

Содержание

1	Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана	3
2	Связность. Теорема о голоморфной в области функции, производная которой равна нулю.	4
3	Теорема об обратной функции	5
4	Степенные ряды. Формула Коши-Адамара...	6
5	Степенные ряды. Свойства экспоненты и тригонометрических.	8
6	Первообразная и полный дифференциал в области. Условия...	9
7	Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области	10
8	Интеграл Коши и его свойства	12
9	Интегральная формула Коши для круга...	13
10	Теорема Морера. Теорема о среднем.	14
11	Целые функции и теорема Луивилля	14
12	Ряд Тейлора и теорема единственности...	15
13	Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки...	16
14	Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши...	18
15	Разложение голоморфной функции в ряд Лорана...	21
16	Изолированные особые точки	22
17	Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах.	24
18	Лемма Жордана...	25
19	Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.	25
20	Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области...	27
21	Принцип максимума модуля и лемма Шварца	28
22	Дробно-линейные отображения. ...	29
23	Круговое свойство и принцип симметрии	31
24	Общий вид конформных отображений...	32

25 Теорема Римана об отображении. Доказательство единственности.	33
26 Функция Жуковского	34
27 Конформные отображения, осуществляемые степенной и экспоненциальной функциями	34
28 Локально равномерная сходимость и теоремы Вейерштрасса	36

1 Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана

Определение 1.1. Окрестностью назовём

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

Проколотой окрестностью назовём

$$\dot{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

Замкнутой окрестностью назовём

$$\overline{B}_r(z) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

Замечание. Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta x &:= x - x_0; & \Delta y &:= y - y_0; & \Delta z &:= z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \\ \Delta u &:= u(x, y) - u(x_0, y_0); & \Delta v &:= v(x, y) - v(x_0, y_0); & \Delta f &:= f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta u + i\Delta v \end{aligned}$$

где $f \equiv u + iv$; $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1.2. Говорят, что $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ дифференцируема в точке z_0 , если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \rightarrow 0$$

Лемма 1.1. $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ дифференцируема в $z_0 \Leftrightarrow \exists f'(z_0), A = f'(z_0)$.

Теорема 1.1. *Условие Коши-Римана.*

$f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ дифференцируема в z_0 тогда и только тогда, когда

- $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в (x_0, y_0)
- Выполняется условие Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Доказательство. (\Rightarrow)

Пусть

$$\exists f'(z_0) = a + ib = A \in \mathbb{C}$$

Значит, по определению дифференцируемости

$$\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z); \quad \alpha(\Delta z) := \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$$

Где $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z), |\Delta z| \rightarrow 0$

Тогда, раскрыв это выражение по каждой координате, получим

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \end{cases}$$

Из того, что $|\alpha_1| \leq |\alpha(\Delta z)|$ и $|\alpha_2| \leq |\alpha(\Delta z)| \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = o(\Delta z), |\Delta z| \rightarrow 0$.

Значит, u дифференцируема, причём

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b$$

Аналогично для v , причём

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

Видим, что УКР выполняется.

(\Leftarrow)

Пусть u, v дифференцируемы в (x_0, y_0) и выполняется УКР. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) = \\ \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \alpha_1(\Delta z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1(\Delta z) + i\alpha_2(\Delta z) \end{aligned}$$

Значит,

$$\exists f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

2 Связность. Теорема о голоморфной в области функции, производная которой равна нулю.

Определение 2.1. Множество $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ называется **связным**, если не существует открытых G_1, G_2 :

1. $G_1 \cup G_2 \supseteq E$
2. $E \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$
3. $E \cap G_1 \neq \emptyset$ и $E \cap G_2 \neq \emptyset$

Определение 2.2. Непустое открытое связное множество в $\overline{\mathbb{C}}$ называется **областью**.

Определение 2.3. Область D называется **односвязной**, если $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ – связно.

Определение 2.4. Функция $u : G \rightarrow \mathbb{R}, G \subseteq \mathbb{R}^2$ – область, причём

$$u \in C^2(G), \Delta u = 0$$

где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, называется **гармонической**.

Определение 2.5. Функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, где $G \subseteq \mathbb{C}$ – область, называется **регулярной (голоморфной)**, если

$$\forall z \in G \exists f'(z)$$

Определение 2.6. Функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $G \subseteq \mathbb{C}$ называется **регулярной в точке** $z_0 \in G$, если

$$\exists r > 0, B_r(z_0) \subseteq G : f \text{ регулярна на } B_r(z_0)$$

Теорема 2.1. Пусть f голоморфна в области D и

$$\forall z \in D : f'(z) \equiv 0$$

Тогда $f \equiv \text{const}$

Доказательство. Любые $(x_0, y_0) \in D$ лежат вместе с каким-то отрезком $[(x_0, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)]$. Тогда

$$f' = u_x + v_x i = v_y - u_y i \Rightarrow u_x \equiv v_x \equiv 0; u_y \equiv v_y \equiv 0$$

Применим теорему Лагранжа к $u(x, y)$:

$$|u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)| = \Delta y |u'(x_0, \xi)| = 0 \Rightarrow u(x_0, y_0 + \Delta y) = u(x_0, y_0)$$

Аналогично к $v(x, y) \Rightarrow f \equiv \text{const}$ на всех вертикальных отрезках.

Аналогично на горизонтальных. Тогда $f \equiv \text{const}$ на D в силу связности. \square

3 Теорема об обратной функции

Теорема 3.1. Пусть $f : G \rightarrow H \subseteq \mathbb{C}$, $g : H \rightarrow \mathbb{C}$ регулярны. Тогда $\zeta(z) = g(f(z))$ также регулярна, причём

$$\forall z \in G : \zeta'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

Доказательство. Зафиксируем $z_0 \in G, w_0 = f(z_0) \in H$.

Из дифференцируемости

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z), |\Delta z| \rightarrow 0; \quad \Delta g = g'(w_0)\Delta w + o(\Delta w), |\Delta w| \rightarrow 0$$

Пусть $\Delta w = \Delta f$, тогда

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = g'(w_0) \frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} g'(w_0)f'(z_0) + 0$$

\square

Теорема 3.2. Об обратной функции.

Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ регулярная и непрерывно дифференцируема на G . Пусть $z_0 \in G, w_0 = f(z_0), f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists B_\delta(z_0), B_\varepsilon(w_0)$, такие, что

1. $\forall z \in B_\delta(z_0) : f'(z) \neq 0$
2. $\forall \hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$ уравнение $\hat{w} = f(z)$ имеет в $B_\delta(z_0)$ единственное решение \hat{z} , то есть на $B_\varepsilon(w_0)$ определена обратная функция $g : B_\varepsilon(w_0) \rightarrow B_\delta(z_0)$, то есть

$$\forall w \in B_\varepsilon(w_0) : f(g(w)) = w$$

3. g регулярна на $B_\varepsilon(w_0)$, причём

$$\forall w \in B_\varepsilon(w_0) : g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

Доказательство. Первые два пункта выполняются благодаря обычной теореме об обратной функции из матана.

Покажем, что мы имеем право применять ту самую теорему, для этого нам нужен ненулевой якобиан. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Имеем отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. В силу непрерывной дифференцируемости этих двух функций запишем якобиан и преобразуем согласно УКР:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2 \Rightarrow J(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

Третий пункт выполняется благодаря предыдущей теореме:

$$g(f(z)) = z \Rightarrow g'(f(z))f'(z) = 1 \Rightarrow g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} = g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

□

4 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара...

Определение 4.1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ сходится, если сходится последовательность $\{\sum_{k=1}^n g_k(z)\}_{n=1}^{\infty}$. Сходимость бывает **условной** и **абсолютной** (когда сходится ряд из модулей).

Определение 4.2. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$$

Теорема 4.1. Признак Вейерштрасса.

Пусть

$$\forall n \forall z : |g_n(z)| \leq \alpha_n$$

причём $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ сходится абсолютно равномерно.

Теорема 4.2. Пусть $\frac{1}{R} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, $R \in [0, +\infty]$. Тогда

1. Если $|z| \leq r < R$, то степенной ряд сходится равномерно и абсолютно.
2. Если $|z| > R$, то ряд расходится
3. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ голоморфна при $|z| < R$ и её производная получается почленным дифференцированием изначального ряда: $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Доказательство. 1. Пусть $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$. По определению верхнего предела

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$$

Тогда (в условиях текущего пункта):

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n z^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \frac{r}{\rho} < 1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимся числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказали.

2. Пусть $|z| > R$, то есть $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$. Значит по плотности действительных чисел:

$$\exists \varepsilon > 0 : \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z| \geq \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$

По определению верхнего предела:

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \forall k : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geq 1$$

Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

3. Заметим, что у $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ радиус сходимости такой же в силу $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, то есть ряд сходится при $|z| < R$. Причём $\exists r : |z| \leq r < R$. Также введём обозначения:

$$F_N(z) := \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^i; \quad H_N(z) := \sum_{i=N}^{+\infty} a_i z^i$$

Заметим, что частичная сумма $G_n = F'_n$, то есть равна производной соответствующей частичной суммы f .

Распишем производную f через частичные суммы:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} + \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \left(\frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} - F'_N(z_0) \right) + (F'_N(z_0) - g(z_0)) + g(z_0) + \left(\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} \right) \end{aligned}$$

Устремляя $N \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{n=N}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=N}^{\infty} \left[a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \right] \Rightarrow \\ & \left| \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю, как остаток сходящегося ряда.

□

5 Степенные ряды. Свойства экспоненты и тригонометрических.

Определение 5.1. Голоморфные в \mathbb{C} функции называют **целыми**.

Определение 5.2. Определим экспоненту

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$R_{\text{сходимости}} = +\infty \Rightarrow e^z$ целая.

Лемма 5.1. Свойства экспоненты:

1. $(e^z)' = e^z$
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
3. $\forall z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$

Доказательство. 1. Сразу следует из пункта 3 предыдущей теоремы. (о почленном дифференцировании рядов)

2. Покажем эквивалентное свойство $e^{a-z} e^z = e^a$. Пусть

$$g(z) := e^{a-z} e^z \Rightarrow g'(z) = -e^{a-z} e^z + e^{a-z} e^z = 0$$

А это значит, что $g \equiv \text{const}$, так как голоморфна.

Посчитаем $g(0) = e^{a-0} e^0 = e^a \Rightarrow g(z) \equiv e^a$, что и требовалось доказать.

3. $\forall z \in \mathbb{C}$ выполняется:

$$e^z e^{-z} = e^0 = 1$$

Значит в выражении $e^z e^{-z}$ никто не может быть нулём.

□

Определение 5.3. Определим тригонометрические функции на \mathbb{C} :

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Лемма 5.2. Свойства тригонометрических функций:

1. $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$
2. $|e^z| = e^{\text{Re}(z)}$
3. Если $e^{z+T} = e^z$, то $T = 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$

Доказательство. 1. Очевидно

2. Очевидно

3. Заметим, что

$$e^T = 1 \Leftrightarrow \text{Re } T = 0 \Leftrightarrow T = i\beta$$

Тогда

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \sin(\beta) = 1 \Leftrightarrow \beta = 2\pi k \Rightarrow T = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}$$

□

6 Первообразная и полный дифференциал в области. Условия. . .

Определение 6.1. Кривой γ называется класс эквивалентных параметризаций (отличающихся лишь скоростью движения параметра)

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_0, t_1]$$

Определение 6.2. Кривая γ называется **гладкой**, если существует параметризация

$$z(t) = x(t) + iy(t), x, y \in C^1([t_0, t_1]); \quad \forall t \in [t_0, t_1] : z'(t) \neq 0$$

Определение 6.3. Гладкая кривая γ называется **замкнутой**, если

$$z(t_0) = z(t_1); \quad z'(t_0 + 0) = z'(t_1 - 0)$$

Определение 6.4. Кривая γ называется **кусочно-гладкой**, если

$$\exists \{\theta_i\}_{i=0}^n : t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = t_1$$

что

$$\forall k = \overline{1, n} : \gamma|_{[\theta_{k-1}, \theta_k]} = z_k$$

причём

$$\forall k = \overline{1, n} : z_k(t), t \in [\theta_{k-1}, \theta_k] - \text{это гладкая кривая}$$

Определение 6.5. Пусть $g : G \rightarrow \mathbb{C}$, где G – область. Назовём g **первообразной** непрерывной функции $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, если g регулярна на G и

$$\forall z \in G : g'(z) = f(z)$$

Определение 6.6. Выражение $f(z)dz$ называется **полным дифференциалом** в области G , если существует первообразная g для f на G , то есть

$$f(z)dz = g'(z)dz$$

Теорема 6.1. Пусть $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на области G . Тогда:

1. Если $f dz$ – полный дифференциал на G , то для любой замкнутой КГК $\dot{\gamma} \subseteq G$ выполняется

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = 0$$

2. Если для любой замкнутой ломаной кривой γ выполняется равенство выше, то $f dz$ – полный дифференциал.

Замечание. Первый пункт выполняется для всех КУСОЧНО-ГЛАДКИХ КРИВЫХ, второй же требует выполнение лишь для ЛОМАНЫХ (класс кривых гораздо меньше чем в первом пункте).

Доказательство. 1. По условию $\exists g : G \rightarrow \mathbb{C}$, регулярная, такая, что $g'(z) = f(z)$. Тогда

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} g'(z(t))z'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(g(z(t)))dt = g(z(t_1)) - g(z(t_0)) = g(z(t_0)) - g(z(t_0)) = 0$$

2. Фиксируем $a \in G$ как начальную точку ломаной γ . Тогда $\forall z \in G : \exists \gamma_{az}$ – ломаная с началом в a и концом в z .

$$g(z) = \int_{\gamma_{az}} f(z) dz$$

причём хотим показать, что этот интеграл не зависит от γ_{az} , а лишь от z .

Действительно, если $\exists \gamma_{az} \not\sim \tilde{\gamma}_{az}$, то пусть $\dot{\gamma} = \gamma_{az} \sqcup \tilde{\gamma}_{az}^{-1}$, тогда по аддитивности интеграла

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z) dz = 0 = \int_{\gamma_{az}} f(z) dz - \int_{\tilde{\gamma}_{az}} f(z) dz$$

Докажем, что $\forall z : g'(z) = f(z)$. Рассмотрим $z_0 : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ и приращение $\Delta z : 0 < |\Delta z| < \varepsilon$. Тогда $z_0 + \Delta z \in G$. Рассмотрим

$$\frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0, z_0 + \Delta z]} f(z) dz$$

Значит

$$\left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0, z_0 + \Delta z]} (f(z) - f(z_0)) dz \right|$$

В силу непрерывности $f(z)$, найдём $r(\varepsilon)$ – радиус шара, где $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, тогда

$$\forall z \in B_{r(\varepsilon)}(z_0) \cap B_\varepsilon(z_0) : \left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0) \right| \leq \left| \frac{\varepsilon \min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}}{\min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}} \right| = \varepsilon$$

□

7 Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области

Лемма 7.1. Гурса.

Пусть G – область, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ регулярна. Тогда для любого треугольника из G (то есть такого, что $\partial\Delta \subseteq G$) верно

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

Доказательство. Зафиксируем $\Delta ABC \subseteq G$. Тогда будем рассматривать

$$I := \int_{\partial\Delta ABC} f(z) dz$$

Разобьём треугольник средними линиями:

$$\Delta ABC = \bigcup_{k=1}^4 \Delta_k$$

Тогда из аддитивности интеграла

$$I = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_k} f(z) dz$$

Докажем, что

$$\exists k_0 : \left| \int_{\partial \Delta_{k_0}} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4}$$

Очевидно от противного, так как триангуляции с ориентацией, то если бы все были меньше, то нельзя было бы набрать I .

Обозначим найдённый треугольник за $\Delta^1 := \Delta_{k_0}$, а $\Delta^0 := \Delta ABC$. Аналогично построению Δ^1 из Δ^0 можем построить бесконечную последовательность $\{\Delta^N\}_{N=0}^\infty$, и для них

$$\left| \int_{\partial \Delta^N} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^N}$$

Теперь заметим, что $P_N = \frac{P_0}{2^N}$, где P_N – периметр N -го треугольника. В силу компактности

$$\exists z_0 \in \bigcap_{N=1}^\infty \Delta^N$$

Так как f дифференцируема в z_0 , то по определению:

$$\exists B_{\delta_0}(z_0) \forall z \in B_{\delta_0}(z_0) : f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

А для o -малого верно:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 \leq \delta_0 \forall z \in B_{\delta_1}(z_0) : |o(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$$

Теперь можем расписать интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Delta^N} f(z) dz &= f(z_0) \int_{\partial \Delta^N} dz + f'(z_0) \int_{\partial \Delta^N} z dz - z_0 f'(z_0) \int_{\partial \Delta^N} dz + \int_{\partial \Delta^N} o(z - z_0) dz = \\ &= \int_{\partial \Delta^N} o(z - z_0) dz \end{aligned}$$

Интегралы по 1 и z равны нулю, так как они, очевидно, полные дифференциалы.

Причём полагаем N таким, что

$$\forall z \in \Delta^N : |z - z_0| < \delta_1$$

Тогда

$$\left| \int_{\partial \Delta^N} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial \Delta^N} |o(z - z_0)| \cdot |dz| \leq \varepsilon \int_{\partial \Delta^N} |z - z_0| \cdot |dz| \leq \varepsilon P_N^2 \leq \varepsilon \frac{P_0^2}{4^N}$$

Получили, что

$$|I| \leq 4^N \left| \int_{\partial \Delta^N} f(z) dz \right| \leq 4^N \varepsilon \frac{P_0^2}{4^N}$$

В силу произвольности ε : $I = 0$. □

Теорема 7.1. Коши для выпуклой области.

Пусть D – выпуклая область, f – голоморфна в $D \setminus \{0\}$, f – непрерывна в D . Тогда $\forall \gamma$ – кусочно-гладкой замкнутой кривой

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

Доказательство. По лемме Гурса

$$\forall \Delta \subseteq D : \int_{\partial \Delta} f dz = 0$$

Тогда мы можем триангулировать любую ломаную (в силу выпуклости) \Rightarrow по одной из теорем $f dz$ – полный дифференциал (нужны были непрерывность и нулевой интеграл по всем ломаным).

А как мы знаем, интеграл по любой замкнутой кривой от полного дифференциала нулевой. \square

8 Интеграл Коши и его свойства

Определение 8.1. Пусть γ – кусочно-гладкая кривая в \mathbb{C} . Тогда $\forall \varphi \in C(\gamma)$ (непрерывная на γ функции) определим **интеграл Коши**, как

$$F_n(z, \varphi) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

Теорема 8.1. *Свойства интеграла Коши:*

1. $F_n(z, \varphi)$ – голоморфна (\Rightarrow непрерывна) в $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2. $F'_n(z, \varphi) = n F_{n+1}(z, \varphi)$

Доказательство. Вначале покажем непрерывность для $n = 1$:

$$F_1(z, \varphi) - F_1(z_0, \varphi) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)(z - z_0)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi = (z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)$$

Введём $\delta = \rho(z_0, \gamma)$. Для $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ оно, очевидно, не равно нулю.

Тогда

$$\left| (z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \right| \leq \frac{\text{const}}{\delta^2} |z - z_0|$$

что и гарантирует непрерывность.

Из того же тождества

$$\frac{F_1(z, \varphi) - F_1(z_0, \varphi)}{z - z_0} = F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} F_1\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = F_2(z_0, \varphi)$$

Доказали голоморфность существованием производной.

Далее по индукции: пусть F_{n-1} голоморфна в D :

$$F'_{n-1}(z, \varphi) = (n-1) F_n(z, \varphi)$$

Распишем приращение с помощью умного нуля:

$$\begin{aligned} F_n(z, \varphi) - F_n(z_0, \varphi) &= \\ \int_{\gamma} \left[\left(\frac{1}{(\xi - z)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} \right) + \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^n} \right] \varphi(\xi) d\xi &= \\ (z - z_0) \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^n (\xi - z_0)} + F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \end{aligned}$$

Сходимость к нулю первого слагаемого доказывается аналогично предыдущему пункту с непрерывностью, а последние два слагаемых дают приращение непрерывной функции, которое также стремится к нулю при $z \rightarrow z_0$.

Поделим предыдущее выражение на $z - z_0$ и посчитаем производную:

$$\begin{aligned} \frac{F_n(z, \varphi) - F_n(z_0, \varphi)}{z - z_0} &= \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^n (\xi - z_0)} + \frac{F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \\ F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + F'_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) &= F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + (n-1)F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = \\ &= n \cdot F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = n \cdot F_{n+1}(z_0, \varphi) \end{aligned}$$

Таким образом, $F_n(z, \varphi)$ – бесконечно дифференцируемая. □

9 Интегральная формула Коши для круга...

Теорема 9.1. Пусть f – голоморфна в области D , причём $\overline{O_r(a)} \subset D$. Тогда

$$\forall z \in O_r(a) : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Доказательство. Фиксируем $z \in O_r(a)$:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z \end{cases}$$

$g(\xi)$ – голоморфна в $O_r(a) \setminus \{z\}$ (как отношение голоморфных функций) и непрерывна в $O_r(a) \Rightarrow \forall \gamma_r$ – замкнутого контура по теореме Коши:

$$\int_{\gamma_r} g(\xi) d\xi = 0$$

То есть

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = f(z) \left[\int_{\gamma_r} \frac{d\xi}{\xi - z} =: G(z) \right]$$

$G(z)$ – голоморфна в $O_r(a)$, $G' = \int_{\gamma_r} \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} \equiv 0 \Rightarrow G \equiv \text{const} \Rightarrow G(a) = 2\pi i \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

□

Следствие. 1. f – голоморфна в $D \Rightarrow f$ – интеграл Коши $\Rightarrow f'$ – голоморфна в D .

2. f – голоморфна в $D \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}$ – голоморфна в D .

3. В условии формулы Коши для круга:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad (1)$$

10 Теорема Морера. Теорема о среднем.

Теорема 10.1. *Мореры.*

Пусть f – непрерывна в области D и

$$\forall \overline{\Delta} \subseteq D : \int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

Тогда f – голоморфна в D .

Доказательство. Заметим, что $\overline{O_r}(a) \subseteq D$ – выпукло, поэтому применяем лемму о триангуляции ломаной треугольниками:

$$\forall z \in O_r(a) \exists F : F' = f$$

В этом круге по одному из следствий F голоморфна $\Rightarrow f$ – голоморфна в $O_r(a)$.

Это верно $\forall a \in D \Rightarrow f$ – голоморфна в D . □

Теорема 10.2. *О среднем.*

Пусть f – голоморфна в $\overline{O_r}(a) \subseteq D$, тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta}r) d\theta$$

Доказательство. Пусть $\xi = a + re^{i\theta}$. Тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

□

11 Целые функции и теорема Луивилля

Определение 11.1. f – *целая*, если f голоморфна в \mathbb{C} .

Теорема 11.1. *Луивилля.*

Если f – *целая* и

$$\exists M, m, R \forall z, |z| > R : |f(z)| < M \cdot |z|^m$$

Тогда $f(z)$ – *полином степени* $\leq m$.

Доказательство. Знаем, что

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, R_{\text{сх}} = \infty$$

Тогда по (12.1)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi^{n+1}}$$

Оценим сверху

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=\rho} \frac{|f(\xi)| |d\xi|}{|\xi|^{n+1}} \leq \frac{M}{2\pi} \int_{|\xi|=\rho} \frac{|\xi|^m}{|\xi|^{n+1}} |d\xi| =$$

$$\frac{M}{2\pi} \int_{|\xi|=\rho} \frac{1}{|\xi|^{n+1-m}} |d\xi| = \frac{M}{\rho^{n-m}} = M\rho^{m-n}$$

При $n > m$:

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^{n-m}} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \forall n > m : |c_n| = 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^n$$

□

12 Ряд Тейлора и теорема единственности...

Теорема 12.1. *Ряд Тейлора.*

Пусть f – голоморфна в $D, O_R(a) \subseteq D$. Тогда

$$\forall z \in O_R(a) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Доказательство. Пусть $r < R, f$ – голоморфна в $\overline{O_r(a)} \Rightarrow$

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

Тогда распишем

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} \stackrel{|z-a| \leq |\xi-a|}{=} \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

Полученный ряд сходится равномерно, а значит можно умножить на $f(\xi)$ и почленно интегрировать

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i c_n (z-a)^n \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Причём по (1):

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

В завершение скажем

$$\forall z : |z-a| < R \exists r < R z \in O_r(a) \Rightarrow$$

формула верна во всём $O_R(a)$. □

Определение 12.1. Пусть $f \not\equiv 0$ – голоморфна в $O_r(a), f(a) = 0$, тогда m – это **порядок нуля в точке a** . если

$$\forall k = \overline{0, m-1} : f^{(k)}(a) = 0; f^{(m)}(a) \neq 0$$

Утверждение 12.1. f имеет нуль порядка $m \Leftrightarrow \exists g(z)$ – голоморфная в $O_r(a)$, $g(a) \neq 0$:

$$f(z) = (z - a)^m \cdot g(z)$$

Доказательство. (\Rightarrow)

БОО $a = 0$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n = z^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} z^n$$

Пусть $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} z^n$, причём $g(0) \neq 0$, так как $c_m \neq 0$.

(\Leftarrow) Пусть $f(z) = (z - a)^m g(z)$. Дифференцируя получаем

$$\forall k = \overline{0, m-1} : f^{(k)}(a) = 0, f^{(m)} \neq 0$$

□

Замечание. Пусть f – голоморфна в окрестности a , $f(a) = 0$. Тогда

$$\exists \rho > 0 \forall z |z - a| \in (0, \rho) : f(z) \neq 0$$

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего утверждения. □

Теорема 12.2. *О единственности.*

Пусть f и g – голоморфны в области D , $E \subseteq D$, причём в D есть хотя бы одна предельная точка E . Тогда если

$$\forall z \in E : f(z) = g(z)$$

то

$$\forall z \in D : f(z) = g(z)$$

Доказательство. Пусть $h = f - g$, a – предельная точка E , $a \in D$. Тогда введём

$$Z = \{z \in D \mid h(z) = 0\}$$

Тогда по непрерывности $a \in Z$, причём a – предельная точка $Z \Rightarrow h(z) \equiv 0$ в окрестности a (12).

Пусть $G_1 := \text{int } Z$ – открытое непустое, так как $a \in G_1$. Тогда если $G_2 := D \setminus G_1$ открытое, то из-за связности $D \Rightarrow G_2$ – пустое, что доказывает теорему.

Пусть G_2 неоткрыто. Пусть $z^* \in G_2$, причём z^* – предельная точка G_1 . Тогда $\exists z_n \rightarrow z^*, z_n \in G_1$. Тогда $h(z_n) = 0 \xrightarrow{\text{непрерывность}} h(z^*) = 0 \Rightarrow z^* \in G_1$ – противоречие. □

13 Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки...

Определение 13.1. Пусть γ – кусочно гладкая кривая в D ,

$$\Gamma = f(\gamma) = \{w = f(z(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

Причём Γ – кусочно гладкая, $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда **приращением аргумента вдоль кривой** называется

$$\Delta_{\Gamma} w := \text{Im} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \text{Im} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)} =: \Delta_{\gamma} f$$

Лемма 13.1. *Свойства приращения аргумента:*

1. $\Delta_\gamma(c \cdot f) = \Delta_\gamma(f), c \neq 0$
2. $\Delta_\gamma(f_1 \cdot f_2) = \Delta_\gamma(f_1) + \Delta_\gamma(f_2)$
3. $\Delta_\gamma \frac{1}{f} = -\Delta_\gamma f$
4. $\Delta_{-\gamma}(f) = -\Delta_\gamma(f)$

Доказательство. 1. Следует из второго пункта (приращение константы равно нулю)

2. Для доказательства достаточно заметить

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}$$

И воспользоваться линейностью интеграла.

3. Очевидно из предыдущего пункта
4. Очевидно

□

Определение 13.2. Индексом a относительно кривой γ , где γ – кусочно гладкая замкнутая кривая в \mathbb{C} , $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, называется

$$J_\gamma(a) = \frac{\Delta_\gamma(z - a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Иными словами, это количество оборотов кривой вокруг a .

Лемма 13.2. Пусть γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая в \mathbb{C} . Тогда

1. $J_\gamma(z) \equiv \text{const}$ в каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2. Если какая-то компонента содержит ∞ , то $J_\gamma(z) \equiv 0$ в ней.

Доказательство. Действительно,

$$J_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

интеграл Коши \Rightarrow голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \gamma \Rightarrow$ непрерывна и, так как принимает только значения из \mathbb{Z} , постоянна в своих компонентах связности. Это следует из того, что

$$J'_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = 0 \Rightarrow J_\gamma(a) \equiv \text{const} \text{ в компоненте связности}$$

Для неограниченной компоненты

$$d(z) := \text{dist}(\gamma, z) = \min_{\zeta \in \gamma} |z - \zeta| > 0$$

Тогда

$$|J_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi d(z)} \int_\gamma |d\xi|$$

Но $d(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty \Rightarrow J_\gamma(z) = 0$.

□

14 Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши...

Лемма 14.1. *Общая теорема Коши.*

Пусть D – область в \mathbb{C} , f – голоморфна в области D . Тогда

1. Функция

$$g(\xi, z) := \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z \end{cases}$$

непрерывна в $D \times D$.

2. \forall кусочно гладкой $\gamma \subset D$:

$$h(z) = \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi$$

голоморфна в D .

Доказательство. 1. При $\xi \neq z$ непрерывна как отношение непрерывных функций.

При $\xi = z$ зафиксируем $z_0 \in D$, по открытости $D \Rightarrow \exists \overline{O}_r(z_0) \subset D$. Тогда будем рассматривать сколь угодно близкие $z, \xi \in O_\varepsilon(z_0), \varepsilon < r$.

Распишем в этой окрестности ряд Тейлора для двух точек:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ f(\xi) - f(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n \end{aligned}$$

Далее нам понадобится следующая оценка:

$$\left| \frac{(z - z_0)^n - (\xi - z_0)^n}{z - \xi} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (z - z_0)^{n-1-k} (\xi - z_0)^k \right| \leq n \varepsilon^{n-1}$$

Рассмотрим приращение

$$\begin{aligned} |g(z, \xi) - g(z_0, z_0)| &= |g(z, \xi) - f'(z_0)| \stackrel{f'(z_0) = \frac{c_1(z - z_0)}{z - z_0}}{=} \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n - (\xi - z_0)^n}{z - \xi} \right| \leq \\ &\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot \varepsilon^{n-1} \leq \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot r^{n-2} = \varepsilon M \end{aligned}$$

Где $M < \infty$ взяли из сходимости ряда Тейлора путём дифференцирования ($\exists R > r : O_R(z_0) \subseteq D, \overline{O}_r(z_0) \subseteq D$).

Заметим, что мы доказали непрерывность, оценив приращение g .

2. Видно, что h – непрерывна в D . Тогда для $\overline{\Delta} \subset D$:

$$\int_{\partial \Delta} h(z) dz = \int_{\partial \Delta} \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi dz = \int_{\gamma} \int_{\partial \Delta} g(\xi, z) dz d\xi = 0$$

Это верно, так как $g(\xi_0, \cdot)$ голоморфна в $D \setminus \{\xi_0\}$, непрерывна в $D \Rightarrow$ по лемме Гурса $\int_{\partial\Delta} g(\xi, z)dz = 0$.

В итоге можем применить теорему Морера, из которой будет следовать, что h – голоморфна. □

Определение 14.1. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – замкнутые кусочно гладкие кривые. Тогда

$$\Gamma = k_1\gamma_1 + \dots + k_n\gamma_n$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$ мы будем называть **циклом**.

Определение 14.2. Пусть цикл Γ лежит в области D . Тогда говорят, что $\Gamma \sim 0 \pmod D$ (Γ **гомологично эквивалентна** 0 в открытой области D), если

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus D : J_\Gamma(a) = 0$$

Теорема 14.1. *Интегральная теорема Коши.*

Пусть D – область в \mathbb{C} , f – голоморфна в D . Пусть Γ – цикл в D , причём $\Gamma \sim 0 \pmod D$. Тогда

$$1. \forall z \in D \setminus \Gamma : J_\Gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

$$2. \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$

Применим 1 к $\tilde{f}(z) = (z - a)f(z)$. Где $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, если $f(a)$ определена (или $a \in D \setminus \Gamma$). Тогда

$$0 = J_\Gamma(a)(a - a)f(a) = J_\Gamma(a) \cdot \tilde{f}(a) = \int_\Gamma \frac{\tilde{f}(\xi)d\xi}{\xi - a} = \int_\Gamma f(\xi)d\xi$$

Докажем первый пункт.

Введём

$$G := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_\Gamma(z) = 0\}$$

– открытое множество. Рассмотрим две функции

$$2\pi i \cdot \tilde{h}(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

– голоморфна в G , как интеграл Коши.

$$2\pi i \cdot h(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi$$

– голоморфна в D , как функция из второго пункта предыдущей теоремы.

Заметим, что $\forall z \in G \cap D : h(z) = \tilde{h}(z)$, так как

$$\tilde{h}(z) - h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)d\xi}{\xi - z} = f(z)J_\Gamma(z) = 0$$

Тогда введём новую функцию

$$F(z) := \begin{cases} h(z), & z \in D \\ \tilde{h}(z), & z \in \mathbb{C} \setminus D \subseteq G \text{ так как } \Gamma \sim 0 \pmod{D} \end{cases}$$

Получается, $F(z)$ – голоморфна в \mathbb{C} . (В каждой из гладких областей они голоморфны, и совпадают на границе)

Заметим, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$$

Так как

$$|\tilde{h}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\max_{\Gamma} |f| \cdot |d\xi|}{d(z)} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$$

Где, $d(z) = \text{dist}(z, \Gamma) \Rightarrow d(z) \rightarrow \infty$.

Тогда по теореме Луивилля (11.1):

$$F(z) \equiv 0$$

Тогда в $D \setminus \Gamma : h(z) = F(z) = 0$, то есть

$$\begin{aligned} f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \Rightarrow \\ f(z) \cdot J_{\Gamma}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \end{aligned}$$

□

Следствие. Для односвязной области.

Пусть D – односвязная область, f голоморфна в D , Γ – замкнутая кусочно гладкая кривая в D . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

Доказательство. Заметим, что $\forall a \notin D : J_{\Gamma}(a) = 0$, так как a лежит в компоненте связности, содержащей $\infty \Rightarrow$ можем использовать интегральную теорему Коши. □

Следствие. Коши для многосвязной области.

Пусть область D ограничена циклом Γ , f голоморфна в области $D' \supset D$. Тогда

$$1. \forall z \in D : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

$$2. \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

Доказательство. Имеем 0 оборотов вокруг D' , а также один оборот вокруг $D \Rightarrow J_{\Gamma}(z) = 1 \Rightarrow$ по предыдущей теореме верен первый пункт, а второй выводится аналогично. □

15 Разложение голоморфной функции в ряд Лорана...

Теорема 15.1. Пусть f голоморфна в $K := \{z \mid r < |z - a| < R\}$. Тогда

$$\forall z \in K : f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

где γ_ρ – положительно ориентированная окружность радиуса $\rho \in (r, R)$ с центром в точке a .

Доказательство. Докажем, что интегральная формула для c_n не зависит от ρ . Возьмём две окружности радиуса ρ и ρ' .

Пусть $\Gamma := \gamma_\rho - \gamma_{\rho'}$. Применим теорему Коши для многосвязной области к функции $\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}$ (голоморфной в $K \supset K_{(\rho, \rho')}$). Тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = \int_{\gamma_{\rho'}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Рассмотрим $r < r' < R' < R$. Тогда $\forall z \in K'_{(r', R')}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right) =: f_1(z) + f_2(z)$$

Заметим, что

$$f_1(z) = \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

голоморфна в $O_{R'}(a) \Rightarrow$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

где $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Осталось разложить f_2 :

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{(z - a) - (\xi - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z - a)^{n+1}}$$

при $\left| \frac{\xi - a}{z - a} \right| < 1$.

Значит

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \cdot \left[c_{-n-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(\xi) (\xi - a)^n d\xi \right]$$

Получается, разложили так, что от r' и R' коэффициенты c_n не зависят. \square

Определение 15.1. Такие ряды называются **рядами Лорана** для голоморфной функции f .

Теорема 15.2. Теорема о единственности ряда Лорана.

Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ при $z \in K$, то f – голоморфна в кольце K , причём

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$$

Доказательство. f голоморфна как предел сходящегося ряда

Проверим равенство коэффициентов. Вначале для $n = -1$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n dz = 2\pi i \cdot c_{-1}$$

При $n \neq -1$ сводим к предыдущему случаю для функции $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ □

16 Изолированные особые точки

Определение 16.1. Изолированная особая точка – точка, в некоторой проколотой окрестности которой функция $f(z)$ однозначна и голоморфна, а в самой точке либо не задана, либо недифференцируема.

Определение 16.2. a – устранимая особая точка, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$$

Определение 16.3. a – полюс, если

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

Определение 16.4. a – существенная особая точка, если

$$\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(x)$$

Теорема 16.1. a – УОТ $\Leftrightarrow f$ ограничена в $\dot{O}_\delta(a)$ для некоторого δ .

Доказательство. (\Rightarrow) – очевидно по определению предела.

(\Leftarrow)

Положим $M_\rho(f) = \max_{\gamma_\rho} |f|$. Тогда

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{|f| |d\xi|}{\rho^{n+1}} \leq \frac{M_\rho(f)}{2\pi \rho^{n+1}} \int_{\gamma_\rho} |d\xi| = \frac{M_\rho(f)}{\rho^n}, n \in \mathbb{Z}$$

По условию f ограничена в $\dot{O}_\delta(a) \Rightarrow$

$$\exists M \forall z \in O_\delta(a) : |f| < M$$

Тогда из неравенства для $|c_n|$ следует

$$\forall \rho > 0, \rho < \delta \Rightarrow \forall n < 0 : \frac{1}{\rho^n} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \forall n < 0 : c_n = 0$$

Значит

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

она имеет предел в точке a , равный c_0 . □

Теорема 16.2. Пусть a – изолированная особая точка f . Тогда a полюс \Leftrightarrow конечное число коэффициентов в главной части ряда Лорана отличны от нуля.

Доказательство. (\Leftarrow)

По условию

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z)$$

где h – голоморфна в окрестности a .

Значит $\varphi(z) := f(z)(z-a)^m$ – голоморфная в этой области, причём $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \frac{\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)^m}{\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m} = \infty$$

(\Rightarrow)

По условию

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow$$

функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в т.а УОТ \Rightarrow она голоморфна в окрестности a . При этом $\frac{1}{f} \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m h(z), h(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{h(z)}$$

Где $\frac{1}{h(z)}$ – голоморфная в окрестности $a \Rightarrow$ раскладывается в Тейлора. □

Теорема 16.3. Сохоцкого.

Пусть f голоморфна в $\dot{O}(a)$, a – СОТ. Тогда

$$\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \exists z_n \rightarrow a : f(z_n) \rightarrow A$$

Доказательство. 1. Для $A = \infty$ очевидно – если A – не предельная, то f ограничена $\Rightarrow a$ – УОТ.

2. Если $A \neq \infty$, то введём

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - A}$$

Пусть A – не предельная. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \dot{O}_\delta(a) : |f(z) - A| \geq \varepsilon$$

Значит $g(z)$ голоморфна в $\dot{O}_\delta(a)$ как отношение голоморфных функций. Причём $g(z) \neq 0$ в $\dot{O}_\delta(a)$. Также $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$ – ограниченная, то есть точка a – УОТ. Тогда

$$\forall z \in \dot{O}_\delta(a) : f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$$

Если $g(a) \neq 0$, то a – УОТ для f .

Если $g(a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ имеет полюс в точке $a \Rightarrow$ у f точка a – полюс. Противоречие. □

17 Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах.

Определение 17.1. Если f голоморфна в $\dot{O}_r(a)$, $a \neq \infty$, то определим **вычет** f , как

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$$

Утверждение 17.1. Вычеты определены корректно (независят от γ).

Доказательство. Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, $z \in \dot{O}_r(a)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} c_{-1} 2\pi i = c_{-1}$$

□

Теорема 17.1. Коши о вычетах.

Пусть D ограничена циклом $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n$ (то есть в условиях теоремы Коши для многосвязной области).

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_N\} \subseteq D$, f — голоморфна в $D' \setminus A$, где $D' \supseteq D$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^N \operatorname{res}_{a_i} f$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\exists R > 0 \forall i \neq j : \overline{O}_R(a_i) \cap \overline{O}_R(a_j) = \emptyset$$

и $\overline{O}_R(a_i) \subseteq D$.

Обозначим за обход $\delta_k = \partial O_R(a_k)$ (обход против часовой стрелки, то есть положительно ориентировано).

Обозначим $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \sum_{i=1}^N \delta_i$, $\tilde{D} = D \setminus \cup_{k=1}^N \overline{O}_R(a_k)$ и $\tilde{D}' = D' \setminus A$. Тогда $\partial \tilde{D} = \tilde{\Gamma}$ и f голоморфна в \tilde{D}' .

Причём $\tilde{D}' \supseteq \tilde{D}$. Более того, $\tilde{\Gamma} \sim 0 \pmod{\tilde{D}'}$, и $\forall z \notin \tilde{D}' : J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$. Аналогично проверим для

$$1. z \notin D' \Rightarrow \begin{cases} J_{\Gamma}(z) = 0 \\ J_{\delta_i}(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$$

$$2. z \in A (z = a_i) \Rightarrow \begin{cases} J_{-\delta_i}(a_i) = -1 \\ J_{-\delta_j}(a_i) = 0 (i \neq j) \\ J_{\gamma_k}(a_i) = 0 \\ J_{\Gamma}(a_i) = 1 \end{cases} \Rightarrow J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$$

Тогда по теореме Коши для многосвязной области \tilde{D} :

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \int_{\delta_i} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz \Rightarrow 2\pi i \sum_{i=1}^N \operatorname{res}_{a_i}(f) = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

□

Следствие. Если a – УОТ $\Rightarrow \text{res}_a f = 0$

Следствие. Если a – полюс m -ого порядка \Rightarrow

$$\text{res}_a f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}$$

Доказательство. f имеет вид

$$f = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Тогда

$$\text{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}$$

То есть по сути $m-1$ коэффициент функции $f(z)(z-a)^m$. □

18 Лемма Жордана...

Теорема 18.1. Пусть g – непрерывная функция в $\{z \mid \text{Im}(z) \geq 0, |z| > R'\}$, причём $\max_{\Gamma_R} |g| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$, где $\Gamma_R = \{z \mid \text{Im}(z) \geq 0, |z| = R\}$. Тогда

$$\forall \alpha > 0 : \int_{\Gamma_R} g(z) e^{i\alpha z} dz \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\int_{\Gamma_R} |e^{i\alpha z}| |dz|$ равномерно ограничен. (то есть $\exists M > 0 \forall R > R' : \int_{\Gamma_R} |e^{i\alpha z}| |dz| \leq M$).

Пусть $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, \pi)$, тогда очевидно,

$$|e^{i\alpha z}| = e^{\text{Re}(i\alpha z)} = e^{-R\alpha \sin(\varphi)}$$

Теперь распишем интеграл

$$\int_{\Gamma_R} |e^{i\alpha z}| |dz| = \int_0^\pi e^{-R\alpha \sin \varphi} R d\varphi = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\alpha \sin \varphi} d\varphi$$

Вспомним, что $\sin \varphi$ вогнут на $[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$. Продолжим цепочку неравенств

$$2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\alpha \sin \varphi} d\varphi \leq 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R\alpha \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{\alpha} \int_0^{R\alpha} e^{-t} dt \leq \frac{\pi}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{\alpha}$$

□

19 Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

Теорема 19.1. Принцип аргумента.

Пусть $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n$, D – область, ограниченная Γ , $A := \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq D$, f голоморфна в $D' \setminus A$, $D' \supset D$. a_j – полюса функции f и $\forall z \in \Gamma : f(z) \neq 0$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz = J_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} f = N - P$$

где N и P – число нулей и полюсов f в D с учётом их кратностей соответственно.

Доказательство. Из определения f , можем её представить в виде

$$f = \frac{(z - b_1)^{n_1} \cdots (z - b_\eta)^{n_\eta}}{(z - a_1)^{p_1} \cdots (z - a_k)^{p_k}} g(z)$$

где g – голоморфна в \overline{D} и не содержит там нулей.

Тогда

$$\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{\eta} \frac{n_i}{z - b_i} - \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{z - a_i} + \frac{g'}{g}$$

Почему это так? Рассмотрим, например, $f(z) = (z - b_k)^{n_k} g(z)$, тогда $f'(z) = n_k(z - b_k)^{n_k-1} g(z) + (z - b_k)^{n_k} g'(z)$. Тогда выполнено следующее:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_k}{z - b_k} + \frac{g'}{g}$$

Причём после интегрирования первое слагаемое даст нам приращение, а второе ноль, так как функция голоморфная. На случай нескольких нулей и полюсов обобщается аналогично.

Значит

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_{i=1}^{\eta} n_i J_{\Gamma}(b_i) - \sum_{i=1}^k p_i J_{\Gamma}(a_i) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g'}{g} dz = \sum_{i=1}^{\eta} n_i - \sum_{i=1}^k p_i = N - P$$

так как $J_{\Gamma}(b_i) = 1, J_{\Gamma}(a_i) = 1$ □

Теорема 19.2. *Теорема Руше.*

Пусть f, g – голоморфные в \overline{D} , где D ограничивает $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \cdots - \gamma_n$. Пусть $|f| > |g|$ на Γ . Тогда

$$N_f(D) = N_{f+g}(D)$$

где $N_f(D)$ – число нулей функции f в области D .

Доказательство. Заметим, что $|f| > 0$ и $|f + g| > 0$ на Γ .

$|f|$ по условию, $|f| > |g| \geq 0, |f + g|$ по неравенству треугольника.

Тогда по принципу аргументов

$$f + g = f \cdot \left(1 + \frac{g}{f}\right) : \Delta_{\Gamma}(f + g) = \Delta_{\Gamma} f + \Delta_{\Gamma} \left(1 + \frac{g}{f}\right)$$

Но $|g| < |f|$, то есть $\left|\frac{g}{f}\right| < 1 \Rightarrow \Delta_{\Gamma} \left(1 + \frac{g}{f}\right) = 0$.

Почему это так? Заметим, что образ этой функции находится от числа 1 на расстоянии не больше 1:

$$\left| \left(1 + \frac{g}{f}\right) - 1 \right| = \left| \frac{g}{f} \right| < 1$$

Из геометрических соображений это значит, что мы не сможем сделать ни одного оборота вокруг нуля, ну а мы знаем, что индекс функции по циклу – это количество оборотов образа вокруг нуля.

Тогда $\Delta_{\Gamma}(f + g) = \Delta_{\Gamma}(f) \Rightarrow$ по принципу аргументов (так как функции голоморфны \Rightarrow нет полюсов):

$$N_f(D) = N_{f+g}(D)$$

□

Теорема 19.3. *Основная теорема алгебры.*

Пусть p – многочлен степени n с коэффициентом из \mathbb{C} . Тогда p имеет в \mathbb{C} ровно n нулей с учётом кратности.

Доказательство. Введём для p :

$$p(z) = [f := z^n] + [g := c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0]$$

p голоморфно в $\overline{D} = \overline{O}_R(0)$ при $R > 1$.

Оценим

$$|g| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i z^i| \leq n \cdot \max_i |c_i| R^{n-1}$$

И возьмём

$$R > n \cdot \max_i |c_i|$$

тогда $|f| = R^n > n \cdot \max_i |c_i| \cdot R^{n-1} \geq |g|$.

Применяя теорему Руше, получим

$$N_D(p) = N_D(f) = n$$

□

20 Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области...

Теорема 20.1. Пусть f голоморфна в области D . Пусть $z_0 \in D$, $f(z_0) = w_0$, причём z_0 – нуль n -го порядка. Тогда

$$\exists O_\rho(w_0) \exists O_r(z_0) : \forall w^* \in \dot{O}_\rho(w_0)$$

уравнение $f(z) = w^*$ имеет ровно n решений в $\dot{O}_r(z_0)$.

Доказательство. Пусть сначала $w_0 = 0$. Тогда точка z_0 – изолированный ноль функции f и f' , поскольку $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (если предположить противное, получим, что $f \equiv 0$ по теореме о единственности). Выберем $\delta > 0$ такое, что других нулей на $\overline{B}_\delta(z_0)$ у этих функций нет.

Положим $\varepsilon = \min_{|z-z_0|=\delta} |f(z)|$. Зафиксируем $\tilde{w} \in \dot{B}_\varepsilon(w_0)$ и проверим условие теоремы Руше для функции f и $-\tilde{w}$ на области $B_\delta(z_0)$:

$$|f(z)| \geq \varepsilon > |-\tilde{w}| \text{ при } |z - z_0| = \delta$$

Значит уравнение $f(z) = \tilde{w}$, как и $f(z) = 0$, имеет n корней на $B_\delta(z_0)$ с учётом кратности. Очевидно, что f имеет ровно 1 корень кратности n , так как первые $n - 1$ производные равны нулю.

Осталось доказать, что все нули функции $f(z) - \tilde{w}$ имеют порядок 1, это правда, поскольку $(f - \tilde{w})' \neq 0$ на $\dot{B}_\delta(z_0)$ (в силу того, что мы выбирали такую δ -окрестность, что f' не имеет в ней других нулей). Если же $w_0 \neq 0$, то доказанную часть теоремы можно применить к функции $f - w_0$. □

Теорема 20.2. *Принцип сохранения области или открытости.*

Пусть $f \not\equiv \text{const}$ – голоморфна в области D . Тогда $f(D)$ тоже является областью. Если $U \subseteq D$ и U – открыто, то $f(U)$ тоже открыто

Доказательство. Докажем, что множество $f(G)$ – открытое. Пусть $w_0 \in f(G)$ тогда $\exists z_0 \in G : f(z_0) = w_0$. Если $f'(z_0) \neq 0$, то по теореме об обратной функции $\exists \delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\forall w \in B_\varepsilon(w_0)$ уравнение $f(z) = w$ имеет единственное решение на $B_\delta(z_0)$, поэтому $B_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$. Если же наоборот, $f'(z_0) = 0$, то в силу непостоянности f , $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 2$ такое, что $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, и применима теорема о локальной структуре отображения, дающая аналогичный результат.

Теперь покажем связность множества $f(G)$. Пусть $w_1, w_2 \in f(G)$ тогда для некоторых $z_1, z_2 \in G$ выполнено $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$. Пусть γ – кривая, соединяющая точки z_1 и z_2 , такая, что $\gamma \subset G$. Тогда кривая $\Gamma = f(\gamma)$ соединяет точки w_1 и w_2 . \square

Определение 20.1. f голоморфная в D называется **однолистной**, если

$$\forall z_1, z_2 : z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

Определение 20.2. f **локально однолистна**, если она однолистна в некоторой области $O(z_0)$.

Утверждение 20.1. Если $f'(z_0) = 0$, то она не однолистна.

Утверждение 20.2. Найдётся достаточно малая окрестность z_0 , в которой f константа.

21 Принцип максимума модуля и лемма Шварца

Теорема 21.1. *Принцип максимума модуля.*

Пусть f голоморфна в D и $f \not\equiv \text{const}$. Тогда $|f|$ не может достигать максимума в $z \in D$.

Доказательство. От противного. Пусть $z_0 \in D$:

$$\forall z \in D : |f(z_0)| \geq |f(z)|$$

Рассмотрим $w_0 = f(z_0)$. Тогда

$$\forall w \in f(D) : |w_0| \geq |w|$$

То есть $f(D) \subset \overline{O}_{|w_0|}(0)$, а $|w_0|$ лежит на его границе \Rightarrow противоречие с принципом сохранения открытости. \square

Лемма 21.1. *Шварца.*

Пусть $f(z)$ в $D = \{z \mid |z| < 1\}$ голоморфна, а 0 – неподвижная точка $f(z)$ и $\forall z \in D : |f(z)| \leq 1$. Тогда

$$1. \forall z \in D : |f(z)| \leq |z|; \quad |f'(0)| \leq 1$$

2. Если $\exists z_0$: в любом из неравенств предыдущего пункта достигается равенство, то $f(z) = ze^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. Рассмотрим $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, она голоморфна в $\dot{O}_1(0)$, причём точка 0 – устранимая особая. Тогда

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(z), & z = 0 \end{cases}$$

Голоморфна в D .

Тогда в $O_r(0)$ по принципу максимумов:

$$\max_{|z| \leq r} |g| = \max_{|z|=r} |g| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Фиксируем $z \in D$. Тогда

$$\forall r \in (|z|, 1) : |g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Перейдём к пределу $r \rightarrow 1$ и получим $|g(z)| \leq 1$, тогда $|f(z)| \leq |z|$. Из этого неравенства как раз следует $|f'(0)| \leq 1$:

$$\left| \frac{f(0) - f(z)}{0 - z} \right| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$$

2. Пусть $|f(z_0)| = |z_0|$ при каком-то $z_0 \neq 0, z_0 \in D$. Тогда

$$|g(z_0)| = 1 \Rightarrow g(z) \equiv \text{const}$$

по принципу максимума, причём $|g(z)| = 1 \Rightarrow g(z) = e^{i\theta} \Rightarrow f(z) = z \cdot e^{i\theta}$. Если $|f'(0)| = 1 \Rightarrow g(0) = 1 \Rightarrow$ аналогично берём $z_0 = 0$.

□

22 Дробно-линейные отображения. . . .

Определение 22.1. Пусть f – отображение из D в \mathbb{C} , которое переводит гладкие кривые в гладкие кривые. Оно называется **конформным** в точке z_0 , если оно сохраняет углы между кривыми в точке z_0 .

Утверждение 22.1. Если f – голоморфная функция и $f'(z_0) \neq 0$, то f конформно в точке z_0 .

Лемма 22.1. 1. Пусть $a \in \mathbb{C}, \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, тогда f конформна в $a \Leftrightarrow f$ имеет полюс первого порядка.

2. Пусть $a = \infty, \lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \in \mathbb{C}$, тогда f конформна в $a \Leftrightarrow \text{res}_\infty f \neq 0$

3. Пусть $a = \infty, \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, тогда f конформна в $a \Leftrightarrow f$ имеет полюс первого порядка.

Доказательство. 1. f конформна в $a \Leftrightarrow f'(a) \neq 0 \Leftrightarrow$ для $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ выполняется

$$g'(a) \neq 0 \Leftrightarrow g(z) = g'(a)(z - a) + o(z - a) \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{g'(a)(z - a)}(1 + o(1))$$

то есть f имеет простой полюс.

2. Знаем, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$$

Определим

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = A + g'(0)w + o(w), |w| \rightarrow 0$$

Тогда

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w) - A}{w} \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - A) = -\text{res}_{\infty} f \neq 0$$

3. Знаем, что

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

Тогда для

$$g(w) := \frac{1}{f\left(\frac{1}{w}\right)}$$

будет верно, что $w = 0$ – УОТ, причём $g(0) = 0$.

Значит

$$g(w) = g'(0)w + o(w)$$

Тогда критерием конформности будет $g'(0) \neq 0$, то есть

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w)}{w} \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{f(z)} \neq 0$$

то есть f имеет простой полюс (П1П).

□

Определение 22.2. $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ – **дробно линейное отображение**, если $L(z) \neq \text{const}$, то есть $ad - bc \neq 0$.

Пусть \mathfrak{M} – множество всех ДЛО.

Утверждение 22.2. \mathfrak{M} – группа относительно композиции.

Доказательство. Подставим и проверим:

$$\frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}$$

Заметим, что коэффициенты нового элемента могут быть получены перемножением матриц (это, кстати, доказывает, что сохраняется свойство ненулевого определителя):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Для поиска обратного элемента в группе, возьмём обратную матрицу (существует, так как определитель ненулевой $ad - bc \neq 0$) – это будет матрица коэффициентов искомого элемента. □

Утверждение 22.3. Пусть $L \in \mathfrak{M}$, L – биекция $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Тогда L – конформное отображение в любой точке.

Доказательство. Посчитаем производную

$$L'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

Если $z \neq \infty, z \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0$, то $cz + d \neq 0 \Rightarrow L'(z) \neq 0 \Rightarrow$ конформное.

Пусть $c \neq 0, z = \infty$. Если $c \neq 0$, то в $z = \infty$ УОТ, хотим проверить $\text{res}_\infty L \neq 0$ из чего следовала бы конформность.

Считаем вычет:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$$

При $c \neq 0, z = -\frac{d}{c}$ — действительно, простой полюс (1 порядка).

При $c = 0$ — линейная функция, которая, очевидно, конформная в ∞ — простой полюс. \square

23 Круговое свойство и принцип симметрии

Теорема 23.1. *При ДЛО образом окружности или прямой будет окружность или прямая.*

Доказательство. 1. Рассмотрим аффинное отображение $w = az + b$ (когда $c = 0$).

Знаем из аналитической геометрии, что окружность переходит в окружность, а прямая в прямую.

2. При $c \neq 0$ представим отображение в виде

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{-ad + bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$$

Введём обозначения

$$w = \alpha + \beta t; \quad \alpha := \frac{a}{c}; \quad \beta := \frac{-ad + bc}{c}; \quad t := \frac{1}{\zeta}; \quad \zeta := cz + d$$

Видим, что $w(t), \zeta(t)$ — аффинные, проверим выполнимость утверждения теоремы для $z = \frac{1}{\zeta}$.

Положим $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда наша искомая окружность или прямая могла быть описана таким уравнением:

$$A(\xi^2 + \eta^2) + B\xi + C\eta + D = 0, \quad 4AD < B^2 + C^2$$

задаёт невырожденную окружность при $A \neq 0$ и невырожденную прямую при $A = 0$.

Полагая $t = \frac{1}{\zeta}$, учитывая $\xi^2 + \eta^2 = \zeta\bar{\zeta}, \xi = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2}, \eta = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2i}$, запишем уравнение в виде

$$A\zeta\bar{\zeta} + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)\zeta + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)\bar{\zeta} + D = 0$$

и отсюда получим

$$A + \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2i}\right)\bar{t} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2i}\right)t + Dt\bar{t} = 0$$

что задаёт окружность при $D \neq 0$ и прямую при $D = 0$.

Суперпозиция преобразований, переводящих окружности и прямые в окружности и прямые, переводит окружности и прямые в окружности и прямые.

□

Следствие. Окружность или прямая γ переходит при ДЛО в прямую, если нуль знаменателя принадлежит γ , и в окружность иначе.

Это называется *круговым свойством*.

Определение 23.1. Точки z_1 и z_2 называются **симметричными относительно окружности** и центром в точке z_0 радиуса $R > 0$, если они лежат на одном луче, исходящем из точки z_0 , и $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$.

Утверждение 23.1. Следующие определения эквивалентны:

1. $\begin{cases} \arg(z_1 - z_0) = \arg(z_2 - z_0) \\ |z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2 \end{cases}$
2. $(z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_0)} = R^2$
3. Точки пересечения изначальной окружности с \forall другой проходящей через z_1, z_2 являются точками касания.

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ очевидно.

$(2 \Rightarrow 3)$.

Пусть z' – точка принадлежащая обеим окружностям. По условию

$$|z' - z_0|^2 = R^2 = |z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0|$$

Значит $z' - z_0$ – касательная к произвольной окружности.

$(3 \Leftarrow 2)$.

$z' - z_0$ – касательная, значит

$$|z' - z_0|^2 = |z_2 - z_0| \cdot |z_1 - z_0|$$

Значит $|z_2 - z_0| \cdot |z_1 - z_0| = R^2$.

□

Теорема 23.2. При ДЛО пара симметричных точек относительно окружности или прямой γ переходит в пару симметричных точек относительно образа γ .

Доказательство. Очевидно из 3 эквивалентного определения симметрии, так как ДЛО сохраняют углы, а значит все касательные останутся касательными.

□

24 Общий вид конформных отображений...

Теорема 24.1. Любое конформное отображение из $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – это ДЛУ.

Доказательство. Из предыдущих свойств, очевидно, что каждое ДЛУ обладает всеми нужными свойствами.

Если же f произвольный автоморфизм расширенной комплексной плоскости, то $\exists z_0 \in \overline{\mathbb{C}} : f(z_0) = \infty$.

1. Если $z_0 \in \mathbb{C}$, то f имеет полюс первого порядка (так как f конформно в z_0). Рассмотрим

$$h(z) := \frac{\operatorname{res}_{z_0} f}{z - z_0} - f(z)$$

Голоморфна кроме z_0 , а z_0 – её УОТ. Причём

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$$

(из-за биективности мы не можем попасть в бесконечность из двух разных точек).

Значит h – целая и ограниченная $\Rightarrow h \equiv \text{const}$ (по теореме Луивилля) $\Rightarrow f$ – ДЛУ.

2. Если $z_0 = \infty$. Тогда f в бесконечности имеет полюс первого порядка, то есть

$$f(z) = Az + h(z), h(z) = o(z), |z| \rightarrow +\infty$$

Тогда $h(z)$ голоморфна в \mathbb{C} и $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) \in \mathbb{C} \Rightarrow h \equiv \text{const}$

□

Определение 24.1. Введём красивое обозначение для единичного открытого шара

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

Теорема 24.2. *Общий вид конформного отображения $\mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$:*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, |a| < 1, \theta \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Очевидно, что $\exists a = f(0)$. Тогда введём

$$\varphi(w) := \frac{w - a}{1 - \bar{a}w}, h := \varphi \circ f$$

Заметим, что h – конформное отображение, причём $h(0) = 0$.

Тогда по лемме Шварца ($|h(z)| = 1$ при $|z| = 1$) верно $|h(z)| \leq |z|$.

h^{-1} тоже автоморфизм и переводит 0 в 0. Тогда применим лемму Шварца для неё $|h^{-1}(w)| \leq |w| \Rightarrow |w| \leq |h(w)| \leq |w| \Rightarrow$ равенство выполняется $\Rightarrow h$ – поворот $\Leftrightarrow h = e^{i\theta} z \Rightarrow f = \varphi^{-1} \circ (e^{i\theta} z) \in \mathfrak{M}$ □

25 Теорема Римана об отображении. Доказательство единственности.

Теорема 25.1. *Римана. (Доказательство единственности)*

Если D – односвязная область с границей из более одной точки, то D конформно эквивалентно \mathbb{D} .

Другими словами, $\exists f : D \rightarrow \mathbb{D}$ – конформное отображение. При этом, если потребовать, чтобы $f(z_0) = 0$ и $\arg f'(z_0) = \theta$, то такая f единственна.

Доказательство. Единственность очевидна, так как можно рассмотреть композицию двух автоморфизмов на \mathbb{D} , причём $0 \mapsto 0 \Rightarrow$ по лемме Шварца мы знаем её вид ($e^{i\theta} z$). Фиксируем θ и получаем отображение единственным образом. □

26 Функция Жуковского

Определение 26.1. Функцией Жуковского называется

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

В каждой точке $z \notin \{0, \pm 1, \infty\}$ функция конформна. В точке 0:

$$g(z) := \frac{1}{w(z)} = \frac{2z}{z^2 + 1}$$

Эта функция в нуле регулярна и имеет ненулевую производную, а значит, конформна в нуле. В точке ∞ :

$$\varphi(z) := w \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + z \right)$$

Заметим, что это та же w , и в силу конформности в нуле, конформность в бесконечности очевидна.

Пример. Пусть задана окружность

$$\gamma_r = \{z \mid |z| = r, r \neq 1\}$$

Образом под действием функции Жуковского будет $f(z) = \frac{1}{2} (re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2} (r + \frac{1}{r}) \cos \varphi + \frac{i}{2} (r - \frac{1}{r}) \sin \varphi$

При фиксированном r преобразуем к виду $f(z) = a \cos \varphi + ib \sin \varphi =: u + iv$.

Тогда

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

Эллипс с фокусами $a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow$ фокусы ± 1 .

Пример. Пусть задан луч

$$l_\varphi = \{z \mid z = re^{i\varphi}, r > 0\}, \varphi \in [-\pi, \pi) \setminus \left\{0, \pm \frac{\pi}{2}, -\pi\right\}$$

Воспользовавшись формулой из предыдущего примера, в условиях, что теперь φ фиксирован, получим следующее:

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1$$

Гипербола с фокусами в $\pm(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \pm 1$.

27 Конформные отображения, осуществляемые степенной и экспоненциальной функциями

Пример. Рассмотрим $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$.

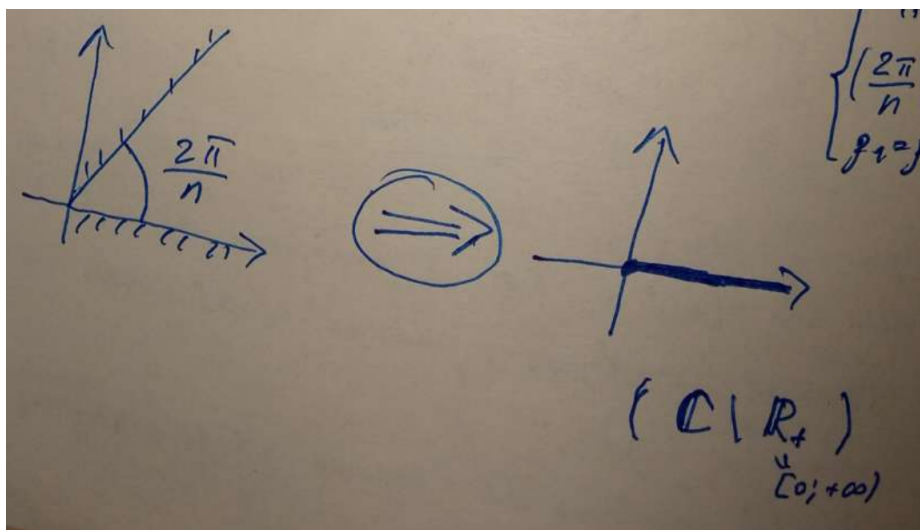
Утверждается, что она локально однолистка в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, так как $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$.

Причём

$$z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow \rho_1^n e^{i\varphi_1 n} = \rho_2^n e^{i\varphi_2 n} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{2\pi}{n} \mid \varphi_1 - \varphi_2 \text{ делит нацело} \\ \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$

Также к нему есть обратное отображение

$$f^{-1}(w) = |w|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n} \arg(w)}$$



Пример. Рассмотрим $f = e^z$.

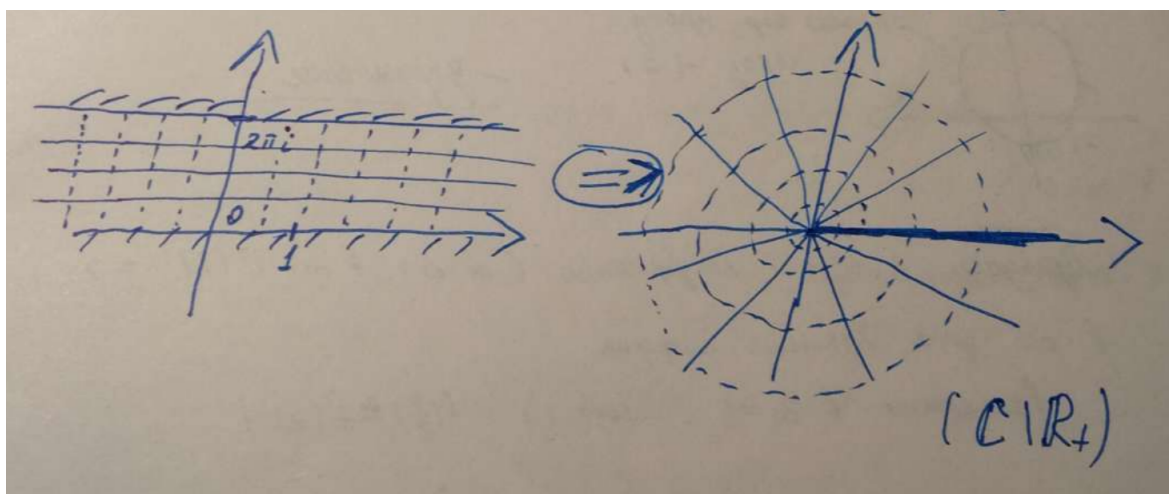
Утверждается, что f локально однолистно в \mathbb{C} , так как $f' = e^z \neq 0$.

Причём

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi \mid y_1 - y_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

По аналогии, обратное отображение также конформно

$$f^{-1}(w) = \ln |w| + i \arg(w), \arg(w) \in (0, 2\pi) - \text{ветвь корня}$$



28 Локально равномерная сходимость и теоремы Вейерштрасса

Определение 28.1. Пусть f_n определена в области D . Тогда f_n локально равномерно сходится к f в области D , если

$$\forall z_0 \in D \exists \delta > 0 : O_\delta(z_0) \subset D : f_n \xrightarrow{O_\delta(z_0)} f$$

Утверждение 28.1. Эквивалентное определение локально равномерной сходимости:

$$\forall K - \text{компакт} \subset D : f_n \xrightarrow{K} f$$

Доказательство. $(2 \Rightarrow 1)$ В качестве компактов возьмём $\overline{O}_\delta(z_0)$

$(1 \Rightarrow 2)$ Компакт покрываем шарами, выбираем конечное подпокрытие и получаем \Rightarrow . □

Теорема 28.1. Пусть f_n голоморфны в D , f_n сходится к f локально равномерно в D . Тогда

1. f – голоморфна
2. $f_n^{(k)}$ локально равномерно сходится к $f^{(k)}$ в D

Доказательство. 1. По теореме Морера достаточно проверить непрерывность f и

$$\int_{\Gamma - \text{замкнутой}} f(z) dz = 0$$

Пусть $z_0 \in D, \overline{O}_r(z_0) \subset D$.

Используя определение с компактами получим, что $f_n \Rightarrow f$ на $\overline{O}_r(z_0) \Rightarrow f$ непрерывна, как равномерный предел непрерывных.

Далее, пусть γ – кусочно гладкая кривая, замкнутая в $\overline{O}_r(z_0)$.

Так как

$$\left| \int_\gamma (f_n - f) dz \right| \leq \int_\gamma |f_n - f| dz \leq \varepsilon_n \int_\gamma dz = c \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

поэтому

$$\int_\gamma f_n(z) dz \rightarrow \int_\gamma f(z) dz$$

Но

$$\int_\gamma f_n dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(z) dz = 0 \Rightarrow f - \text{голоморфна}$$

2. Напишем формулу Коши

Пусть $z_0 \in D, O_r(z_0) \subset D, z \in O_{\frac{r}{2}}(z_0)$. Тогда

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial O_r(z_0)} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}; \quad f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial O_r(z_0)} \frac{f_n(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}$$

Тогда

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{|f(\xi) - f_n(\xi)| |d\xi|}{|\xi - z|^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\gamma_r} |f - f_n| \cdot \left| \int_{\gamma_r} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|^2} \right| \leq \frac{2}{\pi r^2} \max_{\gamma_r} |f - f_n| \cdot 2\pi r = c \max_{\gamma_r} |f - f_n| \rightarrow 0$$

При этом $c = \frac{4}{r} \Rightarrow$ стремление на самом деле равномерное на $O_{\frac{r}{2}}(z_0)$. Так можно сделать $\forall z_0 \Rightarrow$ по первому определению f' локально равномерно сходится к f' в D .
Дальше – очев индукция. □

Теорема 28.2. Пусть f_n голоморфна в D , $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ локально равномерно сходится в области D . Тогда

1. $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ – голоморфная функция
2. $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$

Доказательство. $\tilde{f}_k := \sum_{n=1}^k f_n$ и применяем теорему Вейерштрасса. □