Содержание

1 Базовые определения

Определение 1.1. Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} := (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$

Определение 1.2. Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй, если

1. $\mathcal{F}$ – алгебра
2. $\forall \{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Определение 1.3. P называется вероятностной мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$, если $P: \mathcal{F} \to [0, 1]$, удовлетворяющая свойствам:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Если $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, то
$$P\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Определение 1.4. Вероятностное пространство – это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

- Ω – множество элементарных исходов
- $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω, элементы $\mathcal{F}$ называются событиями
- P – вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$

Определение 1.5. Система $\mathcal{M}$ подмножеств в Ω называется π-системой, если из того, что $A, B \in \mathcal{M}$ следует, что $A \cap B \in \mathcal{M}$

Определение 1.6. Система $\mathcal{L}$ подмножеств в Ω называется λ-системой, если

1. $\Omega \in \mathcal{L}$
2. $(A, B \in \mathcal{L};\ A \subset B) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}$
3. $(A_n \uparrow A;\ \forall n\ A_n \in \mathcal{L}) \Rightarrow A \in \mathcal{L}$

Теорема 1.1. *Первая теорема о π-λ-системах*

Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω является σ-алгеброй $\Leftrightarrow$ она является π-системой и λ-системой.

Доказательство. $\Rightarrow$ Свойство π-системы и свойство 1) λ-системы выполняются автоматически.

Рассмотрим $\forall A_n \uparrow A;\ \forall n\ A_n \in \mathcal{L}$. Тогда $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{L}$. Следовательно, выполнено свойство 3) λ-системы.

$\forall A, B \in \mathcal{L};\ A \subset B : B \setminus A = B \cap \overline{A}$. Но $\overline{A} \in \mathcal{L}$, следовательно $B \cap \overline{A} \in \mathcal{L}$. То есть выполенно свойство 2) λ-системы.

$\Leftarrow$ Проверим сначала, что $\mathcal{F}$ – алгебра. Свойства $1), 3)$ уже есть. По свойству 2) λ-системы $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, если $A \in \mathcal{F}$. Значит $\mathcal{F}$ – алгебра.

Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}, A_n \in \mathcal{F}$. Рассмотрим $B_n : B_1 = A_1, B_i = A_i \setminus \left(\cup_{k=1}^{i-1} A_k\right)$. Тогда: $\forall n \; B_n \in \mathcal{F}, \forall i \neq j \; B_i \cap B_j = \varnothing$. Рассмотрим $C_n = \sqcup_{m=1}^{n} B_m \in \mathcal{F}$. Тогда $C_n \subset C_{n+1}$ и $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow$ по 3) свойству λ-системы: $C_n \uparrow \sqcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$. $\square$

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – система подмножеств Ω. Тогда существует минимальная (по включению) σ-алгебра (алгебра, π-система, λ-система), обозначаемая $\sigma(\mathcal{M})$ $(\alpha(\mathcal{M}), \pi(\mathcal{M}), \lambda(\mathcal{M}))$, содержащая $\mathcal{M}$.*

Пример.

1. Если $\Omega = \mathbb{R}$, то борелевской σ-алгеброй на $\mathbb{R}$ называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все интервалы

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a;\ b), a < b)$$

2. Если $\Omega = \mathbb{R}^n, n > 1$.

   Борелевской σ-алгеброй в $\mathbb{R}^n$ называется минимальная σ-алгебра, содержащая множества вида $B_1 \times \cdots \times B_n, B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(B_1 \times \cdots \times B_n :\ B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

3. Если $\Omega = \mathbb{R}^\infty$, то есть Ω содержит все счётные последовательности вещественных чисел.

   Для $n \in \mathbb{N}$ и $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ введём циллиндр:

$$F_n(B_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^\infty :\ (x_1, \cdots, x_n) \in B_n\}$$

   Тогда минимальная σ-алгебра, содержащая все циллиндры, называется борелевской в $\mathbb{R}^\infty$, то есть

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(F_n(B_n) :\ n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$$

2 Вторая теорема о π- и λ-системах. Следствия из неё.

Теорема 2.1. *Вторая теорема о π-λ-системах.*

Если $\mathcal{M}$ – это π-система подмножеств в Ω, то $\sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M})$

Доказательство. Заметим, что $\sigma(\mathcal{M})$ – λ-система, содержащая $\mathcal{M} \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) \subset \sigma(\mathcal{M})$.

Проверим, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это σ-алгебра. Раз $\lambda(\mathcal{M})$ – это λ-система, то по (1.1) достаточно проверить, что $\lambda(\mathcal{M})$ – это π-система.

Рассмотрим $\mathcal{M}_1 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \ \forall A \in \mathcal{M}, A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. Заметим, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$. Проверим, что $\mathcal{M}_1$ – это λ-система:

1. $\Omega \in \mathcal{M}_1$ – очевидно

2. Пусть $B, C \in \mathcal{M}_1, C \subset B$, пусть $A \in \mathcal{M}$. Заметим, что $B \setminus C \in \lambda(\mathcal{M})$ и

$$(B \setminus C) \cap A = \overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{(B \cap A)} \setminus \overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{(C \cap A)}$$

   Значит по второму свойству λ-систем $(B \setminus C) \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$

3. Пусть $B_n \uparrow B, B_n \in \mathcal{M}_1, A \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$$\overset{\in\lambda(\mathcal{M})}{B_n \cap A} \uparrow B \cap A$$

   Тогда по третьем свойству λ-систем $B \cap A \in \lambda(\mathcal{M})$. Но $B_n \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow$ по третьему свойству λ-системы получаем, что $B \in \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow B \in \mathcal{M}_1$.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1 \Rightarrow$ в силу минимальности $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_1$. По построению $\mathcal{M}_1 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_1$, то есть $\forall B \in \lambda(\mathcal{M}) \, \forall A \in \mathcal{M} : \ A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})$.

Далее рассмотрим $\mathcal{M}_2 = \{B \in \lambda(\mathcal{M}) : \ \forall A \in \lambda(\mathcal{M}) \ A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. В силу доказанного $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2$. Совершенно аналогично с $\mathcal{M}_1$ проверяем, что $\mathcal{M}_2$ – это λ-система. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}_2$. По построению $\mathcal{M}_2 \subset \lambda(\mathcal{M}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_2 \Rightarrow \lambda(\mathcal{M})$ – это π-система. □

Следствие. *Пусть $\mathcal{M}$ – это π-система на Ω, и $\mathcal{L}$ – это λ-система на Ω и $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Тогда $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}$*

3 Независимость событий и систем событий

Определение 3.1. События A, B независимые, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Определение 3.2. События $A_1, \cdots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если

$$\forall k \leqslant n \, \forall 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n : \, P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Определение 3.3. Пусть $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – системы событий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Они называются независимыми в совокупности, если

$$\forall A_1 \in \mathcal{M}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{M}_n : \, A_1, \cdots, A_n - \text{ независимы в совокупности}$$

Лемма 3.1. *Критерий независимости σ-алгебр.*

Пусть $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – это π-системы событий на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда $\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow \sigma(\mathcal{M}_1), \cdots, \sigma(\mathcal{M}_n)$ – независимы в совокупности.

Доказательство. $\Leftarrow$ очевидно следует из определения независимости систем.

$\Rightarrow$ Докажем только для $n = 2$, для $n > 2$ всё аналогично.

Рассмотрим $\mathcal{L}_1 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_2) : \, A \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}_1\}$. Проверим, что $\mathcal{L}_1$ – это λ-система:

1. $\forall B \in \mathcal{M}_1 : \, \Omega \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow \Omega \in \mathcal{L}_1$

2. Пусть $C \in \mathcal{M}_1$, тогда

$$P((B \setminus A) \cap C) = P((B \cap C) \setminus (A \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap C) = \\ P(C)(P(B) - P(A)) = P(B \setminus A)P(C) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L}_1$$

3. Пусть $A_n \uparrow A, A_n \in \mathcal{L}_1$. По определению σ-алгебры замечаем, что $A \in \sigma(\mathcal{M}_2)$. Пусть $C \in \mathcal{M}_1$. Рассмотрим

$$P(A \cap C) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n \cap C) = P(C) \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P(C)P(A) \Rightarrow A \in \mathcal{L}_1$$

Раз $\mathcal{L}_1$ – это λ-система и $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{L}_1$, по условию, то по (2.1) получим, что $\sigma(\mathcal{M}_2) \subset \mathcal{L}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_2) \perp\!\!\!\perp \mathcal{M}_1$.

Рассмотрим $\mathcal{L}_2 = \{A \in \sigma(\mathcal{M}_1) : \, A \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{M}_2)\}$. Точно так же доказывается, что $\mathcal{L}_2$ – это λ-система, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{L}_2$ по доказанному $\Rightarrow \sigma(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{L}_2 \Rightarrow \sigma(M_1) \perp\!\!\!\perp \sigma(M_2)$ □

Определение 3.4. Пусть $\{M_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – набор систем событий. Он называется независимым в совокупности, если независим в совокупности $\forall$ конечный поднабор.

4 Функция распределения вероятностной меры

Определение 4.1. Функцией распределения вероятностной меры P на $\mathbb{R}$ называется

$$F(x) = P((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$$

Лемма 4.1. *Свойства функции распределения.*

1. $F(x)$ *не убывает*
2. $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
3. $F(x)$ *непрерывна справа*

Доказательство. 1. Пусть $y > x$. Тогда

$$(-\infty, x] \subset (-\infty, y] \Rightarrow F(x) = P((-\infty, x]) \leqslant P((-\infty, y]) = F(y)$$

2. Если $x_n \uparrow +\infty$, то $(-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n \to +\infty}{\to} P(\mathbb{R}) = 1$$

Если $x_n \downarrow -\infty$, то $(-\infty, x_n] \downarrow \varnothing$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n \to +\infty}{\to} P(\varnothing) = 0$$

3. Если $x_n \downarrow x$, то $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$. Тогда в силу непрерывности меры

$$F(x_n) = P((-\infty, x_n]) \overset{n \to +\infty}{\to} P((-\infty, x]) = F(x)$$

□

Определение 4.2. Эквивалентное определение функции распределения.

Функция, удовлетворяющая свойствам $1 - 3$ из предыдущей леммы, называется функцией распределения на P.

Теорема 4.1. *О продолжении меры (б/д)*

Пусть $\mathcal{A}$ *– алгебра подмножеств* Ω*. Пусть* $P_0 : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *с условием,* $P_0(\Omega) = 1$ *и* P_0 *счётно-аддитивна на* $\mathcal{A}$*. Тогда* $\exists!$ *продолжение меры* P_0 *на* $\sigma(A)$

Теорема 4.2. *О взаимной однозначности функции распределения и вероятностной меры.*

Пусть $F(x), x \in \mathbb{R}$ *– функция распределения на* $\mathbb{R}$*. Тогда* $\exists!$ *вероятностная мера* P *на* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, для которой* F *является функцией распределения, то есть*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ F(x) = P((-\infty, x])$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathbb{R}$ алгебру $\mathcal{A}$, состоящую из конечных объединений непересекающихся интервалов:

$$\forall A \in \mathcal{A}: \ A = \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k], \ -\infty \leqslant a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n \leqslant +\infty$$

Зададим на $\mathcal{A}$ меру P_0:

$$\forall A \in \mathcal{A}: \ P_0(A) = \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k))$$

где $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

По построению $P_0(\mathbb{R}) = 1$ и P_0 будет конечно аддитивна на $\mathcal{A}$. Если мы проверим, что P_0 счётно аддитивна на $\mathcal{A}$, то по (4.1) $\exists!$ продолжение P меры P_0 на $\sigma(A) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Это и есть искомая мера P, причём

$$P((-\infty, x]) = P_0((-\infty, x]) = F(x)$$

По теореме о непрерывности вероятностной меры, достаточно проверить, что P_0 непрерывна в нуле.

Пусть $A_n \downarrow \varnothing, \forall n: \ A_n \in \mathcal{A}$. Хотим проверить, что $P(A_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$. В силу $2-3$ свойств функции распределения:

$$\forall A \in \mathcal{A} \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists B \in \mathcal{A}: \ \mathrm{cl} \ B \subset A, P_0(A \setminus B) \leqslant \varepsilon$$

Если $(a, b]$ является частью A, то для некоторого $a' > a$ будет выполнено

$$P_0((a, a']) \leqslant \varepsilon$$

Зафиксировав $\forall \varepsilon > 0$, выберем $B_n \forall n \in \mathbb{N}: B_n \in \mathcal{A}$, такой что $\mathrm{cl} \ B_n \subset A_n$ и $P_0(A_n \backslash B_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Пусть сначала все A_n лежат внутри $[-N, N]$. Заметим, что раз $\cap_n A_n = \varnothing$, то $\cap_n \mathrm{cl} \ B_n = \varnothing$. В силу компактности $\exists n_0$:

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} \mathrm{cl} \ B_n = \varnothing \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n = \varnothing$$

Рассмотрим

$$P_0(A_{n_0}) = P_0 \left(A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=1}^{n_0} B_n \right) \leqslant P_0 \left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_{n_0} \setminus B_n) \right) \leqslant P_0 \left(\bigcup_{n=1}^{n_0} (A_n \setminus B_n) \right) \leqslant$$
$$\sum_{n=1}^{n_0} P_0(A_n \setminus B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \varepsilon \Rightarrow P(A_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Если A бесконечно, то возьмём N, такой что $P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим $A'_n = A_n \cap (-N, N]$. Тогда по доказанному выше $P'_0(A'_n) \overset{n\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow$ с некоторого n_0:

$$P_0(A_n) \leqslant P(A'_n) + P_0(\mathbb{R} \setminus (-N, N]) \leqslant \varepsilon$$

$\square$

5 Классификация вероятностных мер

Определение 5.1. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Она называется дискретной, если $\exists$ не более чем счётное множество $X \subset \mathbb{R}$, такое, что

$$P(\mathbb{R} \setminus X) = 0, \forall x \in X: \; P(\{x\}) > 0$$

Говорят, что P сосредоточена на X.

Пусть $X = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$, обозначим $p_k = P(\{x_k\})$. Набор $(p_1, p_2, \cdots)$ образует распределение вероятностей на X.

Как выглядит функция распределения?

$$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} P(\{x_k\})$$

Она меняется скачками в точках x_k, в них значение увеличивается на

$$p_k = P(\{x_k\}) = \Delta F(x_k) = F(x_k) - F(x_k - 0)$$

Пример. Дискретные распределения:

1. Константы.
$$X = \{x\}; \; P(\{x\}) = 1$$

2. Распределение Бернулли, $\mathrm{Bern}(p)$, $p \in [0, 1]$:
$$X = \{0, 1\}; \; p_0 = 1 - p, p_1 = p$$

3. Биномиальное распределение, $\mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$:
$$X = \{0, \cdots, n\}; \; p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}; \; k = \overline{0, n}$$

4. Пуассоновское распределение, $\mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$
$$X = \mathbb{Z}_+; \; p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{Z}_+$$

Определение 5.2. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а F – её функция распределения. Она называется абсолютно непрерывной, если $\exists p(t) \geqslant 0$, такая что

$$\int_{\mathbb{R}} p(t) dt = 1; \; \forall x \in \mathbb{R}: \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t) dt$$

В этом случае $p(t)$ называется плотностью функции распределения F и меры P.

Замечание. Интегралы понимаются, как интегралы Лебега.

Пример. 1. Равномерное распределение, $\mathrm{U}(a, b)$, $a < b$

$$p(x) = \frac{1}{b - a} \cdot \mathbb{I}_{\{x \in [a, b]\}}(x); \; F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x - a}{b - a}, x \in [a, b] \\ 1, x > b \end{cases}$$

2. Нормальное (гауссовское) распределение, $\mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};\ \Phi_{a,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

3. Экспоненциальное (показательное) распределение, $\mathrm{Exp}(\alpha)$, $\alpha > 0$.

$$p(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x);\ F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, x > 0 \end{cases}$$

4. Гамма-распределение, $\Gamma(\alpha, \lambda), \alpha, \lambda > 0$

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x);\ \Gamma(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \lambda > 0$$

5. Распределение Коши, $K(\sigma), \sigma > 0$

$$p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)};\ F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sigma}$$

Определение 5.3. Пусть F – функция распределения на $\mathbb{R}$.

Точка x является точкой роста F, если

$$\forall \varepsilon > 0:\ F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$$

Определение 5.4. Функция распределения F (и соответствующая ей мера P) называется сингулярной, если F непрерывна и множество её точек роста имеет лебегову норму нуль.

Пример. Канторова лестница.

Мера P сосредоточена на канторовом множестве, оно не счётное, но каждый элемент имеет ненулевую меру.

Теорема 5.1. *Лебега о разложении. (б/д)*

Пусть F – функция распределения на $\mathbb{R}$. Тогда $\exists$ разложение вида

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x), \alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

причём F_1 – дискретная функция распределения, F_2 – абсолютно непрерывная, F_3 – сингулярная.

6 Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

Определение 6.1. Функцией распределения вероятностной меры P называется $F(x_1, \cdots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, где

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n])$$

Замечание. 1. $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

2. $\vec{x} \geqslant \vec{y}$, если

$$\forall i = \overline{1, n}: \ x_i \geqslant y_i$$

3. $(-\infty, \vec{x}] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$

4. $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, если

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \vec{x}_{(n)} \geqslant \vec{x}_{(n+1)} \geqslant \vec{x}$$

причём $\lim_n \vec{x}_{(n)} = \vec{x}$

Лемма 6.1. *Свойства многомерной функции распределения.*

Пусть $F(\vec{x})$ – функция распределения вероятностной меры P на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Тогда

1. *Если $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, то*

$$\lim_{n \to +\infty} F(\vec{x}_{(n)}) = F(\vec{x})$$

то есть непрерывна справа по любой координате

2. *Если $x_i \to +\infty, \forall i = \overline{1, n}$, то*

$$F(\vec{x}) \to 1$$

Если $x_i \to -\infty, \exists i = \overline{1, n}$, то

$$F(\vec{x}) \to 0$$

3. *Для $\forall i = \overline{1, n}$ и $a_i < b_i$ введём оператор $\triangle^i_{a_i, b_i}$, который действует следующим образом:*

$$\triangle^i_{a_i, b_i} F(\vec{x}) = F(x_1, \cdots, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) - F(x_1, \cdots, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

Тогда

$$\forall a_1 < b_1, \cdots, a_n < b_n: \ \triangle^1_{a_1, b_1} \circ \cdots \circ \triangle^n_{a_n, b_n} F(\vec{x}) \geqslant 0$$

Доказательство. 1. Если $\vec{x}_{(n)} \downarrow \vec{x}$, то $(-\infty, \vec{x}_{(n)}] \downarrow (-\infty, \vec{x}]$. Тогда по непрерывности меры

$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n \to +\infty}{\to} P((-\infty, \vec{x}]) = F(\vec{x})$$

2. Если $\vec{x} \uparrow (+\infty, \cdots, +\infty)$, то $(-\infty, \vec{x}] \uparrow \mathbb{R}^n$. Тогда по непрерывности меры

$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n \to +\infty}{\to} P(\mathbb{R}^n) = 1$$

Если $x_i \downarrow -\infty$, то $(-\infty, \vec{x}] \downarrow \varnothing$. Тогда в силу непрерывности меры

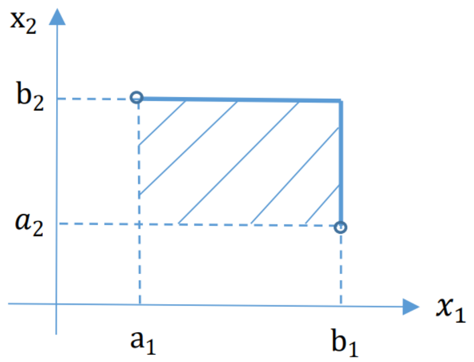
$$F(\vec{x}_{(n)}) = P((-\infty, \vec{x}_{(n)}]) \overset{n \to +\infty}{\to} P(\varnothing) = 0$$

3. Проверим, например для $n = 2$, что

$$\triangle^1_{a_1,b_1} \circ \cdots \circ \triangle^n_{a_n,b_n} F(\vec{x}) = P((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n])$$

Действительно:

$$\triangle^1_{a_1,b_1} \circ \triangle^2_{a_2,b_2} F(x_1, x_2) = \triangle^1_{a_1,b_1}(F(x_1, b_2) - F(x_1, a_2)) =$$
$$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) = P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) \geqslant 0$$



В общем случае достаточно заметить, что

$$\triangle^i_{a_i,b_i} P(B_1 \times \cdots \times B_{i-1} \times (-\infty, x_i] \times \cdots \times B_n) = P(B_1 \times \cdots \times (a_i, b_i] \times \cdots \times B_n)$$

□

Теорема 6.1. *О построении вероятностной меры на* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *по функции распределения (б/д).*

Пусть $F(\vec{x})$ *удовлетворяет всем свойствам из предыдущей леммы. Тогда* $\exists!$ *вероятностная мера на* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*, для которой* F *является функцией распределения.*

Определение 6.2. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$P_n(B) = P(F_n(B))$$

где $F_n(B) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots) : (x_1 \ \cdots, x_n) \in B\}$ – циллиндр с основанием B.

Тогда P_n будет вероятностной мерой в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, $\forall n : \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$P_n(B) = P_{n+1}(B \times \mathbb{R})$$

Это свойство согласованности.

Теорема 6.2. *Колмогорова о мерах в* $\mathbb{R}^\infty$ *(б/д).*

Пусть $P_1, P_2, \cdots$ *– последовательность вероятностных мер в* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \cdots$*, обладающая свойством согласованности. Тогда* $\exists!$ *вероятностная мера* P *на* $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$*, такая что*

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \ P_n(B) = P(F_n(B))$$

7 Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, а $(E, \mathcal{E})$ – измеримое пространство.

Определение 7.1. Отображение $X : \Omega \to E$ называтся случайным элементом, если оно измеримо, то есть

$$\forall B \in \mathcal{E} : \ X^{-1}(B) = \{\omega : \ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

Определение 7.2. Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, то случайный элемент называется случайной величиной.

Определение 7.3. Если $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, то случайный элемент называется случайным вектором.

Лемма 7.1. *Критерий измеримости отображения.*

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$, так чтобы $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E}$. Тогда $X : \Omega \to E$ является случайным элементом $\Leftrightarrow$

$$\forall B \in \mathcal{M} : \ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Рассмотрим

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{E} : \ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

Легко видеть, что $\mathcal{D}$ – это σ-алгебра, так как $\mathcal{E}$ – σ-алгебра, а прообраз сохраняет теоретико-множественные операции.

По условию $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ в силу минимальности. $\square$

Следствие. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *– случайная величина*
2. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\{\omega : \ X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$\{\omega : \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}$$

Доказательство. Применяем лемму для $\mathcal{M} = \{(-\infty, x), x \in \mathbb{R}\}$ или $\mathcal{M} = \{(-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$. В обоих случаях $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\square$

Следствие. $X := (X_1, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *– случайный вектор* $\Leftrightarrow$

$$\forall i = \overline{1, n} : \ X_i - \text{ случайная величина}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$X_i^{-1}(B) = X^{-1}(\mathbb{R} \times \cdots \times \overset{i}{B} \times \cdots \times \mathbb{R}) \in \mathcal{F}$$

Это верно, так как X – случайный вектор и

$$\mathbb{R} \times \cdots \times \overset{i}{B} \times \cdots \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$\Leftarrow$ Рассмотрим $\mathcal{M} = \{B_1 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Тогда $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ и проверим условие леммы:

$$X^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n) = \overset{\in \mathcal{F}}{X_1^{-1}(B_1)} \cap \dots \cap \overset{\in \mathcal{F}}{X_n^{-1}(B_n)} \in \mathcal{F}$$

так как $\forall i = \overline{1, n} :\ X_i$ – случайная величина.

Значит по предыдущей лемме $\Rightarrow X$ – случайный вектор. $\square$

8 Характеристики случайной величины и случайного вектора

Определение 8.1. Распределением случайной величины (вектора) ξ называется вероятностная мера P_ξ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, определённая по правилу:

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ (\mathbb{R}^n)$$

Определение 8.2. Функцией распределения случайной величины ξ называется

$$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x) = P_\xi((-\infty, x])$$

Замечание.

$$P(\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2) := P(\{\xi_1 \leqslant x_1\} \cap \{\xi_2 \leqslant x_2\})$$

Определение 8.3. Если $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ – случайный вектор, то его функцией распределения называется

$$F_\xi(x_1, \cdots, x_n) = P_\xi((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \cdots, \xi_n \leqslant x_n)$$

Определение 8.4. Случайная величина является

- Дискретной, если таково её распределение
- Абсолютно-непрерывной, если таково её распределение

  В этом случае ξ имеет плотность $p_\xi(t) \geqslant 0$:

  $$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t) dt$$

- Сингулярной, если таково её распределение

Определение 8.5. Случайная величина ξ называется простой, если она принимает конечное число значений. В этом случае ξ имеет вид:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{I}_{A_k}$$

где $x_1, \cdots, x_n$ – различные числа, $A_1, \cdots, A_n$ – разбиение Ω.

Определение 8.6. Пусть ξ – случайная величина (вектор) на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Сигма-алгеброй, порождённой ξ, называется

$$\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B) :\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\ (\mathbb{R}^n)$$

Это — наименьшая сигма-алгебра на пространстве Ω, относительно которой случайная величина ξ всё ещё остаётся измеримой. Заметим, что $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$.

Определение 8.7. Случайная величина (вектор) η является $\mathcal{F}_\xi$-измеримое, если $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$

Определение 8.8. Если ξ – это случайная величина, то положим

$$\xi^+ := \max(\xi, 0); \quad \xi^- := \max(-\xi, 0)$$

Тогда, $\xi = \xi^+ - \xi^-$

Определение 8.9. Функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется борелевской, если прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \varphi^{-1}(B) = \{x : \varphi(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

Лемма 8.1. *η является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой $\Leftrightarrow \exists$ борелевская функция φ, такая что $\eta = \varphi(\xi)$.*

Доказательство. $\Leftrightarrow$ Пусть $\eta = \varphi(\xi)$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\{\eta \in B\} = \{\xi \in \overset{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}{\varphi^{-1}(B)}\} \in \mathcal{F}_\xi \Rightarrow \mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}_\xi$$

□

Теорема 8.1. *О приближении простыми.*

1. *Пусть $\xi \geqslant 0$. Тогда $\exists$ последовательность $\mathcal{F}_\xi$-измеримых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, такая что*
$$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$$

2. *Если ξ – произвольная случайная величина, то $\exists$ последовательность $\mathcal{F}_\xi$ измеримых простых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, такая что*
$$\forall n \in \mathbb{N} : |\xi_n| \leqslant |\xi|, \lim_{n \to +\infty} \xi_n = \xi$$

Доказательство. 1. Предъявим ξ_n в явном виде:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leqslant \xi < \frac{k}{2^n}\}}$$

Легко видеть, что $0 \leqslant \xi_n \leqslant \xi_{n+1}$ и $\xi = \lim_{n \to +\infty} \xi_n$. Кроме того, $\forall n : \xi_n$ – борелевская функция от $\xi \Rightarrow \xi_n$ – по (8.1) это $\mathcal{F}_\xi$-измеримая случайная величина.

2. Приближаем ξ^+ и ξ^- по предыдущему пункту, затем берём разность

□

9 Независимости произвольного набора случайных величин

Определение 9.1. Случайные векторы $\{\xi_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называются независимыми в совокупности, если независимы в совокупности порождённые ими σ-алгебры.

Следствие. *Случайные векторы $\xi_1, \cdots, \xi_n, \xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, i = \overline{1,n}$ независимы в совокупности* $\Leftrightarrow$

$$\forall B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i}) : \ P(\xi_1 \in B_1, \cdots, \xi_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \in B_i)$$

Лемма 9.1. *Критерий независимости в терминах функций распределения*

Случайные величины $\xi_1, \cdots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} : \ P(\xi_1 \leqslant x_1, \cdots, \xi_n \leqslant x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \leqslant x_i)$$

То есть функция распределения вектора распадается в произведение функций распределения компонент.

Доказательство. $\Rightarrow$ очевидно из следствия выше.

$\Leftarrow$ Проверим $\mathcal{M}_j = \{\{\xi_j \leqslant x\} : \ x \in \mathbb{R}\}$ – подходящая π-система. Очевидно, что $\mathcal{M}_j$ – это π-система и $\sigma(\mathcal{M}_j) \subset \mathcal{F}_{\xi_j}$.

Тогда $\forall A \in \sigma(\mathcal{M}_j)$ имеет вид

$$A = \{\xi_j \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Тогда введём

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ \{\xi_j \in B\} \in \sigma(\mathcal{M}_j)\}$$

Тогда $\mathcal{D}$ – это тоже σ-алгебра:

1. $$\{\xi_j \in \mathbb{R}\} = \Omega \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{D}$$

2. $$\{\xi_j \in B_1 \cap B_2\} = \{\xi_j \in B_1\} \cap \{\xi_j \in B_2\} \in \sigma(\mathcal{M}_j) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{D}$$

3. Аналогично
$$B \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{D}$$

4. Аналогично
$$B_i \in \mathcal{D}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{D}$$

По построению все полуинтервалы $(-\infty, x] \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$. Значит, $\sigma(M_j) = \mathcal{F}_{\xi_j}$. Тогда, применяя (3.1), получим требуемое. $\square$

Замечание. То же самое верно и для случайных векторов.

$\xi_1, \cdots, \xi_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n : \ P(\xi_1 \leqslant \vec{x}_1, \cdots, \xi_n \leqslant \vec{x}_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_1 \leqslant \vec{x}_1)$$

Лемма 9.2. *О независимости борелевских функций от независимых случайных величин.*

Пусть $\xi_1, \cdots, \xi_n$ *– независимые случайные векторы,* $\xi_i \in \mathbb{R}^{k_i}, k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,n}$. *Пусть* $f_i : \mathbb{R}^{k_i} \to \mathbb{R}^{m_i}, i = \overline{1,n}$ *– борелевские функции. Положим* $\eta_i = f_i(\xi_i)$. *Тогда* $\eta_1, \cdots, \eta_n$ *– независимые в совокупности.*

Доказательство. $\eta_1, \cdots, \eta_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \cdots, \mathcal{F}_{\eta_n}$ независимы в совокупности.

Но $\mathcal{F}_{\eta_i} \subset \mathcal{F}_{\xi_i} \Rightarrow \mathcal{F}_{\eta_1}, \cdots, \mathcal{F}_{\eta_n}$ независимы как подсистемы в независимых σ-алгебрах. □

Следствие. $[\xi_1, \cdots, \xi_{n_1}], [\xi_{n_1+1}, \cdots, \xi_{n_1+n_2}], \cdots, [\xi_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}, \cdots, \xi_{n_1+\cdots+n_k}]$ *– независимые блоки случайных величин. Пусть* $f_j : \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}, j = \overline{1,k}$ *– борелевские функции. Тогда* $f_1(\xi_1, \cdots, \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \cdots, \xi_{n_1+n_2}), \cdots, f_k(\xi_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}, \cdots, \xi_{n_1+\cdots+n_k})$ *– независимые в совокупности случайные величины.*

Доказательство. Пускай $\eta_1 := (\xi_1, \cdots, \xi_{n_1}), \cdots, \eta_k := (\xi_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}, \cdots, \xi_{n_1+\cdots+n_k})$. По предыдущей лемме $\eta_i, i = \overline{1,k}$ будут независимы в совокупности. □

10 Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями

Теорема 10.1. *О математическом ожидании произведения независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями.*

Пусть ξ, η – независимые случайные величины, $E\xi, E\eta$ – конечные. Тогда $E\xi\eta$ тоже конечно, причём $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$.

Доказательство. Пусть сначала ξ, η – простые случайные величины, то есть

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{I}\{\xi = x_i\};\ \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j \mathbb{I}\{\eta = y_j\}$$

где $x_1, \cdots, x_n$ – значения ξ, а $y_1, \cdots, y_j$ – значения η. Тогда

$$\xi\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \mathbb{I}\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$$

Берём E от обеих частей:

$$E\xi\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j) \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(\xi = x_i) P(\eta = y_j) =$$
$$\left(\sum_{i=1} x_i P(\xi = x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j P(\eta = y_j)\right) = E\xi \cdot E\eta$$

Далее, пусть $\xi, \eta \geqslant 0$ – неотрицательные случайные величины. Тогда рассмотрим последовательности простых случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \{\eta_m, m \in \mathbb{N}\}$, такие что

$$0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi; \quad 0 \leqslant \eta_m \uparrow \eta$$

и $\forall n \in \mathbb{N} :\ \xi_n$ является $\mathcal{F}_\xi$-измеримой, η_n – $\mathcal{F}_\eta$-измеримой.

Следовательно, $0 \leqslant \xi_n\eta_n \uparrow \xi\eta$ и $\forall n \in \mathbb{N} :\ \xi_n \perp\!\!\!\perp \eta_n$. По определению мат. ожидания:

$$E\xi\eta = \lim_{n\to+\infty} E\xi_n\eta_n \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \lim_{n\to+\infty} E\xi_n \cdot \lim_{n\to+\infty} E\eta_n = E\xi \cdot E\eta$$

Теперь пусть ξ, η – произвольные случайные величины. Тогда $\xi^\pm \perp\!\!\!\perp \eta^\pm$, как функции от независимых случайных величин. Причём

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-; \quad (\xi\eta)^- = \xi^+\eta^- + \xi^-\eta^+$$

По определению

$$E\xi\eta = E(\xi\eta)^+ - E(\xi\eta)^- = E\xi^+\eta^+ + E\xi^-\eta^- - E\xi^+\eta^- - E\xi^-\eta^+ \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=}$$
$$E\xi^+ \cdot E\eta^+ + E\xi^- \cdot E\eta^- - E\xi^+ \cdot E\eta^- - E\xi^- \cdot E\eta^+ = (E\xi^+ - E\xi^-)(E\eta^+ - E\eta^-) =$$
$$E\xi \cdot E\eta$$

□

11 Теорема о замене переменных в интеграле Лебега...

Теорема 11.1. *О замене переменных в интеграле Лебега.*

Пусть ξ *– случайный вектор из* $\mathbb{R}^m$ *на* $(\Omega, \mathcal{F}, P), P_\xi$ *– его распределение. Тогда* $\forall g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *– борелевской функции, выполнено*

$$Eg(\xi) = \int_\Omega g(\xi) dP = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx)$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$Eg(\xi) = E\mathbb{I}\{\xi \in A\} = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx)$$

В формуле из утверждения теоремы обе части линейны по g. Равенство верно для индикаторов $\Rightarrow$ верно для простых функций.

Если $g \geqslant 0$, то рассмотрим последовательность простых функций $0 \leqslant g_n \uparrow g$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx) \overset{n \to +\infty}{\longleftarrow} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x) P_\xi(dx) = Eg_n(\xi) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} Eg(\xi)$$

для неотрицательных доказали.

Если g – произвольная функция, то раскладываем $g = g^+ - g^-$ и пользуемся линейностью.

Причём все математические ожидания будут конечны, бесконечны и неопределены одновременно. $\square$

Следствие. *1. Для вычисления* $Eg(\xi)$ *достаточно знать распределение* P_ξ*.*

2. Если распределение ξ, η *совпадают, то* $\forall$ *борелевской функции* $g(x)$ *выполнено*

$$Eg(\xi) = Eg(\eta)$$

3. Если ξ *– случайная величина, то*

$$E\xi = \int_{\mathbb{R}} x P_\xi(dx)$$

Замечание.

$$dF(x) := P(dx)$$

где F – функция распределения вероятностной меры P.

Определение 11.1. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$, μ – σ-конечная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Мера P имеет плотность $p(t) \geqslant 0$ по мере μ, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \; P(B) = \int_B p(t) \mu(dt)$$

Теорема 11.2. *О плотности.*

Пусть случайный вектор $\xi \in \mathbb{R}^m$ *имеет распределение* P_ξ*, и* P_ξ *имеет плотность* $p(t)$ *по* σ*-конечной мере на* $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$*. Тогда* $\forall$ *борелевской функции* $g(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *выполнено*

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) p(x) \mu(dx)$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) = \mathbb{I}_A(x)$, где $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$Eg(\xi) = P(\xi \in A) = P_\xi(A) = \int_A p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

Обе части доказываемого равенства линейны по $g \Rightarrow$ формула верна для простых функций.

Если $g \geqslant 0$, то рассмотрим последовательность простых функций $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$, такую что $0 \leqslant g_n(x) \uparrow g(x)$. Тогда по определению интеграла Лебега:

$$Eg(\xi) = \lim_{n\to+\infty} Eg_n(\xi) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n(x)p(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)p(x)\mu(dx)$$

(по теореме о монотонной сходимости)

Для произвольной g раскладываем $g(x) = g^+ - g^-$ и пользуемся линейностью. □

Следствие. *Пусть ξ – дискретная случайная величина, сосредоточенная на X. Тогда*

$$Eg(\xi) = \sum_{x\in X} g(x)P(\xi = x)$$

Доказательство. Мы знаем, что $p(x) = P_\xi(\{x\}) = P(\xi = x)$. Тогда

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\mu(dx) = \sum_{x\in X} g(x)P(\xi = x)$$

□

Следствие. *Пусть ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$. Тогда*

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx$$

Следствие. *Пусть ξ – случайный вектор из $\mathbb{R}^m$ с плотностью $p(x)$. Тогда*

$$Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} g(\vec{x})p(\vec{x})d\vec{x}$$

12 Прямое произведение вероятностных пространств

Определение 12.1. Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ – два вероятностных пространства. Их прямым произведением называется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

1. $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
2. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(B_1 \times B_2 : \ B_i \in \mathcal{F}_i)$ – σ-алгебра, порождённая прямоугольниками.
3. $P = P_1 \times P_2$ – вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, такая, что $P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1)P_2(B_2)$

Лемма 12.1. *Такая вероятностая мера P существует и единственна.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{A}$ – конечное объединение непересекающихся прямоугольников. Тогда $\mathcal{A}$ – алгебра и $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Определим P на $\mathcal{A}$ по конечной аддитивности. Остаётся проверить, что P – счётно-аддитивна на $\mathcal{A}$.

Пусть $C = \sqcup_i C_i$; $C_i, C \in \mathcal{A}$. Надо проверить, что

$$P(C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i)$$

Достаточно проверить для прямоугольников:

$$C = A \times B, C_i = A_i \times B_i$$

Представим в виде индикаторов:

$$\mathbb{I}_{A \times B}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i \times B_i}(\omega_1, \omega_2)$$

или

$$\mathbb{I}_A(\omega_1) \cdot \mathbb{I}_B(\omega_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}(\omega_1)\mathbb{I}_{B_i}(\omega_2)$$

Зафиксируем $\omega_1 \in \Omega_1$ и возьмём E от обеих частей неравенства в $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$:

$$\mathbb{I}_A(\omega_1)P_2(B_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_i}(\omega_1)P_2(B_i)$$

Теперь берём E в $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$:

$$P_1(A)P_2(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(A_i)P_2(B_i)$$

□

Теорема 12.1. *Фубини (б/д).*

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – это прямое произведение $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$. Пусть случайная величина $\xi : \ \Omega \to \mathbb{R}$ такова, что

$$\int_{\Omega} \xi dP < +\infty$$

Тогда

$$\int_{\Omega_i} \xi(\omega_1, \omega_2) P_i(d\omega_i)$$

конечен почти наверное по мере P_{3-i}, *является* $\mathcal{F}_{3-i}$ *измеримой функцией и, кроме того,*

$$\int_{\Omega} \xi(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_1, d\omega_2) =$$

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \xi(\omega_1, \omega_2) P_2(d\omega_2) \right) P_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} \xi(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) \right) P_2(d\omega_2)$$

13 Совместное распределение...

Утверждение 13.1. *Если случайные величины ξ, η – независимые, то*

$$P_{(\xi,\eta)} = P_\xi \times P_\eta$$

Доказательство.

$$P_{(\xi,\eta)}(B_1 \times B_2) = P((\xi,\eta) \in B_1 \times B_2) = P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} P_\xi(B_1) P_\eta(B_2)$$

□

Лемма 13.1. *О свёртке распределений.*

Пусть ξ, η – это независимые случайные величины с функциями распределения F_ξ, F_η. Тогда $\xi + \eta$ имеет следующую функцию распределения:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} F_\eta(z-x) dF_\xi(x)$$

Доказательство.

$$F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi + \eta \leqslant z) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}\{x + y \leqslant z\} P_{(\xi,\eta)}(dx, dy) \overset{\text{Фубини}}{=}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}\{x + y \leqslant z\} P_\xi(dx) \right) P_\eta(dy) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-y) dF_\eta(y)$$

□

Следствие. *Формула свёртки.*

Пусть $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$ с плотностями p_ξ, p_η. Тогда $\xi + \eta$ тоже имеет плотность, причём

$$p_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} p_\xi(z-x) p_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} p_\eta(z-x) p_\xi(x) dx$$

Доказательство. По лемме о свёртке:

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_\xi(z-x) dF_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{z-x} p_\xi(y) dy \right) p_\eta(x) dx \overset{y' := y + x}{=}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{z} p_\xi(y' - x) dy' \right) p_\eta(x) dx \overset{\text{Фубини}}{=} \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{\mathbb{R}} p_\xi(y' - x) p_\eta(x) dx \right) dy' =$$
$$\int_{-\infty}^{z} p_{\xi+\eta}(y') dy'$$

□

14 Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции

Определение 14.1. Дисперсией случайной величины ξ называется

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

если $E\xi$ конечно.

Определение 14.2. Ковариацией случайных величин ξ, η называется

$$\text{cov }(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

если $E\xi, E\eta$ конечны.

Определение 14.3. ξ и η называются некоррелированными, если

$$\text{cov }(\xi, \eta) = 0$$

Определение 14.4. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ, η называется

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov }(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

если $D\xi, D\eta$ положительная и конечная.

Лемма 14.1. *Свойства дисперсии и ковариации.*

1. *Ковариация билинейна*
2. $\forall c \in \mathbb{R}: \ D(c\xi) = c^2 D(\xi), D(\xi + c) = D(\xi)$
3. *cov* $(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta$. *В частности* $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$
4. *Неравенство Коши-Буняковского:*

   $$|E\xi\eta| \leqslant \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

   причём равенство достигается $\Leftrightarrow \xi, \eta$ *линейно зависимы.*
5. $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$ *и равен 1* $\Leftrightarrow \xi - E\xi, \eta - E\eta$ *линейно зависимы почти наверное*

Доказательство. $1 - 3$ следуют из свойств математического ожидания. 4 было доказано на ОВИТМе.

Для последнего свойства рассмотрим

$$\xi' := \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}, \eta' := \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} \Rightarrow \rho(\xi, \eta) = E\xi'\eta'$$

По неравенству КБ:

$$|\rho(\xi, \eta)| \leqslant \sqrt{E(\xi')^2 E(\eta')^2} = 1$$

Равенство достигается $\Leftrightarrow \xi', \eta'$ линейно зависимы почти наверное. $\square$

Следствие. *Если* $\xi_1, \cdots, \xi_n$ *– попарно некоррелированные случайные величины с конечными дисперсиями, то*

$$D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$$

Доказательство.

$$D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \text{cov }(\xi_1 + \cdots + \xi_n, \xi_1 + \cdots + \xi_n) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \text{cov }(\xi_i, \xi_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \text{cov }(\xi_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i$$

□

Следствие. *Если* $\xi_1, \cdots, \xi_n$ *– независимые случайные величины с конечными дисперсиями, то*

$$D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$$

Доказательство. Независимые $\Rightarrow$ некоррелированные □

Определение 14.5. Пусть $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ – случайный вектор. Тогда $E\xi$ называется вектор из матожиданий компонент:

$$E\xi = (E\xi_1, \cdots, E\xi_n)$$

Определение 14.6. Дисперсией (матрицей ковариаций) вектора ξ называется матрица:

$$D\xi = (\text{cov }(\xi_i, \xi_j);\ i, j = \overline{1, n})$$

Утверждение 14.1. *Матрица ковариаций – симметричная и неотрицательно определённая матрица.*

Доказательство. $\text{cov }(\xi_i, \xi_j) = \text{cov }(\xi_j, \xi_i)$ по определению ковариации $\Rightarrow$ симметричная.

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, возьмём $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle D\xi \cdot \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i,\,j=1}^{n} \text{cov }(\xi_i, \xi_j) x_i x_j = \sum_{i,\,j=1}^{n} \text{cov }(x_i\xi_i, x_j\xi_j) =$$

$$\text{cov } \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j \right) = D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i \right) \geqslant 0$$

□

15 Сходимости случайных величин

Определение 15.1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к случайной величине ξ:

1. С вероятностью 1 (почти наверное), если
$$P\left(\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi\right) = 1$$
Обозначение: $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$

2. По вероятности, если:
$$\forall \varepsilon > 0: \; P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$
Обозначение: $\xi_n \overset{P}{\to} \xi$

3. В среднем порядка $p > 0$ (в L^p), если
$$E|\xi_n - \xi|^p \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$
Обозначение: $\xi_n \overset{L^p}{\to} \xi$

4. По распределению, если $\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывных ограниченных функций выполнено
$$Ef(\xi_n) \overset{n\to+\infty}{\to} Ef(\xi)$$
Обозначение: $\xi_n \overset{d}{\to} \xi$

Теорема 15.1. *Критерий сходимости с вероятностью 1.*
Случайные величины $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi \Leftrightarrow$
$$\forall \varepsilon > 0: \; P\left(\sup_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Доказательство. Рассмотрим
$$A_n^\varepsilon = \bigcup_{k\geqslant n} \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = \{\sup_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\}$$
Тогда
$$\{\xi_n \not\to \xi\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}$$
Значит
$$P(\xi_n \not\to \xi) = 0 \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}: \; P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\forall m \in \mathbb{N}: \; \lim_{n\to+\infty} P\left(A_n^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \; \lim_{n\to+\infty} P(A_n^\varepsilon) = 0$$

□

Теорема 15.2. *О взаимоотношении различных видов сходимостей.*

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
2. $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0$ выполняется:

$$P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant P\left(\sup_{k \geqslant n} |\xi_k - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

в силу критерия сходимости с вероятностью 1.

2. $\forall \varepsilon > 0$ выполняется:

$$P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p \geqslant \varepsilon^p) \overset{\text{н-во Маркова}}{\leqslant} \frac{E|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon^p} \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

3. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольная ограниченная непрерывная функция. Возьмём $\varepsilon > 0$. Пусть $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in \mathbb{R}$. Пусть $N > 0$ таково, что $P(|\xi| > N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. В силу равномерной непрерывности f на отрезках выберем $\delta > 0$, такое, что

$$\forall x \in [-N, N] \, \forall y, |x - y| < \delta : \, |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}$$

Рассмотрим разбиение Ω:

$$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leqslant \delta, |\xi| \leqslant N\}; \quad A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leqslant \delta, |\xi| > N\}; \quad A_3 = \{|\xi_n - \xi| > \delta\}$$

Значит можем оценить

$$|Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leqslant E|f(\xi_n) - f(\xi)| = \sum_{i=1}^{3} E(|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot \mathbb{I}_{A_i})$$

На A_1 выполнено $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow E|f(\xi_n) - f(\xi)|\mathbb{I}_{A_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. На A_2, A_3 выполнено $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leqslant 2M$. Тогда

$$\sum_{i=2}^{3} E|f(\xi_n) - f(\xi)|\mathbb{I}_{A_i} \leqslant 2M(P(A_2) + P(A_3)) \leqslant 2M(P(|\xi| > N) + P(|\xi_n - \xi| > \delta)) \leqslant \varepsilon$$

в силу сходимости по вероятности.

В итоге получили, что

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} |Ef(\xi_n) - Ef(\xi)| \leqslant \varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $Ef(\xi_n) \overset{n \to +\infty}{\to} Ef(\xi)$

□

16 Достаточное условие сходимости с вероятностью...

Лемма 16.1. *Достаточное условие сходимости с вероятностью 1.*

Если

$$\forall\varepsilon > 0: \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) < +\infty$$

то $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$

Доказательство. Рассмотрим

$$P(\sup_{k\geqslant n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon) = P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}\right) \leqslant$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| > \varepsilon) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} P(|\xi_k - \xi| \geqslant \varepsilon) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

В силу стремления остатка сходящегося ряда к нулю.

Тогда по критерию $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$ □

Следствие. *Если* $\xi_n \overset{P}{\to} \xi$*, то* $\exists$ *подпоследовательность* $\{\xi_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$*, такая что*

$$\xi_{n_k} \overset{\text{п.н.}, k\to+\infty}{\to} \xi$$

Доказательство. Выберем n_k так, чтобы $n_k > n_{k-1}$ и

$$P(|\xi_{n_k} - \xi| \geqslant \frac{1}{k}) \leqslant 2^{-k}$$

выбор возможен в силу сходимости по вероятности.

Проверим достаточное условие: пусть $\varepsilon > 0$, выберем $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k} - \xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} P(|\xi_{n_k} - \xi| \geqslant \frac{1}{k}) \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} < +\infty \Rightarrow \xi_{n_k} \overset{\text{п.н.}, k\to+\infty}{\to} \xi$$

□

Теорема 16.1. *УЗБЧ в форме Кантелли.*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– это независимые случайные величины, такие, что*

$$\exists c > 0\, \forall n \in \mathbb{N}: \ E(\xi_n - E\xi_n)^4 \leqslant c$$

Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$*. Тогда*

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \overset{\text{п.н.}, n\to+\infty}{\to} 0$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\forall n \in \mathbb{N}: \ E\xi_n = 0$, иначе рассмотрим

$$\xi_n' = \xi_n - E\xi_n$$

Хотим проверить достаточное условие. Для $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n^4}{n^4} \geqslant \varepsilon^4\right) \overset{\text{н-во Маркова}}{\leqslant} \frac{ES_n^4}{\varepsilon^4 n^4}$$

Но

$$ES_n^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l = \sum_{i=1}^{n} ES_i^4 + 6\sum_{i<j} ES_i^2 ES_j^2$$

По условию $\forall i \in \mathbb{N}:\ ES_i^4 \leqslant c \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}:\ E\xi_i^2 \leqslant \sqrt{E\xi_i^4} \leqslant \sqrt{c} \Rightarrow$

$$ES_n^4 \leqslant n \cdot c + 6 \cdot c \cdot C_n^2 = O(n^2) \Rightarrow \frac{ES_n^4}{\varepsilon^4 n^4} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Значит ряд сходится и работает достаточно условие сходимости с вероятностью 1. □

Замечание. Смысл УЗБЧ.

Теоретическое обоснование принципа устойчивых частот. Пусть

$$\xi_i = \mathbb{I}\{A \text{ произошло в } i\text{-ом эксперименте}\}$$

Тогда частота появления A стремится к:

$$\nu_n(A) = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \overset{\text{п.н.}}{\to} E\xi_1 = P(A)$$

17 Фундаментальность с вероятностью 1

Определение 17.1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна с вероятностью 1, если

$$P(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) = 1$$

Утверждение 17.1. *Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится почти наверное $\Leftrightarrow$ она фундаментальна с вероятностью 1.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$, тогда

$$P(\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}) \geqslant P(\xi_n \to \xi) = 1$$

$\Leftarrow$ Обозначим $A = \{\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ фундаментальна}\}$. Тогда $\forall \omega \in A: \ \{\xi_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ имеет предел $\xi(\omega)$. Положим $\xi(\omega) = 0, \forall \omega \notin A$. Тогда

$$\forall \omega \in \Omega: \ \xi(\omega) = \lim_{n \to +\infty} (\xi_n(\omega) \mathbb{I}_A(\omega))$$

Причём ξ – это случайная величина, как предел случайных величин.
Наконец, $P(\xi_n \to \xi) \geqslant P(A) = 1$ □

Теорема 17.1. *Неравенство Колмогорова.*

Пусть $\xi_1, \cdots, \xi_n$ – независимые случайные величины, $E\xi_k = 0, E\xi_k^2 < +\infty, \forall k = \overline{1, n}$. Обозначим $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0: \ P\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{ES_n^2}{\varepsilon^2}$$

Доказательство. Введём обозначения

$$A := \{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\}; \ A_k := \{|S_k| \geqslant \varepsilon, |S_i| < \varepsilon \ \forall i = \overline{1, k-1}\}$$

Тогда $A = \sqcup_{i=1}^n A_i$. Продолжим рассуждения:

$$ES_n^2 \geqslant E(S_n^2 \cdot \mathbb{I}_A) = \sum_{k=1}^n E(S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n E((S_k + \xi_{k+1} + \cdots + \xi_n)^2 \mathbb{I}_{A_k}) =$$

$$\sum_{k=1}^n \left[ES_k^2 \cdot \mathbb{I}_{A_k} + E\left((\xi_{k+1} + \cdots + \xi_n)^2 \cdot \mathbb{I}_{A_k}\right) + 2E(S_k \cdot \mathbb{I}_{A_k}(\xi_{k+1} + \cdots + \xi_n))\right]$$

Причём последнее слагаемое будет равно нулю, так как $(S_k \mathbb{I}_{A_k}) \perp\!\!\!\perp (\xi_{k+1} + \cdots + \xi_n)$, как функции от непересекающихся наборов независимых случайных величин, и $E(\xi_{k+1} + \cdots + \xi_n) = 0$. Второе же слагаемое просто оценим снизу нулём. Но $S_k^2 \mathbb{I}_{A_k} \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{I}_{A_k}$. Тогда получим

$$ES_n^2 \geqslant \sum_{k=1}^n \varepsilon^2 E\mathbb{I}_{A_k} = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon^2 P(A)$$

□

Теорема 17.2. *Колмогорова-Хинчин о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые случайные величины,* $E\xi_n = 0, D\xi_n < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n < +\infty$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *сходится почти наверное.*

Доказательство. Введём $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Используя критерий сходимости почти наверное, хотим получить

$$\forall \varepsilon > 0: \; P\left(\sup_{k \geqslant n} |S_k - S_n| > \varepsilon\right) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Распишем меру этого события более подробно:

$$P\left(\sup_{k \geqslant n} |S_k - S_n| > \varepsilon\right) = P\left(\bigcup_{k \geqslant n} \{|S_k - S_n| > \varepsilon\}\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{N} \{|S_k - S_n| > \varepsilon\}\right) =$$
$$\lim_{N\to+\infty} P\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant N-n} |S_{n+k} - S_n| > \varepsilon\right) \overset{\text{н-во Колмогорова}}{\leqslant} \lim_{N\to+\infty} \frac{E|S_N - S_n|^2}{\varepsilon^2} =$$
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{D(\xi_{n+1} + \dots + \xi_N)}{\varepsilon^2} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{N} D\xi_k = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} D\xi_k \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Последний переход обусловлен тем, что остаток сходящегося ряда стремится к нулю. □

18 Леммы Теплица и Кронекера...

Лемма 18.1. *Тёплица (б/д)*

Пусть $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– положительные числа,* $x_n \to x, b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \uparrow +\infty$*. Тогда*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \overset{n\to+\infty}{\to} x$$

Лемма 18.2. *Кронекера (б/д)*

Пусть $b_n > 0$ *и* $b_n \uparrow +\infty$*, пусть* $\sum_x x_n$ *сходится. Тогда*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Определение 18.1. Пусть $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность событий. Событием $\{A_n \text{ б.ч.}\}$ называется

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geqslant n} A_m$$

Это событие состоит в том, что произошло бесконечное число событий A_n.

Лемма 18.3. *Бореля-Кантелли.*

1. *Если* $\sum_n P(A_n) < +\infty$*, то* $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$
2. *Если* $\sum_n P(A_n) = +\infty$ *и события* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *независимы в совокупности, то* $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

Доказательство. 1. Распишем более подробно исследуемую меру:

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

Так как ряд $\sum_n P(A_n)$ сходится

2. Мы уже знаем, что

$$P(A_n \text{ б.ч.}) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A_k}\right) =$$

$$1 - \lim_{n\to+\infty}\lim_{N\to+\infty} P(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A_k})$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=n}^{N} P\left(\overline{A_k}\right) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=n}^{N} 1 - P(A_k) \leqslant \lim_{N\to+\infty}\prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} =$$

$$\lim_{N\to+\infty} e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} = 0$$

Последний переход верен, так как ряд $\sum_n P(A_n)$ расходится. $\Rightarrow P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$

$\square$

Теорема 18.1. *УЗБЧ в форме Колмогорова*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Пусть $E\xi_1$ конечно. Обозначим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \overset{\text{п.н.}}{\to} E\xi_1$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $E\xi_1 = 0$. Иначе перейдём к случайным величинам $\xi_n - E\xi_1$. Тогда

$$E|\xi_1| < +\infty \Rightarrow \sum_n P(|\xi_1| \geqslant n) < +\infty \overset{\text{один.распр.}}{\Leftrightarrow} \sum_n P(|\xi_n| \geqslant n) < +\infty$$

По лемме Бореля-Кантелли $P((A := \{|\xi_n| \geqslant n\})$ б.ч.$) = 0$, то есть с вероятностью 1 выполняется:

$$\xi_n \overset{\text{п.н.}}{=} \overline{\xi}_n := \xi_n \mathbb{I}\{|\xi_n| < n\}$$

начиная с некоторого номера $n_0 = n_0(\omega)$.

Тем самым $\forall \omega \notin A$:

$$\frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)}{n} \to 0 \Leftrightarrow \frac{\overline{\xi}_1(\omega) + \dots + \overline{\xi}_n(\omega)}{n} \to 0$$

Остаётся доказать, что $\frac{\overline{\xi}_1 + \dots + \overline{\xi}_n}{n} \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$.

Рассмотрим $E\overline{\xi}_n$:

$$E\overline{\xi}_n = E\xi_n \mathbb{I}\{|\xi_n| < n\} \overset{\text{один.распр.}}{=} E\xi_1 \mathbb{I}\{|\xi_1| < n\} \overset{\text{т. Лебега}}{\to} E\xi_1 = 0$$

По лемме Тёплица ($x_n = E\overline{\xi}_n, a_n = 1$) $\frac{E\overline{\xi}_1 + \dots + E\overline{\xi}_n}{n} \to 0$. Тогда

$$\frac{\overline{\xi}_1(\omega) + \dots + \overline{\xi}_n(\omega)}{n} \to 0 \Leftrightarrow \frac{\overline{\xi}_1(\omega) - E\overline{\xi}_1 + \dots + \overline{\xi}_n(\omega) - E\overline{\xi}_n}{n} \to 0$$

Остаётся проверить, что ряд $\sum_n \frac{\overline{\xi}_n - E\overline{\xi}_n}{n}$ сходится почти наверное. Почему? Мы применим лемму Кронекера, взяв $x_n = \frac{\tilde{\xi}_n}{n}, b_n = n$, где $\tilde{\xi}_n := \overline{\xi}_n - E\overline{\xi}_n$.

А для этого достаточно проверить, что $\sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\tilde{\xi}_k}{k}\right) < +\infty$. Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{\infty} D\left(\frac{\tilde{\xi}_k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\tilde{\xi}_k}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\tilde{\xi}_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\xi_k^2 \mathbb{I}\{|\xi_k| < k\}}{k^2} \overset{\text{один.распр.}}{=}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\xi_1^2 \mathbb{I}\{|\xi_1| < k\}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} E\left(\xi_1^2 \mathbb{I}\{i-1 \leqslant |\xi_1| < i\}\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} E\left(\xi_1^2 \mathbb{I}\{i-1 \leqslant |\xi_1| < i\}\right) \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\xi_1^2}{i} \mathbb{I}\{i-1 \leqslant |\xi_1| < i\}\right) \leqslant$$
$$2 \sum_{i=1}^{\infty} E(|\xi_1| \mathbb{I}\{i-1 \leqslant \xi_1 < i\}) \overset{\text{т. о мон-й сх-ти}}{=} 2E|\xi_1| < +\infty$$

□

19 Слабая сходимость и сходимость в основном...

Определение 19.1. Пусть $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}, F$ – функции распределения на $\mathbb{R}$. Последовательность $\{F_n\}$ слабо сходится к F, если $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывной ограниченной функции, выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dF_n(x) \overset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x)dF(x)$$

Обозначение: $F_n \overset{W}{\to} F$

Определение 19.2. Последовательность $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ функций распределения на $\mathbb{R}$ сходится в основном к функции распределения F, если

$$\forall x \in \mathbb{C}(F) : \ F_n(x) \overset{n\to+\infty}{\to} F(x)$$

где $\mathbb{C}(F)$ – точки непрерывности функции F.

Обозначение: $F_n \Rightarrow F$

Определение 19.3. Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}, P$ – вероятностные меры на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Тогда последовательность $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к P, если $\forall f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – ограниченной непрерывной функции выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)P_n(dx) \overset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)P(dx)$$

Обозначение: $P_n \overset{W}{\to} P$

Определение 19.4. Последовательность $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к P в основном, если

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : \ P_n(B) \overset{n\to+\infty}{\to} P(B)$$

с условием $P(\partial B) = 0$

Теорема 19.1. *Александрова (б/д).*

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}, P$ – вероятностные меры на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $P_n \overset{W}{\to} P$
2. $\overline{\lim}_{n\to+\infty} P_n(F) \leqslant P(F), \forall F$ *– замкнутых.*
3. $\underline{\lim}_{n\to+\infty} P_n(G) \geqslant P(G), \forall G$ *– открытых.*
4. $P_n \Rightarrow P$

Теорема 19.2. *Об эквивалентности сходимостей.*

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}, P$ – вероятностные меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, а $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}, F$ – соответствующие им функции распределения. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $P_n \overset{W}{\to} P$
2. $P_n \Rightarrow P$

3. $F_n \xrightarrow{W} F$

4. $F_n \Rightarrow F$

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ по теореме Александрова. $1 \Leftrightarrow 3$ по определению.

Для $2 \Rightarrow 4$ рассмотрим $B = (-\infty, x]$. Тогда $\partial B = \{x\}$. Если x – точка непрерывности F, то $P(\{x\}) = 0 \Rightarrow P(\partial B) = 0$. Значит, в силу сходимости в основном плотностей:

$$F_n(x) = P_n((-\infty, x]) \overset{n\to+\infty}{\to} P((-\infty, x]) = F(x) \Rightarrow F_n \Rightarrow F$$

Для $4 \Rightarrow 2$ пусть $F_n \Rightarrow F$. По теореме Александрова достаточно проверить, что $\forall$ открытых G выполнено

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} P_n(G) \geqslant P(G)$$

Раз $G \subset \mathbb{R}$, то G представимо в виде конечного или счётного числа непересекающихся интервалов:

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Для $\forall k \in \mathbb{N}$ подберём полуинтервал $(a'_k, b'_k] \subset (a_k, b_k)$, такой, что

$$P((a_k, b_k)) \leqslant P((a'_k, b'_k]) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

и a'_k, b'_k – точки непрерывности F.

Такой выбор возможен в силу непрерывности вероятностной меры и того факта, что множество точек разрыва F не более чем счётно. Далее:

$$\underline{\lim}_n P_n(G) = \underline{\lim}_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n((a_k, b_k)) \overset{\forall N>0}{\geqslant} \underline{\lim}_n \sum_{k=1}^{N} P_n((a_k, b_k)) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \underline{\lim}_n P_n((a_k, b_k)) \geqslant$$
$$\sum_{k=1}^{N} \underline{\lim}_n P_n((a'_k, b'_k]) = \sum_{k=1}^{n} \underline{\lim}_n (F_n(b'_k) - F_n(a'_k)) \overset{F_n \Rightarrow F}{=} \sum_{k=1}^{N} (F(b'_k) - F(a'_k)) = \sum_{k=1}^{N} P((a'_k, b'_k]) \geqslant$$
$$\sum_{k=1}^{N} P((a_k, b_k)) - \varepsilon$$

Устремляя $N \to +\infty$, получаем

$$\underline{\lim}_n P_n(G) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} P((a_k, b_k)) - \varepsilon = P(G) - \varepsilon$$

В силу произвольного $\varepsilon > 0$:

$$\underline{\lim}_n P_n(G) \geqslant P(G)$$

Благодаря теореме Александрова, всё доказали. $\square$

Следствие. *Пусть* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ *– случайные величины. Тогда*

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(F_\xi) : \; F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$$

20 Характеристические функции...

Определение 20.1. Пусть ξ – случайная величина. Характеристической функцией случаной величины ξ называется
$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\xi t}, t \in \mathbb{R}$$

Определение 20.2. Пусть ξ – случайный вектор из $\mathbb{R}^n$. Характеристической функцией ξ называется
$$\varphi_\xi(t) = Ee^{i\langle \xi, t\rangle}, t \in \mathbb{R}^n$$

Определение 20.3. Пусть P – вероятностная мера на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Характеристической функцией меры P называется
$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle x, t\rangle} P(dx)$$

Пример. Вычисление характеристической функции для стандартного нормального распределения.

Пусть $\xi \equiv \mathcal{N}(0,1)$. Тогда
$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Имеем право рассмотреть производную характеристической функции:
$$\varphi'_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} |_{-\infty}^{+\infty} - t \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Получили диффур вида
$$\varphi'_\xi(t) = (-t) \cdot \varphi_\xi(t)$$

Решая его, получим, что
$$\varphi_\xi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Из начальных условий, $C = 1$ (т.к. $\forall \xi : \ \varphi_\xi(0) = 1$).

Значит $\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Свойства характеристических функций случайных величин

1. Если $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ, то
$$\forall t \in \mathbb{R} : \ |\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1$$

   Доказательство.
$$|\varphi(t)| = |Ee^{i\xi t}| \leqslant E \overset{=1}{|e^{i\xi t}|} = 1 = \varphi(0)$$
□

2. Если $\varphi_\xi(t)$ – характеристическая функция случайной величины $\xi, \eta = a\xi + b, a, b \in \mathbb{R}$, то
$$\varphi_\eta(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$$

Доказательство.

$$\varphi_\eta(t) = Ee^{i\eta t} = Ee^{i(a\xi+b)t} = e^{itb}Ee^{i\xi(at)} = e^{itb}\varphi_\xi(at)$$

□

3. Если $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ, то $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

   Доказательство. Рассмотрим

   $$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = |Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}| = |Ee^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| \leqslant E|e^{it\xi}||e^{ih\xi} - 1| = E|e^{ih\xi} - 1|$$

   Заметим, что $|e^{ih\xi}-1| \overset{\forall\omega\in\Omega}{\to} 0$ при $h \to 0$. Также, оценив $|e^{ih\xi}-1| \leqslant 2$ сможем применить теорему Лебега и получить:

   $$E|e^{ih\xi} - 1| \overset{h\to 0}{\to} 0$$

   □

4. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Тогда

   $$\forall t \in \mathbb{R}: \ \varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$$

   Доказательство.

   $$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi) = E\cos(-t\xi) - iE\sin(-i\xi) = \overline{Ee^{i(-t)\xi}} = \overline{\varphi(-t)}$$

   □

5. Единственность (б/д) Пусть ξ, η – случайные величины. Тогда

   $$\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \Leftrightarrow \xi \overset{d}{=} \eta \text{ (одинаково распределены)}$$

6. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ. Тогда

   $$\forall t: \ \varphi(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi \overset{d}{=} -\xi$$

   то есть распределение ξ симметрично:

   $$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n): \ P(\xi \in B) = P(\xi \in -B)$$

   Доказательство. $\Rightarrow$:

   $$\varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(t) \Rightarrow \xi \overset{d}{=} -\xi$$

   $\Leftarrow$:

   $$\varphi_\xi(t) = \varphi_{-\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} \Rightarrow \forall t: \ \varphi_\xi(t) \in \mathbb{R}$$

   □

7. Пусть $\xi_1, \cdots, \xi_n$ – независимые случайные величины. Тогда

$$\varphi_{\xi_1+\cdots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$$

Доказательство.

$$\varphi_{\xi_1+\cdots+\xi_n}(t) = Ee^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)} \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} E\prod_{k=1}^{n} e^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^{n} Ee^{it\xi_k} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$$

$\square$

21 Единственность характеристических функций...

Теорема 21.1. *Единственности.*

Пусть ξ, η – случайные величины. Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ \varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \Leftrightarrow \xi \overset{d}{=} \eta$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Очевидно из формулы вычисления матожидания.

$\Rightarrow$ Для $a < b$ и малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию $f_\varepsilon(x)$:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, a] \cup [b+\varepsilon, +\infty) \\ \frac{x-a}{\varepsilon}, x \in [a, a+\varepsilon] \\ 1, x \in [a+\varepsilon, b] \\ \frac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}, x \in [b, b+\varepsilon] \end{cases}$$

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0$ достаточно малого:

$$Ef_\varepsilon(\xi) = Ef_\varepsilon(\eta)$$

Возьмём большое $n \in \mathbb{N}$, такое что $[-n, n] \supset [a, b+\varepsilon]$. Тогда $\forall n$ по т. Вейерштрасса $\exists$ функция $f_\varepsilon^{(n)}(x)$ на $[-n, n]$ вида

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \sum_{k \in K} c_k e^{\frac{i\pi kx}{n}}$$

где $K \subset \mathbb{Z}$ – конечное множество. Причём

$$\forall x \in [-n, n]: \ |f_\varepsilon^{(n)}(x) - f_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{n}$$

Очевидно, $f_\varepsilon^{(n)}(x)$ периодическая с периодом $2n$, продолжим её на $\mathbb{R}$ той же формулой. Заметим, что

$$\forall x \in [-n, n]: \ |f_\varepsilon^{(n)}(x)| \leqslant 2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \ |f_\varepsilon^{(n)}(x)| \leqslant 2$$

Рассмотрим

$$|Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon(\eta)| \leqslant |Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\xi)| + |Ef_\varepsilon(\eta) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\eta)| + |Ef_\varepsilon^{(n)}(\xi) - Ef_\varepsilon^{(n)}(\eta)|$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $f_\varepsilon^{(n)}(\xi), f_\varepsilon^{(n)}(\eta)$ – это какие-то линейная комбинация характеристических функций ξ, η с одинаковыми коэффициентами, которые равны по условию.

Далее,

$$|E(f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon^{(n)}(\xi))| \leqslant E\left(|f_\varepsilon(\xi) - f\varepsilon^{(n)}(\xi)| \cdot \mathbb{I}\{|\xi| \leqslant n\}\right) + \left(|f_\varepsilon(\xi) - f\varepsilon^{(n)}(\xi)| \cdot \mathbb{I}\{|\xi| > n\}\right) \leqslant \frac{1}{n} + 2P(|\xi| > n)$$

В итоге получим, что

$$|Ef_\varepsilon(\xi) - Ef_\varepsilon(\eta)| \leqslant \frac{2}{n} + 2P(|\xi| > n) + 2P(|\eta| > n) \overset{n \to +\infty}{\to} 0 \Rightarrow Ef_\varepsilon(\xi) = Ef_\varepsilon(\eta)$$

Заметим, что

$$\forall \omega \in \Omega: \ f_\varepsilon(\xi) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \mathbb{I}\{\xi \in (a,b]\}, |f_\varepsilon(\xi)| \leqslant 1 \overset{\text{т.Лебега}}{\Rightarrow} Ef_\varepsilon(\xi) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} E\mathbb{I}\{\xi \in (a,b]\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

Итоговый результат

$$\forall a < b: \ F_\xi(b) - F_\xi(a) = F_\eta(b) - F_\eta(a)$$

Устремляя $a \to -\infty$:

$$F_\xi(b) = F_\eta(b) \Rightarrow \xi \overset{d}{=} \eta$$

$\square$

Пример. Вычисление распределения суммы независимых нормальных случайных величин.

Пусть ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, $\xi_i \sim \mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2), i = 1, 2$. Требуется найти распределение $\xi_1 + \xi_2$.

Доказательство. Найдём характеристическую функцию ξ_j: заметим, что

$$\eta := \frac{\xi_j - a_j}{\sigma_j} \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \varphi_{\xi_j}(t) = e^{ita_j}\varphi_\eta(\sigma_j t) = e^{ia_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}}$$

Тогда

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) = e^{it(a_1+a_2) - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}} \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim \mathcal{N}(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$\square$

Теорема 21.2. *Формула обращения (б/д).*

Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ с функцией распределения F_ξ

1. *Для $\forall a < b, a, b \in \mathbb{F}_\xi$ выполнено*

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{C\to+\infty} \int_{-C}^{C} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt$$

2. *Если $\int_\mathbb{R} |\varphi(t)|dt < +\infty$, то случайная величина ξ имеет плотность*

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{R} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

22 Теорема о производной х-ф...

Теорема 22.1. *О производных характеристических функций.*
Пусть $E|\xi|^n < +\infty$ *для* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\forall s \leqslant n$*:*

1. $\varphi_\xi^{(s)}(t) = E\left((i\xi)^s e^{it\xi}\right)$

2. $E\xi^s = \frac{\varphi_\xi^{(s)}(0)}{i^s}$

3. $\varphi_\xi(t)$ *разлагается в виде:*

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$$

где $|\varepsilon_n(t)| \leqslant 3E|\xi|^n$ *и* $\varepsilon_n(t) \overset{t\to 0}{\to} 0$

Доказательство. 1. Рассмотрим $s = 1$:

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \frac{1}{h}(Ee^{i(t+h)\xi} - Ee^{it\xi}) = E\left[e^{it\xi}\left(\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right)\right]$$

Заметим, что

$$\forall \omega \in \Omega: \ e^{it\xi}\left(\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right) \overset{h\to 0}{\to} (i\xi)e^{it\xi}$$

Кроме того,

$$|e^{ih\xi} - 1| = |\cos(h\xi) - 1 + i\sin(h\xi)| \leqslant 2|\xi h| \Rightarrow \left|e^{it\xi}\left(\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right)\right| = \left|\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right| \leqslant 2|\xi|$$

По теореме Лебега:

$$Ee^{it\xi}\left(\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right) \overset{h\to 0}{\to} E(i\xi)e^{it\xi}$$

Случай $s \geqslant 2$ полностью аналогичен и доказывается по индукции.

2. Сразу следует из подстановки $t = 0$ в предыдущую формулу.

3. Рассмотрим

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iy)^k}{k!} + \frac{(iy)^n}{n!}(\cos\theta_1(y) + i\sin\theta_2(y))$$

где $|\theta_1(y)||\theta_2(y)| \leqslant y$

Подставляем $y = t\xi$ и берём E:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n(\cos\theta_1(t\xi) + i\sin\theta_2(t\xi)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E\xi^k + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t)$$

где $\varepsilon_n(t) = E[\xi^n(\cos\theta_1(t\xi) + i\sin\theta_2(t\xi) - 1)]$.

Значит $|\varepsilon_n(t)| \leqslant 3E|\xi|^n$. Также

$$\forall \omega \in \Omega: \ \cos\theta_1(t\xi) + i\sin\theta_2(t\xi) - 1 \overset{t\to 0}{\to} 0$$

Кроме того,

$$|\xi^n(\cos\theta_1(t\xi) + i\sin\theta_2(t\xi) - 1)| \leqslant 3|\xi|^n$$

По теореме Лебега $\varepsilon_n(t) \overset{t\to 0}{\to} 0$.

□

Следствие. *Если $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ и $E|\xi|^2 < +\infty$, то*

$$\varphi(t) = 1 + (it)E\xi - \frac{t^2}{2}E\xi^2 + \overline{o}(t^2), t \to 0$$

Теорема 22.2. *Критерий независимости компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.*

Случайная величины $\xi_1, \cdots, \xi_n$ независимы в совокупность $\Leftrightarrow$

$$\varphi_\xi(t_1, \cdots, t_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

где $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ – случайный вектор.

Доказательство. $\Rightarrow$:

$$\varphi_\xi(t_1, \cdots, t_n) = Ee^{i\langle\xi, t\rangle} = Ee^{i\sum_{k=1}^n t_k\xi_k} = E\left[\prod_{k=1}^n e^{it_k\xi_k}\right] \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{k=1}^n Ee^{it_k\xi_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k)$$

$\Leftarrow$: Рассмотрим $F_1, \cdots, F_n$ – функции распределения случайный величин $\xi_1, \cdots, \xi_n$. Составим функцию распределения $G(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$.

Рассмотрим случайный вектор $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ с функцией распределения G. Тогда η_j имеет функцию распределения F_j и $\eta_1, \cdots, \eta_n$ – независимые случайные величины.

$$\varphi_\eta(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\eta_k}(t_k) \overset{\eta_k \overset{d}{=} \xi_k}{=} \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k) \overset{\text{по условию}}{=} \varphi_\xi(t)$$

По теореме о единственности функций распределения ξ, η совпадают $\Rightarrow$

$$F_\xi(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_{\xi_k}(x_k)$$

Значит $\xi_1, \cdots, \xi_n$ – независимы в совокупности. □

Определение 22.1. Функция $f(t), t \in \mathbb{R}, f(t) \in \mathbb{C}$ называется неотрицательно определённой, если

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}\, \forall z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C} : \sum_{i,j=1}^n f(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geqslant 0$$

Теорема 22.3. *Бохнера-Хинчина. (д-во только необходимости)*

Пусть $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$, такова, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(t)$ непрерывна в нуле. Тогда $\varphi(t)$ является характеристической функцией распределения $\Leftrightarrow$ $\varphi(t)$ неотрицательно определена.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция ξ. Пусть $t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$; $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\sum_{k,\,j=1}^{n} \varphi_\xi(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} = \sum_{k,\,j=1}^{n} E e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} = E \sum_{k,\,j=1}^{n} e^{i(t_k - t_j)\xi} z_k \overline{z_j} =$$

$$E \sum_{k,\,j=1}^{n} (z_k e^{it_k\xi}) \overline{(z_j e^{it_j\xi})} = E \left| \sum_{k=1}^{n} z_k e^{it_k\xi} \right|^2 \geqslant 0$$

$\square$

23 Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер...

Пусть $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – семейство распределений на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$.

Определение 23.1. Семейство $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется относительно компактным, если из любой последовательности

$$\{P_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$$

можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Определение 23.2. Семейство $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется плотным, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \subset \mathbb{R}^m \text{ – компакт}: \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P_\alpha(\mathbb{R}^m \setminus K) \leqslant \varepsilon$$

Теорема 23.1. *Прохорова. (док-во только для $\mathbb{R}$)*
Семейство относительно компактно $\Leftrightarrow$ оно плотно.

Доказательство. $\Rightarrow$ пусть $\{P_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ неплотно. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall K \subset \mathbb{R} \text{ – компакт}: \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P_\alpha(\mathbb{R} \setminus K) > \varepsilon$$

Выберем подпоследовательность $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$, такую, что

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; P_{\alpha_n}(\mathbb{R} \setminus [-n, n]) > \varepsilon$$

В силу относительной компактности из $\{P_{\alpha_n}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$P_{\alpha_{n_k}} \xrightarrow{W} Q, k \to +\infty$$

Но тогда по теореме Александрова

$$\varepsilon \leqslant \overline{\lim}_{k \to +\infty} P_{\alpha_{n_k}}(\mathbb{R} \setminus (-n, n)) \leqslant Q(\mathbb{R} \setminus (-n, n))$$

верно для $\forall n \in \mathbb{N}$. Но

$$\lim_{n \to +\infty} Q(\mathbb{R} \setminus (-n, n)) = 0 \Rightarrow \perp$$

$\Leftarrow$ Пусть $\{P_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\}$ – подпоследовательность в семействе. Пусть F_n – функция распределения P_{α_n}. Занумеруем $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \cdots\}$.

Тогда последовательность $\{F_n(q_1), n \in \mathbb{N}\}$ – ограничена $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность $n^{(1)} = (n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \cdots)$, такая, что $\exists \lim_j F_{n_j^{(1)}}(q_1)$.

Последовательность $\{F_{n_m^{(1)}}(q_2), m \in \mathbb{N}\}$ – ограничена $\Rightarrow \exists$ подпоследовательность $n^{(1)} \supset n^{(2)} = (n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \cdots)$, такая, что $\exists \lim_m F_{n_m^{(2)}}(q_2)$. И т.д. строим $n^{(j)} = (n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \cdots)$, такую, что

$$\exists \lim_{m \to +\infty} F_{n_m^{(j)}}(q_i), \forall i = \overline{1, j}$$

Тогда диагональная последовательность $n^1 = (n_1^{(1)}, n_2^{(2)}, n_3^{(3)}, \cdots)$ будет такова, что

$$\exists \lim_{m \to +\infty} F_{n_m^1}(q_i), \forall i \in \mathbb{N}$$

Обозначим для $x \in \mathbb{Q}$:

$$G(x) := \lim_{m\to+\infty} F_{n_m^{(m)}}(x)$$

Заметим, что $G(x)$ не убывает на $\mathbb{Q}$ по построению. Положим для $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

$$G(x) = \inf_{y>x,\, y\in\mathbb{Q}} G(y)$$

Из построения сразу следует, что $G(x)$ не убывает и непрерывность справа. Проверим, что

$$\forall x \in \mathbb{C}(G): \lim_{m\to+\infty} F_{n_m^{(m)}}(x) = G(x)$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{C}(G)$. Возьмём $y > x_0, y \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} F_{n_m^{(m)}}(x_0) \leqslant \overline{\lim}_m F_{n_m^{(m)}}(y) = G(y) \Rightarrow \overline{\lim}_m F_{n_m^{(m)}}(x_0) \leqslant \inf_{y>x_0,\, y\in\mathbb{Q}} G(y) = G(x_0)$$

Возьмём $x_1 < y < x_0, y \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$G(x_1) \leqslant G(y) = \underline{\lim}_m F_{n_m^{(m)}}(y) \leqslant \underline{\lim}_m F_{n_m^{(m)}}(x_0)$$

Устремляя $x_1 \to x_0 - 0$. В силу неубывания $G(x)$ получаем

$$G(x_0 - 0) \leqslant \underline{\lim}_m F_{n_m^{(m)}}(x_0)$$

Если $x_0 \in \mathbb{C}(G)$, то $G(x_0 - 0) = G(x_0) \Rightarrow$

$$\exists \lim_{m\to+\infty} F_{n_m^{(m)}}(x_0) = G(x_0)$$

Остаётся проверить, что $G(x)$ – настоящая функция распределения. В силу плотности:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K = (a, b], a, b \in \mathbb{C}(G): \forall \alpha \in \mathfrak{A}\, P_\alpha(K) \geqslant 1 - \varepsilon$$

Но тогда

$$G(b) - G(a) = \lim_{m\to+\infty} \Big(F_{n_m^{(m)}}(b) - F_{n_m^{(m)}}(a)\Big) = \lim_{m\to+\infty} P_{n_m^{(m)}}((a, b]) \geqslant 1 - \varepsilon$$

Значит разность $G(b) - G(a)$ может быть сколь угодно близкой к 1. Тогда устремляя $b \to +\infty, a \to -\infty$ получим, что

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1; \quad \lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$$

$\square$

24 Три леммы, теорема непрерывности...

Лемма 24.1. *Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность распределений в $\mathbb{R}^m$. Если она плотная и любая слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же мере Q, то*

$$P_n \xrightarrow{W} Q$$

Доказательство. Пусть $P_n \overset{W}{\not\to} Q$. Тогда $\exists f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – ограниченная непрерывная функция, $\exists \varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{P_{n'}\} \subset \{P_n\}$, такая, что

$$\forall n' : \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_{n'}(dx) - \int_{\mathbb{R}^m} f(x) Q(dx) \right| \geqslant \varepsilon$$

Но $\{P_{n'}\}$ – тоже плотная $\Rightarrow$ в ней есть слабо сходящаяся последовательность $\{P_{n''}\} \subset \{P_{n'}\}$. Но по условию $P_{n''} \overset{W}{\not\to} Q$. $\perp$ □

Лемма 24.2. *Пусть $\{P_n\}$ – последовательность распределений на $\mathbb{R}, \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – соответсвующая последовательность характеристических функций. Если $\{P_n\}$ – плотная, то $\{P_n\}$ слабо сходится $\Leftrightarrow$*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t)$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Если $P_n \xrightarrow{W} Q$, то в силу того, что $\sin(tx)$, $\cos(tx)$ – ограниченные функции, получаем

$$\varphi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_n(dx) \overset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} Q(dx) = \varphi(t) \text{ – характеристическая функция меры } Q$$

$\Leftarrow$ Пусть $\varphi(t) = \lim_n \varphi_n(t)$. Выберем в $\{P_n\}$ слабо сходящуюся подпоследовательность $\{P_{n'}\}, P_{n'} \xrightarrow{W} Q$. В силу рассуждений выше

$$\varphi_{n'}(t) \overset{n\to+\infty}{\to} \psi(t) \text{ – хар. функция } Q \Rightarrow \psi(t) = \varphi(t)$$

Значит в силу теоремы единственности для характеристических функций все слабо сходящиеся будут иметь один и тот же предел. По лемме 1 $P_n \xrightarrow{W} Q$. □

Лемма 24.3. *Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция меры P на $\mathbb{R}$. Тогда*

$$\forall a > 0 : P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \leqslant \frac{7}{a} \int_0^a (1 - \Re\varphi(t)) dt$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл, являющийся оценкой сверху, более подробно

$$\frac{1}{a}\int_0^a (1 - \Re\varphi(t)) dt = \frac{1}{a}\int_0^a \left(\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(tx)) P(dx)\right) dt \overset{\text{Фубини}}{=}$$
$$\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^a (1 - \cos(tx)) dt\right) P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(ax)}{ax}\right) P(dx) \geqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]} \left(1 - \frac{\sin(ax)}{ax}\right) P(dx) \geqslant \inf_{|y|\geqslant 1} \left(1 - \frac{\sin y}{y}\right) P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \geqslant \frac{1}{7} P\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right)$$

□

Теорема 24.1. *Непрерывности для характеристических функций.*

Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность распределений на $\mathbb{R}$, $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ – соответствующая последовательность характеристических функций.

1. *Если $P_n \xrightarrow{W} P$, то*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \text{ – хар. функция меры } P$$

2. *Пусть $\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_n \varphi_n(t) = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ непрерывна в нуле. Тогда $\varphi(t)$ является характеристической функцией некоторой меры P и $P_n \xrightarrow{W} P$*

Доказательство. 1. Следует из определения слабой сходимости

2. Проверим, что $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – плотная. Для $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a > 0$:

$$P_n\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]\right) \leqslant \frac{7}{a}\int_0^a (1 - \Re\varphi_n(t))dt \overset{\text{т. Лебега}}{\to} \frac{7}{a}\int_0^a (1 - \Re\varphi(t))dt$$

Для $\forall \varepsilon > 0\, \exists a > 0$, такое, что

$$(1 - \Re\varphi(t)) \leqslant \frac{\varepsilon}{14} \Rightarrow \frac{7}{a}\int_0^a (1 - \Re\varphi(t))dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит

$$\exists n_0\, \forall n > n_0 : \frac{7}{a}\int_0^a (1 - \Re\varphi_n(t))dt \leqslant \varepsilon$$

Значит $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ – относительно компактное $\Leftrightarrow$ плотное. По второй лемме $\exists$ мера P, такая, что $P_n \xrightarrow{W} P$. По предыдущем пункту получаем, что $\varphi(t)$ – характеристическая функция меры P.

□

25 Центральная предельная теорема...

Теорема 25.1. *Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределённых случайных величин.*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые одинаково распределённые случайные величины,* $E\xi_1 = a, 0 < D\xi_1 < +\infty$. *Обозначим* $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. *Тогда*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Доказательство. Обозначим $T_n := \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$. По теореме непрерывности достаточно проверить, что характеристическая функция T_n сходится к $e^{-\frac{t^2}{2}}$ – характеристической функции $\mathcal{N}(0,1)$.

Обозначим $\eta_j := \frac{\xi_j - a}{\sigma}$. Тогда η_j – независимые одинаково распределённые случайные величины, причём $E\eta_j = 0, D\eta_j = E\eta_j^2 = 1$. Тогда

$$T_n = \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\eta_1 + \dots + \eta_n}{\sqrt{n}}$$

Посчитаем хар. функцию T_n:

$$\varphi_{T_n}(t) = Ee^{itT_n} = Ee^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(\eta_1 + \dots + \eta_n)} \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\eta_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\eta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \overset{\text{т. о производных}}{=}$$

$$\left(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}E\eta_1 - \frac{t^2}{2n}E\eta_1^2 + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \overline{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \overset{n \to +\infty}{\to} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

□

Следствие. *В условиях ЦПТ для* $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant x\right) \overset{n \to +\infty}{\to} \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Доказательство. Согласно ЦПТ:

$$T_n := \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}(\Phi):\ F_{T_n}(x) \to \Phi(x)$$

где Φ – функция распределения стандартного нормального распределения, но Φ всюду непрерывна, поэтому следствие доказано. □

Следствие. *В условиях ЦПТ обозначим* $a = E\xi_1, \sigma^2 = D\xi_1$. *Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Доказательство. Заметим, что если $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$, то

$$\forall c \in \mathbb{R}:\ c\eta_n \xrightarrow{d} c\eta$$

Тогда

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}} = \frac{S_n - na}{\sqrt{DS_n}} \cdot \sigma \xrightarrow{d} \sigma \cdot \mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

□

Замечание. Смысл ЦПТ.

Скорость сходимости в УЗБЧ. УЗБЧ утверждает, что

$$\frac{S_n}{n} - a \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$$

Благодаря ЦПТ можно сказать, что в типичной ситуации (~ 0.99):

$$\left|\frac{S_n}{n} - a\right| = \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Доказательство. Выберем $u > 0$, такое, что

$$P(|\xi| \leqslant u) = 0.99, \xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{u}{\sqrt{n}}\right) \overset{n\to+\infty}{\to} 0.99$$

□

Теорема 25.2. *Теорема Берри-Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д).*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые одинаково распределённые случайные величины, пусть* $E|\xi_1 - E\xi_1|^3 < +\infty$. *Обозначим* $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n, T_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}}$. *Тогда*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{c \cdot E|\xi_1 - E\xi_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

где $c > 0$ *– абсолютная константа.*

26 Виды сходимости случайных векторов...

Определение 26.1. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ – случайные вектора из $\mathbb{R}^m$, на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Последовательность $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к ξ:

1. С вероятностью 1 (почти наверное), если
$$P\left(\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi\right) = 1$$
Обозначение: $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$

2. По вероятности, если
$$\forall \varepsilon > 0 :\ P(\|\xi_n - \xi\|_2 \geqslant \varepsilon) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$
где $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
Обозначение: $\xi_n \overset{P}{\to} \xi$

3. По распределению, если $\forall f :\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – ограниченной непрерывной функции выполнено
$$Ef(\xi_n) \overset{n\to+\infty}{\to} Ef(\xi)$$

Лемма 26.1. *О связи многомерных сходимостей с одномерными.*
Пусть $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \cdots, \xi_n^{(m)}), \xi = (\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(m)})$. Тогда

1. $\xi_n \overset{п.н.}{\to} \xi \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, m} :\ \xi_n^{(i)} \overset{п.н.}{\to} \xi^{(i)}$
2. $\xi_n \overset{P}{\to} \xi \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, m} :\ \xi_n^{(i)} \overset{P}{\to} \xi^{(i)}$
3. $\xi_n \overset{d}{\to} \xi \Rightarrow \forall i = \overline{1, m} :\ \xi_n^{(i)} \overset{d}{\to} \xi^{(i)}$

Теорема 26.1. *О наследовании сходимости.*
Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}, \xi$ – случайные векторы из $\mathbb{R}^m$. Пусть $h :\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ непрерывна почти всюду относительно распредления случайного вектора ξ (то есть $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, такое, что h – непрерывна на B и $P(\xi \in B) = 1$). Тогда

1. $\xi_n \overset{п.н.}{\to} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \overset{п.н.}{\to} h(\xi)$
2. $\xi_n \overset{P}{\to} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \overset{P}{\to} h(\xi)$
3. $\xi_n \overset{d}{\to} \xi \Rightarrow h(\xi_n) \overset{d}{\to} h(\xi)$

Доказательство. 1. $P(h(\xi_n) \to h(\xi)) \geqslant P(\xi_n \to \xi, \xi \in B) = 1$

2. Пусть $h(\xi_n) \overset{P}{\not\to} h(\xi)$. Тогда
$$\exists \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \exists \{n_k, k \in \mathbb{N}\} :\ \forall k \in \mathbb{N}\, P(\|h(\xi_{n_k}) - h(\xi)\|_2 \geqslant \varepsilon) \geqslant \delta > 0$$
Но $\xi_{n_k} \overset{P}{\to} \xi \Rightarrow \exists \{n_{k_m}, m \in \mathbb{N}\} :\ \xi_{n_{k_m}} \overset{\text{п.н.}, m\to+\infty}{\to} \xi$. Согласно предыдущему пункту, $h(\xi_{n_{k_m}}) \overset{\text{п.н.}}{\to} h(\xi)$, что есть противоречие.

3. Обозначим Q_n – распределение $h(\xi_n), Q$ – распредление $h(\xi)$. Хотим доказать, что $Q_n \overset{W}{\to} Q$. По теореме Александрова достаточно проверить, что

$$\overline{\lim}_n Q_n(F) \leqslant Q(F), \forall F \subset \mathbb{R}^k \text{ – замкнутого}$$

Проверим это:

$$\overline{\lim}_n Q_n(F) = \overline{\lim}_n P(h(\xi_n) \in F) = \overline{\lim}_n P(\xi_n \in h^{-1}(F)) \leqslant \\ \overline{\lim}_n P(\xi_n \in \text{cl } (h^{-1}(F)) \leqslant P(\xi \in \text{cl } (h^{-1}(F))$$

Заметим, что в силу замкнутости F и непрерывности h на B, выполнено

$$\text{cl } (h^{-1}(F)) \subset \overline{B} \cup h^{-1}(F) \Rightarrow P(\xi \in \text{cl } (h^{-1}(F)) = P(\xi \in h^{-1}(F))$$

В итоге получили, что

$$\overline{\lim}_n Q_n(F) \leqslant P(\xi \in h^{-1}(F)) = Q(F)$$

□

Теорема 26.2. *Усиленный закон больших чисел для случайных векторов.*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые одинаково распределённые случайные векторы из* $\mathbb{R}^m$*. Пусть* $E\xi_1$ *конечно. Тогда*

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \overset{\text{п.н.}, n \to +\infty}{\to} E\xi_1$$

Доказательство. Сразу следует из одномерного случая. □

Теорема 26.3. *Многомерная ЦПТ (б/д).*

Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *– независимые одинаково распределённые случайные векторы из* $\mathbb{R}^m, a = E\xi_1, \Sigma = D\xi_1$ *– конечные. Обозначим* $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$*. Тогда*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

27 Лемма Слуцкого...

Теорема 27.1. *Лемма Слуцкого.*

Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \eta_n \xrightarrow{d} C = const$ *– случайная величина. Тогда*

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + C; \quad \xi_n \cdot \eta_n \xrightarrow{d} \xi \cdot C$$

Доказательство. Докажем только для суммы. Для произведения можно навесить логарифм на обе части и свести к сумме.

Пусть x – точка непрерывности $F_{\xi+C} \Rightarrow x - C$ – точка непрерывности F_ξ:

$$F_{\xi_n+\eta_n}(x) = P(\xi_n + \eta_n \leqslant x) = P(\xi_n + \eta_n \leqslant x, C - \eta_n \geqslant \varepsilon) + P(\xi_n + \eta_n \leqslant x, C - \eta_n < \varepsilon) \leqslant \\ P(|\eta_n - C| \geqslant \varepsilon) + P(\xi_n + C \leqslant x + \varepsilon)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ малым и таким, что $x - C \pm \varepsilon$ – точка непрерывности F_ξ. Заметим, что $\eta_n \xrightarrow{d} C \Leftrightarrow \eta_n \xrightarrow{P} C$. Значит,

$$P(|\eta_n - C| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leqslant \overline{\lim}_n P(\xi_n \leqslant x - C + \varepsilon) = P(\xi \leqslant x - C + \varepsilon)$$

так как $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

Аналогично,

$$1 - F_{\xi_n+\eta_n}(x) = P(\xi_n + \eta_n > x) \leqslant P(|\eta_n - C| \geqslant \varepsilon) + P(\xi_n + C > x - \varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 + P(\xi > x - C - \varepsilon)$$

Из этого следует, что

$$\overline{\lim}_n (1 - F_{\xi_n+\eta_n}(x)) \leqslant P(\xi > x - C - \varepsilon) \Rightarrow \underline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \geqslant P(\xi \leqslant x - C - \varepsilon)$$

В итоге,

$$F_{\xi+C}(x - \varepsilon) \leqslant \underline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leqslant \overline{\lim}_n F_{\xi_n+\eta_n}(x) \leqslant F_{\xi+C}(x + \varepsilon)$$

В силу того, что ε произвольно и мало, а x – точка непрерывности $F_{\xi+C}$, получаем, что

$$\exists \lim_{n\to+\infty} F_{\xi_n+\eta_n}(x) = F_{\xi+C}(x)$$

□

Пример. Построение асимптотически доверительного интервала для параметра в схеме Бернулли.

Пусть $X_1, \cdots, X_n$ – независимые одинаково распределённые случайные величины. Причём $X_i \sim \mathrm{Bin}(1, p)$.

Доказательство. Обозначим $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Согласно ЦПТ

$$\sqrt{n}(\overline{X} - p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

или же

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Заметим, что по УЗБЧ $\overline{X} \overset{\text{п.н.}}{\to} p$ и по теореме о наследовании сходимости

$$\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})} \overset{\text{п.н.}}{\to} \sqrt{p(1-p)}$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} \overset{\text{л.Слуцкого}, d}{\to} \mathcal{N}(0,1)$$

Значит

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}\right| \leqslant 2.807\right) \to 0.99$$

$\square$

28 Гауссовсские случайные векторы...

Определение 28.1. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция имеет следующий вид:

$$\varphi(t) = e^{i\langle a, t\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle}$$

где $a \in \mathbb{R}^n, \Sigma \in M_{n\times n}$ – симметричная и неотрицательно определённая.
Обозначение: $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$

Теорема 28.1. *О трёх эквивалентных определениях.*
Следующие определения эквивалентны:

1. $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ *– гауссовский вектор*
2. $\xi \overset{\text{п.н.}}{=} A\eta + a$*, где* $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m), \eta_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$ *– независимые,* $a \in \mathbb{R}^n, A \in M_{n\times m}$
3. *Для* $\forall \tau \in \mathbb{R}^n$ *случайная величина* $\langle \tau, \xi\rangle$ *имеет одномерное нормальное распределение (или константа).*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma), \Sigma$ – симметричная и неотрицательно определённая, тогда $\exists C$ – ортогональное преобразование, такое, что

$$C\Sigma C^T = D$$

где D – диагональная матрица

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \cdots 0 \cdots 0 \\ \vdots \ddots d_m \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, d_i > 0, i = \overline{1, m}$$

Рассмотрим вектор $\xi' = C(\xi - a)$ и найдём его характеристическую функцию:

$$\varphi_{\xi'}(t) = Ee^{i\langle \xi', t\rangle} = Ee^{i\langle C\xi, t\rangle} \cdot e^{-i\langle Ca, t\rangle} = Ee^{i\langle \xi, C^T t\rangle} = \varphi_\xi(C^T t) \cdot e^{-i\langle a, C^T t\rangle} =$$
$$e^{i\langle a, C^T t\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma C^T t, C^T t\rangle} \cdot e^{-i\langle a, C^T t\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\langle C\Sigma C^T t, t\rangle} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n d_k t_k^2} = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2}d_k t_k^2}$$

Значит компоненты ξ' независимы в совокупности, причём

$$\xi'_j \sim \mathcal{N}(0, d_j), j = \overline{1, m}; \quad \xi'_j \overset{\text{п.н.}}{=} 0, j = \overline{m+1, n}$$

Обозначим $\eta_j = \frac{\xi'_j}{\sqrt{d_j}}, j = \overline{1, m}$. Тогда $\eta_1, \cdots, \eta_m$ – независимые с $\mathcal{N}(0, 1)$ и

$$\xi' = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_m} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \eta =: B\eta \Rightarrow \xi = C^T\xi' + a \overset{\text{п.н.}}{=} (C^T B)\eta + a$$

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle \tau, \xi \rangle \overset{\text{п.н.}}{=} \langle \tau, A\eta + a \rangle = \langle \tau, a \rangle + \langle A^T\tau, \eta \rangle = \langle \tau, a \rangle + \sum_{k=1}^{n} (A^T\tau)_k \cdot \eta_k$$

Что тоже нормальная случайная величина, как сумма независимых нормальных случайных величин.

$3 \Rightarrow 1$ Любая линейная комбинация компонент ξ – нормальная случайная величина $\Rightarrow \xi_1, \cdots, \xi_n$ – нормальная случайная величина, то есть у них конечные $E\xi_i, E\xi_i^2$.

Пусть $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\langle \tau, \xi \rangle \sim \mathcal{N}(a_\tau, \sigma_\tau^2)$$

где $a_\tau = E\langle \tau, \xi \rangle = \langle \tau, E\xi \rangle$, а

$$\sigma_\tau^2 = D\langle \tau, \xi \rangle = E(\langle \tau, \xi \rangle - \langle \tau, E\xi \rangle)^2 = E(\langle \tau, \xi - E\xi \rangle)^2 = E \sum_{i,\, j=1}^{n} \tau_i \tau_j (\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j) =$$

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} \operatorname{cov}\ (\xi_i, \xi_j) \tau_i \tau_j = \langle D\xi \cdot \tau, \tau \rangle$$

Обозначим $\Sigma = D\xi$. Тогда

$$\varphi_\xi(\tau) = Ee^{i\langle \xi,\, t \rangle} = \varphi_{\langle \xi,\, \tau \rangle}(1) = e^{ia_\tau - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2} = e^{i\langle a,\, \tau \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma\tau,\, \tau \rangle}$$

, где Σ – симметрическая, неотрицательно определённая. □

Следствие. *Если $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$, то*

$$a = E\xi; \quad \Sigma = D\xi$$

Следствие. *Линейной (афинное) преобразование гауссовского вектора – тоже гауссовский вектор.*

Доказательство. Пусть ξ – гауссовский вектор, $\zeta = B\xi + b$ – его линейное преобразование. Тогда согласно второму определению

$$\xi \overset{\text{п.н.}}{=} A\eta + a$$

где $\eta_1, \cdots, \eta_m \sim \mathcal{N}(0, 1)$ – независимые. $\Rightarrow$

$$\zeta \overset{\text{п.н.}}{=} (BA)\eta + (Ba + b)$$

□

Следствие. *Пусть $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ – гауссовский вектор. Тогда $\xi_1, \cdots, \xi_n$ – независимы в совокупности $\Leftrightarrow$ они попарно некоррелированы.*

Доказательство. $\Rightarrow$ верно для любых случайных векторов с конечными дисперсиями.

$\Leftarrow$ Если $\xi_1, \cdots, \xi_n$ – попарно некоррелированы, то $D\xi$ – диагональная, пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \Sigma)$:

$$\varphi_\xi(t) = e^{i\langle a,\, t \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t,\, t \rangle} = \prod_{k=1}^{n} e^{ia_k t_k - \frac{1}{2}\sigma_{kk} t_k^2} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$$

По критерию независимости для характеристических функций получаем, что $\xi_1, \cdots, \xi_n$ будут независимы в совокупности. □

29 Условное математическое ожидание случайной величины...

Определение 29.1. Пусть ξ – случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ – под-σ-алгебра. Условным математическим ожиданием ξ относительно $\mathcal{C}$ называется случайная величина $E(\xi|\mathcal{C})$, удовлетворяющая двум свойствам:

1. Свойство измеримости.

   $E(\xi|\mathcal{C})$ является $\mathcal{C}$-измеримой

2. Интегральное свойство.

   Для $\forall A \in \mathcal{C}$ выполнено:
$$E(\xi \mathbb{I}_A) = E(E(\xi|\mathcal{C}\mathbb{I}_A))$$

Теорема 29.1. *О существовании. (б/д).*

Если $E|\xi| < +\infty$, то для $\forall \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$: $E(\xi|\mathcal{C})$ существует и единственна с точностью до равенства почти всюду.

Лемма 29.1. *Явный вид условного математического ожидания в случае, если σ-алгебра порождена счётным разбиением.*

Пусть $\mathcal{C}$ порождена разбиением $\{D_n, n \in \mathbb{N}\}$ множества Ω. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} :\ P(D_n) > 0$. Пусть $E|\xi| < +\infty$. Тогда

$$E(\xi|\mathcal{C}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\xi \cdot \mathbb{I}_{D_n})}{P(D_n)} \mathbb{I}_{D_n}$$

Доказательство. Обозначим $\eta := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\xi \cdot \mathbb{I}_{D_n})}{P(D_n)} \mathbb{I}_{D_n}$ – сумма несовместных $\mathcal{C}$-измеримых индикаторов $\Rightarrow \eta$ – тоже $\mathcal{C}$-измеримая случайная величина.

Проверим интегральное свойство. Если $A \in \mathcal{C}$, то A – объединение не более чем счётного числа $D_n \Rightarrow$ достаточно проверить только при $A = D_k, k \in \mathbb{N}$:

$$E(\eta \mathbb{I}_{D_k}) = E\left(\frac{E\xi \mathbb{I}_{D_k}}{P(D_k)} \mathbb{I}_{D_k}\right) = \frac{E(\xi \mathbb{I}_{D_k})}{P(D_k)} P(D_k) = E(\xi \mathbb{I}_{D_k})$$

□

30 Основные свойства условного матожидания

1. Если ξ – $\mathcal{C}$-измерима, то
$$E(\xi|\mathcal{C}) = \xi$$

   Доказательство. Следует из определения, ξ удовлетворяет обоим свойствам □

2. Линейность.
$$E(a\xi + b\eta|\mathcal{C}) = aE(\xi|\mathcal{C}) + bE(\eta|\mathcal{C})$$

   Доказательство. Правая часть – $\mathcal{C}$-измеримая случайная величина. Проверим интегральное свойство: $A \in \mathcal{C}$
$$E((a\xi + b\eta)\mathbb{I}_A) = aE(\xi\mathbb{I}_A) + bE(\eta\mathbb{I}_A) =$$
$$aE(E(\xi|\mathcal{C})\mathbb{I}_A) + bE(E(\eta|\mathcal{C})\mathbb{I}_A) = E((aE(\xi|\mathcal{C}) + bE(\eta|\mathcal{C}))\mathbb{I}_A)$$

   □

3. Формула полной вероятности.
$$E(E(\xi|\mathcal{C})) = E\xi$$

   Доказательство. По интегральному свойству $\forall A \in \mathcal{C}$:
$$E(\xi\mathbb{I}_A) = E(E(\xi|\mathcal{C})\mathbb{I}_A)$$
   Возьмём $A = \Omega$, получим
$$E(E(\xi|\mathcal{C})) = E\xi$$

   □

4. Если ξ независима с $\mathcal{C}$ ($\mathcal{F}_\xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}$), то $E(\xi|\mathcal{C}) = E\xi$

   Доказательство. $E\xi$ является $\mathcal{C}$-измеримой случайной величиной. Проверяем интегральное свойство $\forall A \in \mathcal{C}$:
$$E(\xi \cdot \mathbb{I}_A) = E\xi E\mathbb{I}_A = E(E\xi \cdot \mathbb{I}_A)$$

   □

5. Сохранение относительности порядка.

   Если $\xi \leqslant \eta$, то $E(\xi|\mathcal{C}) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} E(\eta|\mathcal{C})$

   Доказательство. Рассмотрим
$$\forall A \in \mathcal{C} :\ \xi\mathbb{I}_A \leqslant \eta\mathbb{I}_A \Rightarrow E(E(\xi|\mathcal{C})\mathbb{I}_A) = E(\xi\mathbb{I}_A) \leqslant E(\eta\mathbb{I}_A) = E(E(\eta|\mathcal{C})\mathbb{I}_A)$$

   □

Раз $E(\xi|\mathcal{C})$ и $E(\eta|\mathcal{C})$ являются $\mathcal{C}$-измеримыми, то по свойству обычного матожидания

$$E(\xi|\mathcal{C}) \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} E(\eta|\mathcal{C})$$

6. $|E(\xi|\mathcal{C})| \overset{\text{п.н.}}{\leqslant} E(|\xi||\mathcal{C})$

   Доказательство. Следует из свойств линейности и сохранения относительного порядка. □

7. Телескопическое свойство.

   Если $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{F}$, то

   (a) $E(E(\xi|\mathcal{C}_1)|\mathcal{C}_2) = E(\xi|\mathcal{C}_1)$

   (b) $E(E(\xi|\mathcal{C}_2)|\mathcal{C}_1) = E(\xi|\mathcal{C}_1)$

   Доказательство. (a) Следует из первого свойства, так как $E(\xi|\mathcal{C}_1)$ является $\mathcal{C}_2$-измеримой.

   (b) $E(\xi|\mathcal{C}_1)$ является $\mathcal{C}_1$-измеримой.

   Проверим интегральное свойство $\forall A \in \mathcal{C}_1$:

$$E(E(\xi|\mathcal{C}_2)\mathbb{I}_A) \overset{A\in\mathcal{C}_2}{=} E(\xi\mathbb{I}_A) \overset{A\in\mathcal{C}_1}{=} E(E(\xi|\mathcal{C}_1)\mathbb{I}_A)$$

□

8. Предельный переход.

   (a) Если $0 \leqslant \xi_n \uparrow \xi$, то

$$E(\xi_n|\mathcal{C}) \overset{\text{п.н.}}{\uparrow} E(\xi|\mathcal{C})$$

   (b) Если $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$ и $\forall n \in \mathbb{N}: |\xi_n| \leqslant \eta$, где $E\eta < +\infty$, то

$$E(\xi_n|\mathcal{C}) \overset{\text{п.н.}}{\to} E(\xi|\mathcal{C})$$

   Доказательство. (a) По свойству о сохранении относительного порядка:

$$0 \leqslant E(\xi_n|\mathcal{C}) \leqslant E(\xi_{n+1}|\mathcal{C})$$

   Обозначим $\eta = \lim_n E(\xi_n|\mathcal{C})$. Проверим, что $\eta - \mathcal{C}$-измеримая случайная величина, как предел $\mathcal{C}$-измеримых.

   Проверим интегральное свойство, $\forall A \in \mathcal{C}$:

$$0 \leqslant \xi_n\mathbb{I}_A \uparrow \xi\mathbb{I}_A, 0 \leqslant E(\xi_n|\mathcal{C})\mathbb{I}_A \uparrow \eta\mathbb{I}_A$$

   Тогда по теореме о монотонной сходимости

$$E(\xi\mathbb{I}_A) = \lim_{n\to+\infty} E(\xi_n\mathbb{I}_A) = \lim_{n\to+\infty} E(E(\xi_n|\mathcal{C})\mathbb{I}_A) = E(\eta\mathbb{I}_A)$$

(b) Рассмотрим $\eta_n = \sup_{m \geqslant n} |\xi_m - \xi|$. Тогда $\eta_n \overset{\text{п.н.}}{\to} 0, |\eta_n| \leqslant 2\eta$:

$$|E(\xi_n|\mathcal{C}) - E(\xi|\mathcal{C})| \leqslant E(|\xi_n - \xi||\mathcal{C}) \leqslant E(\eta_n|\mathcal{C})$$

По предыдущему свойству $E(\eta_n|\mathcal{C}) \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$

□

9. Если η – $\mathcal{C}$-измеримая случайная величина, то

$$E(\xi\eta|\mathcal{C}) = \eta E(\xi|\mathcal{C})$$

Доказательство. Правая часть $\mathcal{C}$-измерима. Проверим интегральное свойство. Для $\forall A \in \mathcal{C}$. Пусть сначала $\eta = \mathbb{I}_B, B \in \mathcal{C}$. Тогда интегральное свойство выглядит, как

$$E(\xi \mathbb{I}_B \mathbb{I}_A) = E(\xi \mathbb{I}_{A \cap B}) = E(E(\xi|\mathcal{C})\mathbb{I}_{A \cap B}) = E(\mathbb{I}_B E(\xi|\mathcal{C})\mathbb{I}_A)$$

Это равенство линейно по $\eta \Rightarrow$ оно верно для простых случайный величин.

Если η – произвольная ,то приближаем простыми и пользуемся предельным переходом. □

10. Неравенство Йенсена

Если $\varphi(x)$ – выпуклая снизу функция, то

$$E(\varphi(\xi)|\mathcal{C}) \overset{\text{п.н.}}{\geqslant} \varphi(E(\xi|\mathcal{C}))$$

Доказательство. Для $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \lambda(x)$, такая, что

$$\forall y \in \mathbb{R}:\ \varphi(y) = \varphi(x) + \lambda(x)(y - x)$$

Подставляем $y = \xi;\ x = E(\xi|\mathcal{C})$ и берём УМО относительно $\mathcal{C}$ от обеих частей:

$$E(\varphi(\xi)|\mathcal{C}) \geqslant E(\varphi(E(\xi|\mathcal{C}))|\mathcal{C}) + E(\lambda(E(\xi|\mathcal{C})) \cdot (\xi - E(\xi|\mathcal{C}))|\mathcal{C}) = \varphi(E(\xi|\mathcal{C}))$$

□

31 Условное матожидание при условии другой случайной величины...

Определение 31.1. Пусть ξ, η – случайные величины. Тогда

$$E(\xi|\eta) := E(\xi|\mathcal{F}_\eta)$$

условное матожидание ξ относительно η.

Определение 31.2. Условным математическим ожиданием $E(\xi|\eta = y)$ называется такая борелевская функция $\varphi(y)$, удовлетворяющая свойству:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ E(\xi \mathbb{I}\{\eta \in B\}) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy)$$

Теорема 31.1. *Существование условного матожидания (б/д).*
Если $E|\xi| < +\infty$, то $E(\xi|\eta = y)$ сущестует и единственно P_η – почти наверное.

Лемма 31.1. *Свойства $E(\xi|\eta = y)$ (б/д):*

1. *Линейность*
2. *Сохранение относительного порядка*
3. *Предельный переход*

Утверждение 31.1. *Связь с $E(\xi|\eta)$.*

$$E(\xi|\eta = y) = \varphi(y) \Leftrightarrow E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$$

Доказательство.

$$E(E(\xi|\eta)\mathbb{I}\{\eta \in B\}) = E(\xi \mathbb{I}\{\eta \in B\}) = \int_B \varphi(y) P_\eta(dy) = E(\varphi(\eta)\mathbb{I}\{\eta \in B\}) \Leftrightarrow$$
$$E(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$$

□

Определение 31.3. Условным распределением случайной величины ξ относительно случайной величины η называется функция $P(B, y), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R}$, которая удовлетворяет свойствам:

1. $P(\cdot, y)$ является борелевской функцией от y.
2. $P(B, \cdot)$ является вероятностной мерой на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
3. Для $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:
$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \int_A P(B, y) P_\eta(dy)$$

Определение 31.4. Функция $f_{\xi|\eta}(x|y)$ называется условной плотностью случайной величины ξ относительно случайной величины η (по мере μ), если $f \geqslant 0, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$P(\xi \in B|\eta = y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y) \mu(dx)$$

Теорема 31.2. *О вычислении УМО.*

Если $\exists$ условная плотность $f_{\xi|\eta}(x|y)$, то для $\forall$ борелевской функции $g(x)$:

$$E(g(\xi)|\eta = y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y)\mu(dx)$$

Доказательство. Пусть сначала $g(x) = \mathbb{I}\{x \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда

$$E(g(\xi)|\eta = y) = P(g(\xi) \in B|\eta = y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{\xi|\eta}(x|y)\mu(dx)$$

Доказываемое равенство линейно по функции $g \Rightarrow$ она верна для простых функций. Для произвольных $g(x)$ используем предельный переход. $\square$

Теорема 31.3. *О достаточном условии существования условной плотности.*

Пусть (ξ, η) такова, что $\exists$ совместная плотность $f_{\xi,\eta}(x, y)$ по мере $\mu \times \lambda$ на $\mathbb{R}^2$. Тогда функция

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}, f_\eta(y) > 0 \\ 0, else \end{cases}$$

является условной плотностью ξ относительно η (по мере μ). Здесь $f_\eta(y)$ – плотность η по мере λ.

Доказательство. Надо проверить, что

$$Q(B, y) = \int_B f_{\xi|\eta}(x|y)\mu(dx)$$

есть условное распределение ξ относительно η. Первые два свойства выполнены из свойств интеграла Лебега.

Проверим третье свойство:

$$P(\xi \in B, \eta \in A) = \iint_{B\times A} f_{\xi,\eta}(x, y)\mu(dx)\lambda(dy) \overset{\text{Фубини}}{=} \int_A \left(\int_B f_{\xi,\eta}(x, y)\mu(dx)\right)\lambda(dy) =$$
$$\int_A \left(\int_B f_{\xi|\eta}(x|y)\mu(dx)\right) f_\eta(y)\lambda(dy) = \int_A Q(B, y)P_\eta(dy)$$

$\square$