Содержание

1 Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана

Определение 1.1. **Окрестностью** назовём

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

Проколотой окрестностью назовём

$$\dot{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

Замкнутой окрестностью назовём

$$\overline{B}_r(z) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$$

Замечание. Введём обозначения:

$$\Delta x := x - x_0; \quad \Delta y := y - y_0; \quad \Delta z := z - z_0 = \Delta x + i\Delta y$$
$$\Delta u := u(x, y) - u(x_0, y_0); \quad \Delta v := v(x, y) - v(x_0, y_0); \quad \Delta f := f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta u + i\Delta v$$

где $f \equiv u + iv;\ u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Определение 1.2. Говорят, что $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ **дифференцируема в точке** z_0, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \to 0$$

Лемма 1.1. *$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в $z_0 \Leftrightarrow \exists f'(z_0), A = f'(z_0)$.*

Теорема 1.1. *Условие Коши-Римана.*
$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в z_0 тогда и только тогда, когда

- *$u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в (x_0, y_0)*
- *Выполняется условие Коши-Римана:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

При этом
$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Доказательство. ($\Rightarrow$)
Пусть
$$\exists f'(z_0) = a + ib = A \in \mathbb{C}$$

Значит, по определению дифференцируемости

$$\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z); \quad \alpha(\Delta z) := \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$$

Где $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z), |\Delta z| \to 0$

Тогда, раскрыв это выражение по каждой координате, получим

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \end{cases}$$

Из того, что $|\alpha_1| \leqslant |\alpha(\Delta z)|$ и $|\alpha_2| \leqslant |\alpha(\Delta z)| \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = o(\Delta z), |\Delta z| \to 0$.

Значит, u дифференцируема, причём

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b$$

Аналогично для v, причём

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

Видим, что УКР выполняется.

($\Leftarrow$)

Пусть u, v дифференцируемы в (x_0, y_0) и выполняется УКР. Тогда

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) =$$

$$\Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \alpha_1(\Delta z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) =$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1(\Delta z) + i\alpha_2(\Delta z)$$

Значит,

$$\exists f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

2 Связность. Теорема о голоморфной в области функции, производная которой равна нулю.

Определение 2.1. Множество $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ называется **связным**, если не существует открытых G_1, G_2:

1. $G_1 \cup G_2 \supseteq E$
2. $E \cap G_1 \cap G_2 = \varnothing$
3. $E \cap G_1 \neq \varnothing$ и $E \cap G_2 \neq \varnothing$

Определение 2.2. Непустое открытое связное множество в $\overline{\mathbb{C}}$ называется **областью**.

Определение 2.3. Область D называется **односвязной**, если $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ – связно.

Определение 2.4. Функция $u: G \to \mathbb{R}, G \subseteq \mathbb{R}^2$ – область, причём

$$u \in C^2(G), \Delta u = 0$$

где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, называется **гармонической**.

Определение 2.5. Функция $f: G \to \mathbb{C}$, где $G \subseteq \mathbb{C}$ – область, называется **регулярной (голоморфной)**, если

$$\forall z \in G \, \exists f'(z)$$

Определение 2.6. Функция $f: G \to \mathbb{C}, G \subseteq \mathbb{C}$ называется **регулярной в точке** $z_0 \in G$, если

$$\exists r > 0, B_r(z_0) \subseteq G: \ f \text{ регулярна на } B_r(z_0)$$

Теорема 2.1. *Пусть f голоморфна в области D и*

$$\forall z \in D: \ f'(z) \equiv 0$$

Тогда $f \equiv const$

Доказательство. Любые $(x_0, y_0) \in D$ лежат вместе с каким-то отрезком $[(x_0, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)]$. Тогда

$$f' = u_x + v_x i = v_y - u_y i \Rightarrow u_x \equiv v_x \equiv 0; \ u_y \equiv v_y \equiv 0$$

Применим теорему Лагранжа к $u(x, y)$:

$$|u(x_0, y_0 + \Delta u) - u(x_0, y_0)| = \Delta u |u'(x_0, \xi)| = 0 \Rightarrow u(x_0, y_0 + \Delta u) = u(x_0, y_0)$$

Аналогично к $v(x, y) \Rightarrow f \equiv const$ на всех вертикальных отрезках.

Аналогично на горизонтальных. Тогда $f \equiv const$ на D в силу связности. $\square$

3 Теорема об обратной функции

Теорема 3.1. *Пусть $f: G \to H \subseteq \mathbb{C}, g: H \to \mathbb{C}$ регулярны. Тогда $\zeta(z) = g(f(z))$ также регулярна, причём*

$$\forall z \in G: \ \zeta'(z) = g'(f(z)) f'(z)$$

Доказательство. Зафиксируем $z_0 \in G, w_0 = f(z_0) \in G$.

Из дифференцируемости

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z), |\Delta z| \to 0; \quad \Delta g = g'(w_0)\Delta w + o(\Delta w), |\Delta w| \to 0$$

Пусть $\Delta w = \Delta f$, тогда

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = g'(w_0)\frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta z} \overset{\Delta z \to 0}{\to} g'(w_0) f'(z_0) + 0$$

$\square$

Теорема 3.2. *Об обратной фнуции.*

Пусть $f: G \to \mathbb{C}$ регулярная и непрерывно дифференцируема на G. Пусть $z_0 \in G, w_0 = f(z_0), f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists B_\delta(z_0), B_\varepsilon(w_0)$, такие, что

1. *$\forall z \in B_\delta(z_0): \ f'(z) \neq 0$*
2. *$\forall \hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$ уравнение $\hat{w} = f(z)$ имеет в $B_\delta(z_0)$ единственное решение $\hat{z}$, то есть на $B_\varepsilon(w_0)$ определена обратная функция $g: B_\varepsilon(w_0) \to B_\delta(z_0)$, то есть*

$$\forall w \in B_\varepsilon(w_0): \ f(g(w)) = w$$

3. g регулярна на $B_\varepsilon(w_0)$, причём

$$\forall w \in B_\varepsilon(w_0): \; g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

Доказательство. Первые два пункта выполняется благодаря обычной теореме об обратной функции из матана.

Покажем, что мы имеем право применять ту самую теорему, для этого нам нужен ненулевой якобиан. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Имеем отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. В силу непрерывной дифференцируемости этих двух функций запишем якобиан и преобразуем согласно УКР:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2 \Rightarrow J(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

Третий пункт выполняется благодаря предыдущей теореме:

$$g(f(z)) = z \Rightarrow g'(f(z))f'(z) = 1 \Rightarrow g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} = g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

□

4 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара...

Определение 4.1. Ряд $\sum_{k=1}^\infty g_k(z)$ сходится, если сходится последовательность $\{\sum_{k=1}^n g_k(z)\}_{n=1}^\infty$.
Сходимость бывает **условной** и **абсолютной** (когда сходится ряд из модулей).

Определение 4.2. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^\infty a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$$

Теорема 4.1. *Признак Вейерштрасса.*
Пусть

$$\forall n \, \forall z: \; |g_n(z)| \leqslant \alpha_n$$

причём $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n < +\infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^\infty g_n(z)$ сходится абсолютно равномерно.

Теорема 4.2. *Пусть $\frac{1}{R} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}, R \in [0, +\infty]$. Тогда*

1. *Если $|z| \leqslant r < R$, то степенной ряд сходится равномерно и абсолютно.*

2. *Если $|z| > R$, то ряд расходится*

3. *$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ голоморфна при $|z| < R$ и её производная получается почленным дифференцированием изначального ряда: $f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n z^{n-1}$*

Доказательство. 1. Пусть $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$. По определению верхнего предела

$$\exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N: \; \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$$

Тогда (в условиях текущего пункта):

$$\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N:\ |a_n z^n| \leqslant \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \frac{r}{\rho} < 1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимся числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказали.

2. Пусть $|z| > R$, то есть $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$. Значит по плотности действительных чисел:

$$\exists \varepsilon > 0:\ \frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z| \geqslant \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$

По определению верхнего предела:

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty}\, \forall k:\ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geqslant 1$$

Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

3. Заметим, что у $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ радиус сходимости такой же в силу $\sqrt[n]{n} \to 1$, то есть ряд сходится при $|z| < R$. Причём $\exists r:\ |z| \leqslant r < R$. Также введём обозначения:

$$F_N(z) := \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^i; \quad H_N(z) := \sum_{i=N}^{+\infty} a_i z^i$$

Заметим, что частичная сумма $G_n = F_n'$, то есть равна производной соответствующей частичной суммы f.

Распишем производную f через частичные суммы:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} + \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} =$$
$$\left(\frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} - F_N'(z_0)\right) + (F_N'(z_0) - g(z_0)) + g(z_0) + \left(\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0}\right)$$

Устремляя $N \to +\infty$, получим

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$$

так как

$$\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=N}^{\infty} \left[a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}\right] \Rightarrow$$
$$\left|\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0}\right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$$

Проследнее выражение стремится к нулю, как остаток сходящегося ряда.

□

5 Степенные ряды. Свойства экспоненты и тригонометрических.

Определение 5.1. Голоморфные в $\mathbb{C}$ функции называют **целыми**.

Определение 5.2. Определим эскпоненту

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$R_{\text{сходимости}} = +\infty \Rightarrow e^z$ целая.

Лемма 5.1. *Свойства экспоненты:*

1. $(e^z)' = e^z$
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
3. $\forall z \in \mathbb{C}: \ e^z \neq 0$

Доказательство. 1. Сразу следует из пункта 3 предыдущей теоремы. (о почленном дифференцировании рядов)

2. Покажем эквивалентное свойство $e^{a-z}e^z = e^a$. Пусть

$$g(z) := e^{a-z}e^z \Rightarrow g'(z) = -e^{a-z}e^z + e^{a-z}e^z = 0$$

А это значит, что $g \equiv const$, так как голоморфна.

Посчитаем $g(0) = e^{a-0}e^0 = e^a \Rightarrow g(z) \equiv e^a$, что и требовалось доказать.

3. $\forall z \in \mathbb{C}$ выполняется:

$$e^z e^{-z} = e^0 = 1$$

Значит в выражении $e^z e^{-z}$ никто не может быть нулём.

□

Определение 5.3. Определим тригонометрические функции на $\mathbb{C}$:

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Лемма 5.2. *Свойства тригонометрических функций:*

1. $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$
2. $|e^z| = e^{Re(z)}$
3. *Если* $e^{z+T} = e^z$, *то* $T = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$

Доказательство. 1. Очевидно

2. Очевидно

3. Заметим, что

$$e^T = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} T = 0 \Leftrightarrow T = i\beta$$

Тогда

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta) = 1 \Leftrightarrow \beta = 2\pi k \Rightarrow T = 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$$

□

6 Первообразная и полный дифференциал в области. Условия...

Определение 6.1. **Кривой** γ называется класс эквивалентных параметризаций (отличающихся лишь скоростью движения параметра)

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_0, t_1]$$

Определение 6.2. Кривая γ называется **гладкой**, если существует параметризация

$$z(t) = x(t) + iy(t), x, y \in C^1([t_0, t_1]);\ \ \forall t \in [t_0, t_1] :\ z'(t) \neq 0$$

Определение 6.3. Гладкая кривая γ называется **замкнутой**, если

$$z(t_0) = z(t_1);\ \ z'(t_0 + 0) = z'(t_1 - 0)$$

Определение 6.4. Кривая γ называется **кусочно-гладкой**, если

$$\exists \{\theta_i\}_{i=0}^n :\ t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = t_1$$

что

$$\forall k = \overline{1, n} :\ \gamma|_{[\theta_{k-1}, \theta_k]} = z_k$$

причём

$$\forall k = \overline{1, n} :\ z_k(t), t \in [\theta_{k-1}, \theta_k] \text{ - это гладкая кривая}$$

Определение 6.5. Пусть $g : G \to \mathbb{C}$, где G – область. Назовём g **первообразной** непрерывной функции $f : G \to \mathbb{C}$, если g регулярна на G и

$$\forall z \in G :\ g'(z) = f(z)$$

Определение 6.6. Выражение $f(z)dz$ называется **полным дифференциалом** в области G, если существует первообразная g для f на G, то есть

$$f(z)dz = g'(z)dz$$

Теорема 6.1. *Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ непрерывна на области G. Тогда:*

1. *Если fdz – полный дифференциал на G, то для любой замкнутой КГК $\dot{\gamma} \subseteq G$ выполняется*
$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = 0$$
2. *Если для любой замкнутой ломаной кривой γ выполняется равенство выше, то fdz – полный дифференциал.*

Замечание. Первый пункт выполняется для всех КУСОЧНО-ГЛАДКИХ КРИВЫХ, второй же требует выполнение лишь для ЛОМАНЫХ (класс кривых гораздо меньше чем в первом пункте).

Доказательство. 1. По условию $\exists g : G \to \mathbb{C}$, регулярная, такая, что $g'(z) = f(z)$. Тогда

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} g'(z(t))z'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(g(z(t)))dt = g(z(t_1)) - g(z(t_0)) = g(z(t_0)) - g(z(t_0)) = 0$$

2. Фиксируем $a \in G$ как начальную точку ломаной γ. Тогда $\forall z \in G: \exists \gamma_{az}$ – ломаная с началом в a и концом в z.

$$g(z) = \int_{\gamma_{az}} f(z)dz$$

причём хотим показать, что этот интеграл не зависит от γ_{az}, а лишь от z.

Действительно, если $\exists \gamma_{az} \not\sim \tilde{\gamma}_{az}$, то пусть $\dot{\gamma} = \gamma_{az} \cup \tilde{\gamma}_{az}^{-1}$, тогда по аддитивности интеграла

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = 0 = \int_{\gamma_{az}} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_{az}} f(z)dz$$

Докажем, что $\forall z: g'(z) = f(z)$. Рассмотрим $z_0: \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ и приращение $\Delta z: 0 < |\Delta z| < \varepsilon$. Тогда $z_0 + \Delta z \in G$. Рассмотрим

$$\frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0,\, z_0 + \Delta z]} f(z)dz$$

Значит

$$\left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0,\, z_0 + \Delta z]} (f(z) - f(z_0))dz \right|$$

В силу непрерывности $f(z)$, найдём $r(\varepsilon)$ – радиус шара, где $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, тогда

$$\forall z \in B_{r(\varepsilon)}(z_0) \cap B_\varepsilon(z_0): \left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0) \right| \leqslant \left| \frac{\varepsilon \min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}}{\min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}} \right| = \varepsilon$$

□

7 Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области

Лемма 7.1. *Гурса.*

Пусть G – область, $f: G \to \mathbb{C}$ регулярна. Тогда для любого треугольника из G (то есть такого, что $\partial\triangle \subseteq G$) верно

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

Доказательство. Зафиксируем $\triangle ABC \subseteq G$. Тогда будем рассматривать

$$I := \int_{\partial\triangle ABC} f(z)dz$$

Разобьём треугольник средними линиями:

$$\triangle ABC = \bigcup_{k=1}^{4} \triangle_k$$

Тогда из аддитивности интеграла

$$I = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\triangle_k} f(z)dz$$

Докажем, что

$$\exists k_0 : \left|\int_{\partial\triangle_{k_0}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{|I|}{4}$$

Очевидно от противного, так как триангуляции с ориентацией, то если бы все были меньше, то нельзя было бы набрать I.

Обозначим найдённый треугольник за $\triangle^1 := \triangle_{k_0}$, а $\triangle^0 := \triangle ABC$. Аналогично построению $\triangle^1$ из $\triangle^0$ можем построить бесконечную последовательность $\{\triangle^N\}_{N=0}^{\infty}$, и для них

$$\left|\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz\right| \geqslant \frac{|I|}{4^N}$$

Теперь заметим, что $P_N = \frac{P_0}{2^N}$, где P_N – периметр N-го треугольника. В силу компактности

$$\exists z_0 \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \triangle^N$$

Так как f дифференцируема в z_0, то по определению:

$$\exists B_{\delta_0}(z_0)\, \forall z \in B_{\delta_0}(z_0) :\ f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

А для o-малого верно:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 \leqslant \delta_0\, \forall z \in B_{\delta_1}(z_0) :\ |o(z - z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|$$

Теперь можем расписать интеграл:

$$\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz = f(z_0)\int_{\partial\triangle^N} dz + f'(z_0)\int_{\partial\triangle^N} zdz - z_0 f'(z_0)\int_{\partial\triangle^N} dz + \int_{\partial\triangle^N} o(z - z_0)dz = \int_{\partial\triangle^N} o(z - z_0)dz$$

Интегралы по 1 и z равны нулю, так как они, очевидно, полные дифференциалы.

Причём полагаем N таким, что

$$\forall z \in \triangle^N :\ |z - z_0| < \delta_1$$

Тогда

$$\left|\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz\right| \leqslant \int_{\partial\triangle^N} |o(z - z_0)| \cdot |dz| \leqslant \varepsilon \int_{\partial\triangle^N} |z - z_0| \cdot |dz| \leqslant \varepsilon P_N^2 \leqslant \varepsilon \frac{P_0^2}{4^N}$$

Получили, что

$$|I| \leqslant 4^N \left|\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz\right| \leqslant 4^N \varepsilon \frac{P_0^2}{4^N}$$

В силу произвольности ε: $I = 0$. □

Теорема 7.1. *Коши для выпуклой области.*

Пусть D – выпуклая область, f – голоморфна в $D \setminus \{0\}$, f – непрерывна в D. Тогда $\forall \gamma$ – кусочно-гладкой замкнутой кривой

$$\int_\gamma f dz = 0$$

Доказательство. По лемме Гурса

$$\forall \triangle \subseteq D: \int_{\partial \triangle} f dz = 0$$

Тогда мы можем триангулировать любую ломаную (в силу выпуклости) $\Rightarrow$ по одной из теорем fdz – полный дифференциал (нужны были непрерывность и нулевой интеграл по всем ломаным).

А как мы знаем, интеграл по любой замкнутой кривой от полного дифференциала нулевой. $\square$

8 Интеграл Коши и его свойства

Определение 8.1. Пусть γ – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$. Тогда $\forall \varphi \in C(\gamma)$ (непрерывная на γ функции) определим **интеграл Коши**, как

$$F_n(z, \varphi) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

Теорема 8.1. *Свойства интеграла Коши:*

1. $F_n(z, \varphi)$ *- голоморфна* ($\Rightarrow$ *непрерывна) в* $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2. $F_n'(z, \varphi) = nF_{n+1}(z, \varphi)$

Доказательство. Вначале покажем непрерывность для $n = 1$:

$$F_1(z, \varphi) - F_1(z_0, \varphi) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)(z - z_0)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi = (z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)$$

Введём $\delta = \rho(z_0, \gamma)$. Для $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ оно, очевидно, не равно нулю.

Тогда

$$\left|(z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)\right| \leqslant \frac{const}{\delta^2}|z - z_0|$$

что и гарантирует непрерывность.

Из того же тождества

$$\frac{F_1(z, \varphi) - F_1(z_0, \varphi)}{z - z_0} = F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \overset{z \to z_0}{\to} F_1\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = F_2(z_0, \varphi)$$

Доказали голоморфность существованием производной.

Далее по индукции: пусть F_{n-1} голоморфна в D:

$$F_{n-1}'(z, \varphi) = (n - 1)F_n(z, \varphi)$$

Распишем приращение с помощью умного нуля:

$$F_n(z, \varphi) - F_n(z_0, \varphi) =$$

$$\int_\gamma \left[\left(\frac{1}{(\xi - z)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)}\right) + \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^n}\right] \varphi(\xi) d\xi =$$

$$(z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} + F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)$$

Сходимость к нулю первого слагаемого доказывается аналогично предыдущему пункту с непрерывностью, а последние два слагаемых дают приращение непрерывной функции, которое также стремится к нулю при $z \to z_0$.

Поделим предыдущее выражение на $z - z_0$ и посчитаем производную:

$$\frac{F_n(z,\varphi) - F_n(z_0,\varphi)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} + \frac{F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)}{z - z_0} \overset{z\to z_0}{\to}$$
$$F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + F'_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + (n-1)F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) =$$
$$n \cdot F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = n \cdot F_{n+1}(z_0, \varphi)$$

Таким образом, $F_n(z,\varphi)$ – бесконечно дифференцируемая. □

9 Интегральная формула Коши для круга...

Теорема 9.1. *Пусть f – голоморфна в области D, причём $\overline{O}_r(a) \subset D$. Тогда*

$$\forall z \in O_r(a): \; f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Доказательство. Фиксируем $z \in O_r(a)$:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, \xi \neq z \\ f'(z), \xi = z \end{cases}$$

$g(\xi)$ – голоморфна в $O_r(a) \setminus \{z\}$ (как отношение голоморфных функций) и непрерывна в $O_r(a) \Rightarrow \forall \gamma_r$ – замкнутого контура по теореме Коши:

$$\int_{\gamma_r} g(\xi) d\xi = 0$$

То есть

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = f(z)\left[\int_{\gamma_r} \frac{d\xi}{\xi - z} =: G(z)\right]$$

$G(z)$ – голоморфна в $O_r(a), G' = \int_{\gamma_r} \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} \equiv 0 \Rightarrow G \equiv const \Rightarrow G(a) = 2\pi i \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

□

Следствие. 1. *f – голоморфна в $D \Rightarrow f$ – интеграл Коши $\Rightarrow f'$ – голоморфна в D.*

2. *f – голоморфна в $D \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \; f^{(n)}$ – голоморфна в D.*

3. *В условии формулы Коши для круга:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \tag{1}$$

10 Теорема Морера. Теорема о среднем.

Теорема 10.1. *Мореры.*
Пусть f – непрерывна в области D и

$$\forall \overline{\triangle} \subseteq D: \int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

Тогда f – голоморфна в D.

Доказательство. Заметим, что $\overline{O}_r(a) \subseteq D$ – выпукло, поэтому применяем лемму о триангуляции ломаной треугольниками:

$$\forall z \in O_r(a)\, \exists F: \ F' = f$$

В этом круге по одному из следствий F голоморфна $\Rightarrow f$ – голоморфна в $O_r(a)$.
Это верно $\forall a \in D \Rightarrow f$ – голоморфна в D. □

Теорема 10.2. *О среднем.*
Пусть f – голоморфна в $\overline{O}_r(a) \subseteq D$, тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta}r)d\theta$$

Доказательство. Пусть $\xi = a + re^{i\theta}$. Тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

□

11 Целые функции и теорема Луивилля

Определение 11.1. f – **целая**, если f голоморфна в $\mathbb{C}$.

Теорема 11.1. *Луивилля.*
Если f – целая и

$$\exists M, m, R\, \forall z, |z| > R: \ |f(z)| < M \cdot |z|^m$$

Тогда $f(z)$ – полином степени $\leqslant m$.

Доказательство. Знаем, что

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, R_{\text{сх}} = \infty$$

Тогда по (12.1)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi^{n+1}}$$

Оценим сверху

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=\rho}\frac{|f(\xi)||d\xi|}{|\xi^{n+1}|} \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{|\xi|=\rho}\frac{|\xi|^m}{|\xi|^{n+1}}|d\xi| = \frac{M}{2\pi}\int_{|\xi|=\rho}\frac{1}{|\xi|^{n+1-m}}|d\xi| = \frac{M}{\rho^{n-m}} = M\rho^{m-n}$$

При $n > m$:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^{n-m}} \overset{\rho\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \forall n > m:\ |c_n| = 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n$$

$\square$

12 Ряд Тейлора и теорема единственности...

Теорема 12.1. *Ряд Тейлора.*

Пусть f – голоморфна в $D, O_R(a) \subseteq D$. Тогда

$$\forall z \in O_R(a):\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Доказательство. Пусть $r < R, f$ – голоморфна в $\overline{O_r(a)} \Rightarrow$

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

Тогда распишем

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{1}{\xi-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} \overset{|z-a|\leq|\xi-a|}{=} \frac{1}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

Полученный ряд сходится равномерно, а значит можно умножить на $f(\xi)$ и почленно интегрировать

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}2\pi i c_n(z-a)^n \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

Причём по (1):

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

В завершение скажем

$$\forall z:\ |z-a| < R\ \exists r < R\ z \in O_r(a) \Rightarrow$$

формула верна во всём $O_R(a)$. $\square$

Определение 12.1. Пусть $f \not\equiv 0$ – голоморфна в $O_r(a), f(a) = 0$, тогда m – это **порядок нуля в точке** a. если

$$\forall k = \overline{0, m-1}:\ f^{(k)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0$$

Утверждение 12.1. *f имеет нуль порядка $m \Leftrightarrow \exists g(z)$ – голоморфная в $O_r(a), g(a) \neq 0$:*

$$f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$$

Доказательство. ($\Rightarrow$)

БОО $a = 0$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n = z^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} z^n$$

Пусть $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} z^n$, причём $g(0) \neq 0$, так как $c_m \neq 0$.

($\Leftarrow$) Пусть $f(z) = (z-a)^m g(z)$. Дифференцируя получаем

$$\forall k = \overline{0, m-1}: \ f^{(k)}(a) = 0, f^{(m)} \neq 0$$

□

Замечание. Пусть f – голоморфна в окрестности a, $f(a) = 0$. Тогда

$$\exists \rho > 0 \, \forall z \, |z-a| \in (0, \rho): \ f(z) \neq 0$$

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего утверждения. □

Теорема 12.2. *О единственности.*

Пусть f и g – голоморфны в области $D, E \subseteq D$, причём в D есть хотя бы одна предельная точка E. Тогда если

$$\forall z \in E: \ f(z) = g(z)$$

то

$$\forall z \in D: \ f(z) = g(z)$$

Доказательство. Пусть $h = f - g$, a – предельная точка $E, a \in D$. Тогда введём

$$Z = \{z \in D \mid h(z) = 0\}$$

Тогда по непрерывности $a \in Z$, причём a – предельная точка $Z \Rightarrow h(z) \equiv 0$ в окрестности a (12).

Пусть $G_1 := \operatorname{int} Z$ – открытое непустое, так как $a \in G_1$. Тогда если $G_2 := D \setminus G_1$ открытое, то из-за связности $D \Rightarrow G_2$ – пустое, что доказывает теорему.

Пусть G_2 неоткрыто. Пусть $z^* \in G_2$, причём z^* – предельная точка G_1. Тогда $\exists z_n \to z^*, z_n \in G_1$. Тогда $h(z_n) = 0 \overset{\text{непрерывность}}{\Rightarrow} h(z^*) = 0 \Rightarrow z^* \in G_1$ – противоречие. □

13 Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки...

Определение 13.1. Пусть γ – кусочно гладкая кривая в D,

$$\Gamma = f(\gamma) = \{w = f(z(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

Причём Γ – кусочно гладкая, $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда приращением аргумента вдоль кривой называется

$$\Delta_\Gamma w := \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} =: \Delta_\gamma f$$

Лемма 13.1. *Свойства приращения аргумента:*

1. $\Delta_\gamma(c \cdot f) = \Delta_\gamma(f), c \neq 0$
2. $\Delta_\gamma(f_1 \cdot f_2) = \Delta_\gamma(f_1) + \Delta_\gamma(f_2)$
3. $\Delta_\gamma \frac{1}{f} = -\Delta_\gamma f$
4. $\Delta_{-\gamma}(f) = -\Delta_\gamma(f)$

Доказательство. 1. Следует из второго пункта (приращение константы равно нулю)

2. Для доказательство достаточно заметить

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}$$

И воспользоваться линейностью интеграла.

3. Очевидно из предыдущего пункта
4. Очевидно

□

Определение 13.2. Индексом a относительно кривой γ, где γ – кусочно гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{C}, a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, называется

$$J_\gamma(a) = \frac{\Delta_\gamma(z-a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Иными словами, это количество оборотов кривой вокруг a.

Лемма 13.2. *Пусть γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$. Тогда*

1. $J_\gamma(z) \equiv const$ *в каждой компоненте связности* $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2. *Если какая-то компонента содержит ∞, то $J_\gamma(z) \equiv 0$ в ней.*

Доказательство. Действительно,

$$J_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

интеграл Коши ⇒ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \gamma$ ⇒ непрерывна и, так как принимает только значения из $\mathbb{Z}$, постоянна в своих компонентах связности. Это следует из того, что

$$J'_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = 0 \Rightarrow J_\gamma(a) \equiv const \text{ в компоненте связности}$$

Для неограниченной компоненты

$$d(z) := \text{dist } (\gamma, z) = \min_{\zeta \in \gamma} |z - \zeta| > 0$$

Тогда

$$|J_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi d(z)} \int_\gamma |d\xi|$$

Но $d(z) \to \infty$ при $z \to \infty \Rightarrow J_\gamma(z) = 0$. □

14 Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши...

Лемма 14.1. *Общая теорема Коши.*
Пусть D – область в $\mathbb{C}$, f – голоморфна в области D. Тогда

1. *Функция*
$$g(\xi, z) := \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}, \xi \neq z \\ f'(z), \xi = z \end{cases}$$
непрерывна в $D \times D$.

2. *$\forall$ кусочно гладкой $\gamma \subset D$:*
$$h(z) = \int_\gamma g(\xi, z) d\xi$$
голоморфна в D.

Доказательство. 1. При $\xi \neq z$ непрерывна как отношение непрерывных функций.

При $\xi = z$ зафиксируем $z_0 \in D$, по открытости $D \Rightarrow \exists \overline{O}_r(z_0) \subset D$. Тогда будем рассматривать сколь угодно близкие $z, \xi \in O_\varepsilon(z_0), \varepsilon < r$.

Распишем в этой окрестности ряд Тейлора для двух точек:
$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$
$$f(\xi) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n$$

Далее нам понадобится следующая оценка:
$$\left| \frac{(z - z_0)^n - (\xi - z_0)^n}{z - \xi = [(z - z_0) - (\xi - z_0)]} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (z - z_0)^{n-1-k} (\xi - z_0)^k \right| \leqslant n\varepsilon^{n-1}$$

Рассмотрим приращение
$$|g(z, \xi) - g(z_0, z_0)| = |g(z, \xi) - f'(z_0)| \overset{f'(z_0) = \frac{c_1(z-z_0)}{z-z_0}}{=} \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n - (\xi - z_0)^n}{z - \xi} \right| \leqslant$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot \varepsilon^{n-1} \leqslant \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot r^{n-2} = \varepsilon M$$

Где $M < \infty$ взяли из сходимости ряда Тейлора путём дифференцирования ($\exists R > r : O_R(z_0) \subseteq D\ \overline{O}_r(z_0) \subseteq D$).

Заметим, что мы доказали непрерывность, оценив приращение g.

2. Видно, что h – непрерывна в D. Тогда для $\overline{\triangle} \subset D$:
$$\int_{\partial\triangle} h(z) dz = \int_{\partial\triangle} \int_\gamma g(\xi, z) d\xi dz = \int_\gamma \int_{\partial\triangle} g(\xi, z) dz d\xi = 0$$

Это верно, так как $g(\xi_0, \cdot)$ голоморфна в $D \setminus \{\xi_0\}$, непрерывна в $D \Rightarrow$ по лемме Гурса $\int_{\partial\triangle} g(\xi, z)dz = 0$.

В итоге можем применить теорему Морера, из которой будет следовать, что h – голоморфна.

$\square$

Определение 14.1. Пусть $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ – замкнутые кусочно гладкие кривые. Тогда

$$\Gamma = k_1\gamma_1 + \cdots + k_n\gamma_n$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$ мы будем называть **циклом**.

Определение 14.2. Пусть цикл Γ лежит в области D. Тогда говорят, что $\Gamma \sim 0 \mod D$ (Γ **гомологично эквивалентна** 0 в открытой области D), если

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus D: \ J_\Gamma(a) = 0$$

Теорема 14.1. *Интегральная теорема Коши.*

Пусть D – область в $\mathbb{C}, f$ – голоморфна в D. Пусть Γ – цикл в D, причём $\Gamma \sim 0$ $\mod D$. Тогда

1. $\forall z \in D \setminus \Gamma: \ J_\Gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$
2. $\int_\Gamma f(z)dz = 0$

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$

Применим 1 к $\tilde{f}(z) = (z-a)f(z)$. Где $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, если $f(a)$ определена (или $a \in D \setminus \Gamma$). Тогда

$$0 = J_\Gamma(a)(a-a)f(a) = J_\Gamma(a) \cdot \tilde{f}(a) = \int_\Gamma \frac{\tilde{f}(\xi)d\xi}{\xi - a} = \int_\Gamma f(\xi)d\xi$$

Докажем первый пункт.

Введём

$$G := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_\Gamma(z) = 0\}$$

– открытое множество. Рассмотрим две функции

$$2\pi i \cdot \tilde{h}(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

– голоморфна в G, как интеграл Коши.

$$2\pi i \cdot h(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}d\xi$$

– голомофрна в D, как функция из второго пункта предыдущей теоремы.

Заметим, что $\forall z \in G \cap D: \ h(z) = \tilde{h}(z)$, так как

$$\tilde{h}(z) - h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)d\xi}{\xi - z} = f(z)J_\Gamma(z) = 0$$

Тогда введём новую функцию

$$F(z) := \begin{cases} h(z), z \in D \\ \tilde{h}(z), z \in \mathbb{C} \setminus D \subseteq G \text{ так как } \Gamma \sim 0 \mod D \end{cases}$$

Получается, $F(z)$ – голоморфна в $\mathbb{C}$. (В каждой из гладких областей они голоморфны, и совпадают на границе)

Заметим, что

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = 0$$

Так как

$$|\tilde{h}(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\max_\Gamma |f| \cdot |d\xi|}{d(z)} \overset{z\to\infty}{\to} 0$$

Где, $d(z) = \text{dist } (z, \Gamma) \Rightarrow d(z) \to \infty$.

Тогда по теореме Луивилля (11.1):

$$F(z) \equiv 0$$

Тогда в $D \setminus \Gamma :\ h(z) = F(z) = 0$, то есть

$$f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \Rightarrow$$
$$f(z) \cdot J_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

□

Следствие. *Для односвязной области.*

Пусть D – односвязная область, f голоморфна в D, Γ – замкнутая кусочно гладкая кривая в D. Тогда

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0$$

Доказательство. Заметим, что $\forall a \notin D :\ J_\Gamma(a) = 0$, так как a лежит в компоненте связности, содержащей $\infty \Rightarrow$ можем использовать интегральную теорему Коши. □

Следствие. *Коши для многосвязной области.*

Пусть область D ограничена циклом Γ, f голоморфна в области $D' \supset D$. Тогда

1. $\forall z \in D :\ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$
2. $\int_\Gamma f(z) dz = 0$

Доказательство. Имеем 0 оборотов вокруг D', а также один оборот вокруг $D \Rightarrow J_\Gamma(z) = 1 \Rightarrow$ по предыдущей теореме верен первый пункт, а второй выводится аналогично. □

15 Разложение голоморфной функции в ряд Лорана...

Теорема 15.1. *Пусть f голоморфна в $K := \{z \mid r < |z-a| < R\}$. Тогда*

$$\forall z \in K: \; f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

где γ_ρ – положительно ориентированная окружность радиуса $\rho \in (r, R)$ с центром в точке a.

Доказательство. Докажем, что интегральная формула для c_n не зависит от ρ. Возьмём две окружности радиуса ρ и ρ'.

Пусть $\Gamma := \gamma_\rho - \gamma_{\rho'}$. Применим теорему Коши для многосвязной области к функции $\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ (голоморфной в $K \supset K_{(\rho, \rho')}$). Тогда

$$\int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = \int_{\gamma_{\rho'}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Рассмотрим $r < r' < R' < R$. Тогда $\forall z \in K'_{(r', R')}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right) =: f_1(z) + f_2(z)$$

Заметим, что

$$f_1(z) = \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

голоморфна в $O_{R'}(a) \Rightarrow$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

где $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Осталось разложить f_2:

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{(z-a) - (\xi - a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

при $\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right| < 1$.

Значит

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \cdot \left[c_{-n-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(\xi)(\xi - a)^n d\xi \right]$$

Получается, разложили так, что от r' и R' коэффициенты c_n не зависят. □

Определение 15.1. Такие ряды называются **рядами Лорана** для голоморфной функции f.

Теорема 15.2. *Теорема о единственности ряда Лорана.*

Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ *при* $z \in K$, *то* f *– голоморфна в кольце* K, *причём*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Доказательство. f голоморфна как предел сходящегося ряда

Проверим равенство коэффициентов. Вначале для $n = -1$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n dz = 2\pi i \cdot c_{-1}$$

При $n \neq -1$ сводим к предыдущему случаю для функции $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ □

16 Изолированные особые точки

Определение 16.1. Изолированная особая точка – точка, в некоторой проколотой окрестности которой функция $f(z)$ однозначна и голоморфна, а в самой точке либо не задана, либо недифференцируема.

Определение 16.2. a – **устранимая** особая точка, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : \lim_{z \to a} f(z) = A$$

Определение 16.3. a – **полюс**, если

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

Определение 16.4. a – **существенная** особая точка, если

$$\nexists \lim_{z \to a} f(x)$$

Теорема 16.1. *a – УОТ $\Leftrightarrow$ f ограниченна в $\dot{O}_\delta(a)$ для некоторого δ.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ – очевидно по определению предела.

$(\Leftarrow)$

Положим $M_\rho(f) = \max_{\gamma_\rho} |f|$. Тогда

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{|f||d\xi|}{\rho^{n+1}} \leqslant \frac{M_\rho(f)}{2\pi\rho^{n+1}} \int_{\gamma_\rho} |d\xi| = \frac{M_\rho(f)}{\rho^n}, n \in \mathbb{Z}$$

По условию f ограничена в $\dot{O}_\delta(a) \Rightarrow$

$$\exists M \ \forall z \in O_\delta(a) : \ |f| < M$$

Тогда из неравенства для $|c_n|$ следует

$$\forall \rho > 0, \rho < \delta \Rightarrow \forall n < 0 : \ \frac{1}{\rho^n} \overset{\rho \to 0}{\to} 0 \Rightarrow \forall n < 0 : \ c_n = 0$$

Значит

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

она имеет предел в точке a, равный c_0. □

Теорема 16.2. *Пусть a – изолированная особая точка f. Тогда a полюс $\Leftrightarrow$ конечное число коэффициентов в главной части ряда Лорана отличны от нуля.*

Доказательство. ($\Leftarrow$)

По условию

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z)$$

где h – голоморфна в окрестности a.

Значит $\varphi(z) := f(z)(z-a)^m$ – голоморфная в этой области, причём $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{z\to a} f(z) = \frac{\lim_{z\to a} f(z)(z-a)^m}{\lim_{z\to a}(z-a)^m} = \infty$$

($\Rightarrow$)

По условию

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow$$

функция $\frac{1}{f(x)}$ имеет в т.a УОТ $\Rightarrow$ она голоморфна в окрестности a. При этом $\frac{1}{f} \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m h(z), h(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{h(z)}$$

Где $\frac{1}{h(z)}$ – голоморфная в окрестности $a \Rightarrow$ раскладывается в Тейлора. □

Теорема 16.3. *Сохоцкого.*

Пусть f голоморфна в $\dot{O}(a), a$ – СОТ. Тогда

$$\forall A \in \overline{\mathbb{C}}\, \exists z_n \to a :\ f(z_n) \to A$$

Доказательство.

1. Для $A = \infty$ очевидно – если A – не предельная, то f ограничена $\Rightarrow a$ – УОТ.

2. Если $A \neq \infty$, то введём

   $$g(z) := \frac{1}{f(z) - A}$$

   Пусть A – не предельная. Тогда

   $$\exists \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z \in \dot{O}_\delta(a) :\ |f(z) - A| \geqslant \varepsilon$$

   Значит $g(z)$ голоморфна в $\dot{O}_\delta(a)$ как отношение голоморфных функций. Причём $g(z) \neq 0$ в $\dot{O}_\delta(a)$. Также $|g(z)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$ – ограниченная, то есть точка a – УОТ. Тогда

   $$\forall z \in \dot{O}_\delta(a) :\ f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$$

   Если $g(a) \neq 0$, то a – УОТ для f.

   Если $g(a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ имеет полюс в точке $a \Rightarrow$ у f точка a – полюс. Противоречие.

□

17 Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах.

Определение 17.1. Если f голоморфна в $\dot{O}_r(a), a \neq \infty$, то определим **вычет** f, как

$$\text{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)dz$$

Утверждение 17.1. *Вычеты определены корректно (независят от γ).*

Доказательство. Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, z \in \dot{O}_r(a)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} c_{-1} 2\pi i = c_{-1}$$

□

Теорема 17.1. *Коши о вычетах.*

Пусть D ограничена циклом $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \cdots - \gamma_n$ (то есть в условиях теоремы Коши для многосвязной области).

Пусть $A = \{a_1, \cdots, a_N\} \subseteq D, f$ – голоморфна в $D' \setminus A$, где $D' \supseteq D$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{N} res_{a_i} f$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\exists R > 0 \, \forall i \neq j : \overline{O}_R(a_i) \cap \overline{O}_R(a_j) = \varnothing$$

и $\overline{O}_R(a_i) \subseteq D$.

Обозначим за обход $\delta_k = \partial O_R(a_k)$ (обход против часовой стрелки, то есть положительно ориентировано).

Обозначим $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \sum_{i=1}^{N} \delta_i, \tilde{D} = D \setminus \cup_{k=1}^{N} \overline{O}_R(a_k)$ и $\tilde{D}' = D' \setminus A$. Тогда $\partial \tilde{D} = \tilde{\Gamma}$ и f голоморфна в $\tilde{D}'$.

Причём $\tilde{D}' \supseteq \tilde{D}$. Более того, $\tilde{\Gamma} \sim 0 \mod \tilde{D}'$, и $\forall z \notin \tilde{D}' : J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$. Аналогично проверим для

1. $z \notin D' \Rightarrow \begin{cases} J_\Gamma(z) = 0 \\ J_{\delta_i}(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$

2. $z \in A \, (z = a_i) \Rightarrow \begin{cases} J_{-\delta_i}(a_i) = -1 \\ J_{-\delta_j}(a_i) = 0 \; (i \neq j) \\ J_{\gamma_k}(a_i) = 0 \\ J_\Gamma(a_i) = 1 \end{cases} \Rightarrow J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$

Тогда по теореме Коши для многосвязной области $\tilde{D}$:

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z)dz = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \int_{\delta_i} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz \Rightarrow 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \text{res}_{a_i}(f) = \int_\Gamma f(z)dz$$

□

Следствие. *Если a – УОТ* $\Rightarrow res_a f = 0$

Следствие. *Если a – полюс m-ого порядка* $\Rightarrow$

$$res_a f = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left(f(z)(z-a)^m\right)^{(m-1)}$$

Доказательство. f имеет вид

$$f = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Тогда

$$\mathrm{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left(f(z)(z-a)^m\right)^{(m-1)}$$

То есть по сути $m-1$ коэффициент функции $f(z)(z-a)^m$. □

18 Лемма Жордана...

Теорема 18.1. *Пусть g – непрерывная функция в* $\{z \mid Im(z) \geqslant 0, |z| > R'\}$*, причём* $\max_{\Gamma_R}|g| \overset{R\to\infty}{\to} 0$*, где* $\Gamma_R = \{z \mid Im(z) \geqslant 0, |z| = R\}$*. Тогда*

$$\forall \alpha > 0: \int_{\Gamma_R} g(z)e^{i\alpha z}dz \to 0, R\to\infty$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\int_{\Gamma_R}|e^{i\alpha z}||dz|$ равномерно ограничен. (то есть $\exists M > 0\,\forall R > R': \int_{\Gamma_R}|e^{i\alpha z}||dz| \leqslant M$).

Пусть $z = Re^{i\varphi}, \varphi \in (0,\pi)$, тогда очевидно,

$$|e^{i\alpha z}| = e^{\mathrm{Re}(i\alpha z)} = e^{-R\alpha\sin(\varphi)}$$

Теперь распишем интеграл

$$\int_{\Gamma_R}|e^{i\alpha z}||dz| = \int_0^{\pi} e^{-R\alpha\sin\varphi}Rd\varphi = 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\alpha\sin\varphi}d\varphi$$

Вспомним, что $\sin\varphi$ вогнут на $[0,\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$. Продолжим цепочку неравенств

$$2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\alpha\sin\varphi}d\varphi \leqslant 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R\alpha\varphi}d\varphi = \frac{\pi}{\alpha}\int_0^{R\alpha} e^{-t}dt \leqslant \frac{\pi}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{\pi}{\alpha}$$

□

19 Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

Теорема 19.1. *Принцип аргумента.*

Пусть $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \cdots - \gamma_n, D$ *– область, ограниченная* $\Gamma, A := \{a_1, \cdots, a_k\} \subseteq D, f$ *голоморфна в* $D' \setminus A, D' \supset D$*.* a_j *– полюса функции f и* $\forall z \in \Gamma: f(z) \neq 0$*. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'}{f}dz = J_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma} f = N - P$$

где N и P – число нулей и полюсов f в D с учётом их кратностей соответственно.

Доказательство. Из определения f, можем её представить в виде

$$f = \frac{(z-b_1)^{n_1}\cdots(z-b_\eta)^{n_\eta}}{(z-a_1)^{p_1}\cdots(z-a_k)^{p_k}}g(z)$$

где g – голоморфна в $\overline{D}$ и не содержит там нулей.

Тогда

$$\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{\eta}\frac{n_i}{z-b_i} - \sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{z-a_i} + \frac{g'}{g}$$

Почему это так? Рассмотрим, например, $f(z) = (z-b_k)^{n_k}g(z)$, тогда $f'(z) = n_k(z-b_k)^{n_k-1}g(z) + (z-b_k)^{n_k}g'(z)$. Тогда выполнено следующее:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_k}{z-b_k} + \frac{g'}{g}$$

Причём после интегрирования первое слагаемое даст нам приращение, а второе ноль, так как функция голоморфная. На случай нескольких нулей и полюсов обобщается аналогично.

Значит

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f}dz = \sum_{i=1}^{\eta} n_i J_\Gamma(b_i) - \sum_{i=1}^{k} p_i J_\Gamma(a_i) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g'}{g}dz = \sum_{i=1}^{\eta} n_i - \sum_{i=1}^{k} p_i = N - P$$

так как $J_\Gamma(b_i) = 1, J_\Gamma(a_i) = 1$ □

Теорема 19.2. *Теорема Руше.*

Пусть f, g – голоморфные в $\overline{D}$, где D ограничивает $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \cdots - \gamma_n$. Пусть $|f| > |g|$ на Γ. Тогда

$$N_f(D) = N_{f+g}(D)$$

где $N_f(D)$ – число нулей функции f в области D.

Доказательство. Заметим, что $|f| > 0$ и $|f+g| > 0$ на Γ.

$|f|$ по условию, $|f| > |g| \geqslant 0, |f+g|$ по неравенству треугольника.

Тогда по принципу аргументов

$$f + g = f\cdot\left(1+\frac{g}{f}\right):\ \triangle_\Gamma(f+g) = \triangle_\Gamma f + \triangle_\Gamma\left(1+\frac{g}{f}\right)$$

Но $|g| < |f|$, то есть $\left|\frac{g}{f}\right| < 1 \Rightarrow \triangle_\Gamma\left(1+\frac{g}{f}\right) = 0$.

Почему это так? Заметим, что образ этой функции находится от числа 1 на расстоянии не больше 1:

$$\left|\left(1+\frac{g}{f}\right) - 1\right| = \left|\frac{g}{f}\right| < 1$$

Из геометрических соображений это значит, что мы не сможем сделать ни одного оборота вокруг нуля, ну а мы знаем, что индекс функции по циклу – это количество оборотов образа вокруг нуля.

Тогда $\triangle_\Gamma(f+g) = \triangle_\Gamma(f) \Rightarrow$ по принципу аргументов (так как функции голоморфны $\Rightarrow$ нет полюсов):

$$N_f(D) = N_{f+g}(D)$$

□

Теорема 19.3. *Основная теорема алгебры.*

Пусть p – многочлен степени n с коэффициентом из $\mathbb{C}$. Тогда p имеет в $\mathbb{C}$ ровно n нулей с учётом кратности.

Доказательство. Введём для p:

$$p(z) = [f := z^n] + [g := c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0]$$

p голоморфно в $\overline{D} = \overline{O}_R(0)$ при $R > 1$.

Оценим

$$|g| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |c_i z^i| \leqslant n \cdot \max_i |c_i| R^{n-1}$$

И возьмём

$$R > n \cdot \max_i |c_i|$$

тогда $|f| = R^n > n \cdot \max_i |c_i| \cdot R^{n-1} \geqslant |g|$.

Применяя теорему Руше, получим

$$N_D(p) = N_D(f) = n$$

□

20 Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области...

Теорема 20.1. *Пусть f голоморфна в области D. Пусть $z_0 \in D, f(z_0) = w_0$, причём z_0 – нуль n-го порядка. Тогда*

$$\exists O_\rho(w_0)\, \exists O_r(z_0) : \ \forall w^* \in \dot{O}_\rho(w_0)$$

уравнение $f(z) = w^*$ имеет ровно n решений в $\dot{O}_r(z_0)$.

Доказательство. Пусть сначала $w_0 = 0$. Тогда точка z_0 – изолированный ноль функции f и f', поскольку $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (если предположить противное, получим, что $f \equiv 0$ по теореме о единственности). Выберем $\delta > 0$ такое, что других нулей на $\overline{B_\delta}(z_0)$ у этих функций нет.

Положим $\varepsilon = \min_{|z-z_0|=\delta} |f(z)|$. Зафиксируем $\tilde{w} \in \dot{B}_\varepsilon(w_0)$ и проверим условие теоремы Руше для функции f и $-\tilde{w}$ на области $B_\delta(z_0)$:

$$|f(z)| \geqslant \varepsilon > |-\tilde{w}| \text{ при } |z - z_0| = \delta$$

Значит уравнение $f(z) = \tilde{w}$, как и $f(z) = 0$, имеет n корней на $B_\delta(z_0)$ с учётом кратности. Очевидно, что f имеет ровно 1 корень кратности n, так как первые $n-1$ производные равны нулю.

Осталось доказать, что все нули функции $f(z) - \tilde{w}$ имеют порядок 1, это правда, поскольку $(f - \tilde{w})' \neq 0$ на $\dot{B}_\delta(z_0)$ (в силу того, что мы выбирали такую δ-окрестность, что f' не имеет в ней других нулей). Если же $w_0 \neq 0$, то доказанную часть теоремы можно применить к функции $f - w_0$. □

Теорема 20.2. *Принцип сохранения области или открытости.*

Пусть $f \not\equiv const$ – голоморфна в области D. Тогда $f(D)$ тоже является областью. Если $U \subseteq D$ и U – открыто, то $f(U)$ тоже открыто

Доказательство. Докажем, что множество $f(G)$ – открытое. Пусть $w_0 \in f(G)$ тогда $\exists z_0 \in G: \ f(z_0) = w_0$. Если $f'(z_0) \neq 0$, то по теореме об обратной функции $\exists \delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\forall w \in B_\varepsilon(w_0)$ уравнение $f(z) = w$ имеет единственное решение на $B_\delta(z_0)$, поэтому $B_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$. Если же наоборот, $f'(z_0) = 0$, то в силу непостоянности f, $\exists n \in \mathbb{N}: \ n \geqslant 2$ такое, что $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, и применима теорема о локальной структуре отображения, дающая аналогичный результат.

Теперь покажем связность множества $f(G)$. Пусть $w_1, w_2 \in f(G)$ тогда для некоторых $z_1, z_2 \in G$ выполнено $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$. Пусть γ – кривая, соединяющая точки z_1 и z_2, такая, что $\gamma \subset G$. Тогда кривая $\Gamma = f(\gamma)$ соединяет точки w_1 и w_2. □

Определение 20.1. f голоморфная в D называется **однолистной**, если

$$\forall z_1, z_2: \ z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

Определение 20.2. f **локально однолистна**, если она однолистна в некоторой области $O(z_0)$.

Утверждение 20.1. *Если $f'(z_0) = 0$, то она неоднолистна.*

Утверждение 20.2. *Найдётся достаточно малая окрестность z_0, в которой f константа.*

21 Принцип максимума модуля и лемма Шварца

Теорема 21.1. *Принцип максимума модуля.*

Пусть f голоморфна в D и $f \not\equiv const$. Тогда $|f|$ не может достигать максимума в $z \in D$.

Доказательство. От противного. Пусть $z_0 \in D$:

$$\forall z \in D: \ |f(z_0)| \geqslant |f(z)|$$

Рассмотрим $w_0 = f(z_0)$. Тогда

$$\forall w \in f(D): \ |w_0| \geqslant |w|$$

То есть $f(D) \subset \overline{O}_{|w_0|}(0)$, а $|w_0|$ лежит на его границе $\Rightarrow$ противоречие с принципом сохранения открытости. □

Лемма 21.1. *Шварца.*

Пусть $f(z)$ в $D = \{z \mid |z| < 1\}$ голоморфна, а 0 – неподвижная точка $f(z)$ и $\forall z \in D$: $|f(z)| \leqslant 1$. Тогда

1. $\forall z \in D: \ |f(z)| \leqslant |z|; \quad |f'(0)| \leqslant 1$
2. *Если $\exists z_0$: в любом из неравенств предыдущего пункта достигается равенство, то $f(z) = ze^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$*

Доказательство. 1. Рассмотрим $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, она голоморфна в $\dot{O}_1(0)$, причём точка 0 – устранимая особая. Тогда

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, z \neq 0 \\ f'(z), z = 0 \end{cases}$$

Голоморфна в D.

Тогда в $O_r(0)$ по принципу максимумов:

$$\max_{|z| \leqslant r} |g| = \max_{|z|=r} |g| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \frac{1}{r}$$

Фиксируем $z \in D$. Тогда

$$\forall r \in (|z|, 1) : \ |g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$$

Перейдём к пределу $r \to 1$ и получим $|g(z)| \leqslant 1$, тогда $|f(z)| \leqslant |z|$. Из этого неравенства как раз следует $|f'(0)| \leqslant 1$:

$$\left| \frac{f(0) - f(z)}{0 - z} \right| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leqslant 1$$

2. Пусть $|f(z_0)| = |z_0|$ при каком-то $z_0 \neq 0, z_0 \in D$. Тогда

$$|g(z_0)| = 1 \Rightarrow g(z) \equiv const$$

по принципу максимума, причём $|g(z)| = 1 \Rightarrow g(z) = e^{i\theta} \Rightarrow f(z) = z \cdot e^{i\theta}$. Если $|f'(0)| = 1 \Rightarrow g(0) = 1 \Rightarrow$ аналогично берём $z_0 = 0$.

□

22 Дробно-линейные отображения. . .

Определение 22.1. Пусть f – отображение из D в $\mathbb{C}$, которое переводит гладкие кривые в гладкие кривые. Оно называется **конформным** в точке z_0, если оно сохраняет углы между кривыми в точке z_0.

Утверждение 22.1. *Если f – голоморфная функция и $f'(z_0) \neq 0$, то f конформно в точке z_0.*

Лемма 22.1. *1. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$, тогда f конформна в $a \Leftrightarrow f$ имеет полюс первого порядка.*

2. Пусть $a = \infty$, $\lim_{z \to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$, тогда f конформна в $a \Leftrightarrow res_\infty f \neq 0$

3. Пусть $a = \infty$, $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$, тогда f конформна в $a \Leftrightarrow f$ имеет полюс первого порядка.

Доказательство. 1. f конформна в $a \Leftrightarrow f'(a) \neq 0 \Leftrightarrow$ для $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ выполняется

$$g'(a) \neq 0 \Leftrightarrow g(z) = g'(a)(z - a) + o(z - a) \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{g'(a)(z - a)}(1 + o(1))$$

то есть f имеет простой полюс.

2. Знаем, что
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$$
Определим
$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = A + g'(0)w + o(w), |w| \to 0$$
Тогда
$$\lim_{w\to 0}\frac{g(w)-A}{w} \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} z(f(z)-A) = -\mathrm{res}_\infty f \neq 0$$
3. Знаем, что
$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$
Тогда для
$$g(w) := \frac{1}{f(\frac{1}{w})}$$
будет верно, что $w = 0$ – УОТ, причём $g(0) = 0$.

Значит
$$g(w) = g'(0)w + o(w)$$
Тогда критерием конформности будет $g'(0) \neq 0$, то есть
$$\lim_{w\to 0}\frac{g(w)}{w} \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty}\frac{z}{f(z)} \neq 0$$
то есть f имеет простой полюс (П1П).

□

Определение 22.2. $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ – **дробно линейное отображение**, если $L(z) \neq const$, то есть $ad - bc \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех ДЛО.

Утверждение 22.2. $\mathfrak{M}$ *– группа относительно композиции.*

Доказательство. Подставим и проверим:
$$\frac{a_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+b_1}{c_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+d_1} = \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)}$$
Заметим, что коэффициенты нового элемента могут быть получены перемножением матриц (это, кстати, доказывает, что сохраняется свойство ненулевого определителя):
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$
Для поиска обратного элемента в группе, возьмём обратную матрицу (существует, так как определитель ненулевой $ad - bc \neq 0$) – это будет матрица коэффициентов искомого элемента. □

Утверждение 22.3. *Пусть $L \in \mathfrak{M}, L$ – биекция $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Тогда L – конформное отображение в любой точке.*

Доказательство. Посчитаем производную

$$L'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

Если $z \neq \infty, z \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0$, то $cz + d \neq 0 \Rightarrow L'(z) \neq 0 \Rightarrow$ конформное.

Пусть $c \neq 0, z = \infty$. Если $c \neq 0$, то в $z = \infty$ УОТ, хотим проверить $\text{res}_{\infty} L \neq 0$ из чего следовала бы конформность.

Считаем вычет:

$$\lim_{z\to\infty} z \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right) = \lim_{z\to\infty} \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$$

При $c \neq 0, z = -\frac{d}{c}$ – действительно, простой полюс (1 порядка).

При $c = 0$ – линейная функция, которая, очевидно, конформная в ∞ – простой полюс.

□

23 Круговое свойство и принцип симметрии

Теорема 23.1. *При ДЛО образом окружности или прямой будет окружность или прямая.*

Доказательство.

1. Рассмотрим афинное отображение $w = az + b$ (когда $c = 0$).

   Знаем из аналитической геометрии, что окружность переходит в окружность, а прямая в прямую.

2. При $c \neq 0$ представим отображение в виде

   $$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{-ad + bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$$

   Введём обозначения

   $$w = \alpha + \beta t; \quad \alpha := \frac{a}{c}; \quad \beta := \frac{-ad + bc}{c}; \quad t := \frac{1}{\zeta}; \quad \zeta := cz + d$$

   Видим, что $w(t), \zeta(t)$ – афинные, проверим выполнимость утвеждения теоремы для $z = \frac{1}{\zeta}$.

   Положим $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда наша искомая окружность или прямая могла быть описана таким уравнением:

   $$A(\xi^2 + \eta^2) + B\xi + C\eta + D = 0, 4AD < B^2 + C^2$$

   задаёт невырожденную окружность при $A \neq 0$ и невырожденную прямую при $A = 0$. Полагая $t = \frac{1}{\xi}$, учитывая $\xi^2 + \eta^2 = \zeta\overline{\zeta}, \xi = \frac{\zeta + \overline{\zeta}}{2}, \eta = \frac{\zeta - \overline{\zeta}}{2i}$, запишем уравнение в виде

   $$A\zeta\overline{\zeta} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i} \right) \zeta + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i} \right) \overline{\zeta} + D = 0$$

   и отсюда получим

   $$A + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i} \right) \overline{t} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i} \right) t + Dt\overline{t} = 0$$

что задаёт окружность при $D \neq 0$ и прямую при $D = 0$.

Суперпозиция преобразований, переводящих окружности и прямые в окружности и прямые, переводит окружности и прямые в окружности и прямые.

□

Следствие. *Окружность или прямая γ переходит при ДЛО в прямую, если нуль знаменателя принадлежит γ, и в окружность иначе.*

Это называется круговым свойством.

Определение 23.1. Точки z_1 и z_2 называются **симметричными относительно окружности** и центром в точке z_0 радиуса $R > 0$, если они лежат на одном луче, исходящем из точки z_0, и $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$.

Утверждение 23.1. *Следующие определения эквивалентны:*

1. $\begin{cases} \arg(z_1 - z_0) = \arg(z_2 - z_0) \\ |z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2 \end{cases}$

2. $(z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_1)} = R^2$

3. *Точки пересечения изначальной окружности с $\forall$ другой проходящей через z_1, z_2 являются точками касания.*

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ очевидно.

$(2 \Rightarrow 3)$.

Пусть z' – точка принадлежащая обеим окружностям. По условию

$$|z' - z_0|^2 = R^2 = |z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0|$$

Значит $z' - z_0$ – касательная к произвольной окружности.

$(3 \Leftarrow 2)$.

$z' - z_0$ – касательная, значит

$$|z' - z_0|^2 = |z_2 - z_0| \cdot |z_1 - z_0|$$

Значит $|z_2 - z_0| \cdot |z_1 - z_0| = R^2$. □

Теорема 23.2. *При ДЛО пара симметричных точек относительно окружности или прямой γ переходит в пару симметричных точек относительно образа γ.*

Доказательство. Очевидно из 3 эквивалентного определения симметрии, так как ДЛО сохраняют углы, а значит все касательные останутся касательными. □

24 Общий вид конформных отображений...

Теорема 24.1. *Любое конформное отображение из $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ – это ДЛУ.*

Доказательство. Из предыдущих свойств, очевидно, что каждое ДЛУ обладает всеми нужными свойствами.

Если же f произвольный автоморфизм расширенной комплексной плоскости, то $\exists z_0 \in \overline{\mathbb{C}} : \ f(z_0) = \infty$.

1. Если $z_0 \in \mathbb{C}$, то f имеет полюс первого порядка (так как f конформно в z_0). Рассмотрим
$$h(z) := \frac{\operatorname{res}_{z_0} f}{z - z_0} - f(z)$$
Голоморфна кроме z_0, а z_0 – её УОТ. Причём
$$\lim_{z\to\infty} h(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$$
(из-за биективности мы не можем попасть в бесконечность из двух разных точек).
Значит h – целая и ограниченная $\Rightarrow h \equiv const$ (по теореме Луивилля) $\Rightarrow f$ – ДЛУ.

□

Определение 24.1. Введём красивое обозначение для единичного открытого шара
$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

Теорема 24.2. *Общий вид конформного отображения $\mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$:*
$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - z\overline{a}}, |a| < 1, \theta \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Очевидно, что $\exists a = f(0)$. Тогда введём
$$\varphi(w) := \frac{w - a}{1 - \overline{a}w}, h := \varphi \circ f$$
Заметим, что h – конформное отображение, причём $h(0) = 0$.

Тогда по лемме Шварца ($|h(z)| = 1$ при $|z| = 1$) верно $|h(z)| \leqslant |z|$.

h^{-1} тоже автоморфизм и переводит 0 в 0. Тогда применим лемму Шварца для неё $|h^{-1}(w)| \leqslant |w| \Rightarrow |w| \leqslant |h(w)| \leqslant |w| \Rightarrow$ равенство выполняется $\Rightarrow h$ – поворот $\Leftrightarrow h = e^{i\theta}z \Rightarrow f = \varphi^{-1} \circ (e^{i\theta}z) \in \mathfrak{M}$ □

25 Теорема Римана об отображении. Доказательство единственности.

Теорема 25.1. *Римана. (Доказательство единственности)*

Если D – односвязная область с границей из более одной точки, то D конформно эквивалентно $\mathbb{D}$.

Другими словами, $\exists f : D \to \mathbb{D}$ – конформное отображение. При этом, если потребовать, чтобы $f(z_0) = 0$ и $\arg f'(z_0) = \theta$, то такая f единтственна.

Доказательство. Единственность очевидна, так как можно рассмотреть композицию двух автоморфизмов на $\mathbb{D}$, причём $0 \mapsto 0 \Rightarrow$ по лемме Шварца мы знаем её вид ($e^{i\theta}z$). Фиксирурем θ и получаем отображение единственным образом. □

26 Функция Жуковского

Определение 26.1. Функцией Жуковского называется

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

В каждой точке $z \notin \{0, \pm 1, \infty\}$ функция конформна. В точке 0:

$$g(z) := \frac{1}{w(z)} = \frac{2z}{z^2 + 1}$$

Эта функция в нуле регулярна и имеет ненулевую производную, а значит, конформна в нуле. В точке ∞:

$$\varphi(z) := w\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right)$$

Заметим, что это та же w, и в силу конформности в нуле, конформность в бесконечности очевидна.

Пример. Пусть задана окружность

$$\gamma_r = \{z \mid |z| = r, r \neq 1\}$$

Образом под действием функции Жуковского будет $f(z) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$

При фиксированном r преобразуем к виду $f(z) = a\cos\varphi + ib\sin\varphi =: u + iv$.

Тогда

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

Эллипс с фокусами $a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow$ фокусы ± 1.

Пример. Пусть задан луч

$$l_\varphi = \{z \mid z = re^{i\varphi}, r > 0\}, \varphi \in [-\pi, \pi) \setminus \left\{0, \pm\frac{\pi}{2}, -\pi\right\}$$

Воспользовавшись формулой из предыдущего примера, в условиях, что теперь φ фиксирован, получим следующее:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$$

Гипербола с фокусами в $\pm(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \pm 1$.

27 Конформные отображения, осуществляемые степенной и экспоненциальной функциями

Пример. Рассмотрим $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$.

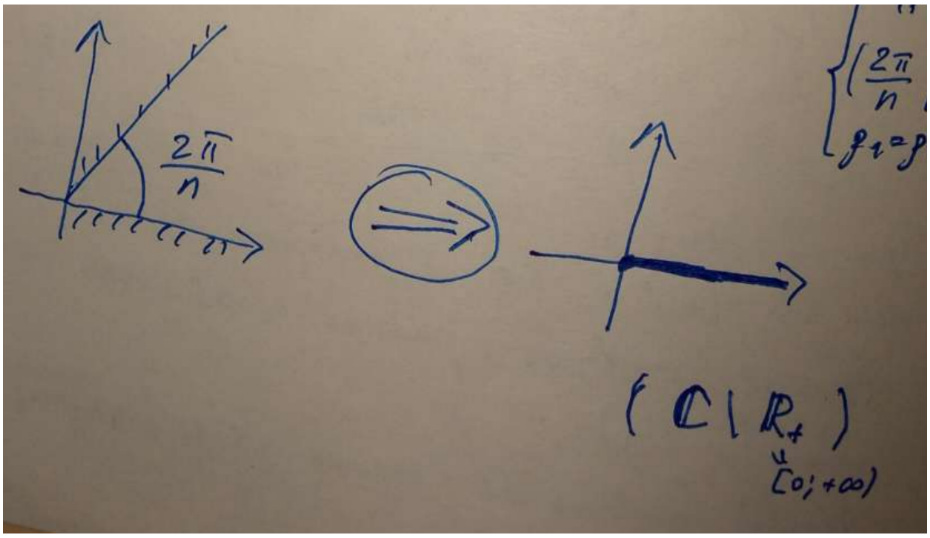
Утверждается, что она локально однолистна в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, так как $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$.

Причём

$$z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow \rho_1^n e^{i\varphi_1 n} = \rho_2^n e^{i\varphi_2 n} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{2\pi}{n} \mid \varphi_1 - \varphi_2 \text{ делит нацело} \\ \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$

Также к нему есть обратное отображение

$$f^{-1}(w) = |w|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\arg(w)}$$



Пример. Рассмотрим $f = e^z$.

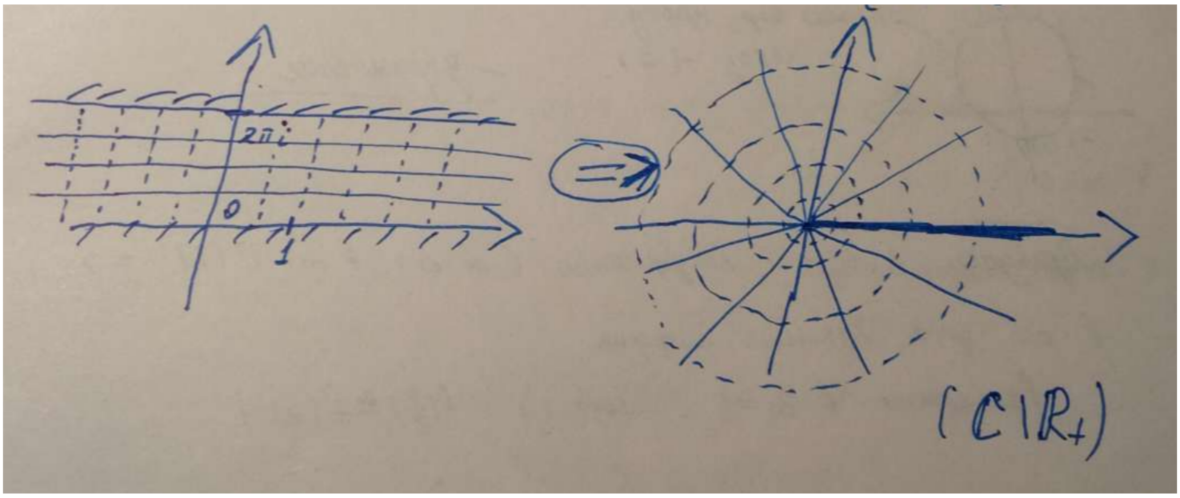
Утверждается, что f локально однолистна в $\mathbb{C}$, так как $f' = e^z \neq 0$.

Причём

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi \mid y_1 - y_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

По аналогии, обратное отображение также конформно

$$f^{-1}(w) = \ln|w| + i\arg(w), \ \arg(w) \in (0, 2\pi) \text{ - ветвь корня}$$



28 Локально равномерная сходимость и теоремы Вейерштрасса

Определение 28.1. Пусть f_n определена в области D. Тогда f_n локально равномерно сходится к f в области D, если

$$\forall z_0 \in D\ \exists \delta > 0 :\ O_\delta(z_0) \subset D :\ f_n \overset{O_\delta(z_0)}{\rightrightarrows} f$$

Утверждение 28.1. *Эквивалентное определение локально равномерной сходимости:*

$$\forall K \text{ - компакт} \subset D :\ f_n \overset{K}{\rightrightarrows} f$$

Доказательство. $(2 \Rightarrow 1)$ В качестве компактов возьмём $\overline{O}_\delta(z_0)$

$(1 \Rightarrow 2)$ Компакт покрываем шарами, выбираем конечное подпокрытие и получаем $\rightrightarrows$. □

Теорема 28.1. *Пусть f_n голоморфны в D, f_n сходится к f локально равномерно в D. Тогда*

1. *f – голоморфна*
2. *$f_n^{(k)}$ локально равномерно сходится к $f^{(k)}$ в D*

Доказательство. 1. По теореме Морера достаточно проверить непрерывность f и

$$\int_{\Gamma \text{ - замкнутой}} f(z)dz = 0$$

Пусть $z_0 \in D, \overline{O}_r(z_0) \subset D$.

Используя определение с компактами получим, что $f_n \rightrightarrows f$ на $\overline{O}_r(z_0) \Rightarrow f$ непрерывна, как равномерный предел непрерывных.

Далее, пусть γ – кусочно гладкая кривая, замкнутая в $\overline{O}_r(z_0)$.

Так как

$$\left|\int_\gamma (f_n - f)dz\right| \leqslant \int_\gamma |f_n - f|dz \leqslant \varepsilon_n \int_\gamma dz = c\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$$

поэтому

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$$

Но

$$\int_\gamma f_n dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = 0 \Rightarrow f \text{ - голоморфна}$$

2. Напишем формулу Коши

Пусть $z_0 \in D, O_r(z_0) \subset D, z \in O_{\frac{r}{2}}(z_0)$. Тогда

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial O_r(z_0)} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}; \quad f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial O_r(z_0)} \frac{f_n(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}$$

Тогда

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{|f(\xi) - f_n(\xi)||d\xi|}{|\xi - z|^2} \right| \leqslant$$

$$\frac{1}{2\pi} \max_{\gamma_r} |f - f_n| \cdot \left| \int_{\gamma_r} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|^2} \right| \leqslant \frac{2}{\pi r^2} \max_{\gamma_r} |f - f_n| \cdot 2\pi r = c \max_{\gamma_r} |f - f_n| \to 0$$

При этом $c = \frac{4}{r} \Rightarrow$ стремление на самом деле равномерное на $O_{\frac{r}{2}}(z_0)$. Так можно сделать $\forall z_0 \Rightarrow$ по первому определению f' локально равномерно сходится к f в D. Дальше – очев индукция.

□

Теорема 28.2. *Пусть f_n голоморфна в D, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ локально равномерно сходится в области D. Тогда*

1. *$f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ – голоморфная функция*
2. *$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$*

Доказательство. $\tilde{f}_k := \sum_{n=1}^{k} f_n$ и применяем теорему Вейерштрасса. □