Содержание

1 Системы множеств

1.1 Последовательность попарно непересекающихся множеств

Пусть $B_n := A_n \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} A_i)$

1.2 Верхние и нижние пределы

1.2.1 Верхний предел

$$a \in \overline{\lim}_n A_n \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \geqslant N\; a \in A_n \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}\; a \in \bigcup_{i \geqslant n} A_i \Leftrightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i \geqslant n} A_i$$

1.2.2 Нижний предел

$$a \in \underline{\lim}_n A_n \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant N\; a \in A_n \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}\; a \in \bigcap_{i \geqslant n} A_i \Leftrightarrow a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i \geqslant n} A_i$$

1.3 Монотонная последовательность множеств

Пусть без ограничения общности $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots$.
Тогда $\overline{\lim}_n A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i \geqslant n} A_i = \bigcup\limits_{i \geqslant n} A_i$, т.к. $\{\bigcup\limits_{i \geqslant n} A_i\}_n$ - тоже монотонная.
Ну а $\underline{\lim}_n A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i \geqslant n} A_i = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

1.4 Пример последовательности, у которой верхний не равен нижнему

Пусть $A_{2n} := \{0\};\ A_{2n+1} := \varnothing$
Тогда $\overline{\lim}_n A_n = \{0\};\ \underline{\lim}_n A_n = \varnothing$

1.5 Закон де Моргана для верхних и нижних пределов

$$\overline{\overline{\lim}_n A_n} = \underline{\lim}_n \overline{A_n}$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i \geqslant n} A_i} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcap_{i \geqslant n} A_i} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i \geqslant n} \overline{A_i}$$

1.6 Замкнутость относительно верхних и нижних пределов

$\overline{\lim}_n A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i \geqslant n} A_i$, по определению, σ-алгебра замкнута относительно счётных пересечений и объединений, поэтому $\bigcup\limits_{i \geqslant n} A_i \in \sigma$-алгебра, и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i \geqslant n} A_i \in \sigma$-алгебра.

Аналогично с нижним пределом.

1.7 Отображения колец и σ-алгебр

- $\varnothing \in f^{-1}(B), \varnothing = f^{-1}(\varnothing)$ - следует из определения прообраза, т.к. если никого нет, то никто в нас не перейдёт

$$C_{1,2} \in f^{-1}(B) \Rightarrow \exists X_{1,2} \in B : \ f^{-1}(X_{1,2}) = C_{1,2}$$
$$x \in f^{-1}(C_1 \cap C_2) \Rightarrow \exists y \in C_1 \cap C_2 : \ f(y) = x \Rightarrow y \in C_1 \cap C_2 \subseteq C_{1,2} \Rightarrow$$
$$x \in f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2) \Rightarrow f^{-1}(C_1 \cap C_2) \subseteq f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)$$

$$x \in f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(C_1) \wedge x \in f^{-1}(C_2) \Rightarrow \exists! y : \ f(x) = y \Rightarrow$$
$$y \in C_1 \wedge y \in C_2 \Rightarrow y \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow x \in f^{-1}(C_1 \cap C_2) \Rightarrow$$
$$f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2) \subseteq f^{-1}(C_1 \cap C_2)$$

  Получили, что $f^{-1}(C_1 \cap C_2) = f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)$, аналогично делаем с $\triangle$, получили все свойства кольца у $f^{-1}(B)$.

- В данном пункте будет выполняться $f(C_1 \cap C_2) \subseteq f(C_1) \cap f(C_2)$, но не будет выполняться включение в другую сторону из-за отсутствия сюръективности у f. Приведём контрпример.

  Пусть $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$ - это кольцо, пусть тогда

  Пусть $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{5,6\}, \{6\}, \{5\}\}$

  $f(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\}; \ f(\{1,2\}) = \{5,6\}; \ f(\{3,4\}) = \{6\}; \ f(\{1,2,3,4\}) = \{5,6\}$

- Аналогично первому пункту.

1.8 Невозможность использования пар операций для определения кольца

- Приведём контрпример: $A = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$
- Приведём контрпример: $A = \{\varnothing, \{1\}, \{0\}\}$

1.9 Действия с σ-алгебрами

1. Каждая операция на пересечении замкнута, значит итоговое множество также останется замкнутым
2. Нет, приведём контрпример: $\mathcal{B}_1 = \{\{1\}, \{\varnothing\}\}, \mathcal{B}_2 = \{\{2\}, \{\varnothing\}\}$
3. Нет, т.к. в разности двух множеств нет пустого множества.
4. Нет, т.к. в симметрической разности двух множеств нет пустого множества.

1.10 Описание $sigma-алгебр

Первые 4 пункта очевидные и предлагаются читателю в качестве занимательного упражнения: взять все пересечения и симметрические разности.

В пункте $f)$ возьмём множество всех подмножеств $\mathbb{Q} \cap [0;\ 1]$

1.11 Построение конечной σ-алгебры

Разобьём Ω на некоторое дизъюнктное разбиение и возьмём множество всех подмножеств получившегося разбиения.

1.12 Возможные мощности конечных σ-алгебр

Из предыдущего пункта очевидно следует, что мощности такой σ-алгебры должна быть степенью двойки. Значит подходит только 128.

1.13 Возможные размеры вероятностного пространства

Минимум - 2, возьмём пустое множества и всё множество.

Максимум - 2^n, возьмём множество всех подмножеств множества элементарных событий.

2 Мера

2.1 Аддитивная функция, но не мера

Пусть $S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$, и зададим φ.

$$\varphi(\{1,2,3\}) = 2;\ \varphi(\{1\}) = \varphi(\{2\}) = \varphi(\{3\}) = 1;\ \varphi(\varnothing) = 0$$

2.2 Базовые сввойства полукольца

1. $A = B \sqcup C \Rightarrow m(A) = m(B) + m(C);\ m(C) \geqslant 0 \Rightarrow m(B) \leqslant m(A)$

2. $m(\varnothing) = m(\varnothing \cup \varnothing) = 2 * m(\varnothing) \Rightarrow m(\varnothing) = 0$

3. $B = (A \cap B) \sqcup (\sqcup C_i)$, где $C_i \in S$

$$m(B) = m(A \cap B) + m(\sqcup C_i)$$
$$m(A \sqcup (\sqcup C_i)) = m(A \cup B) = m(A) + m(\sqcup C_i)$$
$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

4.

$$B \backslash A = \sqcup C_i;\ A \backslash B = \sqcup D_i;\ m(A \triangle B) = m((B \backslash A) \sqcup (A \backslash B)) = 0 \Rightarrow m(A \backslash B) = 0 \wedge m(B \backslash A) = 0$$

$$m(A) = m((A \cap B) \sqcup (A \setminus B)) = m(A \cap B) = m((A \cap B) \sqcup (B \setminus A)) = m(B)$$

2.3 Множества, построенные на основе других множеств

- Пусть $A_0 \subseteq A \in S_1 \subseteq S$, тогда по свойству полукольца $S: \exists C_i: A_0 \sqcup (\sqcup C_i) = A$;
  $\forall A, B \in S_1: m(A \cap B) \leqslant 0 \Rightarrow m(A \cap B) = 0$;
  $m(\varnothing) = 0 \Rightarrow \varnothing \in S_1$
- $m(\varnothing) = 0 \Rightarrow \varnothing \in R_1$;
  Пересечение принадлежит R_1 аналогично первому пункту.
  $m(A \triangle B) = m((A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)) \leqslant m(A) + m(B) \leqslant 0 \Rightarrow m(A \triangle B) = 0$
- Неверно, возьмём отрезок $[0;1]$ и классическую меру Лебега, тогда заметим, что мера каждой точки равна 0, а объединение всех точек имеет меру 1, значит в A_1 нет единицы.

2.4 σ-аддитиность следует из непрерыввности

Пусть для некоторого $B = \bigsqcup B_i$, обозначим $C_k = \bigsqcup\limits_{i=k}^{\infty} B_k$

Тогда $m(C_k) = m(B) - \sum\limits_{i=1}^{k} m(B_i)$; $\varnothing = \lim m(C_k)$

Тогда из непрерывности меры следует $m(\varnothing) = \lim m(C_k) \Rightarrow 0 = \lim\limits_{k\to\infty} (m(B) - \sum\limits_{i=1}^{k} m(B_i))$

$m(B) = \sum m(B_i)$ - σ-аддитиновсть доказана.

В случае полукольца это не работает, т.к. мы можем взять $S = \mathbb{Q} \cap \lfloor a; b \rceil \subseteq [0;1]$, где $m(\lfloor a; b \rceil) = b - a$ заметим что условие задачи выполняется, но $1 = m(\lfloor 0; 1 \rceil \cap \mathbb{Q}) \neq \sum m(\mathbb{Q} \cap [r_i; r_i]) = 0$.

ДАННЫЙ ПРИМЕР ПОДХОДИТ ДЛЯ ВСЕХ ОСТАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ИЗ ДАННОЙ ТЕМЫ, КОТОРЫЕ НЕ БЫЛИ РАССМОТРЕНЫ ДАЛЕЕ

2.5 Непрерывность убывающих множеств

$A = \bigcap A_i \Rightarrow \overline{A} = \bigcup \overline{A_i} \Rightarrow \lim m(\overline{A}_i) = m(\overline{A}) = \lim m(E \setminus A_i) = m(E \setminus A)$
$m(E) - \lim m(A_i) = m(E) - m(A) \Rightarrow \lim m(A_i) = m(A)$

2.6 Непрерывность возрастающих множеств

Пусть $A = \bigcup A_i = \bigsqcup B_i$, где $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$

$\lim\limits_{i\to\infty} m(A_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{i} m(B_k) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(B_i) = m(\bigsqcup B_i) = m(\bigcup A_i) = m(A)$

3 Внешняя мера

3.1 Внешняя мера строго меньше обычной меры

Возьмём наш пример $\mu^*(\mathbb{Q} \cap \lfloor 0; 1 \rceil) = 0 < m(\mathbb{Q} \cap \lfloor 0; 1 \rceil) = 1$

3.2 Внешняя мера объединения

$\mu^*(A\cup B)=\inf_{(A\cup B)\subseteq\bigsqcup A_i}\sum m(A_i)\leqslant\inf_{A\subseteq\bigsqcup A_i}\sum m(A_i)+\inf_{B\subseteq\bigsqcup B_i}\sum m(B_i)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$

3.3 Про меру Жордана

Заметим, что $\forall r_i\in(\mathbb{Q}\cap[0;1]):\ m(r_i)=0$, но $\mathbb{Q}\cap[0;1]$ неизмерима по Жордану
В качестве σ-аддитивной мере на $\mathcal{M}_J$ возьмём тождественный ноль:)

3.4 Пример обьъединения неизмеримых, объединение которых измеримых

В качесте A_1 выберем множество Витали (неизмеримое по Лебегу), а в качестве A_2 возьмём дополнение множества Витали.

3.5 Полнота меры Лебега

$B\subseteq A\Rightarrow\mu^*(B)\leqslant\mu^*(A)=0\Rightarrow\mu(B)\leqslant\mu^*(B)=0$

3.6 Мера нижнего предела меньше нижней меры предела

Пусть $A_{2n}=[0;\frac{1}{2}];\ A_{2n+1}=(\frac{1}{2};1]$. Очевидно, что $\forall i:\mu(A_i)=\frac{1}{2}$, а $\mu(\liminf A_n)=\mu(\varnothing)=0$

4 Измеримые функции

4.1 Композиция измеримых функций

$\{x:\ f(x)<g(x)\}=\bigcup\{x:\ f(x)<r_i<g(x)\}=\bigcup(\{x:\ f(x)<r_i\}\cap\{x:\ g(x)>r_i\})$, отсюда $\{x:\ f(x)+g(x)<a\}=\{x:\ f(x)<a-g(x)\}$ очевидно измеримо.

4.2 Измеримость индикатора множества

$\Rightarrow$ Возьмём возьмём в качестве a из Лебегова множества $\frac{1}{2}$, тогда множество $\{x:f(x)>\frac{1}{2}\}$ измеримо, а это множество - в точности M.

$\Leftarrow$ Рассмотреть все возможные случаи при выборе a в Лебеговом множестве и понять, что при каждом случае оно измеримо.

4.3 Измеримость прообраза синглетона

Возьмём в качестве $f(x)=\mathbb{I}_E(x)*x+(1-\mathbb{I}_E(x))*(-x)$

4.4 Измеримость функции, у которой измеримы прообразы лучей

Для любого Лебегова множества приблизимся к его числа a какой-то последовательностью $\{b_n\}$, где $b_n\in\{a_n\}_n$, а $\lim b_n=a$ подходит к a слева, тогда $f^{-1}(a;\ +\infty)=\bigcap f^{-1}(b_n;\ +\infty)$

4.5 Разрывная в каждой точке измеримая функция

Возьмём в качестве f функцию Дирихле.

4.6 Измеримость эквивалентных функций

$\{x : g(x) < a\} = (\{x : f(x) < a\} \setminus \{x : f(x) \neq g(x)\}) \sqcup \{x : (g(x) < a) \wedge (f(x) \neq g(x))\}$

4.7 Монотонная измерима

Каждое Лебегово множество будет иметь вид $[a;\ c)$, которое, очевидно, измеримо.

4.8 Непрерывная функция, переводящая множество меры ноль в ненулевое

Канторова лестница

4.9 Возрастающая функция, переводящая множество меры ноль в ненулевое

Пусть $\varphi(x)$ - канторова лестница, тогда нужная нам функция имеет вид $f(x) = \frac{x+\varphi(x)}{2}$

4.10 Прообраз измеримого множества неизмерим

4.11 Образ измеримого меры ноль незимерим

4.12 Измеримое небарелевское

Возьмём $\varphi(x)$ - канторову лестницу, из её области значений $[0; 1]$ достанем неизмеримое подмножество, возьмём его прообраз. Его прообраз - подмножество Канторова множества, значит оно измеримо и имеет меру 0. Если бы оно было барелевский, то его образ был бы измерим, поэтому это ИЗМЕРИМОЕ НЕБАРЕЛЕВСКОЕ множество МЕРЫ 0.

5 Сходимость

5.1 Функция максимальной цифры из десятичной записи числа

Давайте посчитаем меру множества, где $f(x) = 9$. Разделим отрезок $[0; 1]$ на десять чистей и выберем множество, где первая цифра после запятой - это девятка, далее разделим каждую из 9 оставшихся частей на 10 частей и из каждого снова выберем $\frac{1}{10}$ часть. Получим, что $\mu(\{x : f(x) = 9\}) = \sum \frac{9^{n-1}}{10^n} = 1$

5.2 Из сходимости п.в. не следует сходимость по мере в случае, когда мера сигма-конечная

Возьмём $f_n(x) = \begin{cases} 1, x \in [n;\ n+1) \\ 0, else \end{cases}$

5.3 Отделимость от нуля сходящейся последовательности неотрицательных функций по мере

Пусть $B_{\frac{1}{n}} = \{x : f(x) < -\frac{1}{n}\}$, очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N} : \nu(B_{\frac{1}{n}}) = 0$, и $B_{\frac{1}{n}} \subseteq B_{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \lim B_{\frac{1}{i}} = \bigcup B_{\frac{1}{i}} = B$. Тогда $\nu(B) = \sum \nu(B_{\frac{1}{i}}) = 0$, что нам и требовалось доказать.

5.4 Доказательство сходимости последовательности

Последовательности сходится поточечно, если $\forall x \in (0;\ 1)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \|\frac{1}{\sqrt{n}(x-r_n)}\| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}(x-r_n)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon(x-r_n)} < \sqrt{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2(x-r_n)^2}$

5.5 Хуйня

$\forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \nu\{x : e^{-(p_n-q_nx)^2} > \varepsilon\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \nu\{x : -(p_n - q_nx)^2 > \ln(\varepsilon)\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \nu\{x : -\sqrt{\ln(\varepsilon)} < p_n - q_nx < \sqrt{\ln(\varepsilon)}\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \nu\{x : -\frac{\sqrt{\ln(\varepsilon)}}{q_n} < \frac{p_n}{q_n} - x < \frac{\sqrt{\ln(\varepsilon)}}{q_n}\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \nu\{x : (x > \frac{p_n}{q_n} - \frac{\sqrt{\ln(\varepsilon)}}{q_n}) \wedge (x < \frac{p_n}{q_n} + \frac{\sqrt{\ln(\varepsilon)}}{q_n})\} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{\ln(\varepsilon)}}{q_n} = 0$

Она не сходится ни в одной точке, т.к. мы можем взять подпоследовательность, у которой $p-$