U \leq V$  относительно  $b$  называется подпространство

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : b(u, v) = 0\} \leq V$$

**Определение 27.1.2:** Пусть  $\mathbb{F}$  – поле.

Его **характеристикой** называется наименьшее число  $k \in \mathbb{N}$  такое, что в полне выполнено равенство  $\underbrace{1 + \dots + 1}_k = 0$ .

Если такого  $k$  не существует, то характеристикой поля считается 0.

Обозначение –  $\text{char } \mathbb{F}$

**Определение 27.1.3:** Пусть  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2, h \in \mathcal{Q}(V)$ .

Симметрическая билинейная форма  $b \in \mathcal{B}^+(V)$  называется **полярной** к  $h$ , если

$$\forall v \in V : h(v) = b(v, v)$$

**Матрицей** квадратичной формы  $h$  в базисе  $e$  называется матрица  $B$  полярной к ней формы  $b$  в базисе  $e$ . Обозначение  $h \leftrightarrow_e B$ .

**Теорема 27.1.1** (Метод Якоби): Пусть  $h \in \mathcal{Q}(V), h \leftrightarrow_e B$ , причём все главные миноры матрицы  $B$  отличны от нуля.

Тогда существует такой базис  $e' = eS$ , что матрица перехода  $S$  – верхнетреугольная с единицами на главной диагонали,  $h \leftrightarrow B'$  и  $B'$  диагональна.

$$\text{Более того, тогда } B' = \text{diag}\left(\Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, \dots, \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)}\right)$$

*Доказательство:* Докажем индукцией по  $n := \dim V$ , что матрица формы  $h$  приводится к диагональному виду в базисе  $e'$  с матрицей перехода из условия.

База,  $n = 1$ , тривиальна: подходит исходный базис  $e$ .

Пусть теперь  $n > 1$ , тогда  $(U := \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle) \cap \text{Ker } h = \{0\}$ , так как  $\Delta_{n-1}(B) \neq 0$ .

Значит  $V = U \oplus U^\perp$ . Представим  $e_n$  в виде  $e_n = u + e'_n, u \in U, e'_n \in U^\perp, e'_n \neq 0$ .

По предположению индукции, в  $U$  можно выбрать подходящий базис  $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ , тогда его объединение с  $e'_n$  будет искомым.

Матрица перехода  $S$  действительно будет верхнетреугольной с единицами на главной диагонали: для первых  $n - 1$  столбцов это верно в силу предположения индукции, а для последнего – в силу  $e'_n = e_n - u$

Заметим, что, поскольку базис  $e'$  получен описанным выше способом:

$$\forall i \in \overline{1, n} : e'_i \in \langle e_1, \dots, e_i \rangle, \quad \langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_i \rangle$$

Пусть  $B_i$  – подматрица  $B$  в левом верхнем углу, а  $B'_i$  – аналогичная подматрица  $B'$ .

Тогда  $B'_i = S_i^T B_i S_i$ , где  $S_i$  – соответствующая подматрица  $S$ , также являющаяся верхнетреугольной с единицами на диагонали, поэтому

$$\Delta_i(B') = \det B'_i = \det(S_i^T B_i S_i) = \det B_i = \Delta_i(B)$$

Значит

$$\forall i \in \overline{1, n} : \Delta_i(B) = \Delta_i(B')$$

Откуда, в силу диагональности  $B'$ , поскольку его  $i$ -й главный минор равен произведению  $i$  диагональных элементов:

$$B' = \text{diag}\left(\Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, \dots, \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)}\right)$$

□

## 27.2. Критерий Сильвестра



**Определение 27.2.1:** Пусть  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{F}$ .

Отображение  $g : V^n \rightarrow \mathbb{F}$  называется **полилинейным**, если оно линейно по каждому из  $n$  аргументов.

**Определение 27.2.2:** Пусть  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{F}$ .

Отображение  $g : V^n \rightarrow \mathbb{F}$  называется **кососимметричным**, если для любых позиций аргументов  $i, j \in \overline{1, n}, i < j$  выполнены следующие условия:

1.  $\forall v_i, v_j \in V : g \left( \dots, \underbrace{v_i}_i, \dots, \underbrace{v_j}_j, \dots \right) = -g \left( \dots, \underbrace{v_j}_j, \dots, \underbrace{v_i}_i, \dots \right)$
2.  $\forall v \in V : g \left( \dots, \underbrace{v}_i, \dots, \underbrace{v}_j, \dots \right) = 0$

**Определение 27.2.3:** Группой перестановок  $S_n$  называется следующее множество:

$$S_n := \{ \sigma : \overline{1, n} \rightarrow \overline{1, n} \mid \sigma - \text{биекция} \}$$

Данной множество является группой с операцией композиции  $\circ$ .

Элементы группы  $S_n$  называются **перестановками**.

**Определение 27.2.4:** Беспорядком, или **инверсией** в перестановке  $\sigma \in S_n$  называется пара индексов  $(i, j); i, j \in \overline{1, n}$  такая, что,  $i < j$ , но  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

Числа беспорядков в  $\sigma$  обозначается через  $N(\sigma)$ . **Знаком** перестановки  $\sigma \in S_n$  называется величина  $(-1)^{N(\sigma)}$ .

Обозначения –  $\text{sgn } \sigma, (-1)^\sigma$

**Определение 27.2.5:** Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ .

**Определителем**, или **детерминантом**, матрицы  $A$  называется следующая величина:

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

**Определение 27.2.6:** Пусть  $B \in M_n(\mathbb{R})$  – симметричная матрица.

Её **главным минором порядка  $i$**  называется  $\Delta_i(B)$  – определитель подматрицы размера  $i \times i$ , расположенной в левом верхнем углу  $B$ .

**Определение 27.2.7:** Пусть  $B \in M_n(\mathbb{R})$  – симметрическая матрица.

$B$  называется **положительно** или **отрицательно** определённой, если она задаёт квадратичную форму, обладающую этим свойством.

**Определение 27.2.8:** Матрица  $A \in M_n(\mathbb{F})$  называется **невырожденной**, если  $\text{rk } A = n$

**Определение 27.2.9:** Пусть  $\mathbb{F}$  – поле,  $n \in \mathbb{N}$

- Группа невырожденных матриц порядка  $n$  над  $\mathbb{F}$  обозначается через  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$

**Утверждение 27.2.1:**  $B \in M_n(\mathbb{R})$  положительно определена  $\Leftrightarrow \exists A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : B = A^T A$

**Теорема 27.2.1** (Критерий Сильвестра): Пусть  $h \in \mathcal{Q}(V), h \leftrightarrow B$ . Тогда  $h$  положительно определена  $\Leftrightarrow \forall i \in \overline{1, n} : \Delta_i(B) > 0$

*Доказательство:* Пусть  $n := \dim V$

$\Rightarrow$  Если  $h$  положительно определена, то  $\exists A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : B = A^T A$ . Тогда  $\Delta_n(B) = \det B = (\det A)^2 > 0$ .

Поскольку главному минору порядка  $i \in \overline{1, n-1}$  соответствует ограничение  $h$  на  $U := \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ , которое тоже положительно определено, то аналогично  $\Delta_i(B) > 0$

$\Leftarrow$  Согласно методу Якоби, существует базис  $e'$  в  $V$  такой, что матрица  $h$  в нём диагональна, причём  $h \leftrightarrow_{e'} \left( \Delta_1(B), \frac{\Delta_2(B)}{\Delta_1(B)}, \dots, \frac{\Delta_n(B)}{\Delta_{n-1}(B)} \right)$ .

Все элементы на главной диагонали положительны, поэтому  $h$  положительно определена.  $\square$

## 28. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью - квазимногочленом

**Определение 28.1:** Уравнение вида

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$$

называется **обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка**.

**Определение 28.2:** Функция  $\varphi(x)$ , определённая на  $I$  вместе со своими  $n$  производными, называется решением ОДУ, если

1.  $\varphi$  и все её  $n$  производных непрерывны на  $I$
2.  $\forall x \in I : (x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$ , где  $\Omega$  – область определения  $F$
3.  $\forall x \in I : F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$

**Определение 28.3:** Пусть  $n \geq 2$ ,  $f_1, \dots, f_n$  – непрерывные функции, определённые на области  $G \subseteq \mathbb{R}_{x,y}^{n+1}$ .

Назовём **нормальной системой дифференциальных уравнений первого порядка** следующую систему:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = f_1(x, \mathbf{y}) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = f_n(x, \mathbf{y}) \end{cases}$$

**Определение 28.4:** Задачей Коши называется

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

**Теорема 28.1** (О существовании и единственности для системы): Пусть вектор-функция  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  непрерывна в области  $G$  вместе со своими производными по  $y_j, j \in \overline{1, n}$ , и точка  $(x_0, \mathbf{y}_0)$  тоже лежит в  $G$ .

Тогда задача Коши локально разрешима единственным образом:

1.  $\exists \delta > 0$ , такое, что на  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  решение задачи Коши существует
2. Решение единственно в смысле: Если  $\mathbf{y}_1 \equiv \varphi(x)$  – решение задачи Коши в  $\delta_1$ -окрестности точки  $x_0$ , а  $\mathbf{y}_2 \equiv \psi(x)$  – решение задачи Коши в  $\delta_2$ -окрестности точки  $x_0$ , то в окрестности точки  $x_0$  с радиусом  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ :  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$

**Теорема 28.2** (О существовании и единственности для уравнения): Пусть функция  $f(x, y, p_1, \dots, p_{n-1})$  определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по переменным  $y, p_1, \dots, p_{n-1}$  в некоторой области  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  и точка  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$ .

Тогда существует замкнутая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , в которой существует единственное решение задачи Коши.

**Определение 28.5:** Линейное обыкновенное дифференциальное уравнению с постоянными коэффициентами и правой частью - квазимногочленом имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

где  $f(x)$  – квазимногочлен:

$$f(x) = e^{\mu x} P_m(x); \quad \mu \in \mathbb{C}, P_m(x) - \text{многочлен степени } m$$

**Замечание 28.1:** Существование и единственность решения такого уравнения очевидна применением соответствующей теоремы.

**Определение 28.6:** Характеристическим многочленом  $L(x)$  назовём многочлен

$$L(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

**Определение 28.7:** Если число  $\mu$  из формулы квазимногочлена является корнем характеристического уравнения

$$L(\lambda) = 0$$

то говорят, что в уравнении **резонансный** случай.

Если же  $\mu$  не является корнем, то имеем **нерезонансный** случай.

**Определение 28.8:** Дифференциальным многочленом назовём многочлен вида

$$L(D) = (D - \lambda_1)^{k_1} (D - \lambda_2)^{k_2} \dots (D - \lambda_s)^{k_s}$$

где  $k_i$  соответствует кратности корней характеристического уравнения, а  $D$  – оператор формального дифференцирования.

**Замечание 28.2:** Решение рассматриваемого уравнения эквивалентно решению уравнения

$$L(D)y = 0$$

**Теорема 28.3** (О структуре решения ЛНУ с правой частью в виде квазимногочлена): Для рассматриваемого уравнения существует и единственно решение вида

$$y(x) = x^k e^{\mu x} Q_m(x)$$

где  $Q_m(x)$  – многочлен одинаковой с  $P_m(x)$  степени  $m$ , а число  $k$  равно кратности корня  $\mu$  в уравнении  $L(\lambda) = 0$  в резонансном случае и  $k = 0$  в нерезонансном.

*Доказательство:* Если  $\mu \neq 0$ , то заменой  $y = ze^{\mu x}$  всегда можно избавиться от  $e^{\mu x}$  в правой части.

В самом деле, после замены имеем, что

$$L(D)y = L(D)(e^{\mu x}z) = e^{\mu x}L(\mu)z + e^{\mu x}L(D)z = e^{\mu x}L(D + \mu)z = e^{\mu x}P_m(x)$$

Разделим на экспоненту и получим

$$L(D + \mu)z = P_m(x)$$

Таким образом, доказательство теоремы достаточно провести для уравнения вида (БОО  $\mu = 0$ ):

$$L(D)y = P_m(x)$$

Рассмотрим нерезонансный случай  $L(\mu) \neq 0$ . Пусть

$$P_m(x) = p_mx^m + \dots + p_0; \quad Q_m(x) = q_mx^m + \dots + q_0$$

Если подставить и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим линейную алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $q_0, \dots, q_m$ .

Матрица системы треугольная с числами  $a_n = L(\mu) \neq 0$  на диагонали, значит коэффициенты определяются из неё однозначно.

В резонансном случае имеем

$$L(\lambda) = \lambda^k(\lambda^{n-k} + a_1\lambda^{n-k-1} + \dots + a_{n-k})$$

Следовательно,

$$L(D) = \begin{cases} D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-k}D^k, & k < n \\ D^n, & k = n \end{cases}$$

В первом случае замена  $D^k y = z$  приводит уравнение к уравнению с нерезонансным случаем.

Иначе получаем уравнение

$$D^n y = P_m(x)$$

Которое очевидно решается интегрированием  $n$  раз. □

## 29. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения

**Определение 29.1:** Пусть  $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; A \in M_n(\mathbb{C})$

Тогда **Нормальная линейная однородная система уравнений** выглядит так:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

Где под  $\dot{\cdot}$  подразумевается дифференцирование по  $t$ .

**Теорема 29.1:** Если  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$  – базис из собственных векторов матрицы  $A$ , то  $\mathbf{x}_i = e^{\lambda_i t} \mathbf{h}_i$  – ФСР для исходной однородной системы.

*Доказательство:* Заметим, что

$$A(e^{\lambda t} \mathbf{h}) = e^{\lambda t}(A\mathbf{h}) = e^{\lambda t} \lambda \mathbf{h} = (e^{\lambda t} \mathbf{h})'$$

Значит собственный вектор является решением.

Их линейная независимость следует из того, что их вронскиан в точке  $t = 0$  равен определителю из координатных столбцов этого базиса, а значит не равен нулю.  $\square$

**Определение 29.2:** Пусть  $t$  – действительная переменная,  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

Тогда **матричной экспонентой** называется ряд

$$e^{tA} := E_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

**Лемма 29.1:** Свойства матричной экспоненты:

1. Если  $S$  невырожденная и  $A = SBS^{-1}$ , то  $\forall t \in \mathbb{R} : e^{tA} = Se^{tB}S^{-1}$
2.  $(e^{tA})'_t = Ae^{tA} = e^{tA}A$

**Теорема 29.2** (Матричная экспонента для ФСР): Матрица  $e^{tA}$  является фундаментальной матрицей для системы линейных уравнений  $\dot{x} = Ax$ .

*Доказательство:* По свойствам экспоненты

$$(e^{tA})'_t = Ae^{tA}$$

Значит каждый столбец матрицы  $e^{tA}$  является решением исходной системы.

Поскольку  $\forall t \in \mathbb{R} : \det e^{tA} \neq 0$ , то  $e^{tA}$  фундаментальна.  $\square$

## 30. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского.

**Определение 30.1:** Вектор-функции  $y_1(x), \dots, y_k(x)$ , определённые на промежутке  $I$ , называются **линейно зависимыми**, если

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \exists i : \alpha_i \neq 0 : \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j(x) \equiv 0$$

**Определение 30.2:** Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  – вектор-функции с  $n$  компонентами.

Тогда **определителем Вронского** для заданных вектор-функций называется функция

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

**Лемма 30.1:** Если вронскиан системы  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  отличен от нуля хотя бы в одной точке, то все эти функции линейно независимы.

**Лемма 30.2:** Если вектор-функции  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  – решения некоторой системы линейных уравнений на промежутке  $I$  и  $\exists x_0 \in I : W(x_0) = 0$ , то  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы на  $I$ .

**Определение 30.3:** **Фундаментальная система решений** для СЛДУ – набор  $n$  линейно независимых решений системы.

**Теорема 30.1** (Лиувилля-Остроградского): Пусть  $W(x)$  – вронскиан решений  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  системы  $y'(x) = A(x)y(x)$  на промежутке  $I$ ,  $x_0 \in I$ .

Тогда  $\forall x \in I$  имеет место формула Лиувилля-Остроградского:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(t) dt\right)$$

*Доказательство:* Докажем, что  $W(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W'(x) = \operatorname{tr} A(x) \cdot W(x)$$

Пусть  $y_{ij}(x), i \in \overline{1, n}$  – компоненты решения  $y_j(x), j \in \overline{1, n}$ .

Тогда  $W(x)$  является функцией от всех этих компонент:

$$W(x) = W[y_{11}(x), y_{21}(x), \dots, y_{nn}(x)]$$

По формуле производной сложной функции получаем, что

$$W'(x) = \sum_{p,q=1}^n \frac{\partial W}{\partial y_{pq}}(x) y'_{pq}(x)$$

Пусть  $W_{pr}(x)$  – алгебраическое дополнение  $y_{pr}(x)$  в  $W(x)$ .

Тогда разложение  $W(x)$  по  $p$ -й строке даёт

$$W(x) = \sum_{r=1}^n y_{pr}(x) W_{pr}(x)$$

Отсюда получим, что

$$\frac{\partial W}{\partial y_{pq}}(x) = W_{pq}(x)$$

А так как каждая вектор-функция удовлетворяет системе  $y'(x) = A(x)y(x)$ , то есть

$$y'_q(x) = A(x)y_q(x); \quad q \in \overline{1, n}$$

Отсюда по определению матричного умножения:

$$y'_{pq} = \sum_{r=1}^n a_{pr}(x) y_{rq}(x)$$

Подставляя найденные выражения в формулу  $W'(x)$  получим, что

$$W'(x) = \sum_{p,q=1}^n W_{pq}(x) \sum_{r=1}^n a_{pr}(x) y_{rq}(x) = \sum_{p,r=1}^n a_{pr}(x) \sum_{q=1}^n y_{rq} W_{pq}(x)$$

Но по кососимметричности определителя мы знаем, что

$$\sum_{q=1}^n y_{rq} W_{pq}(x) = \delta_{pr} W(x)$$

А значит

$$W'(x) = W(x) \sum_{p,r=1}^n a_{pr} \sigma_{pr} = W(x) \sum_{i=1}^n a_{pp}(x) = W(x) \cdot \text{tr } A(x)$$

Интегрирование этого линейного однородного первого порядка даёт искомую формулу.  $\square$

## 31. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия локального экстремума.

**Замечание 31.1:** Вспомним  $C$ -нормы:

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \|f\|_{C^k[a,b]} = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a,b]} |f^{(i)}(x)|$$

**Определение 31.1:** Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $M \subset X$ .

Отображение  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  называется **функционалом** с областью определения  $M$ .

Пусть  $F(x, y, p)$  – непрерывно дифференцируемая функция на  $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ . В этом билете будем рассматривать функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx; \quad y(a) = A, y(b) = B$$

Определённый на множестве

$$M := \{y(x) \in C^1[a, b] \mid y(a) = A, y(b) = B\}$$

**Определение 31.2:** Функция  $\hat{y}(x) \in M$  называется **слабым локальным минимумом** (максимумом) функционала  $J$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) \in M : \|\hat{y} - y\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon : J(y) \geq (\leq) J(\hat{y})$$

**Определение 31.3:** Задача на отыскание слабого локального экстремума функционала  $J$  называется **простейшей вариационной задачей** или **задачей с закреплёнными концами**.

**Определение 31.4:** Выражение  $\frac{d}{d\alpha} J(y + \alpha \eta)|_{\alpha=0}$ , где  $\eta \in C^1[a, b]$  называется **первой вариацией** функционала  $J(y)$  на функции  $y(x)$  и обозначается  $\partial J[y, \eta(x)]$

**Теорема 31.1:** Если  $\hat{y}(x) \in M$  является решением простейшей вариационной задачи, то

$$\forall \eta(x) \in C^1[a, b] : \partial J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$$

*Доказательство:* Пусть, БОО,  $\hat{y}$  – слабый локальный минимум  $J(y)$ . Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) \in M : \|\hat{y} - y\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon : J(y) \geq J(\hat{y})$$



Зафиксировав  $\eta(x)$ , подберём  $\alpha_0 : \|\alpha_0 \eta\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$ . Тогда

$$\forall \alpha : |\alpha| < \alpha_0 : \|\alpha \eta\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$$

Рассмотрим числовую функцию  $\Phi(\alpha) := J(\hat{y} + \alpha \eta)$ . Так как  $\hat{y}$  – слабый локальный экстремум  $J(y)$ , то  $0$  – локальный минимум функции  $\Phi$ .

Получается, что  $\Phi'(0) = 0$  по необходимому условию минимума числовой функции, это и означает, что

$$\forall \eta \in C^1[a,b] : \partial J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$$

□

**Теорема 31.2** (Лемма Лагранжа / основная лемма вариационного исчисления): Если  $f(x) \in C[a,b]$  и

$$\forall \eta(x) \in C^1[a,b] : \int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0$$

то  $f(x) \equiv 0$  на  $[a,b]$ .

*Доказательство:* Пусть это не так, тогда БОО  $\exists x_0 : f(x_0) > 0$ .

Из-за непрерывности  $f$  следует, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : f(x) > 0$$

Тогда выберем  $\eta_0$ , как гладкую положительную шапочку на данном интервале, которая гладко спускается к нулю.

Получим что

$$\int_a^b f(x) \eta_0(x) dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x) \eta_0(x) dx > 0$$

Противоречие

□

**Теорема 31.3:** Пусть  $F(x, y, p)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция  $\forall (x, y, p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$ .

Если непрерывно дифференцируемая функция  $\hat{y}$  является решением простейшей вариационной задачи для  $J$ , то эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера на  $[a,b]$ :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \equiv 0$$

*Доказательство:* Распишем первую вариацию:

$$\begin{aligned} \partial J[y, \eta(x)] &= \left[ \frac{d}{d\alpha} \int_a^b F(x, y + \alpha \eta, y' + \alpha \eta') \right]_{\alpha=0} = \\ &= \left[ \int_a^b \left( \frac{\partial F(x, y + \alpha \eta, y' + \alpha \eta')}{\partial y} \eta + \frac{\partial F(x, y + \alpha \eta, y' + \alpha \eta')}{\partial y'} \eta' \right) dx \right]_{\alpha=0} = \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \eta + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \eta' \right) dx \end{aligned}$$

Проинтегрируем одно из подынтегральных слагаемых по частям:

$$\int_a^b \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \eta' dx = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right) \eta dx$$

Первое слагаемое равно нулю в силу ограничений на допустимое приращение  $\eta$ . Тогда

$$\partial J[y, \eta(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right) \right) \eta dx$$

Так как  $y$  – локальный экстремум, то по предыдущему необходимому условию

$$\forall \eta \in C^1[a, b] : \partial J[y, \eta(x)] = 0$$

Теперь по лемме Лагранжа получим требуемое.  $\square$

## 32. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства. Вычисление для нормального распределения.

### 32.1. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства.

**Определение 32.1.1:** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется **алгеброй**, если

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3.  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

**Определение 32.1.2:** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется  **$\sigma$ -алгеброй**, если

1.  $\mathcal{F}$  – алгебра
2.  $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

**Определение 32.1.3:**  $P$  называется **вероятностной мерой** на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , если  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющая свойствам:

1.  $P(\Omega) = 1$
2.  $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty} : P(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

**Определение 32.1.4:** **Вероятностное пространство** – это тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где

- $\Omega$  – множество **элементарных исходов**
- $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ , элементы  $\mathcal{F}$  называются **событиями**
- $P$  – вероятностная мера на измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$

Далее будем предполагать, что  $(E, \mathcal{E})$  – произвольное измеримое пространство.

**Определение 32.1.5:** **Борелевской сигма-алгеброй** называется наименьшая  $\sigma$ -алгебра над  $\mathbb{R}$ , содержащая все интервалы (или отрезки).

Обозначение –  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

**Определение 32.1.6:** Отображение  $X: \Omega \rightarrow E$  называется **случайным элементом**, если оно измеримо, то есть

$$\forall B \in \mathcal{E}: X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

**Определение 32.1.7:** Если  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , то случайный элемент называется **случайной величиной**.

**Определение 32.1.8:** Если  $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ , то случайный элемент называется **случайным вектором**.

**Определение 32.1.9:** Распределением случайной величины (вектора)  $\xi$  называется вероятностная мера  $P_\xi$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ( $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ), определённая по правилу:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): P_\xi(B) := P(\xi \in B) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\})$$

**Определение 32.1.10:** Простой случайной величиной называется случайная величина  $\xi$ :

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{I}_{A_k}(\omega)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  – все различные значения  $\xi$ , а события  $A_1, \dots, A_n$  образуют разбиение  $\Omega$ .

**Определение 32.1.11:** Математическим ожиданием простой случайной величины  $\xi$  называется величина  $\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^n x_k P_\xi(A_k)$

**Лемма 32.1.1** (Свойства матожидания): Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – простые случайные величины. Тогда

1. Линейность. Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то  $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$
2. Если  $\xi \geq 0$ , то  $\mathbb{E}\xi \geq 0$
3. Если  $\xi \geq \eta$ , то  $\mathbb{E}\xi \geq \mathbb{E}\eta$

**Определение 32.1.12:** Пусть  $\xi \geq 0$  – неотрицательная случайная величина. Рассмотрим последовательность простых неотрицательных случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ , которой монотонно к ней сходится.

**Математическим ожиданием** неотрицательной случайной величины  $\xi$  называется величина  $\mathbb{E}\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\xi_n$

**Определение 32.1.13:** Пусть  $\xi$  – произвольная случайная величина. Рассмотрим  $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ ;  $\xi^- = \max(-\xi, 0)$ . Это неотрицательные случайные величины, при этом  $\xi = \xi^+ - \xi^-$ .

1. Если  $\mathbb{E}\xi^+ < +\infty, \mathbb{E}\xi^- < +\infty$ , то математическим ожиданием величины  $\xi$  назовём  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$
2. Если  $\mathbb{E}\xi^+ = +\infty, \mathbb{E}\xi^- = +\infty$ , то математическое ожидание случайной величины  $\xi$  не определено
3. Иначе  $\mathbb{E}\xi^\pm = +\infty$ . Тогда математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  будем считать  $\pm\infty$

**Замечание 32.1.1:** Математическое ожидание – это интеграл Лебега по вероятностной мере  $P$ .

**Лемма 32.1.2** (Дополнительные свойства матожидания):

1.  $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$
2. Если  $\xi = 0$  почти наверное, то  $\mathbb{E}\xi = 0$
3. Если  $\xi = \eta$  почти наверное и  $\mathbb{E}\xi$  конечно, то  $\mathbb{E}\eta$  конечно и  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta$
4. Если  $\xi \geq 0$  и  $\mathbb{E}\xi = 0$ , то  $\xi = 0$  почти наверное
5. Пусть  $\mathbb{E}\eta$  и  $\mathbb{E}\eta$  конечны. Тогда

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{E}(\xi \mathbb{I}_A) \leq \mathbb{E}(\eta \mathbb{I}_A) \Rightarrow \xi \leq \eta$$

*Доказательство:* Все свойства очевидным образом следует из соответствующих свойств интеграла Лебега.  $\square$

**Определение 32.1.14:** Если  $\mathbb{E}\xi$  конечно, то **дисперсией** случайной величины  $\xi$  называется

$$\mathbb{V}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$$

**Лемма 32.1.3** (Свойства дисперсии):

1.  $\forall c \in \mathbb{R} : \mathbb{V}(c\xi) = c^2\mathbb{V}(\xi); \quad \mathbb{V}(\xi + c) = \mathbb{V}(\xi)$
2.  $\mathbb{V}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

*Доказательство:* Очевидно следуют из свойств матожидания.  $\square$

## 32.2. Вычисление для нормального распределения

**Определение 32.2.1:** Функцией распределения вероятностной меры  $P$  на  $\mathbb{R}$  называется

$$F(x) = P((-\infty, x])$$

**Определение 32.2.2:** Пусть  $P$  – вероятностная мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , а  $F$  – её функция распределения.

Она называется **абсолютно непрерывной**, если

$$\exists p(t) \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1 \wedge F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

В этом случае  $p(t)$  называется **плотностью** функции распределения  $F$  и меры  $P$ .

**Определение 32.2.3:** Распределение называется **нормальным** с параметрами  $a \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^{++}$ , если его плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Обозначение –  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

**Утверждение 32.2.1:** Если  $\xi$  имеет нормальное распределение  $\mathcal{N}(a, \sigma)$ , то

$$\mathbb{E}\xi = a$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} x \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) d\mu(x) \stackrel{t=\frac{x-a}{\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \sigma t e^{-\frac{t^2}{2}} d\mu(t)}_{\text{нечётная}} + \int_{\mathbb{R}} a e^{-\frac{t^2}{2}} d\mu(t) \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} d\mu(t) \end{aligned}$$

Получили интеграл Эйлера-Пуассона. Напомним, как его вычислять:

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \stackrel{\begin{cases} x=\rho \cos \varphi \\ y=\rho \sin \varphi \end{cases}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho^2 d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi \end{aligned}$$

Мы вычисляли квадрат интеграла, а значит сам интеграл равен  $\sqrt{\pi}$ .

Таким образом матожидание равно  $a$ .  $\square$

## 33. Неравенство Чебышева и закон больших чисел

### 33.1. Неравенство Чебышева

**Лемма 33.1.1** (Неравенство Маркова): Пусть  $\xi \geq 0$  – случайная величина,  $a \in \mathbb{R}^{++}$ . Тогда

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{a}$$

*Доказательство:* Распишем цепочку очевидных неравенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= \mathbb{E}(\xi \mathbb{I}(\xi \geq a) + \xi \mathbb{I}(\xi < a)) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{I}(\xi \geq a) + \mathbb{E}(\xi \mathbb{I}(\xi < a))) \geq \\ &\mathbb{E}(\xi \mathbb{I}(\xi \geq a)) \geq a \mathbb{E}(\mathbb{I}(\xi \geq a)) = aP(\xi \geq a) \end{aligned}$$

□

**Лемма 33.1.2** (Неравенство Чебышева): Пусть  $\xi$  – случайная величина. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}\xi}{\varepsilon^2}$$

*Доказательство:* Подставим в неравенство Маркова неотрицательную случайную величину  $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$  и  $a = \varepsilon^2$ . □

## 33.2. Закон больших чисел

**Определение 33.2.1:** События  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если  $P(AB) = P(A)P(B)$

**Определение 33.2.2:** События  $A_1, \dots, A_n$  называются **независимыми в совокупности**, если

$$\forall i_1, \dots, i_k \in \overline{1, n} : P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

**Определение 33.2.3:**  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  называются **независимыми в совокупности**, если независимы в совокупности любые их конечные наборы.

**Определение 33.2.4:** Случайные величины  $\xi, \eta$  называются **независимыми**, если независимы  $\sigma$ -алгебры, порождённые их распределениями.

**Утверждение 33.2.1:** Если  $\xi, \eta$  независимые случайные величины, то

$$\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$

Более того, их дисперсия линейна

$$\mathbb{V}(\xi + \eta) = \mathbb{V}\xi + \mathbb{V}\eta$$

**Теорема 33.2.1:** Пусть  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин и  $\exists \mathbb{V}\xi_1, a = \mathbb{E}\xi$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство:* Подставим в неравенство Чебышева  $\xi = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ .

Заметим, что, благодаря линейности,  $\mathbb{E}\xi = a$ .

Тогда

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}\xi}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{n^2 \varepsilon^2}$$

Так как величины независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Получаем

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon) \leq \frac{n \mathbb{V}\xi_1}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

## 34. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией

**Определение 34.1:** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к случайной величине  $\xi$  **по распределению**, если  $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывной ограниченной функции выполнено

$$\mathbb{E}f(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(\xi)$$

Обозначение  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ .

**Определение 34.2:** Пусть  $\xi$  – случайная величина.

**Характеристической функцией** случайной величины  $\xi$  называется преобразование Фурье

$$\varphi_{\xi}(t) = \mathbb{E}e^{i\xi t}$$

**Теорема 34.1** (Непрерывности для характеристической функции): Пусть  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  – последовательность случайных величин,  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  – соответствующая последовательность характеристических функций.

Тогда если

$$\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

где  $\varphi(t)$  непрерывна в нуле, то  $\varphi(t)$  является характеристической функцией некоторой случайной величины  $\xi$ , причём  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ .

**Теорема 34.2** (О производных характеристической функции): Пусть  $\mathbb{E}|\xi|^n < +\infty$  для  $n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $\forall s \leq n$ :

1.  $\varphi^{(s)}(t) = \mathbb{E}((i\xi)^s e^{it\xi})$
2.  $\mathbb{E}\xi^s = \frac{\varphi^{(s)}(0)}{i^s}$
3.  $\varphi_\xi(t)$  раскладывается в вид  

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$$

где  $|\varepsilon_n(t)| \leq 3\mathbb{E}|\xi|^n$  и  $\varepsilon_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

**Теорема 34.3** (ЦПТ для НОРСВ): Пусть  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  – независимые одинаково распределённые случайные величины,  $\mathbb{E}\xi_1 = a, 0 < \mathbb{V}\xi_1 < +\infty$ .

Обозначим  $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{V}S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

*Доказательство:* Обозначим  $T_n := \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{V}S_n}}$ . По теореме непрерывности достаточно проверить, что характеристическая функция  $T_n$  сходится к  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  – характеристической функции  $\mathcal{N}(0, 1)$  (которая равна также  $e^{-\frac{t^2}{2}}$ )

Обозначим  $\eta_j := \frac{\xi_j - a}{\sigma}$ . Тогда  $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$  – тоже НОРСВ, причём  $\mathbb{E}\eta_j = 0, \mathbb{V}\eta_j = \mathbb{E}\eta_j^2 = 1$ . Тогда

$$T_n = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Посчитаем характеристическую функцию  $T_n$ :

$$\varphi_{T_n}(t) = \mathbb{E}e^{itT_n} = \mathbb{E}e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(\eta_1 + \dots + \eta_n)} \stackrel{\text{независимость}}{=}$$

$$\prod_{k=1}^n \varphi_{\eta_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{\eta_1}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \stackrel{\text{т. о производных}}{=}$$

$$\left(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\eta_1 - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}\eta_1^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

□

## 35. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши.

### 35.1. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана



**Замечание 35.1.1:** В ТФКП используются следующие стандартные обозначения  $z$  - комплексная переменная

$$z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$$

$f(z)$  - исследуемая функция

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) : u, v \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

**Определение 35.1.1:** Функция  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  называется *дифференцируемой* в  $z_0$  если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \rightarrow 0$$

**Теорема 35.1.1:**  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема тогда и только тогда когда

1.  $u(x, y), v(x, y)$  дифференцируемы в  $(x_0, y_0)$

2. Выполняются условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{При этом } f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

*Доказательство:*

( $\Rightarrow$ )

Пусть  $f$  дифференцируема. Тогда  $\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z) = A\Delta z + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$

Обозначим  $A = a + ib$  и распишем  $\Delta f$  по координатам.

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \end{cases}$$

Из того, что  $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z)$  следует  $\alpha_1, \alpha_2$  тоже  $o(\Delta x, \Delta y)$

Отсюда по определению  $u, v$  дифференцируемы. Причем  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b$

( $\Leftarrow$ )

Пусть  $u, v$  дифференцируемы и выполняются УКР, тогда

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

Что и означает дифференцируемость.

□

## 35.2. Интегральная теорема Коши

**Лемма 35.2.1:** Пусть  $D$  область  $f$  голоморфна в ней. Тогда

1. Если  $f$  полный дифференциал  $\Rightarrow \forall \gamma$  кусочно гладкая замкнутая  $\int_{\gamma} f dz = 0$
2. Если интеграл по любой замкнутой ломанной  $0 \Rightarrow f$  - полный дифференциал

**Теорема 35.2.1** (Лемма Гурса): Пусть  $D$  область,  $f$  голоморфна в ней.  
Тогда

$$\forall \text{ треугольника } \Delta : \overline{\Delta} \in D \quad \int_{\partial \Delta} f dz = 0$$

*Доказательство:* Обозначим  $I = \int_{\partial \Delta} f$ . Разобьем каждую сторону треугольника пополам, и получим 4 треугольника:  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ . Тогда  $I = \left( \int_{\partial \Delta_1} + \int_{\partial \Delta_2} + \int_{\partial \Delta_3} + \int_{\partial \Delta_4} \right) f dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

Тогда найдется треугольник (б.о.о.  $\Delta_1$ ), такой что  $|I_1| \geq \frac{|I|}{4}$ .

Продолжая так делать получим последовательность треугольников  $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Заметим, что в силу компактности  $\exists z_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\Delta_n}$ .

В силу дифференцируемости

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall z \in O_{\delta}(z_0) : |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon(z - z_0)$$

Заметим, что  $-f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$  это полный дифференциал, тогда

$$\int_{\Delta_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) dz = \int_{\Delta_n} f(z) dz + 0$$

Следовательно для достаточно больших  $n$

$$|I_n| = \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \int_{\Delta_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| |dz| \leq \varepsilon \cdot \left( \frac{l}{2^n} \right)^2$$

Где  $l$  периметр  $\Delta$ , и соответственно  $\frac{l}{2^n}$  периметр  $\Delta_n$ .

Но по построению  $|I_n| \geq \frac{|I|}{4^n}$ , следовательно  $\forall \varepsilon > 0 \quad |I| < \varepsilon \Rightarrow I = 0 \quad \square$

**Лемма 35.2.2:** Усиленная Лемма Гурса

Следствие предыдущей теоремы верно и в условиях, что  $f$  голоморфна в  $D \setminus \{a\}$ , непрерывна в  $D$

*Доказательство:* Картиночки порисовать.  $\square$

**Теорема 35.2.2** (Коши для выпуклой области): Пусть  $D$  выпуклая область,  $f$  голоморфна в ней.

Тогда  $\forall \gamma$  - кусочно гладкой замкнутой  $\int_{\gamma} f dz = 0$ .

*Доказательство:* Явно предъявим полный дифференциал  $F(z) = \int_{[a;z]} f(\zeta) d\zeta$ .

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[a;z]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[a;z_0]} f(\zeta) d\zeta \stackrel{\text{Лемма Гурса}}{=} \int_{[z_0;z]} f(z_0) dz$$

Тогда очевидно, что

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \rightarrow f(z_0)$$

□

**Определение 35.2.1:** Пусть  $\gamma$  - кусочно гладкая кривая в  $D$  - области.

Тогда *приращением аргумента функции вдоль кривой*  $\Delta_{\gamma} f$  называется  $Im \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)}$

**Определение 35.2.2:** Пусть  $\gamma$  - кусочно гладкая замкнутая кривая в  $\mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ .

Тогда *индексом  $a$  относительно  $\gamma$*  называется

$$J_{\gamma}(a) = \frac{\Delta_{\gamma}(z-a)}{2\pi}$$

**Определение 35.2.3:** Пусть  $\gamma$  - кусочно гладкая кривая лежит в области  $D$ .

Тогда говорят что  $\gamma \sim 0 \pmod{D}$  *гомологично эквивалентна нулю*, если

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus D : J_{\gamma}(a) = 0$$

**Определение 35.2.4:** Циклом  $\Gamma$  называется формальная линейная комбинация с целыми коэффициентами кусочно-гладких замкнутых кривых. Все определения и теоремы для кривых тривиально переносятся на циклы.

**Определение 35.2.5:** Пусть  $\gamma$  кусочно гладкая кривая,  $\varphi$  непрерывна на  $\gamma$ . Тогда интегралом Коши называется

$$F_n(z, \varphi) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^n} d\xi$$

**Утверждение 35.2.1:** Свойства интеграла Коши

1.  $F_n$  голоморфна в  $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2.  $F'_n(z, \varphi) = nF_{n+1}(z, \varphi)$

**Лемма 35.2.3** (Общая теорема Коши): Пусть  $D$  - область в  $\mathbb{C}$ ,  $f$  - голоморфна в  $D$

Тогда

$$1. \quad g(\xi, z) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, \xi \neq z \\ f'(z), z = \xi \end{cases}$$

непрерывна в  $D \times D$

2. Для любой кусочно гладкой  $\gamma \in D$

$$h(z) = \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi$$

голоморфна в  $D$

**Теорема 35.2.3** (Лиувилля): Пусть  $f$  голоморфная в  $\mathbb{C}$  и

$$\exists M, m, R : \forall z, |z| > R : |f(z)| < Mz^m,$$

тогда  $f$  полином степени  $m$ . В частности, если  $f$  ограничена, то она константа.

**Теорема 35.2.4** (Интегральная теорема + формула Коши): Пусть  $D$  - область в  $\mathbb{C}$ ,  $f$  - голоморфна в  $D$ .

Пусть  $\Gamma$  - цикл в  $D$ , причем  $\Gamma \sim 0 \pmod{D}$ , тогда

1. (формула)  $\forall z \in D \setminus \Gamma : J_{\Gamma}(z) f(z) \frac{1}{2\pi i} = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$
2. (теорема)  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$

*Доказательство:* (Необязательно) Пусть  $G = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_{\Gamma}(z) = 0\}$  оно открытое. Рассмотрим две функции

$$1. \quad 2\pi i \tilde{h}(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

Она голоморфна в  $G$  как интеграл Коши.

$$2. \quad 2\pi i h(z) = \int_{\Gamma} \left( \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right) d\xi$$

Она голоморфна в  $D$  по 2 пункту общей теоремы Коши

Заметим, что  $\forall z \in G \cap D : h(z) = \tilde{h}(z)$  так как

$$h(z) - \tilde{h}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = J_{\Gamma(z)} f(z) = 0$$

Из того, что  $\Gamma \sim 0 \pmod{D}$  следует  $\mathbb{C} \setminus D \subset G$  Тогда рассмотрим новую функцию:

$$F(z) = \begin{cases} h(z), & z \in D \\ \tilde{h}(z) & \\ z \in \mathbb{C} \setminus D \subset G \end{cases}$$

Она голоморфна в каждой из компонент. А так как на границе  $h$  и  $\tilde{h}$  равны, то голоморфна и в  $\mathbb{C}$ .

Заметим, что

$$|\tilde{h}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\max_{\Gamma} |f| |d\xi|}{\text{dist}(z, \Gamma)} \xrightarrow{\text{dist}(z, \Gamma) \rightarrow \infty} 0$$

А следовательно по теореме Лиувилля  $F(z) \equiv 0$ .

Следовательно в  $D \setminus \Gamma$   $h(z) = 0$ . То есть

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} &= \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \\ f(z) J_{\Gamma(z)} &= \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \end{aligned}$$

(1  $\Rightarrow$  2)

Применим 1 к  $\tilde{f}(z) = (z - a)(f(z))$ , где  $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$  (естественно в области определения  $f$ ) Тогда

$$0 = J_{\Gamma(a)}(a - a)f(a) = J_{\Gamma(a)}\tilde{f}(a) = \int_{\Gamma} \frac{\tilde{f}(\xi) d\xi}{\xi - a} = \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi$$

□

## 36. Интегральная формула Коши. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.

### 36.1. Интегральная формула Коши.

**Теорема 36.1.1: Формула Коши для круга** Пусть  $f$  голоморфна в  $D$ ,  $\overline{O_\rho(a)} \in D$  тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

*Доказательство:* В силу  $\overline{O_\rho(a)} \in D \Rightarrow \exists R > \rho : O_R(a) \in D$ . Зафиксируем  $z \in O_\rho(a)$

Рассмотрим следующую функцию

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}, & \zeta \neq z \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

Она удовлетворяет условиям усиленной Леммы Гурса, следовательно

$$0 = \int_{|\zeta-a|=\rho} g(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(z)}{\zeta-z} d\zeta = \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - f(z) \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

Обозначим  $G(z) = \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{d\zeta}{\zeta-z}$ .

Она голоморфна в области как интеграл Коши.  $G' = \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} \equiv 0$

Следовательно  $G(z) = \text{const} = G(a) = 2\pi i$

Отсюда элементарно получим требуемое.  $\square$

**Замечание 36.1.1:** Формулировку для более общего случая смотри в прошлом билете

## 36.2. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.

**Теорема 36.2.1:** Пусть  $f$  - голоморфная в  $D$ ,  $O_R(a) \subset D$ , тогда  
 $\forall z \in O_R(a) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

*Доказательство:* Возьмем  $0 < r < R$ , тогда  $f$  голоморфна в  $\overline{O_r(a)}$ . Тогда по теореме Коши  $2\pi i f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi-z}$ .

Распишем

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{1}{(\xi-a)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} \quad (|z-a| < |\xi-a|) = \frac{1}{\xi-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

Полученный ряд сходится равномерно, а значит можно почленно интегрировать.

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} f(\xi) \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i c_n (z-a)^n$$

Причем по следствию формулы Коши для круга,  $2\pi i \cdot c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Ну раз верно для любого  $r < R$ , то и для  $R$  верно.  $\square$

## 37. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера.

### 37.1. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана.

#### Теорема 37.1.1:

Пусть  $f$  голоморфна в кольце  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$ . Тогда  

$$\forall z \in K : f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

где  $\gamma_\rho$  положительно определенная окружность радиуса  $\rho \in (r, R)$  с центром в  $a$ .

*Доказательство:* Для начала покажем независимость коэффициентов от выбора  $\rho$ . Возьмем две окружности радиусов  $\rho$  и  $\rho'$ . Применим для  $\Gamma = \rho - \rho'$  интегральную теорему Коши и получим требуемое.

Рассмотрим  $r < r' < R' < R$ . Тогда  $\forall z \in K'_{r', R'}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = (2\pi i) \left( \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right) =: f_1 + f_2$$

Заметим, что  $f_1 = \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$  голоморфна в  $O_{R'}(a)$ . А значит раскладывается в ряд Тейлора.  $f_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n$

Вновь раскладываем  $\frac{1}{z - \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z - a)^{n+1}}$  при  $|\frac{\xi - a}{z - a}| < 1$

Значит

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^{-n-1} \cdot \left( c_{-n-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(\xi) (\xi - a)^n d\xi \right)$$

Итого получили требуемое, не зависящее от  $r', R'$   $\square$

**Определение 37.1.1:** Такое представление голоморфной функции называется *рядом Лорана*

**Лемма 37.1.1:** Единственность ряда Лорана

Если  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  в кольце  $K$ , то  $f$  голоморфна в этом кольце, причем ряд Лорана совпадает с данным. То есть  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$

*Доказательство:*  $f$  голоморфна как предел сходящегося ряда.

Проверка равенства коэффициентов. Для  $n = -1$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\rho} c_n(z-a)^n dz = c_{-1}$$

Для  $n \neq -1$  двигаем ряд так чтобы нужный коэффициент встал на  $-1$ .  $\square$

**37.2. Изолированные особые точки однозначного характера.**

Здесь пусть  $f(z)$  функция имеющая изолированную особую точку  $a$ , тогда:

**Определение 37.2.1:**  $a$  - устранимая особенная точка, если  $\exists A \in \mathbb{C} :$   
 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$

**Определение 37.2.2:**  $a$  - полюс, если  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

**Определение 37.2.3:**  $a$  - существенная особенная точка, если

$$\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

**Теорема 37.2.1:**  $a$  - УОТ  $\Leftrightarrow f$  ограничена в какой-то  $\dot{O}_{\delta(a)}$

*Доказательство:*  $(\Rightarrow)$  очевидно из определения предела.

$(\Leftarrow)$  Положим  $M_\rho(f) = \max_{\gamma_\rho} |f|$  Тогда оценим

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \left( |f| \frac{|d\xi|}{\rho^{n+1}} \right) \leq \frac{M_\rho(f)}{\rho^n}$$

Из ограниченности, можно оценить  $M_\rho$  как константу. А значит при  $n < 0, \rho \rightarrow 0 : |c_n| \rightarrow 0$ . Следовательно  $|c_{-n}|$ . А значит есть только регулярная часть ряда Лорана, а следовательно  $a$  - УОТ.  $\square$

**Теорема 37.2.2:**  $a$  - полюс  $\Leftrightarrow$  существует лишь конечное число ненулевых членов в главной части ряда Лорана.

*Доказательство:*



( $\Leftarrow$ ) аккуррано посчитаем предел и получим требуемое.

( $\Rightarrow$ ) По условию  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0$ . Т.е. функция  $\frac{1}{f(z)}$  имеет в  $a$  УОТ.

В силу изолированности  $a$ ,  $\frac{1}{f(z)}$  голоморфна в окрестности  $a$ , причем отлична от 0. А значит из предыдущего доказательства получим разложение в Тейлора.

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m h(z), h(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

$\frac{1}{h(z)}$  голоморфная в окрестности  $\Rightarrow$  раскладывается в Тейлора

□

### Теорема 37.2.3: Сохоцкого

Если  $a$  - СОТ, то  $\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{z_n\} \rightarrow a, f(z_n) \rightarrow A$

*Доказательство:* (Необязательно) Для  $A = \infty$  очевидно. Если не существует, то ограничена  $\Rightarrow$  УОТ.

Если  $A \neq \infty$ , то рассмотрим  $g(z) := \frac{1}{f(z)-A}$ .

Если  $A$  не предельная, то  $f(z) - A$  отделена от нуля, а значит  $g(z)$  ограничена. Следовательно  $a$  - УОТ для  $g$ . Причем  $g(z) \neq 0$  в области определения.

Тогда заметим, что  $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$ .

Если  $g(a) \neq 0$ , то  $a$  - УОТ для  $f$ .

Иначе полюс. Противоречие.

□

## 38. Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов

**Определение 38.1:** Пусть  $f$  голоморфна в  $\dot{O}_r(a), a \in \mathbb{C}$ , то определим вычет как

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$$

**Лемма 38.1:** Вычеты определены корректно (не зависят от  $\gamma$ )

*Доказательство:* Пусть  $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, z \in \dot{O}_{r(a)}$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n = c_{-1}$$

Не зависит от  $\gamma$

□

**Теорема 38.1:** Коши о вычетах (а.к.а Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов)

Пусть  $D$  ограничена циклом  $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_n$ . Пусть  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\} \subseteq D$ .  $f$  голоморфна в  $D' \setminus A$  где  $D' \supset D$ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum^N \operatorname{res}_{a_i} f$$

*Доказательство:* Окужаем каждую особую точку кругом радиуса  $R$ . Добавляем и вычитаем из  $\Gamma$  эти круги ( $\delta_i$ ). В части с минусами получаем новый цикл  $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \sum \delta_i$ , такой что в нем  $f$  голоморфна.

Проверяем что  $\tilde{\Gamma} \sim 0 \pmod{\tilde{D}}$

- В точках вне  $D$  он так и остался 0.
- В новых точках (внутри  $\delta_i$ )  $1 - 1 = 0$

Следовательно интеграл по  $\tilde{\Gamma}$  равен 0, а оставшая часть это  $\sum \int_{\delta_i} f dz = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{a_i} f$ .  $\square$

## 39. Определения и формулировки

Тут собраны всякие общие определения, которые вас могут спросить и примерные идеи их доказательств

### 39.1. $\mathbb{N}$

Вводим аксиоматически. То есть говорим,

#### Определение 39.1.1:

Если множество  $\mathbb{N}$  и функция  $Sc : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  удовлетворяют следующим аксиомам, то это множество называется множеством натуральных чисел. (Ну или как то так. Вряд ли это спросят конечно.)

1.  $0 \in \mathbb{N}$
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \exists! Sc(n) \in \mathbb{N}$ . ( $Sc$  - «следующее число»)
3.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad Sc(n) \neq 0$
4.  $Sc(n) = Sc(m) \Rightarrow n = m$  (равенство в теоретико-множественном смысле)
5. (индукция)  $\forall M \subseteq \mathbb{N} : 0 \in M \wedge (n \in M \Rightarrow Sc(n) \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N}$

Операция  $+$  вводится как рекурсивное переключивание  $Sc$

Операция  $\leq$  вводится как  $n \leq m \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N} : n + k = m$

### 39.2. $\mathbb{R}$

Считаем, что  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  как ни будь определите.

Аксиоматически:

**Определение 39.2.1:**  $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, 0, 1)$  удовлетворяют следующим свойствам

- I Операция  $+$  :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  - в смысле поля
- II Операция  $\times$  :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  - в смысле поля
- III Операция  $\leq$  - линейный порядок, уважает сложение/умножение с положительными и
- IV  $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists p \in \mathbb{Z} : py > x$  ( $\mathbb{Z}$  получается как  $1 + 1 + 1 + 1 \dots$ )
- V Полнота
  - 1 вариант: в смысле функана - каждая фундаментальная сходится.
  - 2 вариант: по лектору  $\forall A, B \subseteq \mathbb{R} : A \cup B = \mathbb{R} \wedge A \cap B = \emptyset \wedge (\forall a \in A, b \in B \ a \leq b) \Rightarrow \exists c : \forall a \in A \forall b \in B \ a \leq c \leq b$

**Замечание 39.2.1:** Построение  $\mathbb{R}$ . Строится как множество классов эквивалентности над фундаментальными последовательностями (у лектора: стягивающимися рациональными отрезками). Все свойства кроме полноты в полуавтоматическом режиме переносятся с  $\mathbb{Q}$ .

Полнота(в смысле лектора):

Строим приближающую последовательность десятичных приближений. То есть сначала берем наибольшее целое в  $A$ , наименьшее целое в  $B$ . Затем среди чисел с 1 знаком после запятой. И так далее. Получаем последовательность стягивающихся отрезков. (Или если поочерди брать, то просто фундаментальную последовательность).

Она и будет представителем искомого  $c$ .

### 39.3. $\mathbb{C}$

Строится как  $\mathbb{R}^2$  с базисом  $(1, i)$  сложение покомпонентное.

Умножение  $a, b, c, d \in \mathbb{R} \ (a1 + bi) * (c1 + di) = (ac - bd)1 + (bc + ad)i$