# Содержание

# 1 Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана

**Определение 1.1.** Окрестностью назовём

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

Проколотой окрестностью назовём

$$\dot{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

Замкнутой окрестностью назовём

$$\overline{B}_r(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$$

**Замечание.** Введём обозначения:

$$\Delta x = x - x_0; \quad \Delta y = y - y_0; \quad \Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y$$
$$\Delta u = u(x,y) - u(x_0,y_0); \quad \Delta v = v(x,y) - v(x_0,y_0); \quad \Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Delta u + i\Delta v$$

**Определение 1.2.** Говорят, что $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке $z_0$, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \to 0$$

**Лемма 1.1.** *$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в $z_0 \Leftrightarrow \exists f'(z_0), A = f'(z_0)$.*

**Теорема 1.1.** *Условие Коши-Римана.*
*$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в $z_0$ тогда и только тогда, когда*

- *$u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в $(x_0,y_0)$*
- *Выполняется условие Коши-Римана:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

*При этом*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

*Доказательство.* $(\Rightarrow)$

Пусть

$$\exists f'(z_0) = a + ib = A \in \mathbb{C}$$

Значит, по определению дифференцируемости

$$\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z); \quad \alpha(\Delta z) := \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$$

Где $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z), |\Delta z| \to 0$

Тогда, раскрыв это выражение по каждой координате, получим

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \end{cases}$$

Из того, что $|\alpha_1| \leqslant |\alpha(\Delta z)|$ и $|\alpha_2| \leqslant |\alpha(\Delta z)| \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = o(\Delta z), |\Delta z| \to 0$.

Значит, $u$ дифференцируема, причём

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b$$

Аналогично для $v$, причём

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

Видим, что УКР выполняется.

$(\Leftarrow)$

Пусть $u, v$ дифференцируемы в $(x_0, y_0)$ и выполняется УКР. Тогда

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta Z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) =$$
$$\Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \alpha_1(\Delta Z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) =$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1(\Delta z) + i\alpha_2(\Delta z)$$

Значит,

$$\exists f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

# 2 Связность. Теорема о голоморфной в области функции, производная которой равна нулю.

**Определение 2.1.** Если $u: G \to \mathbb{R}, G \subseteq \mathbb{R}^2$ – область, причём

$$u \in C^2(G), \Delta u = 0$$

где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

**Определение 2.2.** Функция $f: G \to \mathbb{C}$, где $G \subseteq \mathbb{C}$ – область, называется регулярной (аналитической, голоморфной), если

$$\forall z \in G\, \exists f'(z)$$

**Определение 2.3.** Функция $f: G \to \mathbb{C}, G \subseteq \mathbb{C}$ называется регулярной в точке $z_0 \in G$, если

$$\exists r > 0, B_r(z_0) \subseteq G: \ f \text{ регулярна на } B_r(z_0)$$

**Определение 2.4.** Множество $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ называется связным, если не существует открытых $G_1, G_2$:

1. $G_1 \cup G_2 \supseteq E$

2. $E \cap G_1 \cap G_2 = \varnothing$

3. $E \cap G_1 \neq \varnothing$ и $E \cap G_2 \neq \varnothing$

**Определение 2.5.** Непустое открытое связное множество в $\overline{\mathbb{C}}$ называется областью.

**Определение 2.6.** Область $D$ называется односвязной, если $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ – связно.

**Теорема 2.1.** *Пусть $f$ голоморфна в области $D$ и*

$$\forall z \in D: \ f'(z) \equiv 0$$

*Тогда $f \equiv const$*

*Доказательство.* Любые $(x_0, y_0) \in D$ лежат вместе с каким-то отрезком $[(x_0, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)]$. Тогда

$$f' = u_x + v_x i \Rightarrow u_x \equiv v_x \equiv 0 \Rightarrow u_y \equiv v_y \equiv 0$$

Применим теорему Лагранжа к $u(x, y)$. Аналогично к $v(x, y) \Rightarrow f \equiv const$ на всех вертикальных отрезках.

Аналогично на горизонтальных. Тогда $f \equiv const$ на $D$ в силу связности. □

# 3 Теорема об обратной функции

**Теорема 3.1.** *Пусть $f: G \to H \subseteq C, g: H \to \mathbb{C}$ регулярны. Тогда $\zeta(z) = g(f(z))$ также регулярна, причём*

$$\forall z \in G: \ \zeta'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

*Доказательство.* Зафиксируем $z_0 \in G, w_0 = f(z_0) \in G$.

Из дифференцируемости

$$\Delta f = f(z_0)\Delta z + o(\Delta z), |\Delta z| \to 0; \quad \Delta g = g'(w_0)\Delta w + o(\Delta w), |\Delta w| \to 0$$

Пусть $\Delta w = \Delta f$, тогда

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = g'(w_0)\frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta z} \overset{\Delta z \to 0}{\to} g'(w_0)f'(z_0) + 0$$

□

**Теорема 3.2.** *Об обратной фнуции.*

*Пусть $f: G \to \mathbb{C}$ регулярная и непрерывно дифференцируема на $G$. Пусть $z_0 \in G, w_0 = f(z_0), f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists B_\delta(z_0), B_\varepsilon(w_0)$, такие, что*

1. $\forall z \in B_\delta(z_0): \ f'(z) \neq 0$
2. $\forall \hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$ *уравнение* $\hat{w} = f(z)$ *имеет в* $B_\delta(z_0)$ *единственное решение* $\hat{z}$, *то есть на* $B_\varepsilon(w_0)$ *определена обратная функция* $g: B_\varepsilon(w_0) \to B_\delta(z_0)$, *то есть*

$$\forall w \in B_\delta(w_0): \ f(g(w)) = w$$

3. $g$ *регулярна на* $B_\varepsilon(w_0)$, *причём*

$$\forall w \in B_\varepsilon(w_0): \ g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

*Доказательство.* Первые два пункта выполняется благодаря обычной теореме об обратной функции из матана.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Имеем отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. В силу непрерывной дифференцируемости этих двух функций запишем якобиан и преобразуем согласно УКР:

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2 \Rightarrow J(x_0, y_0) \neq 0$$

Третий пункт выполняется благодаря предыдущей теореме:

$$g(f(z)) = z \Rightarrow g'(f(z))f'(z) = 1 \Rightarrow g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} = g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

□

# 4 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара...

**Определение 4.1.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ сходится, если сходится последовательность $\{\sum_{k=1}^{n} g_k(z)\}_{n=1}^{\infty}$.
Сходимость бывает условной и абсолютной.

**Определение 4.2.** Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$$

**Теорема 4.1.** *Признак Вейерштрасса.*
*Пусть*

$$\forall n \, \forall z : \ |g_n(z)| \leqslant \alpha_n$$

*причём $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ сходится абсолютно равномерно.*

**Теорема 4.2.** *Пусть $\frac{1}{R} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}, R \in [0, +\infty]$. Тогда*

1. *Если $|z| \leqslant r < R$, то степенной ряд сходится равномерно и абсолютно.*
2. *Если $|z| > R$, то ряд расходится*
3. *$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ голоморфна при $|z| < R$ и её производная $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$*

*Доказательство.* 1. Пусть $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$. По определению верхнего предела

$$\exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : \ \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{\rho}$$

Тогда (в условиях текущего пункта):

$$\exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : \ |a_n z^n| \leqslant \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \frac{r}{\rho} < 1$$

Тогда по теореме Вейшерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимся числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказали.

2. Пусть $|z| > R$, то есть $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$. Значит

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z| \geqslant \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$

По определению верхнего предела:

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \, \forall k : \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geqslant 1$$

Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

3. Заметим, что у $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ряд сходимости такой же в силу $\sqrt[n]{n} \to 1$, то есть он сходится при $|z| < R$.

   Заметим, что частичные суммы $G_n = F_n'$, то есть равна производной соответствующей частичной суммы $f$.

   Распишем производную $f$ через частичные суммы:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} + \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} =$$
$$\left(\frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} - F_N'(z_0)\right) + (F_N'(z_0) - g(z_0)) + g(z_0) + \left(\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0}\right)$$

   Устремляя $N \to +\infty$, получим

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$$

   так как

$$\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=N}^{\infty} \left[a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}\right] \Rightarrow$$

$$\left|\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0}\right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$$

   Проследнее выражение стремится к нулю, как остаток сходящегося ряда.

□

# 5 Степенные ряды. Свойства экспоненты и тригонометрических.

**Определение 5.1.** Голоморфные в $\mathbb{C}$ функции называют целыми

**Определение 5.2.** Определим эскпоненту

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$R_{\text{сх}} = +\infty \Rightarrow e^z$ целая.

**Лемма 5.1.** *Свойства экспоненты:*

1. $(e^z)' = e^z$
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
3. $\forall z \in \mathbb{C} : \ e^z \neq 0$

*Доказательство.* 1. Сразу следует из пункта 3 предыдущей теоремы.

2. Покажем эквивалентное свойство $e^{a-z}e^z = e^a$. Пусть

$$g(z) := e^{a-z}e^z \Rightarrow g'(z) = -e^{a-z}e^z + e^{a-z}e^z = 0$$

   А это значит, что $g \equiv const$, так как голоморфна.

   Посчитаем $g(0) = e^{a-0}e^0 = e^a \Rightarrow g(z) \equiv e^a$, что и требовалось доказать.

3. $\forall z \in \mathbb{C}$ выполняется:

$$e^z e^{-z} = e^0 = 1$$

   Значит в $e^z e^{-z}$ никто не может быть нулём.

□

**Определение 5.3.** Определим тригонометрические функции на $\mathbb{C}$:

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**Лемма 5.2.** *Свойства тригонометрических функций:*

1. $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$
2. $|e^z| = e^{Re\ z}$
3. *Если* $e^{z+T} = e^z$, *то* $T = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$

*Доказательство.* 1. Очевидно

2. Очевидно

3. Заметим, что

$$e^T = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\ T = 0 \Leftrightarrow T = i\beta$$

   Тогда

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta) = 1 \Leftrightarrow \beta = 2\pi k \Rightarrow T = 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$$

□

# 6 Первообразная и полный дифференциал в области. Условия...

**Определение 6.1.** Кривая $\gamma$ – класс эквивалентных параметризаций

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_0, t_1]$$

**Определение 6.2.** Кривая $\gamma$ называется гладкой, если существует параметризация

$$z(t) = x(t) + iy(t), x \in C^1([t_0, t_1]), y \in C^1([t_0, t_1]);\ \ \forall t \in [t_0, t_1] :\ z'(t) \neq 0$$

**Определение 6.3.** Гладкая кривая $\gamma$ называется замкнутой, если

$$z(t_0) = z(t_1);\ \ z'(t_0 + 0) = z'(t_1 - 0)$$

**Определение 6.4.** Кривая $\gamma$ называется кусочно гладкой, если

$$\exists t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = t_1$$

что

$$\forall k :\ z_k(t), t \in [\theta_{k-1}, \theta_k] \text{ - это гладкая кривая}$$

**Определение 6.5.** Пусть $g :\ G \to \mathbb{C}$ на области $G$. Назовём это первообразной непрерывной функции $f :\ G \to \mathbb{C}$, если $g$ регулярна на $G$ и

$$\forall z \in G :\ g'(z) = f(z)$$

**Определение 6.6.** Выражение $f(z)dz$ называется полным дифференциалом в области $G$, если существует первообразная $g$ для $f$ на $G$, то есть

$$f(z)dz = g'(z)dz$$

**Теорема 6.1.** *Пусть $f :\ G \to \mathbb{C}$ непрерывна на области $G$. Тогда:*

1. *Если $fdz$ – полный дифференциал на $G$, то для любой замкнутой КГК $\dot{\gamma} \subseteq G$ выполняется*
$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = 0$$
2. *Если для любой замкнутой ломаной кривой $\gamma$ выполняет равенство выше, то $fdz$ – полный дифференциал.*

*Доказательство.* 1. По условию $\exists g : G \to \mathbb{C}$, регулярная, такая, что $g'(z) = f(z)$. Тогда

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} g'(z(t))z'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(g(z(t)))dt = g(z(t_1)) - g(z(t_0)) = g(z(t_0)) - g(z(t_0)) = 0$$

2. Фиксируем $a \in G$ как начальную точку ломаной $\gamma$. Тогда $\forall z \in G :\ \exists \gamma_{az}$ – ломаная с началом в $a$ и концом в $z$.
$$g(z) = \int_{\gamma_{az}} f(z)dz$$
не зависит от $\gamma_{az}$, а лишь от $z$.

Действительно, если $\exists \gamma_{az} \not\sim \tilde{\gamma}_{az}$, то пусть $\dot{\gamma} = \gamma_{az} \cup \tilde{\gamma}_{az}^{-1}$, тогда по аддитивности интеграла

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = 0 = \int_{\gamma_{az}} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_{az}} f(z)dz$$

Докажем, что $\forall z:\ g'(z) = f(z)$. Рассмотрим $z_0:\ \exists \varepsilon > 0:\ B_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ и приращение $\Delta z:\ 0 < |\Delta z| < \varepsilon$. Тогда $z_0 + \Delta z \in G$. Рассмотрим

$$\frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0,\, z_0 + \Delta z]} f(z)dz$$

Значит

$$\left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0,\, z_0 + \Delta z]} (f(z) - f(z_0))dz \right|$$

В силу непрерывности $f(z)$, найдём $r(\varepsilon)$ – радиус шара, где $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, тогда

$$\forall z \in B_{r(\varepsilon)}(z_0) \cap B_\varepsilon(z_0):\ \left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0) \right| \leqslant \left| \frac{\varepsilon \min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}}{\min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}} \right| = \varepsilon$$

□

# 7 Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области

**Лемма 7.1.** *Гурса.*

*Пусть $G$ – область, $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна. Тогда для любого треугольника из $G$ верно*

$$\int_{\partial \triangle} f(z)dz = 0$$

*Доказательство.* Зафиксируем $\triangle ABC \subseteq G$. Тогда будем рассматривать

$$I := \int_{\partial \triangle ABC} f(z)dz$$

Разобьём треугольник средними линиями:

$$\triangle ABC = \bigcup_{k=1}^{4} \triangle_k$$

Тогда

$$I = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial \triangle_k} f(z)dz$$

Докажем, что

$$\exists k_0 : \left| \int_{\partial \triangle_{k_0}} f(z)dz \right| \geqslant \frac{|I|}{4}$$

Очевидно от противного, так как триангуляции с ориентацией, то если бы все были меньше, то нельзя было бы набрать $I$.

Обозначим найдённый треугольник за $\triangle^1 := \triangle_{k_0}$, а $\triangle^0 := \triangle ABC$. Аналогично построению $\triangle^1$ из $\triangle^0$ можем построить бесконечную последовательность $\{\triangle^N\}_{N=0}^{\infty}$, и для них

$$\left|\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz\right| \geqslant \frac{|I|}{4^N}$$

Теперь заметим, что $P_N = \frac{P_0}{2^N}$, где $P_N$ – периметр $N$-го треугольника. В силу компактности

$$\exists z_0 \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \triangle^N$$

Так как $f$ дифференцируема в $z_0$, то по определению:

$$\exists_{\delta_0}(z_0)\,\forall z \in B_{\delta_0}(z_0):\ f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

А для $o$-малого верно:

$$\forall \varepsilon > 0\,\exists \delta_1 \leqslant \delta_0\,\forall z \in B_{\delta_1}(z_0):\ |o(z - z_0)| \leqslant \varepsilon|z - z_0|$$

Теперь можем расписать интеграл:

$$\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz = f(z_0)\int_{\partial\triangle^N} dz + f'(z_0)\int_{\partial\triangle^N} zdz - z_0 f'(z_0)\int_{\partial\triangle^N} + \int_{\partial\triangle^N} o(z - z_0)dz = \int_{\partial\triangle^N} o(z - z_0)dz$$

Интегралы по 1 и $z$ равны нулю, так как они, очевидно, полные дифференциалы.

Причём полагаем $N$ таким, что

$$\forall z \in \triangle^N:\ |z - z_0| < \delta_1$$

Тогда

$$\left|\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz\right| \leqslant \int_{\partial\triangle^N} |o(z - z_0)| \cdot |dz| \leqslant \varepsilon \int_{\partial\triangle^N} |z - z_0| \cdot |dz| \leqslant \varepsilon P_N^2 \leqslant \varepsilon\frac{P_0^2}{4^N}$$

Получили, что

$$|I| \leqslant \varepsilon\frac{P_0^2}{4^N}$$

В силу произвольности $\varepsilon$: $I = 0$. □

**Теорема 7.1.** *Коши для выпуклой области.*

*Пусть $D$ – выпуклая область, $f$ – голоморфна в $D \setminus \{0\}$, $f$ – непрерывна в $D$. Тогда $\forall\gamma$ – кусочно-гладкой замкнутой кривой*

$$\int_\gamma f dz = 0$$

*Доказательство.* По лемме Гурса

$$\forall\triangle \subseteq D:\ \int_{\partial\triangle} f dz = 0$$

Тогда мы можем триангулировать любую ломаную $\Rightarrow$ по одной из теорем $f dz$ – полный дифференциал (нужна была непрерывности и нулевой интеграл по всем ломаным).

А как мы знаем, интеграл по любой замкнутой кривой от полного дифференциала нулевой. □

# 8 Интеграл Коши и его свойства

**Определение 8.1.** Пусть $\gamma$ – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$. Тогда $\forall \varphi \in C(\gamma)$ определим интеграл Коши, как

$$F_n(z,\varphi) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

**Теорема 8.1.** *Свойства интеграла Коши:*

1. *$F_n(z,\varphi)$ - голоморфна ($\Rightarrow$ непрерывна) в $\mathbb{C} \setminus \gamma$*

2. *$F_n'(z,\varphi) = nF_{n+1}(z,\varphi)$*

*Доказательство.* Вначале покажем непрерывность для $n = 1$:

$$F_1(z,\varphi) - F_1(z_0,\varphi) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)(z - z_0)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi = (z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)$$

Введём $\delta = \rho(z_0,\gamma)$. Для $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ оно, очевидно, не равно нулю.

Тогда

$$\left|(z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)\right| \leqslant \frac{const}{\delta^2}|z - z_0|$$

что и гарантирует непрерывность.

Из того же тождества

$$\frac{F_1(z,\varphi) - F_1(z_0,\varphi)}{z - z_0} = F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \overset{z \to z_0}{\to} F_1\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = F_2(z_0,\varphi(\xi))$$

Доказали голоморфность существованием производной.

Далее по индукции: пусть $F_{n-1}$ голоморфна в $D$:

$$F_{n-1}'(z,\varphi) = (n-1)F_n(z,\varphi)$$

Распишем приращение с помощью умного нуля:

$$F_n(z,\varphi) - F_n(z_0,\varphi) =$$

$$\int_\gamma \left[\left(\frac{1}{(\xi - z)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)}\right) + \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^n}\right] \varphi(\xi) d\xi =$$

$$(z - z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} + F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)$$

Сходимость к нулю первого слагаемого доказывается аналогично предыдущему пункту с непрерывностью, а последние два слагаемых дают приращение непрерывной функции, которое также стремится к нулю при $z \to z_0$.

Поделим предыдущее выражение на $z - z_0$ и посчитаем производную:

$$\frac{F_n(z,\varphi) - F_n(z_0,\varphi)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} + \frac{F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)}{z - z_0} \overset{z \to z_0}{\to}$$

$$F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + F_{n-1}'\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + (n-1)F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) =$$

$$n \cdot F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = n \cdot F_{n+1}(z_0,\varphi(\xi))$$

Таким образом, $F_n(z,\varphi)$ – бесконечно дифференцируемая. $\square$

# 9 Интегральная формула Коши для круга...

**Теорема 9.1.** *Пусть $f$ – голоморфна в $D$, причём $\overline{O}_r(a) \subset D$. Тогда*

$$\forall z \in O_r(a):\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

*Доказательство.* Благодаря замкнутости

$$\exists R > r:\ \overline{O}_R(a) \subseteq D$$

Фиксируем $z \in O_r(a)$:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}, \xi \neq z \\ f'(z), \xi = z \end{cases}$$

$g(\xi)$ – голоморфна в $O_R(a) \setminus \{z\}$ (как отношение голоморфных функций) и непрерывна в $O_R(a) \Rightarrow \forall\gamma_r$ – замкнутого контура по теореме Коши:

$$\int_{\gamma_r} g(\xi)d\xi = 0$$

То есть

$$\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = f(z)\int_{\gamma_r}\frac{d\xi}{\xi - z} =: G(z)$$

$G(z)$ – голоморфна в $O_r(a), G' = \int_{\gamma_r}\frac{d\xi}{(\xi-z)^2} \equiv 0 \Rightarrow G \equiv const \Rightarrow G(a) = 2\pi i \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

□

**Следствие.** 
1. *$f$ – голоморфна в $D \Rightarrow f$ – интеграл Коши $\Rightarrow f'$ – голоморфна в $D$.*
2. *$f$ – голоморфна в $D \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}:\ f^{(n)}$ – голоморфна в $D$.*
3. *В условии формулы Коши для круга:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi}\int_{|z-a|=r}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$$

# 10 Теорема Морера. Теорема о среднем.

**Теорема 10.1.** *Мореры.*
*Пусть $f$ – непрерывна в области $D$ и*

$$\forall\overline{\triangle} \subseteq D:\ \int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

*Тогда $f$ – голоморфна в $D$.*

*Доказательство.* Заметим, что $\overline{O}_r(a) \subseteq D$ – выпукло, поэтому применяем лемму:

$$\forall z \in O_r(a)\, \exists F:\ F' = f$$

В этом круге по одному из следствий $F$ голоморфна $\Rightarrow f$ – голоморфна в $O_r(a)$.
Это верно $\forall a \in D \Rightarrow f$ – голоморфна в $D$. □

**Теорема 10.2.** *О среднем.*
*Пусть $f$ – голоморфна в $\overline{O}_r(a) \subseteq D$, тогда*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta}r)d\theta$$

*Доказательство.* Пусть $\xi = a + re^{i\theta}$. Тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

□