

Содержание

1	Вероятностное пространство, как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость.	3
2	Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.	3
3	Геометрические вероятности. Задача "о встрече".	4
4	Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.	5
5	Независимость событий, виды и взаимосвязь	6
6	Случайные величины. Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства.	6
7	Схема испытаний Бернулли. Математическая модель, теорема Пуассона.	10
8	Неравенство Маркова и Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема (б/д).	11
9	Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры). Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.	12
10	Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и её сигма-аддитивность	16
11	Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма-аддитивности при продолжении меры. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых по Лебегу множеств.	18
12	Структура измеримых множеств. Теорема Каратеодори.	21
13	Полнота и непрерывность мер. Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности	23
14	Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и её сигма-аддитивность	24
15	Сигма-конечные меры	25
16	Неизмеримые множества	26
17	Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.	27

18 Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией 28

1 Вероятностное пространство, как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость.

Предмет исследования теории вероятностей - случайный эксперимент, он должен удовлетворять трём требованиям:

1. Повторяемость - должна быть возможность повторить этот эксперимент в тех же условиях много раз
2. Отсутствие детерминистической регулярности - у эксперимента должно быть несколько исходов
3. Статистическая устойчивость частот - если исследуем частоты события в двух разных сериях (серии экспериментов предполагают достаточно большое количество повторений), то получившиеся частоты должны быть близки.

Определение 1.1. Вероятностным пространством называется тройка (Ω, \mathcal{F}, p) , где:

- Ω - пространство элементарных исходов
- \mathcal{F} - множество событий
- p - вероятностная мера

Можно сказать, что вероятность - идеализированное понятие частоты.

$p : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $p(\Omega) = 1$
2. $\forall A, B \in \mathcal{F} : p(A \sqcup B) = p(A) + p(B)$

2 Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.

Дискретное вероятностное пространство

Определение 2.1. Дискретной вероятностной моделью называется математическая модель, в которой Ω не более, чем счётно. В этом случае $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

Классическая вероятность

Классическая теория вероятностей занимается математическими моделями дискретной теории вероятностей, в которой элементарные исходы равновероятны.

Упражнение. Пусть $\forall \omega \in \Omega : p(\omega) = c$. Когда $|\Omega| < +\infty$.

$$1 = p(\Omega) = p\left(\bigsqcup_{\omega \in \Omega} \omega\right) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = c|\Omega|$$

Получили, что $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, а значит $\forall A \in \mathcal{F} : p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Докажем, что в классической теории вероятностей не может быть счётной Ω . Возьмём произвольное конечное $B \in \mathcal{F}$. Тогда

$$1 = p(\Omega) \geq p\left(\bigsqcup_{\omega \in B} \omega\right) = \sum_{\omega \in B} p(\omega) = c|B|$$

Так как B можно выбрать сколь угодно большое, то получаем противоречие с тем, что $c|B| \leq 1$.

Урновые схемы

В урне находится M белых шаров $(1, \dots, M)$ и $N - M$ чёрных шаров $(M + 1, N)$. Вытаскиваем n шаров.

1. С возвращением, с порядком:

$$\omega = (i_1, \dots, i_n), |\Omega| = N^n$$

2. Без возвращения, с порядком:

$$\omega = (i_1, \dots, i_n), |\Omega| = A_N^n$$

3. С возвращением, без порядка:

$$\omega = (j_1, \dots, j_n), j_i - \text{количество появлений } i\text{-го шара.}$$

$$|\Omega| = C_{N+n-1}^n$$

4. Без возвращения, без порядка:

$$\omega = \{i_1, \dots, i_n\}, |\Omega| = C_N^n$$

3 Геометрические вероятности. Задача "о встрече".

Определение 3.1. Геометрическая вероятность. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Упражнение. Староста группы заметил, что семинарист приходит на занятия со случайным опозданием в пределах 15 минут. При этом семинарист не пускает в аудиторию студентов, которые пришли после него позднее, чем на 5 минут. Староста же решил опоздать на семинар, но выбрал границу случайного опоздания всего в 10 минут. Также он решил ждать семинариста не более чем 10 минут после своего прихода, а если его не будет - уйти. Какова вероятность того, что староста всё же посетит семинар?

4 Условная вероятность. Формулы полной вероятности и Байеса.

Определение 4.1. Интуитивно, условная вероятность - вероятность того, что событие A произойдёт при условии события B . Это значит, что мы теперь знаем, что событие B произошло, и хотим в новых условиях посчитать вероятность того, что произойдёт событие A .

На самом деле, это всё та же случайная вероятность, только теперь она случайна на немного другом множестве исходов (а именно, на множестве, когда произошло событие B , все остальные исходы нам недоступны).

Если брать совсем классическую модель, то $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Определение 4.2. Формально, условная вероятность (в дискретной модели) события A относительно события B , если $P(B) > 0$ определяется, как $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Определение 4.3. Разбиением называется такая (конечная или счётная) система событий $\{B_1, B_2, \dots\}$, что для любых различных i, j выполнено $B_i \cap B_j = \emptyset$ и $\bigcup B_i = \Omega$

Лемма 4.1. Пусть имеется разбиение $\{B_1, B_2, \dots\}$ с $P(B_i) > 0$. Тогда для любого события A верна следующая формула (**Формула полной вероятности**):

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

Доказательство.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_i B_i)) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

□

Следствие. Формула Байеса

$$P(B_n|A) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$

Пример. Пусть, в зависимости от того, насколько студент сдаёт сессию, родители могут оплатить ему путешествие. Чем хуже студент сессию сдаёт, тем меньше вероятность того, что ему могут оплатить поездку.

И вот, мы хотим узнать, какова вероятность того, что студент на текущей сессии закрылся на отлично, если мы знаем, что он-таки отправился в путешествие.

Замечание. Если A и B - множества, то запись AB будем понимать, как $A \cap B$

Лемма 4.2. Формула умножения вероятностей

Если $P(A_1 \dots A_n) \neq 0$, то её можно вычислить по формуле $P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A_1 \dots A_n) &= P(A_1) \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} \dots \frac{P(A_1 \dots A_n)}{P(A_1 \dots A_{n-1})} = \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) \end{aligned}$$

Все знаменатели в промежуточной записи отличны от нуля, так как они не меньше, чем $P(A_1 \dots A_n) > 0$. □

5 Независимость событий, виды и взаимосвязь

Определение 5.1. События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Откуда взялось определение: идейно, хотим, чтобы событие B никак не влияло на наступление события A , то есть хотим, чтобы $P(A|B) = P(A)$. Если расписать $P(A|B)$, получим $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, но такой формат записи чуть хуже - тут мы запрещаем события нулевой вероятности, а, вообще говоря, можно считать, что они независимы со всеми, и их тоже надо учитывать. А ещё мы хотим, чтобы формула была симметричной. Поэтому определение такое, как мы написали выше.

Определение 5.2. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ называются попарно независимыми, если $\forall i, j \leq n : A_i, A_j$ - независимы.

Определение 5.3. События A_1, \dots, A_n называются независимыми в совокупности, если для любых i_1, \dots, i_k от 1 до n верно, что $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$

Замечание. Из независимости в совокупности следует попарная независимость, но не наоборот.

Пример. Берём тетраэдр. Пусть первая грань красного цвета, вторая синего, третья зелёного, а четвёртая - всех трёх цветов. Каждая грань выпадает с вероятностью $\frac{1}{4}$, модель классическая.

Рассмотрим события A_r, A_g, A_b - выпадает грань, которая содержит соответствующий цвет.

Тогда мы знаем, что $P(A_r) = P(A_g) = P(A_b) = \frac{1}{2}$, а ещё $P(A_r A_g) = P(A_b A_g) = P(A_r A_b) = \frac{1}{4}$, то есть попарная независимость у нас есть. Но независимости в совокупности здесь нет, потому что $P(A_r A_g A_b) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$.

6 Случайные величины. Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математические ожидания, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства.

Определение 6.1. Пусть дано дискретное вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) . Дискретной случайной величиной ξ называется произвольная функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 6.2. Случайные величины ξ и η независимы, если $\forall x, y \in \mathbb{R}$ независимы события $(\xi = x)$ и $(\eta = y)$. Это определение работает только для дискретного случая.

Определение 6.3. Распределение случайной величины ξ - это значения ξ (а, точнее, $\xi(\Omega)$) и набор вероятностей (p_1, \dots, p_n) таких, что $P(\xi = x_i) = p_i$

Пример. 1. Бернуллиевское $\xi \sim \text{Bern}(p)$, тогда $P(\xi = 0) = 1 - p, P(\xi = 1) = p$

2. Дискретное равномерное распределение $\xi \sim U[a, b] : P(\xi = k) = \frac{1}{b-a+1}$

3. Биномиальное распределение $\xi \sim \text{Bin}(n, p) : P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

4. Геометрическое $\xi \sim \text{Geom}(p) : P(\xi = k) = p(1-p)^k$ - кидает монетку, орёл на k броске, до этого - решка

5. Пуассоновское $\xi \sim \text{Pois}(\lambda) : P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Определение 6.4. Индикатором называется случайная величина, которая принимает значения 0 или 1. Индикатором события A называется случайная величина

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \notin A \\ 1, \omega \in A \end{cases}$$

Определение 6.5. Математическое ожидание (обобщение среднего значения) $E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega)$.

Замечание. Если Ω счётно, то нужно, чтобы ряд абсолютно сходился, потому что мы хотим, чтобы мат. ожидание не зависело от порядка нумерации элементарных исходов.

Свойства:

1. Важная для подсчётов формула: Пусть x_1, \dots, x_n - все возможные значения, принимаемые случайной величиной. Тогда

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi P(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{\xi(\omega)=x_i} P(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x_i)$$

2. $\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi \geq 0$ - слагаемые неотрицательные, поэтому сумма неотрицательная.
3. Линейность: $\forall a \in \mathbb{R} : Ea\xi = aE\xi, E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.

Доказательство. Вообще говоря, складывать мы можем (поточечно) только те случайные величины, которые действуют из одного и того же вероятностного пространства.

$$\begin{aligned} E(\xi + \eta) &= \sum_{\omega \in \Omega} (\xi + \eta)(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi(\omega)P(\omega) + \eta(\omega)P(\omega)) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \eta(\omega)P(\omega) = E\xi + E\eta. \end{aligned}$$

□

4. $\xi \geq \eta \Rightarrow E\xi \geq E\eta$

Доказательство. Следует из предыдущих двух пунктов: $\xi - \eta \geq 0 \Rightarrow E(\xi - \eta) \geq 0$, а $E(\xi - \eta) = E\xi - E\eta \geq 0$ □

5. Неравенство треугольника: $|E\xi| \leq E|\xi|$

Доказательство.

$$\left| \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega) \right| \leq \sum_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)P(\omega)| = \sum_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)| P(\omega) = E|\xi|$$

□

6. Неравенство Коши-Буняковского: $(E\xi\eta)^2 \leq E\xi^2 E\eta^2$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\exists a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0 : a\xi + b\eta \stackrel{\text{п.н.}}{=} 0$

Доказательство. $\forall t \in \mathbb{R} : (t\xi - \eta)^2 \geq 0$

$$E(t\xi - \eta)^2 = E(t^2\xi^2 - 2t\xi\eta + \eta^2) = t^2E\xi^2 - 2tE\xi\eta + E\eta^2 \geq 0$$

Т.к. это квадратный трёхчлен от t , который всегда не меньше 0, то для его дискриминанта верно $(2E\xi\eta)^2 - 4E\xi^2 E\eta^2 \leq 0$. Отсюда следует исходное неравенство.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $t\xi - \eta \stackrel{\text{п.н.}}{=} 0$, что и требовалось доказать. \square

7. $\forall A \in \mathcal{F} : EI_A = P(A)$

Доказательство.

$$EI_A = 1 \cdot P(I_A = 1) + 0 \cdot P(I_A = 0) = P(A)$$

\square

8. Если ξ, η - независимы, то $E\xi\eta = E\xi E\eta$

Доказательство.

$$\begin{aligned} E\xi\eta &= \sum_z P(\xi\eta = z) = \sum_z z \sum_{(x,y): xy=z} P(\xi = x, \eta = y) = \\ &= \sum_z \sum_{(x,y): xy=z} xy P(\xi = x, \eta = y) = \sum_x \sum_y xy P(\xi = x) P(\eta = y) = \\ &= \left(\sum_x x P(\xi = x) \right) \cdot \left(\sum_y y P(\eta = y) \right) = E\xi E\eta \end{aligned}$$

\square

Замечание. Обратное неверно.

Пример.

$$P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{4}, P(\xi = 0) = \frac{1}{2}, \eta = \xi^2$$

$E\xi = 0$, поэтому и $E\xi\eta = E\xi^3 = E\xi = 0, E\xi E\eta = 0$. Требуемое выполняется.

Теперь покажем, что независимости нет. Для этого возьмём $x = y = 0$.

$$P(\xi = x, \eta = y) \neq P(\xi = x)P(\eta = y) : \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

9. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $E\varphi(\xi) = \sum_{x \in \xi(\Omega)} \varphi(x)P(\xi = x)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} E\varphi(\xi) &= \sum_{\omega \in \Omega} \varphi(\xi(\omega))P(\omega) = \sum_{x \in \xi(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega, \xi(\omega)=x} \varphi(x)P(\omega) = \\ &= \sum_x \varphi(x) \sum_{\omega \in \Omega, \xi(\omega)=x} P(\omega) = \sum_x \varphi(x)P(\xi = x) \end{aligned}$$

□

Определение 6.6. Дисперсия $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$

Лемма 6.1. Формула для вычисления дисперсии:

$$E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Определение 6.7. Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$

Определение 6.8. Ковариацией ξ, η называется $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)E(\eta - E\eta)$

Лемма 6.2. Формула для вычисления ковариации:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$$

Свойства ковариации:

1. $\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$
2. Если ξ, η независимы, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$
3. $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$
4. Линейность по первому аргументу, а, значит, и по второму.

Свойства дисперсии:

1. $D\xi \geq 0$, причём $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi \stackrel{\text{н.н.}}{=} \text{const}$

Доказательство.

$$D\xi = 0 \Leftrightarrow E(\xi - E\xi)^2 = 0 \Leftrightarrow \xi - E\xi \stackrel{\text{н.н.}}{=} 0 \Leftrightarrow \xi \stackrel{\text{н.н.}}{=} E\xi \Leftrightarrow \xi \stackrel{\text{н.н.}}{=} \text{const}$$

□

2. $D(a + b\xi) = b^2 D\xi$
3. Если ξ, η независимы, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, естественным образом обобщается на попарно независимые ξ_1, \dots, ξ_n

Доказательство. Докажем сразу для нескольких

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \text{cov}(\xi_1 + \dots + \xi_n, \xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^n D\xi_i$$

□

Определение 6.9. Корреляцией ξ, ν ($\xi \stackrel{\text{п.н.}}{\neq} \text{const}, \eta \stackrel{\text{п.н.}}{\neq} \text{const}$) называется $\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$

Если $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$, то ξ, η называются некоррелированными.

Замечание. Из независимости случайных величин следует их некоррелированность, а в обратную сторону утверждение неверно.

Утверждение 6.1. $|\text{corr}(\xi, \nu)| \leq 1$, причём $\text{corr}(\xi, \eta) = \pm 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Хотим показать, что $|\text{cov}(\xi, \nu)|^2 \leq D\xi D\eta$. Если расписать по определению, то получим просто частный случай неравенства Коши-Буняковского:

$$(E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta))^2 \leq E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2$$

Равенство достигается, если $\exists a, b \in \mathbb{R} : a(\xi - E\xi) + b(\eta - E\eta) \stackrel{\text{п.н.}}{=} 0$. Также мы можем сказать, что $a \neq 0$, а поэтому на него можно поделить.

Осталось обозначить соответствующие куски за искомые коэффициенты и всё получается. \square

7 Схема испытаний Бернулли. Математическая модель, теорема Пуассона.

Упражнение. Подводка к схеме испытаний Бернулли: пусть у нас есть урна, в которой находятся M белых и $N - M$ чёрных шаров. Вытаскиваем последовательно n шаров с возвращением. Найти вероятность конкретной последовательности цветов.

Логично было бы ввести вероятностную модель, в которой элементарным исходом является последовательность цветов (последовательность из 0 и 1). Но она не является классической. Попробуем вывести её из классической.

Будем считать все шары различными (занумеруем их: первые M номеров соответствуют белым, остальные - чёрным). Тогда элементарный исход - последовательность номеров шаров длины n . Тогда $|\Omega| = N^n$. Пусть A - событие соответствующее конкретной последовательности цветов, тогда $|A| = M^{n-k}(N - M)^k$, где k - количество чёрных шаров в искомой последовательности. Если чёрный цвет мы обозначим, как $\alpha_i = 1$, а белый - $\alpha_i = 0$, то $k = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Тогда получаем

$$P(A) = \frac{M^{n-k}(N - M)^k}{N^n} = \left(\frac{M}{N}\right)^{n - \sum_{i=1}^n \alpha_i} \cdot \left(\frac{N - M}{N}\right)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

Если обозначить $\frac{N-M}{N} = p \in (0, 1)$, то $\frac{M}{N} = 1 - p$ и $P(A) = (1 - p)^{n - \sum_{i=1}^n \alpha_i} \cdot p^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$

Схема испытаний Бернулли

Теперь можно ввести модель, которую мы хотели изначально: пусть $\omega = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \{0, 1\}$ - элементарный исход, $p(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \alpha_i}$. Чтобы показать корректность нужно только проверить, что $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Разобьём на сумму по количеству единиц в ω

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{k=0}^n \sum_{\omega: \sum_{i=1}^n \alpha_i = k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

Теорема 7.1. *Теорема Пуассона:*

Пусть есть последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty, p_n \in (0, 1), np_n \rightarrow \lambda$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ - последовательность случайных величин, такая, что $\xi_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$. Тогда

$$P(\xi_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(\xi_n = k) &= C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k} = \\ &= \frac{1}{k!} (np_n)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{(1-p_n)^k} (1-p_n)^n \end{aligned}$$

Так как k - константа, то третий множитель стремится к единице. Из условия на предел np_n следует, что $p_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а значит четвёртый множитель тоже стремится к 1. Второй множитель стремится к λ^k . Рассмотрим последний множитель:

$$(1-p_n)^n = (1-p_n)^{\frac{-np_n}{-p_n}} \rightarrow e^{-\lambda}$$

Таким образом, получаем исходное равенство. □

8 Неравенство Маркова и Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема (б/д).

Лемма 8.1. *Неравенство Маркова:*

Пусть $\xi \geq 0$ - случайная величина, $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Тогда

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{E\xi}{a}$$

Доказательство. Пусть I - индикатор. Тогда

$$\begin{aligned} E\xi &= E(\xi I(\xi \geq a) + \xi I(\xi < a)) = E(\xi I(\xi \geq a)) + E(\xi I(\xi < a)) \geq \\ &= E(\xi I(\xi \geq a)) \geq aE(I(\xi \geq a)) = aP(\xi \geq a) \end{aligned}$$

□

Лемма 8.2. *Неравенство Чебышева:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Доказательство. Подставим в неравенство Маркова случайную величину $(\xi - E\xi)^2$ и $a = \varepsilon^2$. \square

Теорема 8.1. *Закон больших чисел:*

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ - последовательность независимых одинаково распределённых величин и $\exists D\xi_1, a = E\xi_1$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ P\left(\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$$

Доказательство. Подставим в неравенство Чебышева $\xi = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$. Так как величины одинаково распределены, то математическое ожидание всех ξ_i равны и $E\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i = a$

$$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = \frac{D(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{n^2 \varepsilon^2}$$

Так как величины независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Получаем

$$P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) \leq \frac{n D\xi_1}{n^2 \varepsilon^2} \rightarrow 0$$

\square

Замечание. В законе больших чисел можно ослабить условия на ξ_i : заменить независимость на некоррелируемость и одинаковую распределённость на условие $\sum_{i=1}^n D\xi_i = o(n^2)$

Теорема 8.2. *Центральная предельная теорема:*

Пусть $\{\xi_i\}$ - последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\exists D\xi_1, E\xi_1 = a, \sqrt{D\xi_1} = \sigma$. Тогда $\forall x, y \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ выполнено:

$$P\left(x \leq \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - na}{\sqrt{n}\sigma} \leq y\right) \rightarrow \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

9 Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры). Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.

Определение 9.1. Система множеств - это множество множеств.

Определение 9.2. Система множеств S называется полукольцом, если:

1. $\emptyset \in S$
2. $\forall A, B \in S : A \cap B \in S$

$$3. \forall A, A_1 \in S : A_1 \subset A \Rightarrow \exists A_2, \dots, A_n \in S : \bigsqcup_{i=1}^n A_i = A$$

Пример. $\{[a, b] \mid [a, b] \subseteq [A, B]\}$ - полукольцо

Определение 9.3. Система множеств R называется кольцом, если:

1. $R \neq \emptyset$
2. $\forall A, B \in R : A \cap B \in R$
3. $\forall A, B \in R : A \Delta B \in R$

Замечание. Обозначения лектора: S - полукольцо (semiring), R - кольцо (ring).

Определение 9.4. Единицей системы множеств называется множество E из этой системы, чьими подмножествами являются все множества системы.

Пример. $\{[a, b] \mid [a, b] \subset \mathbb{R}\}$ - полукольцо без единицы.

Пример. $\{[a, b] \mid a \leq b; a, b \in [A, B]\}$ - полукольцо с единицей.

Определение 9.5. Кольцо с единицей называется алгеброй.

Утверждение 9.1. Кольцо замкнуто относительно всех теоретико-множественных операций:

Если R -кольцо, то:

1. R - полукольцо
2. $\forall A, B \in R : A \cup B \in R$
3. $\forall A, B \in R : A \setminus B \in R$

Доказательство. 1. R - полукольцо

- $\emptyset = A \Delta A \in R$
- $\forall A, B \in R : A \cap B \in R$
- $A_1 \subset A \Rightarrow A = A_1 \sqcup (A \Delta A_1)$

$$2. A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$$

$$3. A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

□

Утверждение 9.2. Пересечение произвольного числа колец является кольцом.

Доказательство. Пусть $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} R_\alpha = R$, тогда:

1. $\forall \alpha \in \Lambda : \emptyset \in R_\alpha \Rightarrow \emptyset \in R$
2. $A, B \in R \Rightarrow \forall \alpha \in \Lambda : A, B \in R_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in \Lambda : A \cap B \in R_\alpha \Rightarrow A \cap B \in R$ (аналогично для Δ).

□

Следствие. Пересечение произвольного числа алгебр с общей единицей является алгеброй.

Утверждение 9.3. Наименьшее кольцо, содержащее X :

Пусть X - система множеств, тогда существует кольцо $R(X)$, для которого верно следующее:

1. $X \subseteq R(X)$
2. $\forall R_1 \supseteq X : R(X) \subseteq R_1$

То есть, $R(X)$ - минимальное (по включению) кольцо, содержащее X .

Доказательство. Пусть $X = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Определим $M(X) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Множество 2^M является кольцом и $X \subset 2^M$. Следовательно, существуют кольца, содержащие X . Рассмотрим $P = \{R \subseteq 2^M \mid R - \text{кольцо и } X \subset R\}$. Тогда $R(X) = \bigcap_{R \in P} R$. Проверим, что $R(X)$ - искомое:

1. $R(X)$ - кольцо (пересечение колец).
2. $X \subset R(X)$ - следует из построения.
3. $\forall R \supseteq X$, рассмотрим $R_2 = R \cap 2^M$ - это кольцо.

$$X \subset 2^M, R \Rightarrow X \subset R_2 \Rightarrow R_2 \in P \Rightarrow R(X) \subset R_2 \subset R$$

□

Лемма 9.1. Дополнение любого числа множеств в полукольце:

Пусть S - полукольцо, $A, A_1, \dots, A_n \in S : \bigsqcup_{k=1}^n A_k \subseteq A$, тогда:

$$\exists A_{n+1}, \dots, A_m \in S \bigsqcup_{i=1}^m A_i = A$$

Доказательство. Индукция по n :

- $n = 1$: из определения полукольца.
- $(n - 1) \mapsto n$: пусть $A = \left(\bigsqcup_{k=1}^{n-1} A_k \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^q B_j \right)$. Очевидно, что $A_n \subseteq \bigsqcup_{j=1}^q B_j$.

Определим $D_j = A_n \cap B_j$, тогда $D_j \in S$, и $B_j = D_j \sqcup \left(\bigsqcup_{r=1}^{r_j} C_{j,r} \right)$ (По свойству полукольца).

Заметим, что $\bigsqcup_{j=1}^q D_j = A_n$, и

$$A = \left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k \right) \cup \left(\bigsqcup_{j=1}^q \bigsqcup_{r=1}^{r_j} C_{j,r} \right)$$

□

Теорема 9.1. Пусть S - полукольцо, тогда

$$R(S) = K(S) := \left\{ \bigsqcup_{i=1}^n A_i \mid \forall n, \forall A_i \in S \right\}$$

Доказательство. 1. $K(S)$ - кольцо, так как:

- $\emptyset \in S \Rightarrow \emptyset \in K(S)$
- $\forall A, B \in K(S) : A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, B = \bigsqcup_{j=1}^m B_j \Rightarrow A \cap B = \bigsqcup_{i,j} A_i \cap B_j \in K(S)$
- Пусть $C_{ij} = A_i \cap B_j \in S$
 $\forall i, j : C_{ij} \subset A \Rightarrow A = \left(\bigsqcup_{ij} C_{ij} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_r D_r \right)$
 $\forall i, j : C_{ij} \subset B \Rightarrow B = \left(\bigsqcup_{ij} C_{ij} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_k E_k \right)$
 $A \triangle B = \left(\bigsqcup_k E_k \right) \sqcup \left(\bigsqcup_r D_r \right) \in K(S)$

2. $S \subset K(S)$

3. $K(S) \subseteq R(S)$, так как любой элемент $K(S)$ по определению должен лежать в $R(S)$, иначе нарушится замкнутость.

□

Определение 9.6. Система множеств R называется σ -кольцом, если:

1. R - кольцо
2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq R : \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in R$

Определение 9.7. Система множеств R называется δ -кольцом, если:

1. R - кольцо
2. $\forall \{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq R : \bigcap_{i=1}^\infty A_i \in R$

Определение 9.8. σ -алгебра – σ -кольцо с единицей. δ -алгебра – δ -кольцо с единицей.

Утверждение 9.4. σ -кольцо является δ -кольцом; δ -алгебра является σ -алгеброй.

Доказательство.

$$\bigcap_{i=1}^\infty A_i = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^\infty (A_1 \setminus A_i)$$

$$\bigcup_{i=1}^\infty A_i = E \setminus \bigcap_{i=1}^\infty (E \setminus A_i)$$

□

Следствие. σ -алгебра является δ -алгеброй.

Пример. Когда δ -кольцо не является σ -кольцом:

Множество ограниченных подмножеств \mathbb{R} является δ -кольцом, но не является σ -кольцом.

Определение 9.9. $\sigma(X)$ - наименьшая σ -алгебра, содержащая X . (Определение аналогично определению $R(X)$).

Определение 9.10. Борелевская σ -алгебра на множестве A - наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые подмножества (в честь Эмиля Бореля).

10 Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и её сигма-аддитивность

Определение 10.1. Пусть S - полукольцо. Функция $m : S \rightarrow [0, +\infty)$ называется конечной мерой на S , если выполняется свойство аддитивности:

$$\forall A, A_1, \dots, A_n \in S \quad \bigsqcup_{i=1}^n A_i = A \Rightarrow m(A) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

Определение 10.2. m называется σ -аддитивной конечной мерой на полукольце S , если:

1. m - конечная мера на S .
2. $\forall A, \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in S \quad \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \Rightarrow m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

Лемма 10.1. Пусть S - полукольцо, и $A_1, \dots, A_n \in S$, тогда $\exists B_1, \dots, B_k \in S : \forall i \quad A_i = \bigsqcup_{k \in \Lambda_i} B_k$

Доказательство. • $n = 1 : B_1 = A_1$

- $(n - 1) \mapsto n$: пусть B_1, \dots, B_q - искомый набор для A_1, \dots, A_{n-1} .

Определим $C_s = B_s \cap A_n$, тогда $A_n = \left(\bigsqcup_{s=1}^q C_s \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{p=1}^m D_p \right)$, где $D_p \in S$.

Далее, $B_s = C_s \cup \left(\bigsqcup_{r=1}^{r_s} B_{s,r} \right)$, и $\{C_s\} \cup \{B_{s,r}\} \cup \{D_p\}$ является искомым набором.

□

Утверждение 10.1. 1. Если $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A$, то

$$m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

2. Если $A \subseteq \bigsqcup_{i=1}^n A_i$, то

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

3. m - σ -аддитивна. Если $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, то

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Доказательство. 1. По определению полукольца набор $\{A_i\}$ можно дополнить до A , а дальше всё очевидно.

2. По ранее доказанной лемме существует такой набор попарно непересекающихся множеств B_1, \dots, B_q , что любое множество из $\{A, A_1, \dots, A_n\}$ представимо как объединение некоторых элементов набора.

Далее,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^n A_i &= \bigsqcup_{i=1}^q B_i \supset A \\ \sum_{i=1}^n m(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \Lambda_i} m(B_j) \geq \sum_{k=1}^q m(B_k) \geq m(A) \end{aligned}$$

3. С помощью предельного перехода предыдущий пункт можно обобщить на бесконечный набор $\{A_i\}$. □

Пример. Промежутки в \mathbb{R} образуют полукольцо, на котором длина промежутка является мерой.

Теорема 10.1. *Длина промежутка – σ -аддитивная мера.*

Доказательство. 1. Пусть $[a, b] = \bigsqcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$ – некоторый промежуток. ($a = a_1, b_1 = a_2, b_2 = a_3, \dots, b_n = b$).

$$\text{Тогда } m([a, b]) = b - a = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^n m([a_i, b_i])$$

2. Пусть $[a, b] = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$ – некоторый промежуток.

Возьмём такой отрезок $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, что $m([\alpha, \beta]) > m([a, b]) - \frac{\varepsilon}{2}$

Определим такие интервалы $(\alpha_i, \beta_i) \supseteq [a_i, b_i]$, что $m(\alpha_i, \beta_i) < m[a_i, b_i] + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

3. Так как $[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$, то существует конечное подпокрытие

$$m[a, b] < m[\alpha, \beta] + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j=1}^k m(\alpha_j, \beta_j) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(\alpha_j, \beta_j) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} m[a_j, b_j] + \varepsilon$$

Устремляя ε к нулю, получаем $m[a, b] \leq \sum_{i=1}^{\infty} m[a_i, b_i]$. Неравенство в другую сторону очевидно из предыдущих утверждений для меры m . □

11 Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма-аддитивности при продолжении меры. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых по Лебегу множеств.

Теорема 11.1. Пусть S - полукольцо и m - мера на S . Тогда $\exists \nu$ - мера на $R(S)$, такая, что $\forall A \in R(S) : m(A) = \nu(A)$. Кроме того, если m σ -аддитивна, то и ν σ -аддитивна.

Доказательство. Пусть $A \in R(S), A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, A_i \in S$. Тогда определим $\nu(A) := \sum_{i=1}^n m(A_i)$ (по-другому определить не можем, то есть мера не более чем единственна).

1. Корректность (независимость от представления A)

Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$. Определим $C_{ij} = A_i \cap B_j \in S$. Тогда $A = \bigsqcup_{ij} C_{ij}$.

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^m m(B_j)$$

2. Аддитивность

Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i; A, A_i \in R(S)$. Тогда $A_i = \bigsqcup_{j=1}^m B_{i,j}, A = \bigsqcup_{ij} B_{i,j}$

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m(B_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i)$$

Неотрицательность очевидна, значит ν - это мера.

3. σ -аддитивность

$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i = \bigsqcup_{j=1}^{l_i} B_{i,j}, A = \bigsqcup_{k=1}^m C_k$. Определим $D_{i,j,k} = B_{i,j} \cap C_k$

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^m m(C_k) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l_i} m(D_{i,j,k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{l_i} m(D_{i,j,k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

В предпоследнем равенстве имеем право поменять знаки суммы, так как ряд сходится абсолютно.

□

Следствие. Теперь мы можем доказать свойства меры на полукольце через переход к мере на кольце.

Определение 11.1. Пусть S - полукольцо с единицей E , m - σ -аддитивная мера на полукольце.

$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in S} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ - внешняя мера, определённая на ЛЮБОМ подмножестве E , обязательно конечна.

Лемма 11.1. Свойства внешней меры:

1. $\mu^*(A) \leq m(E) < +\infty$
2. Пусть ν - продолжение m на $R(S)$. Тогда $\forall A \in R(S) : \mu^*(A) = \nu(A)$

Доказательство.

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, A_i \in S \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i) = \nu(A)$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \nu(A) \leq \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i) \Rightarrow \nu(A) \leq \mu^*(A) \text{ перешли к } \inf$$

□

$$3. A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \forall A, A_i \subset E \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Доказательство. Рассмотрим такое покрытие $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}$, что $\sum_{j=1}^{\infty} m(B_{i,j}) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Тогда $A \subset \bigcup_{i,j} B_{i,j}$, а, значит, $\mu^*(A) \leq \sum_i \sum_j m(B_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$. В силу произвольного выбора ε получаем искомое неравенство при $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Следствие. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$

Доказательство. $A \subset B \cup A \Delta B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B)$. Аналогично записываем включение для B и получаем требуемое. □

Определение 11.2. $A \subset E$ называется измеримым по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0 \exists A_{\varepsilon} \in R(S) : \mu^*(A \Delta A_{\varepsilon}) < \varepsilon$.

\mathcal{M} - множество всех измеримых по Лебегу множеств из 2^E .

Определение 11.3. Лебеговым продолжением m (мерой Лебега) называется $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$, такая что $\forall A \in \mathcal{M} : \mu(A) = \mu^*(A)$

Утверждение 11.1. $R(S) \subset \mathcal{M}$

Доказательство. В качестве A_{ε} можно выписать A и тогда определение будет выполнено. Кроме того, $\forall A \in R(S) : \mu(A) = \nu(A)$ (по второму свойству внешней меры). □

Теорема 11.2. \mathcal{M} - σ -алгебра, μ - σ -аддитивная мера на \mathcal{M} .

Доказательство. 1. \mathcal{M} – алгебра:

$$\emptyset, E \in R(S) \subset \mathcal{M}$$

$$A, B \in \mathcal{M}. \forall \varepsilon > 0 \exists A_{\frac{\varepsilon}{2}}, B_{\frac{\varepsilon}{2}} : \mu^*(A \Delta A_{\frac{\varepsilon}{2}}) < \frac{\varepsilon}{2}, \mu^*(B \Delta B_{\frac{\varepsilon}{2}}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(A \cap B) \Delta (A_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}) \subset (A \Delta A_{\frac{\varepsilon}{2}}) \cup (B \Delta B_{\frac{\varepsilon}{2}})$$

Тогда из свойства 3 внешней меры получаем

$$\mu^*((A \cap B) \Delta (A_{\frac{\varepsilon}{2}} \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}})) \leq \mu^*(A \Delta A_{\frac{\varepsilon}{2}}) + \mu^*(B \Delta B_{\frac{\varepsilon}{2}}) < \varepsilon \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$$

Аналогично получаем $A \Delta B \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}$ – алгебра.

2. μ – мера на \mathcal{M} :

Достаточно показать, что $\forall B, C \in \mathcal{M} : \mu(B \sqcup C) = \mu(B) + \mu(C)$. Обозначим $A = B \sqcup C$. Из третьего свойства внешней меры $\mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C)$. Докажем в обратную сторону.

Так как $B, C \in \mathcal{M}$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S) : \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon, \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$.

$$B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subset (B_\varepsilon \setminus B) \cup (C_\varepsilon \setminus C) \subset (C_\varepsilon \Delta C) \cup (B_\varepsilon \Delta B) \Rightarrow \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \leq$$

$$\leq \mu^*(C_\varepsilon \Delta C) + \mu^*(B_\varepsilon \Delta B) < 2\varepsilon$$

$$A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subset (B \Delta B_\varepsilon) \cup (C \Delta C_\varepsilon) \Rightarrow \mu^*(A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \leq \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) + \mu^*(C \Delta C_\varepsilon) < 2\varepsilon$$

$$|\mu(A) - \mu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)| \leq \mu(A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) < 2\varepsilon \Rightarrow \mu(A) \geq \mu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - 2\varepsilon$$

$$B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S) \Rightarrow \mu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon) - \nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) =$$

$$= \mu(B_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) - \mu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geq \mu(B) + \mu(C) - 4\varepsilon$$

Тогда $\mu(A) \geq \mu(B) + \mu(C) - 4\varepsilon$ и в силу произвольного выбора ε верно: $\mu(A) \geq \mu(B) + \mu(C)$

3. \mathcal{M} – σ -алгебра:

Пусть $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$. Покажем, что $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$. Определим $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$.

$$\text{Тогда } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \Rightarrow A \supset \bigcup_{k=1}^n B_k \Rightarrow \mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n m(B_i) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) - \text{сходится} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \sum_{k=N}^{\infty} m(B_k) < \varepsilon$$

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{N-1} B_k \right) \sqcup \left(\bigcup_{k=N}^{\infty} B_k \right) = C \sqcup D = C \Delta D; \quad \mu^*(D) \leq \sum_{k=N}^{\infty} m(B_k) < \varepsilon$$

$$C \in \mathcal{M} \Rightarrow \exists C_\varepsilon \in R(S) : \mu^*(C \Delta C_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$A \Delta C_\varepsilon = (C \Delta C_\varepsilon) \Delta D \subset (C \Delta C_\varepsilon) \cup D \Rightarrow \mu^*(A \Delta C_\varepsilon) \leq \mu^*(C \Delta C_\varepsilon) + \mu^*(D) < 2\varepsilon \Rightarrow A \in \mathcal{M}$$

4. μ – σ -аддитивна:

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогда $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (из полуаддитивности внешней меры) и $\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ – по свойствам меры на полукольце.

□

Определение 11.4. $\mu_J^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i \in S} \sum_{i=1}^n m(A_i)$ – внешняя мера Жордана. Аналогично

можно определить алгебру (не σ) измеримых по Жордану множеств $\mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}$, меру Жордана.

Теорема 11.3. \mathcal{M}_J – алгебра, μ_J – σ -аддитивная мера на \mathcal{M}_J . $\mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}$ и $\forall A \in \mathcal{M}_J : \mu_J(A) = \mu(A)$.

12 Структура измеримых множеств. Теорема Каратеодори.

Теорема 12.1. О структуре измеримых множеств:

S – полукольцо с единицей E , m – σ -аддитивная мера на S , μ – лебегово продолжение m , \mathcal{M} – множество измеримых множеств.

Тогда

$$\forall A \in \mathcal{M} : A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right) \setminus A_0$$

причём

$$1. A_{ij} \in R(S); \forall i A_{i1} \subseteq A_{i2} \subseteq A_{i3} \subseteq \dots$$

$$2. B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}; B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$$

$$3. A_0 \in \mathcal{M}; \mu(A_0) = 0; A_0 \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \right)$$

Доказательство.

$$\mu(A) = \mu^*(A) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists C_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{nj} \supseteq A : D_{nj} \in S, \sum_{j=1}^{\infty} m(D_{nj}) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$$

$$\mu(A) > \sum_{j=1}^{\infty} m(D_{nj}) - \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_{nj}) - \frac{1}{n} \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_{nj}\right) - \frac{1}{n} = \mu(C_n) - \frac{1}{n}$$

$$\mu(C_n \setminus A) < \frac{1}{n}$$

$$\text{Пусть } B_i = \bigcap_{k=1}^i C_k \Rightarrow B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$$

$$\forall k : A \subset \bigcap_{j=1}^k C_j = B_k; \mu(B_k \setminus A) \leq \mu(C_k \setminus A) < \frac{1}{k}; B_1 \setminus A \supseteq B_2 \setminus A \supseteq B_3 \setminus A \supseteq \dots$$

По полученным свойствам и непрерывности меры:

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i \setminus A) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A)\right) = \mu\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \setminus A\right)$$

Тогда пусть $A_0 = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \setminus A, \mu(A_0) = 0$

$$B_i = \bigcap_{k=1}^i C_k; C_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{kj}; D_{kj} \in S$$

Пусть $A_{ij} = \bigcup_{k=1}^j \bigcap_{l=1}^i D_{lk} \in R(S) \Rightarrow A_{i1} \subseteq A_{i2} \subseteq A_{i3} \subseteq \dots$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^j \bigcap_{l=1}^i D_{lk} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^i D_{lj} = B_i \Rightarrow$$

$$A_0 = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \setminus A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) \setminus A \Rightarrow A_0 \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right)$$

□

Теорема 12.2. Теорема Каратеодори:

Пусть m – σ -конечная мера на полукольце S . Полукольцо необязательно с единицей, если единицы нет, то её можно представить, как $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i; X_i \in S$. Тогда $\exists \sigma$ -конечная "мера" μ на $\sigma(S)$, согласованная с мерой m , то есть $\forall A \in S : m(A) = \mu(A)$.

Замечание. То, что мы обычно называли мерой $m : S \rightarrow [0, +\infty)$ – конечная мера. Но иногда мера $m : S \rightarrow [0, +\infty]$ может принимать бесконечные значения, такую меру мы обозначим, как "мера".

Доказательство. Существование меры μ мы уже доказали. Пример — μ – лебегово продолжение m .

Докажем единственность. Разберём 2 случая:

1. Пусть S – полукольцо с единицей E :

Пусть μ – лебегово продолжение. μ' – другая мера на $\sigma(S)$ согласованная с m .

Так как мы ранее доказывали, что продолжение на полукольце единственное, то: $\forall A \in R(S), \mu(A) = \mu'(A) = \nu(A)$.

$$\forall A \in \sigma(S) \Rightarrow A \in M \Rightarrow A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right) \setminus A_0, \mu(A_0) = 0$$

$$A_{ij} \in R(S) \Rightarrow A_0 = A \setminus (\bigcap \bigcup A_{ij}) \in \sigma(S)$$

Утверждение 12.1. $\mu'(A_0) = 0$

Доказательство. $\mu^*(A_0) = \mu(A_0) = 0 \Rightarrow A_0 \subset \bigcup C_i$, где $C_i \in S : \forall \varepsilon > 0, \sum m(C_i) < \varepsilon$.

Устремив $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем, что $\mu'(A_0) = 0$. □

Мы знаем, что $A_0 \subset \bigcap \bigcup A_{ij}$; $A_0 \sqcup A = \bigcap \bigcup A_{ij}$, но тогда $\mu'(A) + \mu'(A_0) = \mu'(\bigcap \bigcup A_{ij}) = \lim_i \lim_j \mu'(A_{ij})$. Аналогично для μ .

Так как мы знаем, что $\mu(A_0) = \mu'(A_0) = 0$; $\mu(A_{ij}) = \mu'(A_{ij})$, то $\mu(A) = \mu'(A)$

2. Пусть S – полукольцо без единицы:

$$X \notin S, X = \bigsqcup X_i, X_i \in S$$

Рассмотрим $S_i = \{A \cap X_i | A \in S\}$

Утверждение 12.2. $\forall A \in \sigma(S) : (A \cap X_i) \in \sigma(S_i)$

Доказательство. Пусть $F = \{A \in 2^X | \forall i A \cap X_i \in \sigma(S_i)\}$, тогда

(а) F – σ -алгебра с единицей X , потому что:

- Замкнутость относительно пересечения $A \cap X_i \in \sigma(S_i), B \cap X_i \in \sigma(S_i) \Rightarrow (A \cap B) \cap X_i \in \sigma(S_i)$
- Замкнутость относительно бесконечного объединения: $A_1, A_2, \dots \in F \Rightarrow \bigcup A_i \in F$, так как $\forall i A_j \cap X_i \in \sigma(S_i) \Rightarrow \forall i (\bigcup A_j) \cap X_i \in \sigma(S_i)$
- Замкнутость относительно взятия дополнения: Если $A \cap X_i \in \sigma(S_i)$, то $\overline{A} \cap X_i = X_i \setminus (A \cap X_i) \in \sigma(S_i)$
- $X \cap X_i = X_i \in \sigma(S_i) \Rightarrow X \in F$ – единица σ -алгебры F .

(b) $S \subset F$:

$$\forall A \in S A \cap X_i \in S_i \subset \sigma(S_i)$$

Значит $\sigma(S) \subseteq F \Rightarrow \forall A \in \sigma(S) A \cap X_i \in \sigma(S_i)$ □

S_i – полукольцо с единицей $X_i \Rightarrow \forall A \in \sigma(S_i) : \mu(A) = \mu'(A)$

$\forall A \in \sigma(S) : A = \bigsqcup (A \cap X_i) \in \sigma(S_i) \Rightarrow \mu(A \cap X_i) = \mu'(A \cap X_i)$

По σ -аддитивности мер:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(A \cap X_i) = \mu'(A)$$

□

13 Полнота и непрерывность мер. Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности

Определение 13.1. Заданная на кольце R подмножеств некоторого множества X мера μ называется полной, если из того, что $A \in R, \mu(A) = 0$ и $B \subset A \Rightarrow B \in R, \mu(B) = 0$.

Утверждение 13.1. Меры Лебега и Жордана являются полными.

Доказательство. Пусть A измеримо по Лебегу и $\mu(A) = 0$. Так как $B \subset A$, то $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists B_\varepsilon = \emptyset : \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) = 0 < \varepsilon \Rightarrow B \in \mathcal{M}, \mu(B) = 0$.

Доказательство для меры Жордана аналогично. □

Определение 13.2. Пусть на кольце R задана конечная мера μ , и дана последовательность элементов кольца $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, что $A = \bigcap A_i, A_i \in R$.

Если для такой последовательности $\{A_i\}$ верно, что $\mu(A) = \lim_i \mu(A_i)$, то μ называется непрерывной.

Теорема 13.1. Заданная на кольце R мера непрерывна тогда и только тогда, когда она σ -аддитивна.

Доказательство. Пусть μ σ -аддитивна и $A = \bigcap A_i$, где множества A_i вложены и $A, A_1, A_2, \dots \in R$.

Положим $B_i = A_i \setminus A_{i+1}$ при $i \geq 1$. Тогда:

$$A_1 \setminus A = \bigsqcup B_i$$

откуда

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \setminus A) &= \mu(A_1) - \mu(A) = \sum \mu(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) \right) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

то есть $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$

Пусть теперь мера μ непрерывна и $A = \bigsqcup A_n; A, A_1, A_2, \dots \in R$. Положим

$$B_n = \bigsqcup_{i=n}^{\infty} A_i = A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

Тогда $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ и $\bigcap B_n = \emptyset$. Поэтому

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mu(A) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i) \right) = \mu(A) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i)$$

Значит $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. □

14 Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и её сигма-аддитивность

Замечание. Для задания меры нам нужно задать σ -аддитивную меру на полукольце с единицей, дальше продолжаем её до кольца с единицей, а дальше мы можем, используя внешнюю меру, перейти к измеримым множествам. Этот переход и есть лебегово продолжение.

Определение 14.1. Полукольцо $S = \{(a, b] \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}; \mathbb{R} = (-\infty, +\infty]$ - единица.

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; неубывающая, непрерывная справа, ограниченная $\Rightarrow \exists \varphi(-\infty), \varphi(+\infty)$;
Тогда $m(a, b] = \varphi(b) - \varphi(a)$

Теорема 14.1. m – σ -аддитивная мера

Доказательство. m – очевидно, мера; $(a, b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$; $[c, d] \subseteq (a, b] : |\varphi(a) - \varphi(c)| < \varepsilon$; $|\varphi(b) - \varphi(d)| < \varepsilon$. Аналогично находим c_i, d_i $(a_i, b_i] \subseteq (c_i, d_i)$; $|\varphi(c_i) - \varphi(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2^i}$; $|\varphi(d_i) - \varphi(b_i)| < \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Отсюда $[c, d] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i, d_i) \Rightarrow \exists k : [c, d] \subseteq \bigcup_{i=1}^k (c_i, d_i)$

m – мера. Тогда $m(a, b] - 2\varepsilon \leq m[c, d] \leq \sum_{i=1}^k m(c_i, d_i) \leq \sum_{i=1}^k (m(a_i, b_i] + \frac{\varepsilon}{2^i})$.

Итого $m(a, b] \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(a_i, b_i] + 3\varepsilon$. Неравенство в другую сторону следует из свойств меры, значит имеет место равенство. \square

Замечание. Любая мера на полукольце является мерой Лебега-Стилтьеса для некоторого φ .

Определение 14.2. Мера Бореля – классическая мера Лебега на $\mathcal{B}_{a,b} = \{A \cap [a, b] | A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

15 Сигма-конечные меры

Определение 15.1. Пусть S – полукольцо множеств X . $X \notin S$, m – σ -аддитивная мера на S . Если $\exists \{X_i\} \in S : X = \bigcup X_i$, то m – σ -конечная мера.

Утверждение 15.1. $X = \bigsqcup B_i, B_i \in S$

Доказательство. Определим $B_i = X_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} X_j \right)$. Любой элемент $R(S)$ является дизъ-

юнктным объединением элементов полукольца по доказанной теореме, откуда $B_i = \bigsqcup_{j=1}^{l_i} C_{ij}$ \square

Далее будем считать, что $X = \bigsqcup X_i, X_i \in S$.

Определим $S_i = S \cap X_i$. S_i – это σ -алгебра с единицей X_i . Отсюда, существует лебегово продолжение m до σ -аддитивной меры μ_i на σ -алгебре M_i .

Определение 15.2. $A \subset X$ – измеримо, если $\forall i (A \cap X_i)$ – измерима, то есть $(A \cap X_i) \in M_i$.

Тогда можно определить меру:

Определение 15.3.

$$\mu(A) = \sum \mu_i(A \cap X_i)$$

Определение 15.4. μ – лебегово продолжение σ -конечной меры на M .

Замечание. $\mu : M \rightarrow [0, +\infty]$, то есть эта мера не является мерой в классическом определении.

Утверждение 15.2. $\forall A \in S : A \in M, \mu(A) = m(A)$

Доказательство. Для того, чтобы A было измеримым, нужно, чтобы $A \cap X_i \in S$ – очевидно, как пересечение лежащих в S множеств.

$$\mu(A) = \sum \mu_i(A \cap X_i) = \sum m(A \cap X_i) = m(A), \text{ так как } \bigsqcup (A \cap X_i) = A \quad \square$$

Теорема 15.1. μ корректно определена, то есть её определение не зависит от разбиения множества X .

Теорема 15.2. Множество M измеримых подмножеств X – σ -алгебра.

Доказательство. 1. $X \in M$, так как $X = \bigsqcup X_i \in M$

2. $A, B \in M$, тогда $A \cap X_i \in M_i, B \cap X_i \in M_i$, откуда $(A \cap X_i) \cap (B \cap X_i) \in M_i \Rightarrow (A \cap B) \cap X_i \in M_i$

3. Для Δ аналогично

4. $A_1, A_2, \dots \in M$. Тогда $(\bigcup A_i) \cap X_j = \bigcup (A_i \cap X_j) \in M_j \Rightarrow \bigcup A_i \in M$ □

Теорема 15.3. μ на M является σ -аддитивной мерой

Доказательство. $A = \bigsqcup A_i \in M$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_i \mu_i(A \cap X_i) = \sum_i \mu_i(\bigsqcup_j A_j \cap X_i) = \sum_i \sum_j \mu_i(A_j \cap X_i) = \\ &= \sum_j \sum_i \mu_i(A_j \cap X_i) = \sum_j \mu(A_j) \end{aligned}$$

□

16 Неизмеримые множества

Теорема 16.1. Пусть A – измеримое по классической мере Лебега подмножество $[0, 1]$. Тогда существует неизмеримое $B \subset A$

Доказательство. Введём на A отношение эквивалентности на отрезке $[0, 1]$: $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Q}$. Используя аксиому выбора, можем выбрать в каждом классе эквивалентности представителя.

Положим $E = \{x_\alpha\}$ – множество этих представителей.

Занумеруем все рациональные числа в отрезке $[-1, 1]$. $\{r_n\} = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Рассмотрим $E_n = E + r_n$. Множества E_n не пересекаются. Пусть это не так, тогда $\exists x_\alpha + r_\alpha = x_\beta + r_\beta$, тогда $x_\alpha \sim x_\beta$ – противоречие.

Покажем, что $\forall C_n \subset E_n : \lambda(C_n) = 0$:

Пусть $\lambda(C_n) = d > 0, C_m = C_n - r_n + r_m, C_n \subset [0, 1] \Rightarrow \forall m : C_m \in [-1, 2]$.

$$C_m \subset E_m \Rightarrow \bigsqcup C_m \subset \bigsqcup E_m \subseteq [-1, 2] \Rightarrow \infty = \sum \lambda(C_m) \leq 3. \perp$$

$A = \bigsqcup A \cap E_n$, в силу того, что E_n попарно не пересекаются и их объединение содержит отрезок $[0, 1]$, так как $\forall x \in [0, 1] : x = x_\alpha + r_n$.

Положим $F_n = A \cap E_n$. Если какое-то множество F_n неизмеримо по Лебегу, то мы уже победили. Предположим, что все F_n измеримы, тогда в силу того, что $\lambda(A) \neq 0 \exists n : \lambda(F_n) \neq 0$. Противоречие с доказанным. □

17 Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.

Определение 17.1. (X, M) – измеримое пространство, где X – единица, M – σ -алгебра. Элементы M называются измеримыми множествами.

Определение 17.2. Функция $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ измеримая, если $\forall c \in \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}((-\infty, c]) \in M$

Теорема 17.1. Если f – измерима на (X, M) , то $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in M$

Доказательство. Пусть $S = \{A \subset \mathbb{R} | f^{-1}(A) \in M\}$

- $\mathbb{R} \in S$
- $\forall A, B \in S : A \cap B \in S, A \Delta B \in S$ в силу того, что $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$
- $\forall A_1, \dots \in S : \bigcup A_i \in S$, так как $f^{-1}(\bigcup A_i) = \bigcup f^{-1}(A_i)$

Следовательно, S – σ -алгебра, содержащая все полуинтервалы, а значит, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset S$, то есть прообраз любого борелевского множества измерим. \square

Определение 17.3. Борелевская функция – это отображение из $G \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ в \mathbb{R} , для которого верно следующее: $\forall c \in \mathbb{R} : f^{-1}(c, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Замечание. Если f – борелевская функция и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Замечание. Если f – непрерывная функция, определённая на открытом $G \subset \mathbb{R}$, то f – борелевская.

Теорема 17.2. О композиции:

Пусть f – измерима и конечна на (X, M) . $f(x) \subset G \subset \mathbb{R} : G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и g – борелевская, тогда gf – измеримая на (X, M)

Доказательство. $(gf)^{-1}(c, +\infty) = f^{-1}(g^{-1}(c, +\infty))$ – измеримо. \square

Теорема 17.3. Об арифметических операциях:

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые функции, (X, M) – измеримое пространство. Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R} :$

1. $af + b$ – измерима
2. fg – измерима
3. $\frac{f}{g}, g \neq 0$ – измерима

Доказательство. 1. $af, f + c$ – измеримые функции, так как

- $h(y) = ay$ – борелевская
- $h(y) = y + c$ – борелевская

$h(f(x))$ – измеримая по предыдущей теореме.

2. $\{x|f(x) < g(x)\} = \bigcup_n (\{x|f(x) < r_n\} \cap \{x|g(x) > r_n\})$ – измеримое, тогда $\{x|f(x) + g(x) < a\} = \{x|f(x) < a - g(x)\}$ – измеримо

Значит $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ – измерима

3. $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. Положим $h(y) = \frac{1}{y}$. Если $y \neq 0$, то h – непрерывна на области определения, поэтому если g измерима, то и $\frac{1}{g}$ – измерима.

□

Теорема 17.4. *О переходе к пределу:*

$\{f_n\}$ – измеримые функции. $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

1. $\sup f_n, \inf f_n$ – измеримые
2. $\overline{\lim}(f_n(x)), \underline{\lim}(f_n(x))$ – измеримы
3. $E = \{x|\exists \lim(f_n(x))\} \in M$

$g(x) = \lim(f_n(x)), g : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция из $(E, M_E) : M_E = \{A \subset E | A \in M\}$.

Доказательство. 1. $\{x|\sup f_n(x) \leq a\} = \bigcap \{x|f_n(x) \leq a\}$. Для \inf аналогично.

2. $\overline{\lim}(f_n(x)) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k$. Аналогично для $\underline{\lim}$.

3. $\varphi(x) = \overline{\lim}(f_n(x)), \psi(x) = \underline{\lim}(f_n(x))$

$E = \{x|\varphi(x) = \psi(x)\} = X \setminus (\{x|\varphi(x) > \psi(x)\} \cup \{x|\varphi(x) < \psi(x)\})$ – измеримо

$\forall x \in E : \lim(f_n(x)) = \varphi(x); \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \varphi^{-1}|_E(A) = \varphi^{-1}(A) \cap E$

□

18 Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией

Пусть $C_0 = [0, 1], C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \dots, C_n = \bigcup [a_n, b_n] \mapsto C_{n+1} = \bigcup ([a_n, c_n] \cup [d_n, b_n])$, где $c_n = \frac{2a_n+b_n}{3}, d_n = \frac{a_n+2b_n}{3}$

Определение 18.1. Канторово множество C – пересечение всех C_n .

Пользуясь непрерывностью меры и вложенностью C_i , вычислим Лебегову меру:

1. $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$, тогда $\lim(\frac{2}{3})^n = 0$
2. Замкнуто, как пересечение замкнутых
3. Континуально, так как когда мы выкидываем трети от отрезков, мы выкидываем все числа, у которых последовательно первое, второе, третье и далее число в троичной записи соответственно равно единице. А значит, в результате, в множестве Кантора лежат все числа, которые записываются нулями и двойками, значит, имеем континуальное количество.

Построим Канторову лестницу:

Начнём с определения T – множество концов отрезков $[a_n, b_n]$, тогда пусть $\bar{\varphi} : T \rightarrow [0, 1]$:

1. База: $\bar{\varphi}(0) = 0, \bar{\varphi}(1) = 1$
2. $\bar{\varphi}(c) = \bar{\varphi}(d) = \frac{\bar{\varphi}(a) + \bar{\varphi}(b)}{2}$
3. $\bar{\varphi}(x)$ не убывает
4. $\bar{\varphi}(x)$ принимает все значения вида $\frac{k}{2^n}$

Доопределим для остальных точек интервала $[0, 1]$: $\varphi(x) = \sup_{y \leq x, y \in T} \bar{\varphi}(y)$

1. Неубывающая
2. В точках из T : $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$.

Теорема 18.1. 1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$: измеримые по Борелю не совпадают с измеримыми по Лебегу.

2. $\exists f \in C[0, 1]$ и \exists измеримая по Лебегу g : $g(f(x))$ не измерима по Лебегу
3. $\exists A \in \mathcal{M}$: $f^{-1}(A) \notin \mathcal{M}$

Доказательство. Рассмотрим $\psi = \frac{x + \varphi(x)}{2}$, непрерывная и монотонная, а значит и биекция. Обозначим $f = \psi^{-1}$. Тогда:

1. $\lambda(\psi(C_0)) = \frac{1}{2}$
2. $\lambda(\psi(\bar{C})) = \frac{1}{2}\lambda(\bar{C}) = \frac{1}{2}$

Теперь возьмём из образа ψ неизмеримое подмножество Q , $E := f(Q) \subset C \Rightarrow E \in \mathcal{M}_\lambda$. E измеримо (и имеет меру 0), но не борелевское, так как его образ неизмерим.

В качестве g возьмём индикатор E , тогда $g(f(x))$ – индикатор неизмеримого множества Q . □