Содержание

1 Вероятностное пространство, как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость.

Предмет исследования теории вероятностей - случайный эксперимент, он должен удовлетворять трём требованиям:

1. Повторяемость - должна быть возможность повторить этот эксперимент в тех же условиях много раз

2. Отсутствие детерминистической регулярности - у эксперимента должно быть несколько исходов

3. Статистическая устойчивость частот - если исследуем частоты события в двух разных сериях (серии экспериментов предполагают достаточно большое количество повторений), то получившиеся частоты должны быть близки.

Определение 1.1. Вероятностным пространтсвом называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, где:

- Ω - пространство элементарных исходов

- $\mathcal{F}$ - множество событий

- p - вероятностная мера

Можно сказать, что вероятность - идеализированное понятие частоты.
$p: \mathcal{F} \to [0, 1]$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $p(\Omega) = 1$

2. $\forall A, B \in \mathcal{F}: \ p(A \sqcup B) = p(A) + p(B)$

2 Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.

Дискретное вероятностное пространство

Определение 2.1. Дискретной вероятностной моделью называется математическая модель, в которой Ω не более, чем счётно. В этом случае $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.

Классическая вероятность

Классическая теория вероятностей занимается математическими моделями дискретной теории вероятностей, в которой элементарные исходы равновероятны.

Упражнение. *Пусть* $\forall \omega \in \Omega : \ p(\omega) = c$. *Когда* $|\Omega| < +\infty$.

$$1 = p(\Omega) = p(\bigsqcup_{\omega \in \Omega} \omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = c|\Omega|$$

Получили, что $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, *а значит* $\forall A \in \mathcal{F} : \ p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Докажем, что в классической теории вероятностей не может быть счётной Ω. *Возьмём произвольное конечное* $B \in \mathcal{F}$. *Тогда*

$$1 = p(\Omega) \geqslant p(\bigsqcup_{\omega \in B} \omega) = \sum_{\omega \in B} p(\omega) = c|B|$$

Так как B *можно выбрать сколь угодно большое, то получаем противоречие с тем, что* $c|B| \leqslant 1$.

Урновые схемы

В урне находится M белых шаров $(1, \ldots, M)$ и $N - M$ чёрных шаров $(M + 1, N)$. Вытаскиваем n шаров.

1. С возвращением, с порядком:

   $\omega = (i_1, \ldots, i_n), |\Omega| = N^n$

2. Без возвращения, с порядком:

   $\omega = (i_1, \ldots, i_n), |\Omega| = A_N^n$

3. С возвращением, без порядка:

   $\omega = (j_1, \ldots, j_n)$, j_i - количество появлений i-го шара.

   $|\Omega| = C_{N+n-1}^n$

4. Без возвращения, без порядка:

   $\omega = \{i_1, \ldots, i_n\}, |\Omega| = C_N^n$

3 Геометрические вероятности. Задача "о встрече".

Определение 3.1. Геометрическая вероятность. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Упражнение. *Староста группы заметил, что семинарист приходит на занятия со случайным опозданием в пределах 15 минут. При этом семинарист не пускает в аудиторию студентов, которые пришли после него позднее, чем на 5 минут. Староста же решил опоздать на семинар, но выбрал границу случайного опоздания всего в 10 минут. Также он решил ждать семинариста не более чем 10 минут после своего прихода, а если его не будет - уйти. Какова вероятность того, что староста всё же посетит семинар?*

4 Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.

Определение 4.1. Интуитивно, условная вероятность - вероятность того, что событие A произойдёт при условии события B. Это значит, что мы теперь знаем, что событие B произошло, и хотим в новых условиях посчитать вероятность того, что произойдёт событие A.

На самом деле, это всё та же случайная вероятность, только теперь она случайна на немного другом множестве исходов (а именно, на множестве, когда произошло событие B, все остальные исходы нам недоступны).

Если брать совсем классическую модель, то $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Определение 4.2. Формально, условная вероятность (в дискретной модели) события A относительно события B, если $P(B) > 0$ определяется, как $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Определение 4.3. Разбиением называется такая (конечная или счётная) система событий $\{B_1, B_2, \ldots\}$, что для любых различных i, j выполнено $B_i \cap B_j = \varnothing$ и $\bigsqcup B_i = \Omega$

Лемма 4.1. *Пусть имеется разбиение $\{B_1, B_2, \ldots\}$ с $P(B_i) > 0$. Тогда для любого события A верна следущая формула (**Формула полной вероятности**):*

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

Доказательство.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigsqcup_i B_i)) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

□

Следствие. ***Формула Байеса***

$$P(B_n|A) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(B_n)} = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$

Пример. Пусть, в зависимости от того, насколько студент сдаёт сессию, родители могут оплатить ему путешествие. Чем хуже студент сессию сдаёт, тем меньше вероятность того, что ему могут оплатить поездку.

И вот, мы хотим узнать, какова вероятность того, что студент на текущей сессии закрылся на отлично, если мы знаем, что он-таки отправился в путешествие.

Замечание. Если A и B - множества, то запись AB будем понимать, как $A \cap B$

Лемма 4.2. ***Формула умножения вероятностей***

Если $P(A_1 \ldots A_n) \neq 0$, то её можно вычислить по формуле $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$

Доказательство.

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} \ldots \frac{P(A_1 \ldots A_n)}{P(A_1 \ldots A_{n-1})} =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})$$

Все знаменатели в промежуточной записи отличны от нуля, так как они не меньше, чем $P(A_1 \ldots A_n) > 0$. □

5 Независимость событий, виды и взаимосвязь

Определение 5.1. События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Откуда взялось определение: идейно, хотим, чтобы событие B никак не влияло на наступление события A, то есть хотим, чтобы $P(A|B) = P(A)$. Если расписать $P(A|B)$, получим $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, но такой формат записи чуть хуже - тут мы запрещаем события нулевой вероятности, а, вообще говоря, можно считать, что они независимы со всеми, и их тоже надо учитывать. А ещё мы хотим, чтобы формула была симметричной. Поэтому определение такое, как мы написали выше.

Определение 5.2. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ называются попарно независимыми, если $\forall i, j \leqslant n$: A_i, A_j - независимы.

Определение 5.3. События $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любых $i_1, \ldots, i_k$ от 1 до n верно, что $P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$

Замечание. Из независимости в совокупности следует попарная независимость, но не наоборот.

Пример. Берём тетраедр. Пусть первая грань красного цвета, вторая синего, третья зелёного, а четвёртая - всех трёх цветов. Каждая грань выпадает с вероятностью $\frac{1}{4}$, модель классическая.

Рассмотрим события A_r, A_g, A_b - выпадает грань, которая содержит соответствующий цвет.

Тогда мы знаем, что $P(A_r) = P(A_g) = P(A_b) = \frac{1}{2}$, а ещё $P(A_rA_g) = P(A_bA_g) = P(A_rA_b) = \frac{1}{4}$, то есть попарная независимость у нас есть. Но независимости в совокупности здесь нет, потому что $P(A_rA_gA_b) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$.

6 Случайные величины. Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математические ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства.

Определение 6.1. Пусть дано дискретное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Дискретной случайной величиной ξ называется произвольная функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Определение 6.2. Случайные величины ξ и η независимы, если $\forall x, y \in \mathbb{R}$ независимы события $(\xi = x)$ и $(\eta = y)$. Это определение работает только для дискретного случая.

Определение 6.3. Распределение случайной величины ξ - это значения ξ (а, точнее, $\xi(\Omega)$) и набор вероятностей $(p_1, \ldots, p_n)$ таких, что $P(\xi = x_i) = p_i$

Пример.

1. Бернуллиевское $\xi \sim \mathrm{Bern}(p)$, тогда $P(\xi = 0) = 1 - p, P(\xi = 1) = p$
2. Дискретное равномерное распределение $\xi \sim U[a, b] : P(\xi = k) = \frac{1}{b-a+1}$
3. Биномиальное распределение $\xi \sim \mathrm{Bin}(n, p) : P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
4. Геометрическое $\xi \sim \mathrm{Geom}(p) : P(\xi = k) = p(1-p)^k$ - кидает монетку, орёл на k броске, до этого - решка

5. Пуассоновское $\xi \sim \text{Pois}(\lambda):\ P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Определение 6.4. Индикатором называется случайная величина, которая принимает значения 0 или 1. Индикатором события A называется случайная величина

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \notin A \\ 1, \omega \in A \end{cases}$$

Определение 6.5. Математическое ожидание (обобщение среднего значения) $E\xi = \sum\limits_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega)$.

Замечание. Если Ω счётно, то нужно, чтобы ряд абсолютно сходился, потому что мы хотим, чтобы мат. ожидание не зависело от порядка нумерации элементарных исходов.

Свойства:

1. Важная для подсчётов формула: Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - все возможные значения, принимаемые случайной величиной. Тогда

$$E\xi = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{\xi(\omega)=x_i} P(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi = x_i)$$

2. $\xi \geqslant 0 \Rightarrow E\xi \geqslant 0$ - слагаемые неотрицательные, поэтому сумма неотрицательная.

3. Линейность: $\forall a \in \mathbb{R}:\ Ea\xi = aE\xi, E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$.

   Доказательство. Вообще говоря, складывать мы можем (поточечно) только те случайные величины, которые действуют из одного и того же вероятностного пространтсва.

$$E(\xi+\eta) = \sum_{\omega\in\Omega} (\xi+\eta)(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} (\xi(\omega)P(\omega) + \eta(\omega)P(\omega)) = \\ = \sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} \eta(\omega)P(\omega) = E\xi + E\eta.$$

   □

4. $\xi \geqslant \eta \Rightarrow E\xi \geqslant E\eta$

   Доказательство. Следует из предыдущих двух пунктов: $\xi - \eta \geqslant 0 \Rightarrow E(\xi - \eta) \geqslant 0$, а $E(\xi-\eta) = E\xi - E\eta \geqslant 0$ □

5. Неравенство треуглника: $|E\xi| \leqslant E|\xi|$

   Доказательство.

$$\left|\sum_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)P(\omega)\right| \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega)P(\omega)| = \sum_{\omega\in\Omega} |\xi(\omega)|\, P(\omega) = E|\xi|$$

   □

6. Неравенство Коши-Буняковского: $(E\xi\eta)^2 \leqslant E\xi^2 E\eta^2$

   Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\exists a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0 : \ a\xi + b\eta \overset{\text{п.н.}}{=} 0$

   Доказательство. $\forall t \in \mathbb{R} : \ (t\xi - \eta)^2 \geqslant 0$

   $E(t\xi - \eta)^2 = E(t^2\xi^2 - 2t\xi\eta + \eta^2) = t^2 E\xi^2 - 2tE\xi\eta + E\eta^2 \geqslant 0$

   Т.к. это квадратный трёхчлен от t, который всегда не меньше 0, то для его дискриминанта верно $(2E\xi\eta)^2 - 4E\xi^2 E\eta^2 \leqslant 0$. Отсюда следует исходное неравенство.

   Равенство достигается тогда и только тогда, когда $t\xi - \eta \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, что и требовалось доказать. □

7. $\forall A \in \mathcal{F} : \ EI_A = P(A)$

   Доказательство.

   $$EI_A = 1 \cdot P(I_A = 1) + 0 \cdot P(I_A = 0) = P(A)$$

   □

8. Если ξ, η - независимы, то $E\xi\eta = E\xi E\eta$

   Доказательство.

   $$E\xi\eta = \sum_z P(\xi\eta = z) = \sum_z z \sum_{(x,y):\, xy=z} P(\xi = x, \eta = y) =$$
   $$= \sum_z \sum_{(x,y):\, xy=z} xyP(\xi = x, \eta = y) = \sum_x \sum_y xyP(\xi = x)P(\eta = y) =$$
   $$\left(\sum_x xP(\xi = x)\right) \cdot \left(\sum_y yP(\eta = y)\right) = E\xi E\eta$$

   □

   Замечание. Обратное неверно.

   Пример.
   $$P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{4}, P(\xi = 0) = \frac{1}{2}, \eta = \xi^2$$

   $E\xi = 0$, поэтому и $E\xi\eta = E\xi^3 = E\xi = 0, E\xi E\eta = 0$. Требуемое выполняется.

   Теперь покажем, что независимости нет. Для этого возьмём $x = y = 0$.

   $$P(\xi = x, \eta = y) \neq P(\xi = x)P(\eta = y) : \ \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

9. Пусть $\varphi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда $E\varphi(\xi) = \sum\limits_{x \in \xi(\Omega)} \varphi(x)P(\xi = x)$

Доказательство.

$$E\varphi(\xi) = \sum_{\omega\in\Omega} \varphi(\xi(\omega))P(\omega) = \sum_{x\in\xi(\Omega)} \sum_{\omega\in\Omega,\,\xi(\omega)=x} \varphi(x)P(\omega) =$$
$$= \sum_x \varphi(x) \sum_{\omega\in\Omega,\,\xi(\omega)=x} P(\omega) = \sum_x \varphi(x)P(\xi = x)$$

□

Определение 6.6. Дисперсия $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

Лемма 6.1. *Формула для вычисления дисперсии:*

$$E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Определение 6.7. Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$

Определение 6.8. Ковариацией ξ, η называется $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)E(\eta - E\eta)$

Лемма 6.2. *Формула для вычисления ковариации:*

$$cov(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$$

Свойства ковариации:

1. $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi$
2. Если ξ, η независимы, то $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$
3. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$
4. Линейность по первому аргументу, а, значит, и по второму.

Свойства дисперсии:

1. $D\xi \geqslant 0$, причём $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} \text{const}$

   Доказательство.

   $$D\xi = 0 \Leftrightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Leftrightarrow \xi - E\xi \overset{\text{п.н.}}{=} 0 \Leftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} E\xi \Leftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} \text{const}$$

   □

2. $D(a + b\xi) = b^2 D\xi$
3. Если ξ, η независимы, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, естественным образом обобщается на попарно независимые $\xi_1, \ldots, \xi_n$

   Доказательство. Докажем сразу для нескольких

   $$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \operatorname{cov}(\xi_1 + \ldots + \xi_n, \xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i$$

   □

Определение 6.9. Корреляцией ξ, ν ($\xi \overset{\text{п.н.}}{\neq} \text{const}, \eta \overset{\text{п.н.}}{\neq} \text{const}$) называется $\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Если $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$, то ξ, η называются некоррелированными.

Замечание. Из независимости случайных величин следует их некоррелированность, а в обратную сторону утверждение неверно.

Утверждение 6.1. *$|corr(\xi, \nu)| \leqslant 1$, причём $corr(\xi, \eta) = \pm 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Хотим показать, что $|\text{cov}(\xi, \nu)|^2 \leqslant D\xi D\eta$. Если расписать по определению, то получим просто частный случай неравенства Коши-Буняковского:

$$(E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta))^2 \leqslant E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2$$

Равенство достигается, если $\exists a, b \in \mathbb{R} : \; a(\xi - E\xi) + b(\eta - E\eta) \overset{\text{п.н.}}{=} 0$. Также мы можем сказать, что $a \neq 0$, а поэтому на него можно поделить.

Осталось обозначить соответствующие куски за искомые коэффициенты и всё получится. $\square$

7 Схема испытаний Бернулли. Математическая модель, теорема Пуассона.

Упражнение. *Подводка к схеме испытаний Бернулли: пусть у нас есть урна, в которой находятся M белых и $N - M$ чёрных шаров. Вытаскиваем последовательно n шаров с возвращением. Найти вероятность конкретной последовательности цветов.*

Логично было бы ввести вероятностную модель, в которой элементарным исходом является последовательность цветов (последовательность из 0 и 1). Но она не является классической. Попробуем вывести её из классической.

Будем считать все шары различными (занумеруем их: первые M номеров соответствуют белым, остальные - чёрным). Тогда элементарный исход - последовательность номеров шаров длины n. Тогда $|\Omega| = N^n$. Пусть A - событие соответствующее конкретной последовательности цветов, тогда $|A| = M^{n-k}(N - M)^k$, где k - количество чёрных шаров в искомой последовательности. Если чёрный цвет мы обозначим, как $\alpha_i = 1$, а белый - $\alpha_i = 0$, то $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. Тогда получаем

$$P(A) = \frac{M^{n-k}(N - M)^k}{N^n} = \left(\frac{M}{N}\right)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot \left(\frac{N - M}{N}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Если обозначить $\frac{N-M}{N} = p \in (0, 1)$, то $\frac{M}{N} = 1 - p$ и $P(A) = (1 - p)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} \cdot p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$

Схема испытаний Бернулли

Теперь можно ввести модель, которую мы хотели изначально: пусть $\omega = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \{0,1\}$ - элементарны исход, $p(\omega) = p^{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}$. Чтобы показать корректность нужно только проверить, что $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$. Разобьём на сумме по количеству единиц в ω

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\omega:\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

Теорема 7.1. *Теорема Пуассона:*

Пусть есть последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, p_n \in (0,1), np_n \to \lambda$ *при* $n \to \infty$. *Пусть* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- последовательность случайных величин, такая, что* $\xi_n \sim Bin(n, p_n)$. *Тогда*

$$P(\xi_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Доказательство.

$$P(\xi_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} p_n^k \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k} =$$
$$= \frac{1}{k!}(np_n)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{(1-p_n)^k}(1-p_n)^n$$

Так как k - константа, то третий множитель стремится к единице. Из условия на предел np_n следует, что $p_n \to 0$ при $n \to \infty$, а значит четвёртый множитель тоже стремится к 1. Второй множитель стремится к λ^k. Рассмотрим последний множитель:

$$(1-p_n)^n = (1-p_n)^{\frac{-np_n}{-p_n}} \to e^{-\lambda}$$

Таким образом, получаем исходное равенство. □

8 Неравенство Маркова и Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема (б/д).

Лемма 8.1. *Неравенство Маркова:*

Пусть $\xi \geqslant 0$ *- случайная величина,* $a \in \mathbb{R}, a > 0$. *Тогда*

$$P(\xi \geqslant a) \leqslant \frac{E\xi}{a}$$

Доказательство. Пусть I - индикатор. Тогда

$$E\xi = E(\xi I(\xi \geqslant a) + \xi I(\xi < a)) = E(\xi I(\xi \geqslant a)) + E(\xi I(\xi < a)) \geqslant$$
$$E(\xi I(\xi \geqslant a)) \geqslant aE(I(\xi \geqslant A)) = aP(\xi \geqslant a)$$

□

Лемма 8.2. *Неравенство Чебышева:*

$$\forall\varepsilon > 0\; P(|\xi - E\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Доказательство. Подставим в неравенство Маркова случайную величину $(\xi - E\xi)^2$ и $a = \varepsilon^2$. $\square$

Теорема 8.1. *Закон больших чисел:*

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ - последовательность независимых одинаково распределённых величин и $\exists D\xi_1, a = E\xi_1$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\; P\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

Доказательство. Подставим в неравенство Чебышева $\xi = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$. Так как величины одинаково распределены, то матожидание всех ξ_i равны и $E\xi = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E\xi_i = a$

$$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = \frac{D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

Так как величины независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Получаем

$$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) \leqslant \frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2} \to 0$$

$\square$

Замечание. В законе больших чисел можно ослабить условия на ξ_i: заменить независимость на некоррелируемость и одинаковую распределённость на условие $\sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i = o(n^2)$

Теорема 8.2. *Центральная предельная теорема:*

Пусть $\{\xi_i\}$ - последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\exists D\xi_1, E\xi_1 = a, \sqrt{D\xi_1} = \sigma$. Тогда $\forall x, y \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ выполнено:

$$P(x \leqslant \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant y) \to \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

9 Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры). Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.

Определение 9.1. Система множеств - это множество множеств.

Определение 9.2. Система множеств S называется полукольцом, если:

1. $\varnothing \in S$
2. $\forall A, B \in S:\; A \cap B \in S$

3. $\forall A, A_1 \in S: \; A_1 \subset A \Rightarrow \exists A_2, \ldots, A_n \in S: \; \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$

Пример. $\{[a,b) | [a,b) \subseteq [A,B)\}$ - полукольцо

Определение 9.3. Система множеств R называется кольцом, если:

1. $R \neq \varnothing$
2. $\forall A, B \in R: \; A \cap B \in R$
3. $\forall A, B \in R: \; A \triangle B \in R$

Замечание. Обозначения лектора: S - полукольцо (semiring), R - кольцо (ring).

Определение 9.4. Единицей системы множеств называется называется множество E из этой системы, чьими подмножествами являются все множества системы.

Пример. $\{[a\ b) | [a,b) \subset \mathbb{R}\}$ - полукольцо без единицы.

Пример. $\{\lfloor a,b\rceil | a \leqslant b; \; a,b \in [A,B]\}$ - полукольцо с единицей.

Определение 9.5. Кольцо с единицей называется алгеброй.

Утверждение 9.1. *Кольцо замкнуто относительно всех теоретико-множественных операций:*

Если R-кольцо, то:

1. *R - полукольцо*
2. *$\forall A, B \in R: \; A \cup B \in R$*
3. *$\forall A, B \in R: \; A \setminus B \in R$*

Доказательство. 1. R - полукольцо

- $\varnothing = A \triangle A \in R$
- $\forall A, B \in R: \; A \cap B \in R$
- $A_1 \subset A \Rightarrow A = A_1 \sqcup (A \triangle A_1)$

2. $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$
3. $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$

□

Утверждение 9.2. *Пересечение произвольного числа колец является кольцом.*

Доказательство. Пусть $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha = R$, тогда:

1. $\forall \alpha \in \Lambda: \; \varnothing \in R_\alpha \Rightarrow \varnothing \in R$
2. $A, B \in R \Rightarrow \forall \alpha \in \Lambda: \; A, B \in R_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in \Lambda: \; A \cap B \in R_\alpha \Rightarrow A \cap B \in R$ (аналогично для $\triangle$).

$\square$

Следствие. *Пересечение произвольного числа алгебр с общей единицей является алгеброй.*

Утверждение 9.3. *Наименьшее кольцо, содержащее X:*

Пусть X - система множеств, тогда существует кольцо $R(X)$, для которого верно следующее:

1. $X \subseteq R(X)$
2. $\forall R_1 \supseteq X : \; R(X) \subseteq R_1$

То есть, $R(X)$ - минимальное (по включению) кольцо, содержащее X.

Доказательство. Пусть $X = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Определим $M(X) = \bigsqcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Множество 2^M является кольцом и $X \subset 2^M$. Следовательно, существуют кольца, содержащие X. Рассмотрим $P = \{R \subseteq 2^M | R -$ кольцо и $X \subset R\}$. Тогда $R(X) = \bigcap\limits_{R \in P} R$. Проверим, что $R(X)$ - искомое:

1. $R(X)$ - кольцо (пересечение колец).
2. $X \subset R(X)$ - следует из построения.
3. $\forall R \supseteq X$, рассмотрим $R_2 = R \cap 2^M$ - это кольцо.

$$X \subset 2^M, R \Rightarrow X \subset R_2 \Rightarrow R_2 \in P \Rightarrow R(X) \subset R_2 \subset R$$

$\square$

Лемма 9.1. *Дополнение любого числа множеств в полукольце:*

Пусть S - полукольцо, $A, A_1, \ldots, A_n \in S : \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subseteq A$, тогда:

$$\exists A_{n+1}, \ldots, A_m \in S \; \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i = A$$

Доказательство. Индукция по n:

- $n = 1$: из определения полуколца.
- $(n-1) \mapsto n$: пусть $A = \left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{q} B_j\right)$. Очевидно, что $A_n \subseteq \bigsqcup\limits_{j=1}^{q} B_j$.

  Определим $D_j = A_n \cap B_j$, тогда $D_j \in S$, и $B_j = D_j \bigsqcup \left(\bigsqcup\limits_{r=1}^{r_j} C_{j,r}\right)$ (По свойству полукольца).

  Заметим, что $\bigsqcup\limits_{j=1}^{q} D_j = A_n$, и

$$A = \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) \bigcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{q} \bigsqcup_{r=1}^{r_j} C_{j,r}\right)$$

$\square$

Теорема 9.1. *Пусть S - полукольцо, тогда*

$$R(S) = K(S) := \{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i | \forall n, \forall A_i \in S\}$$

Доказательство. 1. $K(S)$ - кольцо, так как:

- $\varnothing \in S \Rightarrow \varnothing \in K(S)$
- $\forall A, B \in K(S): \ A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i, B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j \Rightarrow A \cap B = \bigsqcup\limits_{i,j} A_i \cap B_j \in K(S)$
- Пусть $C_{ij} = A_i \cap B_j \in S$

  $\forall i, j: \ C_{ij} \subset A \Rightarrow A = \left(\bigsqcup\limits_{ij} C_{ij}\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup\limits_{r} D_r\right)$

  $\forall i, j: \ C_{ij} \subset B \Rightarrow B = \left(\bigsqcup\limits_{ij} C_{ij}\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup\limits_{k} E_k\right)$

  $A \triangle B = \left(\bigsqcup\limits_{k} E_k\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup\limits_{r} D_r\right) \in K(S)$

2. $S \subset K(S)$
3. $K(S) \subseteq R(S)$, так как любой элемент $K(S)$ по определению должен лежать в $R(S)$, иначе нарушится замкнутость.

$\square$

Определение 9.6. Система множеств R называется σ-кольцом, если:

1. R - кольцо
2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq R: \ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R$

Определение 9.7. Система множеств R называется δ-кольцом, если:

1. R - кольцо
2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq R: \ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in R$

Определение 9.8. σ-алгебра – σ-кольцо с единицей. δ-алгебра – δ-кольцо с единицей.

Утверждение 9.4. *σ-кольцо является δ-кольцом; δ-алгебра является σ-алгеброй.*

Доказательство.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_i)$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = E \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} (E \setminus A_i)$$

$\square$

Следствие. *σ-алгебра является δ-алгеброй.*

Пример. Когда δ-кольцо не является σ-кольцом:

Множество ограниченных подмножеств $\mathbb{R}$ является δ-кольцом, но не является σ-кольцом.

Определение 9.9. $\sigma(X)$ - наименьшая σ-алгебра, содержащая X. (Определение аналогично определению $R(X)$).

Определение 9.10. Борелевская σ-алгебра на множестве A – наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества (в честь Эмиля Бореля).

10 Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и её сигма-аддитивность

Определение 10.1. Пусть S - полукольцо. Функция $m : S \to [0, +\infty)$ называется конечной мерой на S, если выполняется свойство аддитивности:

$$\forall A, A_1, \ldots, A_n \in S \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = A \Rightarrow m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Определение 10.2. m называется σ-аддитивной конечной мерой на полукольце S, если:

1. m - конечная мера на S.
2. $\forall A, \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in S \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A \Rightarrow m(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

Лемма 10.1. *Пусть S - полукольцо, и $A_1, \ldots, A_n \in S$, тогда $\exists B_1, \ldots, B_k \in S : \forall i\ A_i = \bigsqcup\limits_{k \in \Lambda_i} B_k$*

Доказательство.

- $n = 1 :\ B_1 = A_1$
- $(n-1) \mapsto n$: пусть $B_1, \ldots, B_q$ - искомый набор для $A_1, \ldots, A_{n-1}$.

  Определим $C_s = B_s \cap A_n$, тогда $A_n = \left(\bigsqcup\limits_{s=1}^{q} C_s\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup\limits_{p=1}^{m} D_p\right)$, где $D_p \in S$.

  Далее, $B_s = C_s \bigcup \left(\bigsqcup\limits_{r=1}^{r_s} B_{s,r}\right)$, и $\{C_s\} \cup \{B_{s,r}\} \cup \{D_p\}$ является искомым набором.

□

Утверждение 10.1. *1. Если $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A$, то*

$$m(A) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

2. Если $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

3. m - σ-аддитивна. Если $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Доказательство. 1. По определению полукольца набор $\{A_i\}$ можно дополнить до A, а дальше всё очевидно.

2. По ранее доказанной лемме существует такой набор попарно непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_q$, что любое множество из $\{A, A_1, \ldots, A_n\}$ представимо как объединение некоторых элементов набора.

   Далее,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{q} B_i \supset A$$

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in \Lambda_i} m(B_j) \geqslant \sum_{k=1}^{q} m(B_k) \geqslant m(A)$$

3. С помощью предельного перехода предыдущий пункт можно обобщить на бесконечный набор $\{A_i\}$.

$\square$

Пример. Промежутки в $\mathbb{R}$ образуют полукольцо, на котором длина промежутка является мерой.

Теорема 10.1. *Длина промежутка – σ-аддитивная мера.*

Доказательство. 1. Пусть $\lfloor a, b\rceil = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \lfloor a_i, b_i\rceil$ - некоторый промежуток. ($a = a_1, b_1 = a_2, b_2 = a_3, \ldots, b_n = b$).

   Тогда $m(\lfloor a, b\rceil) = b - a = \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(\lfloor a_i, b_i\rceil)$

2. Пусть $\lfloor a, b\rceil = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} \lfloor a_i, b_i\rceil$ - некоторый промежуток.

   Возьмём такой отрезок $[\alpha, \beta] \subseteq \lfloor a, b\rceil$, что $m([\alpha, \beta]) > m(\lfloor a, b\rceil) - \frac{\varepsilon}{2}$

   Определим такие интервалы $(\alpha_i, \beta_i) \supseteq \lfloor \alpha_i, \beta_i\rceil$, что $m(\alpha_i, \beta_i) < m\lfloor \alpha_i, \beta_i\rceil + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

3. Так как $[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$, то существует конечное подпокрытие

$$m\lfloor a, b\rceil < m[\alpha, \beta] + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{k} m(\alpha_j, \beta_j) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m(\alpha_j, \beta_j) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\lfloor a_j, b_j\rceil + \varepsilon$$

   Устремляя ε к нулю, получаем $m\lfloor a, b\rceil \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m\lfloor a_i, b_i\rceil$. Неравенство в другую сторону очевидно из предыдущих утверждений для меры m.

$\square$

11 Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма-аддитивности при продолжении меры. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых по Лебегу множест. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых по Лебегу множеств.

Теорема 11.1. *Пусть S - полукольцо и m - мера на S. Тогда $\exists! \nu$ – мера на $R(S)$, такая, что $\forall A \in R(S): \ m(A) = \nu(A)$. Кроме того, если m σ-аддитивна, то и ν σ-аддитивна.*

Доказательство. Пусть $A \in R(S), A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i, A_i \in S$. Тогда определим $\nu(A) := \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$ (по-другому определить не можем, то есть мера не более чем единственна).

1. Корректность (независимость от представления A)

   Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$. Определим $C_{ij} = A_i \cap B_j \in S$. Тогда $A = \bigsqcup\limits_{ij} C_{ij}$.

   $$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j)$$

2. Аддитивность

   Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i;\ A, A_i \in R(S)$. Тогда $A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_{i,j}, A = \bigsqcup\limits_{ij} B_{i,j}$

   $$\nu(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(B_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)$$

   Неотрицательность очевидна, значит ν - это мера.

3. σ-аддитивность

   $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{l_i} B_{i,j}, A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} C_k$. Определим $D_{i,j,k} = B_{i,j} \cap C_k$

   $$\nu(A) = \sum_{k=1}^{m} m(C_k) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{l_i} m(D_{i,j,k}) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l_i} m(D_{i,j,k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

   В предпоследнем равенстве имеем право поменять знаки суммы, так как ряд сходится абсолютно.

$\square$

Следствие. *Теперь мы можем доказать свойства меры на полукольце через переход к мере на кольце.*

Определение 11.1. Пусть S - полукольцо с единицей E, m – σ-аддитивная мера на полукольце.

$\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\, A_i \in S} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ - внешняя мера, определённая на ЛЮБОМ подмножестве E, обязательно конечна.

Лемма 11.1. *Свойства внешней меры:*

1. $\mu^*(A) \leqslant m(E) < +\infty$
2. *Пусть ν - продолжение m на $R(S)$. Тогда $\forall A \in R(S):\ \mu^*(A) = \nu(A)$*

   Доказательство.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, A_i \in S \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \nu(A)$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \nu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \Rightarrow \nu(A) \leqslant \mu^*(A) \text{ перешли к inf}$$

□

3. $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, \forall A, A_i \subset E \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

   Доказательство. Рассмотрим такое покрытие $A_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_{i,j}$, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(B_{i,j}) \leqslant \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

   Тогда $A \subset \bigcup\limits_{ij} B_{i,j}$, а, значит, $\mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{i}\sum\limits_{j} m(B_{i,j}) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$. В силу произвольного выбора ε получаем искомое неравенство при $\varepsilon \to 0$. □

Следствие. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B)$

Доказательство. $A \subset B \cup A \triangle B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$. Аналогично записываем включение для B и получаем требуемое. □

Определение 11.2. $A \subset E$ называется измеримым по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \in R(S)$: $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$.

$\mathcal{M}$ - множество всех измеримых по Лебегу множеств из 2^E.

Определение 11.3. Лебеговым продолжением m (мерой Лебега) называется $\mu:\ \mathcal{M} \to [0, +\infty)$, такая что $\forall A \in \mathcal{M}:\ \mu(A) = \mu^*(A)$

Утверждение 11.1. $R(S) \subset \mathcal{M}$

Доказательство. В качестве A_ε можно выписать A и тогда определение будет выполнено. Кроме того, $\forall A \in R(S):\ \mu(A) = \nu(A)$ (по второму свойству внешней меры). □

Теорема 11.2. $\mathcal{M}$ *–* σ*-алгебра,* μ *–* σ*-аддитивная мера на* $\mathcal{M}$*.*

Доказательство. 1. $\mathcal{M}$ – алгебра:

$\varnothing, E \in R(S) \subset \mathcal{M}$

$$A, B \in \mathcal{M}.\ \forall \varepsilon > 0\ \exists A_{\frac{\varepsilon}{2}}, B_{\frac{\varepsilon}{2}} :\ \mu^*(A \triangle A_{\frac{\varepsilon}{2}}) < \frac{\varepsilon}{2}, \mu^*(B \triangle B_{\frac{\varepsilon}{2}}) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$(A \cap B) \triangle (A_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}) \subset (A \triangle A_{\frac{\varepsilon}{2}}) \cup (B \triangle B_{\frac{\varepsilon}{2}})$$

Тогда из свойства 3 внешней меры получаем

$$\mu^*((A \cap B) \triangle (A_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}})) \leqslant \mu^*((A \triangle A_{\frac{\varepsilon}{2}})) + \mu^*((B \triangle B_{\frac{\varepsilon}{2}})) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$$

Аналогично получаем $A \triangle B \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}$ – алгебра.

2. μ – мера на $\mathcal{M}$:

   Достаточно показать, что $\forall B, C \in \mathcal{M} : \mu(B \sqcup C) = \mu(B) + \mu(C)$. Обозначим $A = B \sqcup C$.

   Из третьего свойства внешней меры $\mu(A) \leqslant \mu(B) + \mu(C)$. Докажем в обратную сторону.

   Так как $B, C \in \mathcal{M}$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S) :\ \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon, \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$.

$$B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subset (B_\varepsilon \setminus B) \cup (C_\varepsilon \setminus C) \subset (C_\varepsilon \triangle C) \cup (B_\varepsilon \triangle B) \Rightarrow \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \mu^*(C_\varepsilon \triangle C) + \mu^*(B_\varepsilon \triangle B) < 2\varepsilon$$

$$A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subset (B \triangle B_\varepsilon) \cup (C \triangle C_\varepsilon) \Rightarrow \mu^*(A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) + \mu^*(C \triangle C_\varepsilon) < 2\varepsilon$$
$$|\mu(A) - \mu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)| \leqslant \mu(A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) < 2\varepsilon \Rightarrow \mu(A) \geqslant \mu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - 2\varepsilon$$

$$B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S) \Rightarrow \mu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon) - \nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) =$$
$$= \mu(B_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) - \mu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geqslant \mu(B) + \mu(C) - 4\varepsilon$$

   Тогда $\mu(A) \geqslant \mu(B) + \mu(C) - 4\varepsilon$ и в силу произвольного выбора ε верно: $\mu(A) \geqslant \mu(B) + \mu(C)$

3. $\mathcal{M}$ – σ-алгебра:

   Пусть $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$. Покажем, что $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$. Определим $B_k = A_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$.

   Тогда $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \Rightarrow A \supset \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k \Rightarrow \mu^*(A) \geqslant \mu^*(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i) = \mu(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(B_i) \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(B_i)$ – сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \sum\limits_{k=N}^{\infty} m(B_k) < \varepsilon$

$$A = \left(\bigsqcup_{k=1}^{N-1} B_k\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=N}^{\infty} B_k\right) = C \bigsqcup D = C \triangle D;\ \ \mu^*(D) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} m(B_k) < \varepsilon$$
$$C \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists C_\varepsilon \in R(S) :\ \mu^*(C \triangle C_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$A \triangle C_\varepsilon = (C \triangle C_\varepsilon) \triangle D \subset (C \triangle C_\varepsilon) \cup D \Rightarrow \mu^*(A \triangle C_\varepsilon) \leqslant \mu^*(C \triangle C_\varepsilon) + \mu^*(D) < 2\varepsilon \Rightarrow A \in \mathcal{M}$$

4. μ – σ-аддитивна:

   Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогда $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (из полуаддитивности внешней меры) и $\mu(A) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ - по свойствам меры на полукольце.

□

Определение 11.4. $\mu_J^*(A) = \inf\limits_{A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\, A_i \in S} \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$ - внешняя мера Жордана. Аналогично можно определить алгебру (Не σ) измеримых по Жордану множеств $\mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}$, меру Жордана.

Теорема 11.3. *M_J - алгебра, μ_J – σ-аддитивная мера на $\mathcal{M}_J$. $\mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}$ и $\forall A \in \mathcal{M}_J$: $\mu_J(A) = \mu(A)$.*

12 Структура измеримых множеств. Теорема Каратеодори.

Теорема 12.1. *О структуре измеримых множеств:*

S – полукольцо с единицей E, m – σ-аддитивная мера на S, μ – лебегово продолжение m, $\mathcal{M}$ – множество измеримых множеств.

Тогда

$$\forall A \in \mathcal{M}:\ A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) \setminus A_0$$

причём

1. $A_{ij} \in R(S)$; $\forall i\ A_{i1} \subseteq A_{i2} \subseteq A_{i3} \subseteq \dots$
2. $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$; $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$
3. $A_0 \in \mathcal{M}$; $\mu(A_0) = 0$; $A_0 \subseteq \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right)$

Доказательство.

$$\mu(A) = \mu^*(A) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists C_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{nj} \supseteq A:\ D_{nj} \in S,\ \sum_{j=1}^{\infty} m(D_{nj}) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$$

$$\mu(A) > \sum_{j=1}^{\infty} m(D_{nj}) - \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_{nj}) - \frac{1}{n} \geqslant \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_{nj}) - \frac{1}{n} = \mu(C_n) - \frac{1}{n}$$

$$\mu(C_n \setminus A) < \frac{1}{n}$$

Пусть $B_i = \bigcap\limits_{k=1}^{i} C_k \Rightarrow B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$.

$$\forall k:\ A \subset \bigcap_{j=1}^{k} C_j = B_k;\ \mu(B_k \setminus A) \leqslant \mu(C_k \setminus A) < \frac{1}{k};\ B_1 \setminus A \supseteq B_2 \setminus A \supseteq B_3 \setminus A \supseteq \dots$$

По полученным свойствам и непрерывности меры:

$$0 = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i \setminus A) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty}(B_i \setminus A)) = \mu((\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) \setminus A)$$

Тогда пусть $A_0 = (\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i) \setminus A, \mu(A_0) = 0$

$$B_i = \bigcap_{k=1}^{i} C_k;\ C_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{kj};\ D_{kj} \in S$$

Пусть $A_{ij} = \bigcap\limits_{l=1}^{i} \bigcup\limits_{k=1}^{j} D_{lk} \in R(S) \Rightarrow A_{i1} \subseteq A_{i2} \subseteq A_{i3} \subseteq \dots$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{j}\bigcap_{l=1}^{i} D_{lk} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{l=1}^{i} D_{lj} = B_i \Rightarrow$$

$$A_0 = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \setminus A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) \setminus A \Rightarrow A_0 \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right)$$

□

Теорема 12.2. *Теорема Каратеодори:*

Пусть m – σ-конечная мера на полукольце S. Полукольцо необязательно с единицей, если единицы нет, то её можно представить, как $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i;\ X_i \in S$. Тогда $\exists! \sigma$-конечная "мера"μ на $\sigma(S)$, согласованная с мерой m, то есть $\forall A \in S:\ m(A) = \mu(A)$.

Замечание. То, что мы обычно называли мерой $m:\ S \to [0, +\infty)$ – конечная мера. Но иногда мера $m:\ S \to [0, +\infty]$ может принимать бесконечные значения, такую меру мы обозначим, как "мера".

Доказательство. Сущестование меры μ мы уже доказали. Пример — μ – лебегово продолжение m.

Докажем единственность. Разберём 2 случая:

1. Пусть S – полукольцо с единицей E:

   Пусть μ – лебегово продолжение. μ' – другая мера на $\sigma(S)$ согласованная с m.

   Так как мы ранее доказывали, что продолжение на полукольце единственное, то: $\forall A \in R(S), \mu(A) = \mu'(A) = \nu(A)$.

   $\forall A \in \sigma(S) \Rightarrow A \in M \Rightarrow A = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) \setminus A_0, \mu(A_0) = 0$

   $A_{ij} \in R(S) \Rightarrow A_0 = A \setminus (\bigcap\bigcup A_{ij}) \in \sigma(S)$

   Утверждение 12.1. $\mu'(A_0) = 0$

   Доказательство. $\mu^*(A_0) = \mu(A_0) = 0 \Rightarrow A_0 \subset \bigcup C_i$, где $C_i \in S:\ \forall\varepsilon > 0, \sum m(C_i) < \varepsilon$. Устремив $\varepsilon \to 0$ получаем, что $\mu'(A_0) = 0$. □

Мы знаем, что $A_0 \subset \bigcap \bigcup A_{ij}$; $A_0 \sqcup A = \bigcap \bigcup A_{ij}$, но тогда $\mu'(A) + \mu'(A_0) = \mu'(\bigcap \bigcup A_{ij}) = \lim_i \lim_j \mu'(A_{ij})$. Аналогично для μ.

Так как мы знаем, что $\mu(A_0) = \mu'(A_0) = 0$; $\mu(A_{ij}) = \mu'(A_{ij})$, то $\mu(A) = \mu'(A)$

2. Пусть S – полукольцо без единицы:

   $X \notin S, X = \bigsqcup X_i, X_i \in S$

   Рассмотрим $S_i = \{A \cap X_i | A \in S\}$

   Утверждение 12.2. $\forall A \in \sigma(S) : \ (A \cap X_i) \in \sigma(S_i)$

   Доказательство. Пусть $F = \{A \in 2^X | \forall i \ A \cap X_i \in \sigma(S_i)\}$, тогда

   (a) F – σ-алгебра с единицей X, потому что:
   - Замкнутость относительно пересечения $A \cap X_i \in \sigma(S_i), B \cap X_i \in \sigma(S_i) \Rightarrow (A \cap B) \cap X_i \in \sigma(S_i)$
   - Замкнутость относительно бесконечного объединения: $A_1, A_2, \ldots \in F \Rightarrow \bigcup A_i \in F$, так как $\forall i \ A_j \cap X_i \in \sigma(S_i) \Rightarrow \forall i \ (\bigcup A_j) \cap X_i \in \sigma(S_i)$
   - Замкнутость относительно взятия дополнения: Если $A \cap X_i \in \sigma(S_i)$, то $\overline{A} \cap X_i = X_i \setminus (A \cap X_i) \in \sigma(S_i)$
   - $X \cap X_i = X_i \in \sigma(S_i) \Rightarrow X \in F$ – единица σ-алгебры F.

   (b) $S \subset F$:
   $\forall A \in S \ A \cap X_i \in S_i \subset \sigma(S_i)$

   Значит $\sigma(S) \subseteq F \Rightarrow \forall A \in \sigma(S) \ A \cap X_i \in \sigma(S_i)$ □

   S_i - полукольцо с единицей $X_i \Rightarrow \forall A \in \sigma(S_i) : \ \mu(A) = \mu'(A)$

   $\forall A \in \sigma(S) : \ A = \bigsqcup (A \cap X_i) \in \sigma(S_i) \Rightarrow \mu(A \cap X_i) = \mu'(A \cap X_i)$

   По σ-аддитивности мер:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(A \cap X_i) = \mu'(A)$$

□

13 Полнота и непрерывность мер. Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности

Определение 13.1. Заданная на кольце R подмножеств некоторого множества X мера μ называется полной, если из того, что $A \in R, \mu(A) = 0$ и $B \subset A \Rightarrow B \in R, \mu(B) = 0$.

Утверждение 13.1. *Меры Лебега и Жордана являются полными.*

Доказательство. Пусть A измеримо по Лебегу и $\mu(A) = 0$. Так как $B \subset A$, то $\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) = \mu(A) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B_\varepsilon = \varnothing : \ \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) = 0 < \varepsilon \Rightarrow B \in \mathcal{M}, \mu(B) = 0$.

Доказательство для меры Жордана аналогично. □

Определение 13.2. Пусть на кольце R задана конечная мера μ, и дана последовательность элементов кольца $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, что $A = \bigcap A_i, A_i \in R$.

Если для такой последовательности $\{A_i\}$ верно, что $\mu(A) = \lim_i \mu(A_i)$, то μ называется непрерывной.

Теорема 13.1. *Заданная на кольце R мера непрерывна тогда и только тогда, когда она σ-аддитивна.*

Доказательство. Пусть μ σ-аддитивна и $A = \bigcap A_i$, где множества A_i вложены и $A, A_1, A_2, \ldots \in R$.

Положим $B_i = A_i \setminus A_{i+1}$ при $i \geqslant 1$. Тогда:

$$A_1 \setminus A = \bigsqcup B_i$$

откуда

$$\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A) = \sum \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) \right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

то есть $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$

Пусть теперь мера μ непрерывна и $A = \bigsqcup A_n;\ A, A_1, A_2, \ldots \in R$. Положим

$$B_n = \bigsqcup_{i=n}^{\infty} A_i = A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

Тогда $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ и $\bigcap B_n = \varnothing$. Поэтому

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i) \right) = \mu(A) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i)$$

Значит $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. □

14 Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и её сигма-аддитивность

Замечание. Для задания меры нам нужно задать σ-аддитивную меру на полукольце с единицей, дальше продолжаем её до кольца с единицей, а дальше мы можем, используя внешнюю меру, перейти к измеримым множествам. Этот переход и есть лебегово продолжение.

Определение 14.1. Полукольцо $S = \{(a, b] | -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty\}$; $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty]$ - единица.

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; неубывающая, непрерывная справа, ограниченная $\Rightarrow \exists \varphi(-\infty), \varphi(+\infty)$; Тогда $m(a, b] = \varphi(b) - \varphi(A)$

Теорема 14.1. *m – σ-аддитивная мера*

Доказательство. m - очевидно, мера; $(a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i]$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0; [c,d] \subseteq (a,b] : \ |\varphi(a) - \varphi(c)| < \varepsilon; \ |\varphi(b) - \varphi(d)| < \varepsilon$. Аналогично находим c_i, d_i $(a_i,b_i] \subseteq (c_i,d_i)$; $|\varphi(c_i) - \varphi(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2^i}$; $|\varphi(d_i) - \varphi(b_i)| < \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Отсюда $[c,d] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(c_i,d_i) \Rightarrow \exists k : \ [c,d] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k}(c_i,d_i)$

m - мера. Тогда $m(a,b] - 2\varepsilon \leqslant m[c,d] \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} m(c_i,d_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k}\left(m(a_i,b_i] + \frac{\varepsilon}{2^i}\right)$.

Итого $m(a,b] \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(a_i,b_i] + 3\varepsilon$. Неравенство в другую сторону следует из свойств меры, значит имеет место равенство. □

Замечание. Любая мера на полукольце является мерой Лебега-Стилтьеса для некоторого φ.

Определение 14.2. Мера Бореля - классическая мера Лебега на $\mathcal{B}_{a,b} = \{A \cap [a,b] | A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

15 Сигма-конечные меры

Определение 15.1. Пусть S - полукольцо множеств X. $X \notin S$, m – σ-аддитивная мера на S. Если $\exists \{X_i\} \in S : \ X = \bigcup X_i$, то m – σ-конечная мера.

Утверждение 15.1. $X = \bigsqcup B_i, B_i \in S$

Доказательство. Определим $B_i = X_i \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} X_j\right)$. Любой элемент $R(S)$ является дизъюнктным объединением элементов полукольца по доказанной теореме, откуда $B_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{l_i} C_{ij}$ □

Далее будем считать, что $X = \bigsqcup X_i, X_i \in S$.

Определим $S_i = S \cap X_i$. S_i – это σ-алгебра с единицей X_i. Отсюда, существует лебегово продолжение m до σ-аддитивной меры μ_i на σ-алгебре M_i.

Определение 15.2. $A \subset X$ – измеримо, если $\forall i (A \cap X_i)$ – измерима, то есть $(A \cap X_i) \in M_i$.

Тогда можно определить меру:

Определение 15.3.

$$\mu(A) = \sum \mu_i(A \cap X_i)$$

Определение 15.4. μ - лебегово продолжение σ-конечной меры на M.

Замечание. $\mu : \ M \to [0, +\infty]$, то есть эта мера не является мерой в классическом определении.

Утверждение 15.2. $\forall A \in S : \ A \in M, \mu(A) = m(A)$

Доказательство. Для того, чтобы A было измеримым, нужно, чтобы $A \cap X_i \in S$ – очевидно, как пересечение лежащих в S множеств.

$\mu(A) = \sum \mu_i(A \cap X_i) = \sum m(A \cap X_i) = m(A)$, так как $\bigsqcup (A \cap X_i) = A$ □

Теорема 15.1. *μ корректно определена, то есть её определение не зависит от разбиения множества X.*

Теорема 15.2. *Множество M измеримых подмножеств X – σ-алгебра.*

Доказательство.
1. $X \in M$, так как $X = \bigsqcup X_i \in M$
2. $A, B \in M$, тогда $A \cap X_i \in M_i, B \cap X_i \in M_i$, откуда $(A \cap X_i) \cap (B \cap X_i) \in M_i \Rightarrow (A \cap B) \cap X_i \in M_i$
3. Для $\triangle$ аналогично
4. $A_1, A_2, \ldots \in M$. Тогда $(\bigcup A_i) \cap X_j = \bigcup (A_i \cap X_j) \in M_j \Rightarrow \bigcup A_i \in M$

□

Теорема 15.3. *μ на M является σ-аддитивной мерой*

Доказательство. $A = \bigsqcup A_i \in M$

$$\mu(A) = \sum_i \mu_i(A \cap X_i) = \sum_i \mu_i(\bigsqcup A_j \cap X_i) = \sum_i \sum_j \mu_i(A_j \cap X_i) = \\ = \sum_j \sum_i \mu_i(A_j \cap X_i) = \sum_j \mu(A_j)$$

□

16 Неизмеримые множества

Теорема 16.1. *Пусть A - измеримое по классической мере Лебега подмножество $[0,1]$. Тогда существует неизмеримое $B \subset A$*

Доказательство. Введём на A отношение эквивалентности на отрезке $[0,1]: \ a \sim b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Q}$. Используя аксиому выбора, можем выбрать в каждом классе эквивалентности представителя.

Положим $E = \{x_\alpha\}$ - множество этих представителей.

Занумеруем все рациональные числа в отрезке $[-1,1]$. $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Рассмотрим $E_n = E + r_n$. Множества E_n не пересекаются. Пусть это не так, тогда $\exists x_\alpha + r_\alpha = x_\beta + r_\beta$, тогда $x_\alpha \sim x_\beta$ - противоречие.

Покажем, что $\forall C_n \subset E_n : \ \lambda(C_n) = 0$:

Пусть $\lambda(C_n) = d > 0, C_m = C_n - r_n + r_m, C_n \subset [0,1] \Rightarrow \forall m : \ C_m \in [-1,2]$.

$$C_m \subset E_m \Rightarrow \bigsqcup C_m \subset \bigsqcup E_m \subseteq [-1,2] \Rightarrow \infty = \sum \lambda(C_m) \leqslant 3. \perp$$

$A = \bigsqcup A \cap E_n$, в силу того, что E_n попарно не пересекаются и их объединение содержит отрезок $[0,1]$, так как $\forall x \in [0,1] : \ x = x_\alpha + r_n$.

Положим $F_n = A \cap E_n$. Если какое-то множество F_n неизмеримо по Лебегу, то мы уже победили. Предположим, что все F_n измеримы, тогда в силу того, что $\lambda(A) \neq 0 \ \exists n : \lambda(F_n) \neq 0$. Противоречие с доказанным. □

17 Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.

Определение 17.1. (X, M) – измеримое пространство, где X – единица, M – σ-алгебра. Элементы M называются измеримыми множествами.

Определение 17.2. Функция $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримая, если $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}: f^{-1}((-\infty, c]) \in M$

Теорема 17.1. *Если f - измерима на (X, M), то $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): f^{-1}(B) \in M$*

Доказательство. Пусть $S = \{A \subset \mathbb{R} | f^{-1}(A) \in M\}$

- $\mathbb{R} \in S$
- $\forall A, B \in S: A \cap B \in S, A \triangle B \in S$ в силу того, что $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$
- $\forall A_1, \ldots \in S: \bigcup A_i \in S$, так как $f^{-1}(\bigcup A_i) = \bigcup f^{-1}(A_i)$

Следовательно, S – σ-алгебра, содержащая все полуинтервалы, а значит, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset S$, то есть прообраз любого борелевского множества измерим. □

Определение 17.3. Борелевская функция – это отображение из $G \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}$, для которого верно следующее: $\forall c \in \mathbb{R}: f^{-1}(c, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Замечание. Если f - борелевская функция и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Замечание. Если f - непрерывная функция, определённая на открытом $G \subset \mathbb{R}$, то f - борелевская.

Теорема 17.2. *О композиции:*

Пусть f – измерима и конечна на (X, M). $f(x) \subset G \subset \mathbb{R} : G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и g – борелевская, тогда gf - измеримая на (X, M)

Доказательство. $(gf)^{-1}(c, +\infty) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(c, +\infty)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})})$ – измеримо. □

Теорема 17.3. *Об арифметических операциях:*

$f, g: X \to \mathbb{R}$ - измеримые функции, (X, M) – измеримое пространство. Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

1. *$af + b$ – измерима*
2. *fg – измерима*
3. *$\frac{f}{g}, g \neq 0$ – измерима*

Доказательство. 1. $af, f + c$ – измеримые функции, так как

- $h(y) = ay$ – борелевская
- $h(y) = y + c$ – борелевская

$h(f(x))$ – измеримая по предыдущей теореме.

2. $\{x|f(x) < g(x)\} = \bigcup_n(\{x|f(x) < r_n\} \cap \{x|g(x) > r_n\})$ – измеримое, тогда $\{x|f(x) + g(x) < a\} = \{x|f(x) < a - g(x)\}$ – измеримо

   Значит $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ – измерима

3. $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$. Положим $h(y) = \frac{1}{y}$. Если $y \neq 0$, то h – непрерывна на области определения, поэтому если g измерима, то и $\frac{1}{g}$ – измерима.

□

Теорема 17.4. *О переходе к пределу:*
$\{f_n\}$ *– измеримые функции.* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Тогда*

1. $\sup f_n, \inf f_n$ *– измеримые*

2. $\overline{\lim}(f_n(x)), \underline{\lim}(f_n(x))$ *– измеримы*

3. $E = \{x|\exists \lim(f_n(x))\} \in \mathcal{M}$

   $g(x) = \lim(f_n(x)), g : E \to \mathbb{R}$ *– измеримая функция из* $(E, M_E) : M_E = \{A \subset E | A \in \mathcal{M}\}$.

Доказательство. 1. $\{x|\sup f_n(x) \leqslant a\} = \bigcap\{x|f_n(x) \leqslant a\}$. Для inf аналогично.

2. $\overline{\lim}(f_n(x)) = \inf\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{k\geqslant n} f_k$. Аналогично для $\underline{\lim}$.

3. $\varphi(x) = \overline{\lim}(f_n(x)), \psi(x) = \underline{\lim}(f_n(x))$

   $E = \{x|\varphi(x) = \psi(x)\} = X \setminus (\{x|\varphi(x) > \psi(x)\} \cup \{x|\varphi(x) < \psi(x)\})$ – измеримо

   $\forall x \in E : \lim(f_n(x)) = \varphi(x);\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \varphi^{-1}|_E(A) = \varphi^{-1}(A) \cap E$

□

18 Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией

Пусть $C_0 = [0,1], C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \ldots, C_n = \bigcup[a_n, b_n] \mapsto C_{n+1} = \bigcup([a_n, c_n] \cup [d_n, b_n])$, где $c_n = \frac{2a_n+b_n}{3}, d_n = \frac{a_n+2b_n}{3}$

Определение 18.1. Канторово множество C – пересечение всех C_n.

Пользуясь непрерывностью меры и вложенностью C_i, вычислим Лебегову меру:

1. $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$, тогда $\lim(\frac{2}{3})^n = 0$

2. Замкнуто, как пересечение замкнутых

3. Континуально, так как когда мы выкидываем трети от отрезков, мы выкидываем все числа, у которых последовательно первое, второе, третье и далее число в троичной записи соответственно равно единице. А значит, в результате, в множестве Кантора лежат все числа, которые записываются нулями и двойками, значит, имеем континуальное количество.

Построим Канторову лестницу:

Начнём с определения T – множество концов отрезков $[a_n, b_n]$, тогда пусть $\overline{\varphi} : T \to [0,1]$:

1. База: $\overline{\varphi}(0) = 0, \overline{\varphi}(1) = 1$
2. $\overline{\varphi}(c) = \overline{\varphi}(d) = \frac{\overline{\varphi}(a)+\overline{\varphi}(b)}{2}$
3. $\overline{\varphi}(x)$ не убывает
4. $\overline{\varphi}(x)$ принимает все значения вида $\frac{k}{2^n}$

Доопределим для остальных точек интервала $[0,1] : \; \varphi(x) = \sup\limits_{y \leqslant x, \, y \in T} \overline{\varphi}(y)$

1. Неубывающая
2. В точках из $T : \; \varphi(x) = \overline{\varphi}(x)$.

Теорема 18.1. *1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$: измеримые по Борелю не совпадают с измеримыми по Лебегу.*

2. $\exists f \in C[0,1]$ и $\exists$ измеримая поо Лебегу $g : \; g(f(x))$ не измерима по лебегу

3. $\exists A \in \mathcal{M} : \; f^{-1}(A) \notin \mathcal{M}$

Доказательство. Рассмотрим $\psi = \frac{x+\varphi(x)}{2}$, непрерывная и монотонная, а значит и биекция. Обозначим $f = \psi^{-1}$. Тогда:

1. $\lambda(\psi(C_0)) = \frac{1}{2}$
2. $\lambda(\psi(\overline{C})) = \frac{1}{2}\lambda(\overline{C}) = \frac{1}{2}$

Теперь возьмём из образа ψ неизмеримое подмножество Q, $E := f(Q) \subset C \Rightarrow E \in M_\lambda$. E измеримо (и имеет меру 0), но не борелевское, так как его образ неизмерим.

В качестве g возьмём индикатор E, тогда $g(f(x))$ - индикатор неизмеримого множества Q. $\square$

19 Общее понятие вероятностного пространства, случайной величины на нём. Понятие распределения случайной величины и распределения. Понятие функции распределения случайной величины и функции распределения. Доказательство свойств функции распределения.

Определение 19.1. Вероятностным пространством называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ - измеримое пространство, а P - мера.

Определение 19.2. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если $\forall x \in \mathbb{R} : \xi^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$

Определение 19.3. Распределением случайной величины называется вероятностная мера P ($P(\Omega) - 1$, P – σ-аддитивная), определённая на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \; P_\xi(B) = P(\{\omega | \xi(\omega) \in B\})$$

Определение 19.4. Функцией распределения случайной величины ξ называется $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, где $F(x) = P(\{\xi \leqslant x\}) = P_\xi((-\infty, x])$.

Лемма 19.1. *Свойства функции распределения случайной величины:*

1. $F(x)$ *неубывающая*
2. $F(x) \in [0, 1]$
3. $F(x)$ *непрерывна справа*

20 Сходимость по мере и почти всюду. Их свойства (критерий Коши сходимости по мере, арифметические, связь сходимостей, Теорема Рисса)

Определение 20.1. Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится по мере к измеримой функции f $f_n \rightrightarrows f : \forall \varepsilon > 0 \; \lim\limits_{n \to \infty} \mu\{x \in X | \|f_n(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\} = 0$

Определение 20.2. Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится почти всюду к измеримой функции f $f_n \to f : \; \mu\{x \in X | f_n(x) \not\to f(x)\} = 0$

Замечание. В теории вероятностей первое – сходимость по вероятности, второе – сходимость почти наверное.

Теорема 20.1. $f_n \to f, f_n \to g \Rightarrow f \overset{п.в.}{=} g$

Доказательство. Наследуется из свойств предела в определении сходимости почти всюду. □

Теорема 20.2. *Арифметические свойства сходимости:*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : \; (af_n + bg_n) \to af + bg$
2. $h \in C(\mathbb{R}) : \; h(f_n(x)) \to h(f(x))$
3. $f_n g_n \to fg$
4. $g_n, g \neq 0 : \; \frac{f_n}{g_n} \to \frac{f}{g}$

Доказательство. 2) $x_n \to x \Rightarrow h(x_n) \to h(x) : \; \{x \in X | h(f_n(x)) \not\to h(f(x))\} \subseteq \{x \in X | f_n \not\to f(x)\}$

Аналогично остальные пункты наследуются из определения предела. □

Теорема 20.3. *Если* $\mu(X) < +\infty$*, то*

$$f_n \to f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \lim_{n \to \infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X | \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

Доказательство.

$$f_n \not\to f \Rightarrow \exists m \, \forall n \, \exists k > n: \; \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{m}$$

$$\{x \in X | f_n(x) \not\to f(x)\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X | \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{m}\} =: C$$

$\mu(C) = 0 \Leftrightarrow \forall m \; \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X | \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{m}\}) = 0$. Справа налево очевидно, обратноо – мера объединения больше или равна каждого из элементов.

События вложены друг в друга, значит, можно перейти к пределу:

$$\forall m: \; \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X | \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{m}\}) = 0$$

Непрерывность следует из σ-аддитивности и конечности X. □

Теорема 20.4. *Связь сходимостей:*

Если $\mu(X) < +\infty$, то из $f_n \to f$ следует $f_n \Rightarrow f$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0: \; \{x \in X | \|f_n(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X | \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\}$$

Тогда, по критерию сходимости почти всюду:

$$\forall \varepsilon > 0: \; \lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X | \|f_n(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X | \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

□

Замечание. Обратное неверно, пример Рисса:

$$\forall n \in \mathbb{N}, k \in [1, n]; \; \varphi_{n,k} := \mathbb{I}_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]}(x)$$

Теорема 20.5. *Теорема Рисса:*

Пусть (X, M, μ) – σ-конечное измеримое пространство. Тогда из $f_n \Rightarrow f$ следует $\exists n_k: \; f_{n_k} \to f$ (можно выбрать подпоследовательность).

Доказательство. Пусть мера конечная:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X | \|f_n(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\} = 0 \Rightarrow \forall k \, \exists n_k: \mu\{x \in X | \|f_{n_k}(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{k}\} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

Тогда:

$$\mu(\bigcup_{k=i}^{\infty} \{x \in X | \|f_{n_k}(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu(\bigcup_{k=i}^{\infty} \{x \in X | \|f_{n_k}(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{k}\}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=i}^{\infty} \mu\{x \in X | \|f_{n_k}(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{k}\} \leqslant \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}}$$

Устремляя $i \to \infty$ получаем критерий сходимости почти всюду подпоследовательности.

Если мера σ-конечная:

$X = \bigcup X_i, \mu(X_i) < +\infty$, тогда $\forall i \, \exists n_{i,k}: \; f_{n_{i,k}} \to f$ на X_i. Берём диагональ $g_k = f_{n_{k,k}}$ - искомая подпоследовательность, т.к. $\{x \in X | g_k \not\to f = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in X_m | g_k \not\to f\}\}$, а меры таких множеств равны 0. □

Теорема 20.6. *Критерий сходимости по мере Эрлиха:*
Если $\mu(X) < +\infty$, *то* $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall n_k \, \exists n_{k_m} : \, f_{n_{k_m}} \to f$

Доказательство. Если последовательность сходится по мере, то и подпоследовательность сходится по мере, а значит, по теореме Рисса можно выбрать искомую подподпоследовательность.

В другую сторону, от противного: Пусть $f_n \not\rightrightarrows f$ по мере. Тогда $\exists \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \exists n_k$: $\mu(\{x \in X | \|f_{n_k} - f\| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \delta$. С другой стороны, выделим из этой подпоследовательности n_k подподпоследовательность n_{k_m} : $f_{n_{k_m}} \to f$ значит $f_{n_{k_m}} \rightrightarrows f$, а это противоречие. □

Теорема 20.7. *Если* $f_n \rightrightarrows f, f_n \rightrightarrows g$, *то* $f \overset{\text{п.в.}}{=} g$

Доказательство.

$$\forall \varepsilon \{x \in X | \|f(x) - g(x)\| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{x \in X | \|f(x) - f_n(x)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X | \|g(x) - f_n(x)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Мера правой части стремится к нулю, значит, мера левой части также стремится к нулю при $n \to \infty$. Однако, она она не зависит от n, значит, её мера всегда равна 0. □

Теорема 20.8. *Арифметические свойства сходимости по мере:* $f_n \rightrightarrows f$; $g_n \rightrightarrows g, \mu(X) < +\infty$. *Тогда:*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : \, (af_n + bg_n) \rightrightarrows af + bg$
2. $h \in C(\mathbb{R})$, *тогда* $h(f_n(x)) \rightrightarrows h(f(x))$
3. $f_n g_n \rightrightarrows fg$
4. $g_n, g \neq 0$, *тогда* $\frac{f_n}{g_n} \rightrightarrows \frac{f}{g}$.

Доказательство. Докажем пункт 3. Воспользуемся критерием сходимости по мере: $\forall n_k \, \exists n_{k_m}$: $f_{n_{k_m}} g_{n_{k_m}} \to fg$.

Знаем, что $f_{n_k} \rightrightarrows f, g_{n_k} \rightrightarrows g$; Воспользуемся теоремой Рисса сначала для f_{n_k}, получим n_{k_l}, и уже из него выберу такую подпоследовательность $n_{k_{l_m}}$, чтобы и $g \dots$ сходилось почти всюду. Теперь воспосльзуемся арифметическими свойствами сходимости почти всюду. □

21 Теорема Егорова

Определение 21.1. f_n сходится равномерно к f $f_n \rightrightarrows f$: $\forall \delta > 0 \, \exists N \, \forall n > N \, \forall x \in E_\varepsilon$: $\|f_n(x) - f(x)\| < \delta$

Теорема 21.1. *Теорема Егорова:*
$\mu(X) < +\infty, f_n \to f$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0 \, \exists E_\varepsilon : \, \mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon : \, f_n \rightrightarrows f$ *на* E_ε.

Доказательство. $f_n \to f \Leftrightarrow \forall m > 0 \lim\limits_{n \to \infty} \mu(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x \in X | \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{m}\}) = 0$

$$G_m := \bigcup_{k=n_m}^{\infty} \{x \in X | \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{m}\}; \; \exists n_m \, \mu(G_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}; \; E_\varepsilon := X \setminus (\bigcup G_m)$$

Покажем, что первое условие теоремы выполняется:

$$\mu(\bigcup G_m) \leqslant \sum \mu(G_m) < \sum \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon$$

Докажем, что на E_ε есть равномерная сходимость:

$$x \in \bigcup G_m : \exists m \, \exists k > n_m : \|f_k(x) - f(x)\| \geqslant \frac{1}{m}$$

Тогда распишем отрицание принадлежности $\bigcup G_m$:

$$x \in E_\varepsilon \, \forall m \, \forall k > n_m : \|f_k(x) - f(x)\| < \frac{1}{m}$$

верно $\forall m \in \mathbb{N}$, значит, заменим на произвольное положительное число :$\forall \delta > 0 \, \exists n_m \, \forall k > n_m \|f_k(x) - f(x)\| < \delta$. Причём заметим, что n_m не зависит от точки x - это и есть равномерная сходимость на E_ε. □

22 Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства. Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.

Определение 22.1. Функция $f(x)$ называется простой, если $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$, причём $E_k \in \mathcal{M}, E_k \cap E_i = \varnothing$. Отметим, что $c_k \neq 0 \Rightarrow \mu(E_k) < +\infty$

Замечание.
1. Принимает конечное множество значений.
2. Простая функция обязана быть измеримой, как сумма измеримых.
3. Из конечности меры понимаем, что носитель должен иметь конечную меру.

Замечание. Если $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ и $\bigsqcup E_k = X$, то $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$ назовём каноническим видом.

Определение 22.2. Интеграл Лебега от простой функции $\int_X f(x) d\mu(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k)$.

Замечание. $0 \cdot \infty = 0$

Лемма 22.1. *Интеграл Лебега от простой функции не зависит от её предсталения.*

Лемма 22.2. *Свойства интеграла Лебега от простой функции:*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} : af + bg$ *– простая, причём* $\int_X (af(x) + bg(x)) d\mu = a \int_X f(x) d\mu + b \int_X g(x) d\mu$
2. $\forall x \, f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \int_X f(x) d\mu \geqslant 0$
3. $\forall x \, f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \int_X f(x) d\mu \geqslant \int_X g(x) d\mu$
4. $|\int_X f(x) d\mu| \leqslant \int_X |f(x)| d\mu$

5. *Аддитивность по области интегрирования*

Доказательство. 1. Рассмотрим f и g как сумму индикаторов, тогда имеем, что $(af + bg)(x) = \sum\limits_k \sum\limits_j (ac_k + bd_j)\mathbb{I}_{E_k \cap D_j}(x)$, тогда распишем по определению интеграл Лебега:

$$\int_X (af + bg)(x)d\mu = \sum_k \sum_j (ac_k + bd_j)\mu(E_k \cap D_j) = a\sum_k c_k\mu(E_k) + b\sum_j d_j\mu(D_j)$$

2. Слагаемые суммы неотрицательны

3. Переходим к неотрицательной функции $(f - g)(x)$ и обращаемся к первым двум свойствам.

4. Неравенство треугольника

5. Очевидно в силу измеримости подмножеств, по которым интегрируем.

□

Определение 22.3. Интеграл Лебега от неотрицательной функции:

Пусть $f(x) \geqslant 0$ и эта функция измерима. Тогда рассмотрим множество $Q_f = \{h(x) | h -$ простая и $\forall x : \ 0 \leqslant h(x) \leqslant f(x)\}$:

$$\int_X f(x)d\mu = \sup_{h \in Q_f} \int_X h(x)d\mu \geqslant 0$$

Если супремум конечен, то будем называть такую функцию интегрируемой.

Определение 22.4. Пусть f измерима, тогда она представима в виде разности $f = f^+ - f^-$, где $f^+ := \max(0, f)$; $f^- := \max(0, -f)$:

$$\int_X f(x)d\mu = \int_X f^+(x)d\mu - \int_X f^-(x)d\mu$$

Теорема 22.1. *Линейность интеграла Лебега для неотрицательной функции.* $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, f, g$ *- неотрицательные и измеримые, тогда:*

$$\int_X af(x) + bg(x)d\mu = a\int_X f(x)d\mu + b\int_X g(x)d\mu$$

Доказательство. По лемме о приближении функции простыми, строим $\{f_n\}, \{g_n\}$, тогда $af_n + bg_n \uparrow af + bg$, причём левая часть это неотрицательная простая функция. Воспользуемся свойством предела:

$$\int_X af(x) + bg(x)d\mu = a\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu + b\lim_{n\to\infty}\int_X g_n(x)d\mu = a\int_X f(x)d\mu + b\int_X g(x)d\mu$$

□

Теорема 22.2. *Аддитивность интеграла Лебега для неотрицательных функций:*

Пусть f измерима и неотрицательна. $A, B, C \in \mathcal{M}$ и $C = A \bigsqcup B$, тогда

$$\int_C f(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_B f(x)d\mu$$

Доказательство. Вспомним, что $\int_E f(x)d\mu = \int_X f(x)\mathbb{I}_E(x)d\mu$, тогда $f\mathbb{I}_C = f\mathbb{I}_A + f\mathbb{I}_B$ и мы свели задачу к предыдущей теореме. $\square$

Теорема 22.3. *Свойства, связанные с нулевой мерой:*

1. *Если $\mu(X) = 0$, f измерима, тогда функция всегда интегрируема и её интеграл по пространству равен нулю.*

2. *Пусть f и g равны почти всюду, тогда их интегралы по X равны*

3. *Пусть f интегрируема, тогда $\mu(\{x \in X | f(x) = \pm\infty\}) = 0$*

Теорема 22.4. *Линейность интеграла Лебега в общем случае:*
Пусть $f, g \in I(x)$, тогда

1. $f + g \in I(x)$

2. $\int_X (af(x) + bg(x))d\mu = a\int_X f(x)d\mu + b\int_X g(x)d\mu$

Доказательство. Пусть f неотрицательна и g неположительна. Пусть $X = E_1 \sqcup E_2$, где $E_1 = \{x \in X | f(x) + g(x) \geqslant 0\}$ и $E_2 = \{x \in X | f(x) + g(x) < 0\}$.

Значит, $\int_{E_1} f(x)d\mu = \int_{E_1}(f(x) + g(x))d\mu + \int_{E_1}(-g(x))d\mu$, значит $\int_{E_1}(f(x) + g(x))d\mu = \int_{E_1} f(x)d\mu + \int_{E_1} g(x)d\mu$. Аналогичное равенство запишем и для E_2.

Сложив данные неравенства, получаем:

$$\int\limits_{E_1}(f+g)d\mu(x)+\int\limits_{E_2}(f+g)d\mu(x) = \int\limits_{E_1} fd\mu(x)+\int\limits_{E_1} gd\mu(x)+\int\limits_{E_2} fd\mu(x)+\int\limits_{E_2} gd\mu(x) = \int\limits_{X} fd\mu(x)+\int\limits_{X} gd\mu(x)$$

$\square$

Лемма 22.3. *Свойства интеграла Лебега в общем случае:*

1. $f(x) \in I(X) \Leftrightarrow |f(x)| \in I(X)$

2. $f(x) \in I(X) \Rightarrow |\int_X fd\mu(x)| \leqslant \int_X |f|d\mu(x)$

3. $f(x) \in I(X) :\ |g(x)| \leqslant |f(x)| \Rightarrow g(x) \in I(X)$, $\int_X |g|d\mu(x) \leqslant \int_X |f|d\mu(x)$

4. $f, g \in I(X) :\ f \leqslant g \Rightarrow \int_X fd\mu(x) \leqslant \int_X gd\mu(x)$

5. $E = A \sqcup B, f \in I(X) \Rightarrow \int_E fd\mu(x) = \int_A fd\mu(x) + \int_B gd\mu(x)$

23 Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега

Теорема 23.1. *Пусть $g_n(x), g$ – простые функции. Последовательность $g_n(x)$ неубывающие, неотрицательные на $E \in \mathcal{M}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \geqslant g(x)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)d\mu \geqslant \int_E g(x)d\mu$$

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E g_n(x)d\mu = +\infty$, то всё сразу выполняется.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E g_n(x)d\mu < +\infty$. Определим $\forall \varepsilon > 0 :\ F_n = \{x \in E | g_n(x) \leqslant g(x) - \varepsilon\}$. Очевидно, $\bigcap F_n = \varnothing$.

Пусть $F :=$ носитель g. $\mu(F) < +\infty$, отсюда, по непрерывности меры $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$.

$$\int_E g(x)d\mu = \int_{F_n} g(x)d\mu + \int_{F \setminus F_n} g(x)d\mu \leqslant c_m\mu(F_n) + \int_{F\setminus F_n} (g_n(x)+\varepsilon)d\mu \leqslant c_m\mu(F_n)+\varepsilon\mu(F)+\int_F g_n(x)d\mu$$

Теперь $n \to \infty, \varepsilon \to 0$, тогда

$$\int_E g(x)d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)d\mu$$

□

Утверждение 23.1. *Пусть $\{g_n\}$ – неубывающая неотрицательная последовательность простых функций. $E \in \mathcal{M}, g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)\ \forall x \in E$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)d\mu = \int_E g(x)d\mu$$

Доказательство.

$$\int_E g(x)d\mu = \sup_{h\in Q_f} \int_E h(x)d\mu$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) \geqslant h(x) \Rightarrow \int_E g(x)d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)d\mu$$

Переходя к супремуму в левой части:

$$\int_E g(x)d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)d\mu$$

В силу того, что $g_n \in Q_f$, то выполняется неравенство в обратную сторону. □

Утверждение 23.2. *Для любой неотрицательной измеримой функции f на $E \in \mathcal{M}$ существует неубывающая последовательность $\{f_n\}$ неотрицательных простых функций, которая поточечно сходится к f на E.*

Доказательство. Пусть $E = \bigsqcup E_k, \mu(E_k) < +\infty$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} E_k \\ 2^n, x \in \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k, f(x) \geqslant 2^n \\ \frac{k-1}{2^n}, f(x) \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \end{cases}$$

□

Теорема 23.2. *Теорема Леви:*

Пусть $\{f_n\}$ - неубывающая последовательность неотрицательных измеримых функций, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Тогда

$$\int_E f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu$$

Доказательство. Рассмотрим $g_n = f_n - f_{n-1}, g_1 = f_1$. Применяя предыдущее утвеждение для неотрицательной измеримой функции g_n получим, что $\exists\psi_{nm}$ – последовательность простых неотрицательных функций, сходящаяся к g_n.

Определим $F_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \psi_{nm}$. Заметим, что

$$F_{m+1} - F_m = \sum_{n=1}^{m+1} \psi_{n(m+1)} - \sum_{n=1}^{m} = \sum_{n=1}^{m} (\psi_{n(m+1)} - \psi_{nm}) + \psi_{(n+1)(m+1)} \geqslant 0; \; F_m \leqslant \sum_{n=1}^{m} g_n = f_m \leqslant f$$

Заметим, что

$$\exists N: \lim_{m\to\infty} F_m \geqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \psi_{nm} = \sum_{n=1}^{N} \lim_{m\to\infty} \psi_{nm} = \sum_{n=1}^{N} g_n = f_N$$

Значит $\lim F_m \geqslant f$, но $F_m \leqslant f$, тогда $f = \lim_{m\to\infty} F_m$

F_m - простые функции, значит

$$\int_E f(x)d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_E F_m(x)d\mu$$

С другой стороны, для любого m:

$$\int_E F_m(x)d\mu \leqslant \int_E f_n(x)d\mu \leqslant \int_E f(x)d\mu$$

□

Следствие. *Пусть $\{f_n\}$ - неубывающая последовательность интегрируемых на E функций, $\int_E f_n(x)d\mu \leqslant K$.*

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ – интегрируема на E и

$$\int_E f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu$$

Лемма 23.1. *Лемма Фату:*

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность неотрицательных измеримых функций, $f_n \to f$ – измерима, тогда

$$\int_E f(x)d\mu \leqslant \underline{\lim}_n \int_E f_n(x)d\mu$$

Доказательство. Пусть $\varphi_n = \inf\limits_{k\geqslant n} f_k$, φ_n - возрастающая последовательность. Заметим, что $\psi_n \leqslant f_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ на $E_1 = \{x \in E | f_n(x) \to f(x)\}$

$$\int_E f(x)d\mu = \int_{E_1} f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_1} \varphi_n(x)d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{E_1} \varphi_n(x)d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{E_1} f_n(x)d\mu$$

□

Теорема 23.3. *Теорема Лебега:*

Пусть $\{f_n\}$ – последовательность измеримых функций $f_n \to f$ – измерима, F интегрируема на E и $|f_n| \leqslant F$ на E. Тогда f интегрируема на E и

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu = \int_E f(x)d\mu$$

Доказательство. Заметим, что все f_n интегрируемы, так как ограничены по модулю интегрируемой функцией. Определим $\varphi_n = F + f_n, \psi_n = F - f_n$.

$$\int_E (F(x) - f(x))d\mu \leqslant \underline{\lim}_n \int_E (F(x) - f_n(x))d\mu = \int_E F(x)d\mu - \overline{\lim}_n \int_E f_n(x)d\mu$$

$$\int_E F(x)d\mu + \int_E f(x)d\mu \leqslant \int_E F(x)d\mu + \underline{\lim}_n \int_E f_n(x)d\mu$$

$$\overline{\lim}_n \int_E f_n(x)d\mu \leqslant \int_E f_n(x)d\mu \leqslant \underline{\lim}_n \int_E f_n(x)d\mu$$

□

Следствие. *Теорема Лебега верна для сходимости по мере*

Доказательство. Предположим, что теорема Лебега неверна, то есть существует подпоследовательность интегралов, которая не сходится к интегралу предела.

По теореме Рисса у соответствующей подпоследовательности функций существует подподпоследовательность, сходящаяся к пределу всей последовательности функций почти всюду, значит, по теореме Лебега интегралы подподпоследовательности сходятся к интегралу предела – противоречие. □