Содержание

1 Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана

Определение 1.1. Окрестностью назовём

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

Проколотой окрестностью назовём

$$\dot{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

Замкнутой окрестностью назовём

$$\overline{B}_r(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$$

Замечание. Введём обозначения:

$$\Delta x = x - x_0; \quad \Delta y = y - y_0; \quad \Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y$$
$$\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0); \quad \Delta v = v(x, y) - v(x_0, y_0); \quad \Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta u + i\Delta v$$

Определение 1.2. Говорят, что $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке z_0, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \to 0$$

Лемма 1.1. *$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в $z_0 \Leftrightarrow \exists f'(z_0), A = f'(z_0)$.*

Теорема 1.1. *Условие Коши-Римана.*
$f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в z_0 тогда и только тогда, когда

- *$u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в (x_0, y_0)*
- *Выполняется условие Коши-Римана:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Доказательство. $(\Rightarrow)$
Пусть

$$\exists f'(z_0) = a + ib = A \in \mathbb{C}$$

Значит, по определению дифференцируемости

$$\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z); \quad \alpha(\Delta z) := \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$$

Где $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z), |\Delta z| \to 0$
Тогда, раскрыв это выражение по каждой координате, получим

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \end{cases}$$

Из того, что $|\alpha_1| \leqslant |\alpha(\Delta z)|$ и $|\alpha_2| \leqslant |\alpha(\Delta z)| \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = o(\Delta z), |\Delta z| \to 0$.

Значит, u дифференцируема, причём

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b$$

Аналогично для v, причём

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

Видим, что УКР выполняется.

($\Leftarrow$)

Пусть u, v дифференцируемы в (x_0, y_0) и выполняется УКР. Тогда

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta Z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) =$$

$$\Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \alpha_1(\Delta Z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) =$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1(\Delta z) + i\alpha_2(\Delta z)$$

Значит,

$$\exists f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\square$

2 Связность. Теорема о голоморфной в области функции, производная которой равна нулю.

Определение 2.1. Если $u: G \to \mathbb{R}, G \subseteq \mathbb{R}^2$ – область, причём

$$u \in C^2(G), \Delta u = 0$$

где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Определение 2.2. Функция $f: G \to \mathbb{C}$, где $G \subseteq \mathbb{C}$ – область, называется регулярной (аналитической, голоморфной), если

$$\forall z \in G\, \exists f'(z)$$

Определение 2.3. Функция $f: G \to \mathbb{C}, G \subseteq \mathbb{C}$ называется регулярной в точке $z_0 \in G$, если

$$\exists r > 0, B_r(z_0) \subseteq G: \ f \text{ регулярна на } B_r(z_0)$$

Определение 2.4. Множество $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ называется связным, если не существует открытых G_1, G_2:

1. $G_1 \cup G_2 \supseteq E$
2. $E \cap G_1 \cap G_2 = \varnothing$

3. $E \cap G_1 \neq \varnothing$ и $E \cap G_2 \neq \varnothing$

Определение 2.5. Непустое открытое связное множество в $\overline{\mathbb{C}}$ называется областью.

Определение 2.6. Область D называется односвязной, если $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ – связно.

Теорема 2.1. *Пусть f голоморфна в области D и*

$$\forall z \in D : \ f'(z) \equiv 0$$

Тогда $f \equiv const$

Доказательство. Любые $(x_0, y_0) \in D$ лежат вместе с каким-то отрезком $[(x_0, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)]$. Тогда

$$f' = u_x + v_x i \Rightarrow u_x \equiv v_x \equiv 0 \Rightarrow u_y \equiv v_y \equiv 0$$

Применим теорему Лагранжа к $u(x, y)$. Аналогично к $v(x, y) \Rightarrow f \equiv const$ на всех вертикальных отрезках.

Аналогично на горизонтальных. Тогда $f \equiv const$ на D в силу связности. □

3 Теорема об обратной функции

Теорема 3.1. *Пусть $f : G \to H \subseteq C, g : H \to \mathbb{C}$ регулярны. Тогда $\zeta(z) = g(f(z))$ также регулярна, причём*

$$\forall z \in G : \ \zeta'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

Доказательство. Зафиксируем $z_0 \in G, w_0 = f(z_0) \in G$.

Из дифференцируемости

$$\Delta f = f(z_0)\Delta z + o(\Delta z), |\Delta z| \to 0; \quad \Delta g = g'(w_0)\Delta w + o(\Delta w), |\Delta w| \to 0$$

Пусть $\Delta w = \Delta f$, тогда

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = g'(w_0)\frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta z} \overset{\Delta z \to 0}{\to} g'(w_0)f'(z_0) + 0$$

□

Теорема 3.2. *Об обратной фнуции.*

Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ регулярная и непрерывно дифференцируема на G. Пусть $z_0 \in G, w_0 = f(z_0), f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\exists B_\delta(z_0), B_\varepsilon(w_0)$, такие, что

1. $\forall z \in B_\delta(z_0) : \ f'(z) \neq 0$
2. *$\forall \hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$ уравнение $\hat{w} = f(z)$ имеет в $B_\delta(z_0)$ единственное решение $\hat{z}$, то есть на $B_\varepsilon(w_0)$ определена обратная функция $g : B_\varepsilon(w_0) \to B_\delta(z_0)$, то есть*

$$\forall w \in B_\delta(w_0) : \ f(g(w)) = w$$

3. *g регулярна на $B_\varepsilon(w_0)$, причём*

$$\forall w \in B_\varepsilon(w_0) : \ g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

Доказательство. Первые два пункта выполняется благодаря обычной теореме об обратной функции из матана.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Имеем отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. В силу непрерывной дифференцируемости этих двух функций запишем якобиан и преобразуем согласно УКР:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2 \Rightarrow J(x_0, y_0) \neq 0$$

Третий пункт выполняется благодаря предыдущей теореме:

$$g(f(z)) = z \Rightarrow g'(f(z))f'(z) = 1 \Rightarrow g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} = g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

□

4 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара. . .

Определение 4.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}$ сходится, если сходится последовательность $\{\sum_{k=1}^{n} g_k(z)\}_{n=1}^{\infty}$.
Сходимость бывает условной и абсолютной.

Определение 4.2. Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$$

Теорема 4.1. *Признак Вейерштрасса.*
Пусть

$$\forall n \, \forall z : \ |g_n(z)| \leqslant \alpha_n$$

причём $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ *сходится абсолютно равномерно.*

Теорема 4.2. *Пусть* $\frac{1}{R} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}, R \in [0, +\infty]$. *Тогда*

1. *Если* $|z| \leqslant r < R$, *то степенной ряд сходится равномерно и абсолютно.*
2. *Если* $|z| > R$, *то ряд расходится*
3. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *голоморфна при* $|z| < R$ *и её производная* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Доказательство. 1. Пусть $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$. По определению верхнего предела

$$\exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : \ \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{\rho}$$

Тогда (в условиях текущего пункта):

$$\exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : \ |a_n z^n| \leqslant \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \frac{r}{\rho} < 1$$

Тогда по теореме Вейшерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимся числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказали.

2. Пусть $|z| > R$, то есть $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$. Значит

$$\exists \varepsilon > 0: \ \frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z| \geqslant \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$

По определению верхнего предела:

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \, \forall k: \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geqslant 1$$

Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

3. Заметим, что у $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ряд сходимости такой же в силу $\sqrt[n]{n} \to 1$, то есть он сходится при $|z| < R$.

Заметим, что частичные суммы $G_n = F_n'$, то есть равна производной соответствующей частичной суммы f.

Распишем производную f через частичные суммы:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} + \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} =$$
$$\left(\frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} - F_N'(z_0)\right) + (F_N'(z_0) - g(z_0)) + g(z_0) + \left(\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0}\right)$$

Устремляя $N \to +\infty$, получим

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$$

так как

$$\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=N}^{\infty} \left[a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}\right] \Rightarrow$$
$$\left|\frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0}\right| \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1}$$

Проследнее выражение стремится к нулю, как остаток сходящегося ряда.

□

5 Степенные ряды. Свойства экспоненты и тригонометрических.

Определение 5.1. Голоморфные в $\mathbb{C}$ функции называют целыми

Определение 5.2. Определим эскпоненту

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$R_{\text{сх}} = +\infty \Rightarrow e^z$ целая.

Лемма 5.1. *Свойства экспоненты:*

1. $(e^z)' = e^z$
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
3. $\forall z \in \mathbb{C}: \ e^z \neq 0$

Доказательство. 1. Сразу следует из пункта 3 предыдущей теоремы.

2. Покажем эквивалентное свойство $e^{a-z}e^z = e^a$. Пусть

$$g(z) := e^{a-z}e^z \Rightarrow g'(z) = -e^{a-z}e^z + e^{a-z}e^z = 0$$

А это значит, что $g \equiv const$, так как голоморфна.

Посчитаем $g(0) = e^{a-0}e^0 = e^a \Rightarrow g(z) \equiv e^a$, что и требовалось доказать.

3. $\forall z \in \mathbb{C}$ выполняется:

$$e^z e^{-z} = e^0 = 1$$

Значит в $e^z e^{-z}$ никто не может быть нулём.

$\square$

Определение 5.3. Определим тригонометрические функции на $\mathbb{C}$:

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Лемма 5.2. *Свойства тригонометрических функций:*

1. $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$
2. $|e^z| = e^{Re\ z}$
3. *Если* $e^{z+T} = e^z$, *то* $T = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$

Доказательство. 1. Очевидно

2. Очевидно

3. Заметим, что

$$e^T = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\ T = 0 \Leftrightarrow T = i\beta$$

Тогда

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta) = 1 \Leftrightarrow \beta = 2\pi k \Rightarrow T = 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$$

$\square$

6 Первообразная и полный дифференциал в области. Условия...

Определение 6.1. Кривая γ – класс эквивалентных параметризаций

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_0, t_1]$$

Определение 6.2. Кривая γ называется гладкой, если существует параметризация

$$z(t) = x(t) + iy(t), x \in C^1([t_0, t_1]), y \in C^1([t_0, t_1]);\ \ \forall t \in [t_0, t_1] :\ z'(t) \neq 0$$

Определение 6.3. Гладкая кривая γ называется замкнутой, если

$$z(t_0) = z(t_1);\ \ z'(t_0 + 0) = z'(t_1 - 0)$$

Определение 6.4. Кривая γ называется кусочно гладкой, если

$$\exists t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = t_1$$

что

$$\forall k :\ z_k(t), t \in [\theta_{k-1}, \theta_k] \text{ - это гладкая кривая}$$

Определение 6.5. Пусть $g :\ G \to \mathbb{C}$ на области G. Назовём это первообразной непрерывной функции $f :\ G \to \mathbb{C}$, если g регулярна на G и

$$\forall z \in G :\ g'(z) = f(z)$$

Определение 6.6. Выражение $f(z)dz$ называется полным дифференциалом в области G, если существует первообразная g для f на G, то есть

$$f(z)dz = g'(z)dz$$

Теорема 6.1. *Пусть $f :\ G \to \mathbb{C}$ непрерывна на области G. Тогда:*

1. *Если fdz – полный дифференциал на G, то для любой замкнутой КГК $\dot{\gamma} \subseteq G$ выполняется*
$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = 0$$
2. *Если для любой замкнутой ломаной кривой γ выполняет равенство выше, то fdz – полный дифференциал.*

Доказательство. 1. По условию $\exists g : G \to \mathbb{C}$, регулярная, такая, что $g'(z) = f(z)$. Тогда
$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} g'(z(t))z'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(g(z(t)))dt = g(z(t_1)) - g(z(t_0)) = g(z(t_0)) - g(z(t_0)) = 0$$

2. Фиксируем $a \in G$ как начальную точку ломаной γ. Тогда $\forall z \in G :\ \exists \gamma_{az}$ – ломаная с началом в a и концом в z.
$$g(z) = \int_{\gamma_{az}} f(z)dz$$
не зависит от γ_{az}, а лишь от z.

Действительно, если $\exists\gamma_{az} \not\sim \tilde{\gamma}_{az}$, то пусть $\dot{\gamma} = \gamma_{az} \cup \tilde{\gamma}_{az}^{-1}$, тогда по аддитивности интеграла

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = 0 = \int_{\gamma_{az}} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_{az}} f(z)dz$$

Докажем, что $\forall z: \ g'(z) = f(z)$. Рассмотрим $z_0: \ \exists\varepsilon > 0: \ B_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ и приращение $\Delta z: \ 0 < |\Delta z| < \varepsilon$. Тогда $z_0 + \Delta z \in G$. Рассмотрим

$$\frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0,\, z_0 + \Delta z]} f(z)dz$$

Значит

$$\left|\frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0,\, z_0+\Delta z]} (f(z) - f(z_0))dz\right|$$

В силу непрерывности $f(z)$, найдём $r(\varepsilon)$ – радиус шара, где $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, тогда

$$\forall z \in B_{r(\varepsilon)}(z_0) \cap B_\varepsilon(z_0): \ \left|\frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0)\right| \leqslant \left|\frac{\varepsilon \min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}}{\min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}}\right| = \varepsilon$$

□

7 Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области

Лемма 7.1. *Гурса.*

Пусть G – область, $f: G \to \mathbb{C}$ регулярна. Тогда для любого треугольника из G верно

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

Доказательство. Зафиксируем $\triangle ABC \subseteq G$. Тогда будем рассматривать

$$I := \int_{\partial\triangle ABC} f(z)dz$$

Разобьём треугольник средними линиями:

$$\triangle ABC = \bigcup_{k=1}^{4} \triangle_k$$

Тогда

$$I = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\triangle_k} f(z)dz$$

Докажем, что

$$\exists k_0: \ \left|\int_{\partial\triangle_{k_0}} f(z)dz\right| \geqslant \frac{|I|}{4}$$

Очевидно от противного, так как триангуляции с ориентацией, то если бы все были меньше, то нельзя было бы набрать I.

Обозначим найдённый треугольник за $\triangle^1 := \triangle_{k_0}$, а $\triangle^0 := \triangle ABC$. Аналогично построению $\triangle^1$ из $\triangle^0$ можем построить бесконечную последовательность $\{\triangle^N\}_{N=0}^{\infty}$, и для них

$$\left|\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz\right| \geqslant \frac{|I|}{4^N}$$

Теперь заметим, что $P_N = \frac{P_0}{2^N}$, где P_N – периметр N-го треугольника. В силу компактности

$$\exists z_0 \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \triangle^N$$

Так как f дифференцируема в z_0, то по определению:

$$\exists_{\delta_0}(z_0)\, \forall z \in B_{\delta_0}(z_0):\ f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

А для o-малого верно:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 \leqslant \delta_0\, \forall z \in B_{\delta_1}(z_0):\ |o(z - z_0)| \leqslant \varepsilon |z - z_0|$$

Теперь можем расписать интеграл:

$$\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz = f(z_0)\int_{\partial\triangle^N} dz + f'(z_0)\int_{\partial\triangle^N} zdz - z_0 f'(z_0)\int_{\partial\triangle^N} + \int_{\partial\triangle^N} o(z - z_0)dz = \int_{\partial\triangle^N} o(z - z_0)dz$$

Интегралы по 1 и z равны нулю, так как они, очевидно, полные дифференциалы.

Причём полагаем N таким, что

$$\forall z \in \triangle^N:\ |z - z_0| < \delta_1$$

Тогда

$$\left|\int_{\partial\triangle^N} f(z)dz\right| \leqslant \int_{\partial\triangle^N} |o(z - z_0)| \cdot |dz| \leqslant \varepsilon \int_{\partial\triangle^N} |z - z_0| \cdot |dz| \leqslant \varepsilon P_N^2 \leqslant \varepsilon \frac{P_0^2}{4^N}$$

Получили, что

$$|I| \leqslant \varepsilon \frac{P_0^2}{4^N}$$

В силу произвольности ε: $I = 0$. □

Теорема 7.1. *Коши для выпуклой области.*

Пусть D – выпуклая область, f – голоморфна в $D \setminus \{0\}$, f – непрерывна в D. Тогда $\forall \gamma$ – кусочно-гладкой замкнутой кривой

$$\int_\gamma f dz = 0$$

Доказательство. По лемме Гурса

$$\forall \triangle \subseteq D:\ \int_{\partial\triangle} f dz = 0$$

Тогда мы можем триангулировать любую ломаную $\Rightarrow$ по одной из теорем fdz – полный дифференциал (нужна была непрерывности и нулевой интеграл по всем ломаным).

А как мы знаем, интеграл по любой замкнутой кривой от полного дифференциала нулевой. □

8 Интеграл Коши и его свойства

Определение 8.1. Пусть γ – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$. Тогда $\forall\varphi \in C(\gamma)$ определим интеграл Коши, как

$$F_n(z,\varphi) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

Теорема 8.1. *Свойства интеграла Коши:*

1. *$F_n(z,\varphi)$ - голоморфна ($\Rightarrow$ непрерывна) в $\mathbb{C} \setminus \gamma$*

2. *$F_n'(z,\varphi) = nF_{n+1}(z,\varphi)$*

Доказательство. Вначале покажем непрерывность для $n = 1$:

$$F_1(z,\varphi) - F_1(z_0,\varphi) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)(z - z_0)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi = (z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)$$

Введём $\delta = \rho(z_0, \gamma)$. Для $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ оно, очевидно, не равно нулю.

Тогда

$$\left|(z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)\right| \leqslant \frac{const}{\delta^2}|z - z_0|$$

что и гарантирует непрерывность.

Из того же тождества

$$\frac{F_1(z,\varphi) - F_1(z_0,\varphi)}{z - z_0} = F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \stackrel{z\to z_0}{\to} F_1\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = F_2(z_0, \varphi(\xi))$$

Доказали голоморфность существованием производной.

Далее по индукции: пусть F_{n-1} голоморфна в D:

$$F_{n-1}'(z,\varphi) = (n-1)F_n(z,\varphi)$$

Распишем приращение с помощью умного нуля:

$$F_n(z,\varphi) - F_n(z_0,\varphi) =$$

$$\int_\gamma \left[\left(\frac{1}{(\xi - z)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)}\right) + \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^n}\right] \varphi(\xi) d\xi =$$

$$(z - z_0)\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} + F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)$$

Сходимость к нулю первого слагаемого доказывается аналогично предыдущему пункту с непрерывностью, а последние два слагаемых дают приращение непрерывной функции, которое также стремится к нулю при $z \to z_0$.

Поделим предыдущее выражение на $z - z_0$ и посчитаем производную:

$$\frac{F_n(z,\varphi) - F_n(z_0,\varphi)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} + \frac{F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)}{z - z_0} \stackrel{z\to z_0}{\to}$$

$$F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + F_{n-1}'\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + (n-1)F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) =$$

$$n \cdot F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = n \cdot F_{n+1}(z_0, \varphi(\xi))$$

Таким образом, $F_n(z,\varphi)$ – бесконечно дифференцируемая. $\square$

9 Интегральная формула Коши для круга...

Теорема 9.1. *Пусть f – голоморфна в D, причём $\overline{O}_r(a) \subset D$. Тогда*

$$\forall z \in O_r(a) : \ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Доказательство. Благодаря замкнутости

$$\exists R > r : \ \overline{O}_R(a) \subseteq D$$

Фиксируем $z \in O_r(a)$:

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}, \xi \neq z \\ f'(z), \xi = z \end{cases}$$

$g(\xi)$ – голоморфна в $O_R(a) \setminus \{z\}$ (как отношение голоморфных функций) и непрерывна в $O_R(a) \Rightarrow \forall \gamma_r$ – замкнутого контура по теореме Коши:

$$\int_{\gamma_r} g(\xi) d\xi = 0$$

То есть

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = f(z) \int_{\gamma_r} \frac{d\xi}{\xi - z} =: G(z)$$

$G(z)$ – голоморфна в $O_r(a), G' = \int_{\gamma_r} \frac{d\xi}{(\xi-z)^2} \equiv 0 \Rightarrow G \equiv const \Rightarrow G(a) = 2\pi i \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

□

Следствие. 1. *f – голоморфна в $D \Rightarrow f$ – интеграл Коши $\Rightarrow f'$ – голоморфна в D.*

2. *f – голоморфна в $D \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \ f^{(n)}$ – голоморфна в D.*

3. *В условии формулы Коши для круга:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \tag{1}$$

10 Теорема Морера. Теорема о среднем.

Теорема 10.1. *Мореры.*

Пусть f – непрерывна в области D и

$$\forall \overline{\triangle} \subseteq D : \ \int_{\partial \triangle} f(z) dz = 0$$

Тогда f – голоморфна в D.

Доказательство. Заметим, что $\overline{O}_r(a) \subseteq D$ – выпукло, поэтому применяем лемму:

$$\forall z \in O_r(a)\, \exists F :\ F' = f$$

В этом круге по одному из следствий F голоморфна $\Rightarrow f$ – голоморфна в $O_r(a)$.

Это верно $\forall a \in D \Rightarrow f$ – голоморфна в D. □

Теорема 10.2. *О среднем.*

Пусть f – голоморфна в $\overline{O}_r(a) \subseteq D$, тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta} r) d\theta$$

Доказательство. Пусть $\xi = a + re^{i\theta}$. Тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta}) i re^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

□

11 Целые функции и теорема Луивилля

Определение 11.1. f – целая, если f голоморфна в $\mathbb{C}$.

Теорема 11.1. *Луивилля.*

Если f – целая и

$$\exists M, m, R\, \forall z, |z| > R :\ |f(z)| < M \cdot |z|^m$$

Тогда $f(z)$ – полином степени $\leqslant m$.

Доказательство. Знаем, что

$$\forall z \in \mathbb{C} :\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, R_{\text{сх}} = \infty$$

Тогда по (12.1)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi^{n+1}}$$

Оценим сверху

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=\rho} \frac{|f(\xi)||d\xi|}{|\xi^{n+1}|} \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{|\xi|=\rho} \frac{|\xi|^m}{|\xi|^{n+1}}|d\xi| = \frac{M}{2\pi}\int_{|\xi|=\rho} \frac{1}{|\xi|^{n+1-m}}|d\xi| = \frac{M}{\rho^{n-m}} = M\rho^{m-n}$$

При $n > m$:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^{n-m}} \overset{\rho\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \forall n > m :\ |c_n| = 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n$$

□

12 Ряд Тейлора и теорема единственности...

Теорема 12.1. *Ряд Тейлора.*

Пусть f – голоморфна в $D, O_R(a) \subseteq D$. Тогда

$$\forall z \in O_R(a) : \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Доказательство. Пусть $r < R, f$ – голоморфна в $\overline{O_r(a)} \Rightarrow$

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

Тогда распишем

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi - a}} \overset{|z-a|<|\xi-a|}{=}$$

$$\frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Полученный ряд сходится равномерно, а значит можно умножить на $f(\xi)$ и почленно интегрировать

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i c_n (z-a)^n \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Причём по (1):

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

В завершение скажем

$$\forall z : \ |z-a| < R \, \exists r < R \; z \in O_r(a) \Rightarrow$$

формула верна во всём $O_R(a)$. □

Определение 12.1. Пусть $f \neq 0$ – голоморфна в $O_r(a), f(a) = 0$, тогда m – это порядок нуля в точке a. если

$$\forall k = \overline{0, m-1} : \ f^{(k)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0$$

Утверждение 12.1. *f имеет нуль порядка $m \Leftrightarrow \exists g(z)$ – голоморфная в $O_r(a), g(a) \neq 0$:*

$$f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$$

Доказательство. ($\Rightarrow$)

БОО $a = 0$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n = z^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} z^n$$

Пусть $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} z^n$, причём $g(0) \neq 0$, так как $c_m \neq 0$.

($\Leftarrow$) Пусть $f(z) = (z-a)^m g(z)$. Дифференцируя получаем

$$\forall k = \overline{0, m-1} : \ f^{(k)}(a) = 0, f^{(m)} \neq 0$$

□

Замечание. Пусть f – голоморфна в окрестности $a, f(a) = 0$. Тогда

$$\exists \rho > 0\, \forall z\, |z-a| \in (0, \rho) :\ f(z) \neq 0$$

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего утверждения. □

Теорема 12.2. *О единственности.*

Пусть f и g – голоморфны в области $D, E \subseteq D$, причём в D есть хотя бы одна предельная точка E. Тогда если

$$\forall z \in E :\ f(z) = g(z)$$

то

$$\forall z \in D :\ f(z) = g(z)$$

Доказательство. Пусть $h = f - g, a$ – предельная точка $E, a \in D$. Тогда введём

$$Z = \{z \in D \mid h(z) = 0\}$$

Тогда по непрерывности $a \in Z$, причём a – предельная точка $Z \Rightarrow h(z) \equiv 0$ в окрестности a (12).

Пусть $G_1 := \operatorname{int} Z$ – открытое непустое, так как $a \in G_1$. Тогда если $G_2 := D \setminus G_1$ открытое, то из-за связности $D \Rightarrow G_2$ – пустое, что доказывает теорему.

Пусть G_2 неоткрыто. Пусть $z^* \in G_2$, причём z^* – предельная точка G_1. Тогда $\exists z_n \to z^*, z_n \in G_1$. Тогда $h(z_n) = 0 \overset{\text{непрерывность}}{\Rightarrow} h(z^*) = 0 \Rightarrow z^* \in G_1$ – противоречие. □

13 Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки...

Определение 13.1. Пусть γ – кусочно гладкая кривая в D,

$$\Gamma = f(\gamma) = \{w = f(z(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

Причём Γ – кусочно гладкая, $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда приращением аргумента вдоль кривой называется

$$\Delta_\Gamma w := \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \operatorname{Im} \int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} =: \Delta_\gamma f$$

Лемма 13.1. *Свойства приращения аргумента:*

1. $\Delta_\gamma(c \cdot f) = \Delta_\gamma(f), c \neq 0$
2. $\Delta_\gamma(f_1 \cdot f_2) = \Delta_\gamma(f_1) + \Delta_\gamma(f_2)$
3. $\Delta_\gamma \frac{1}{f} = -\Delta_\gamma f$
4. $\Delta_{-\gamma}(f) = -\Delta_\gamma(f)$

Доказательство. 1. Следует из второго пункта (приращение константы равно нулю)

2. Для доказательство достаточно заметить

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}$$

   И воспользоваться линейностью интеграла.

3. Очевидно из предыдущего пункта

4. Очевидно

$\square$

Определение 13.2. Индекс a относительно кривой γ, где γ – кусочно гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{C}, a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, называется

$$J_\gamma(a) = \frac{\Delta_\gamma(z-a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Иными словами, это количество оборотов кривой вокруг a.

Лемма 13.2. *Пусть γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$. Тогда*

1. $J_\gamma(z) \equiv const$ *в каждой компоненте связности* $\mathbb{C} \setminus \gamma$

2. *Если какая-то компонента содержит ∞, то $J_\gamma(z) \equiv 0$ в ней.*

Доказательство. Действительно,

$$J_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

интеграл Коши $\Rightarrow$ голоморфна в $\mathbb{C} \backslash \gamma \Rightarrow$ непрерывна и, так как принимает только значения из $\mathbb{Z}$, постоянна в своих компонентах связности. Это следует из того, что

$$J_\gamma'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = 0 \Rightarrow J_\gamma(a) \equiv const \text{ в компоненте связности}$$

Для неограниченной компоненты

$$f(z) := \text{dist }(\gamma, z) = \min_{\zeta \in \gamma} |z - \zeta| > 0$$

Тогда

$$|J_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi d(z)} \int_\gamma |d\xi|$$

Но $d(z) \to \infty$ при $z \to \infty \Rightarrow J_\gamma(z) = 0$. $\square$

14 Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши...

Лемма 14.1. *Общая теорема Коши.*

Пусть D – область в $\mathbb{C}$, f – голоморфна в области D. Тогда

1. *Функция*

$$g(\xi, z) := \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}, \xi \neq z \\ f'(z), \xi = z \end{cases}$$

непрерывна в $D \times D$.

2. *$\forall$ кусочно гладкой $\gamma \subset D$:*

$$h(z) = \int_\gamma g(\xi, z) d\xi$$

голоморфна в D.

Доказательство. 1. При $\xi \neq z$ непрерывна как отношение непрерывных функций.

При $\xi = z$ зафиксируем $z_0 \in D$, по открытости $D \Rightarrow \exists \overline{O}_r(z_0) \subset D$. Тогда будем рассмотримвать сколь угодно близкие $z, \xi \in O_\varepsilon(z_0), \varepsilon < r$.

Распишем в этой окрестности ряд Тейлора для двух точек:

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$
$$f(\xi) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n$$

Далее нам понадобится следующая оценка:

$$\left| \frac{(z - z_0)^n - (\xi - z_0)^n}{z - \xi = [(z - z_0) - (\xi - z_0)]} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (z - z_0)^{n-1-k} (\xi - z_0)^k \right| \leqslant n\varepsilon^{n-1}$$

Рассмотрим приращение

$$|g(z, \xi) - g(z_0, z_0)| = |g(z, \xi) - f'(z_0)| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n - (\xi - z_0)^n}{z - \xi} \right| \leqslant$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot \varepsilon^{n-1} \leqslant \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot r^{n-2} = \varepsilon M$$

Где $M < \infty$ взяли из сходимости ряда Тейлора путём дифференцирования ($\exists R > r : O_R(z_0) \subseteq D \; \overline{O}_r(z_0) \subseteq D$).

Заметим, что мы доказали непрерывность, оценив приращение g.

2. Видно, что h – непрерывна в D. Тогда для $\overline{\triangle} \subset D$:

$$\int_{\partial\triangle} h(z) dz = \int_{\partial\triangle} \int_\gamma g(\xi, z) d\xi dz = \int_\gamma \int_{\partial\triangle} g(\xi, z) dz d\xi = 0$$

Это верно, так как $g(\xi_0, \cdot)$ голоморфна в $D \setminus \{\xi\}$, непрерывна в $D \Rightarrow$ по лемме Гурса $\int_{\partial\triangle} g(\xi, z)dz = 0$.

В итоге можем применить теорему Морера, из которой будет следовать, что h – голоморфна.

$\square$

Теорема 14.1. *Интегральная теорема Коши.*

Пусть D – область в $\mathbb{C}, f$ – голоморфна в D. Пусть Γ – цикл в D, причём $\Gamma \sim 0(\mod D)$. Тогда

1. $\forall z \in D \setminus \Gamma : \ J_\Gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$
2. $\int_\Gamma f(z)dz = 0$

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$

Применим 1 к $\tilde{f}(z) = (z-a)f(z)$. Где $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, если $f(a)$ определена (или $a \in D \setminus \Gamma$). Тогда

$$0 = J_\Gamma(a)(a-a)f(a) = J_\Gamma(a) \cdot \tilde{f}(a) = \int_\Gamma \frac{\tilde{f}(\xi)d\xi}{\xi - a} = \int_\Gamma f(\xi)d\xi$$

Докажем первый пункт.

Введём

$$G := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_\Gamma(z) = 0\}$$

– открытое множество. Рассмотрим две функции

$$2\pi i \cdot \tilde{h}(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

– голоморфна в G, как интеграл Коши.

$$2\pi i \cdot h(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi$$

– голомофрна в D, как функция из второго пункта предыдущей теоремы.

Заметим, что $\forall z \in G \cap D : \ h(z) = \tilde{h}(z)$, так как

$$\tilde{h}(z) = h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)d\xi}{\xi - z} = f(z)J_\Gamma(z) = 0$$

Тогда введём новую функцию

$$F(z) := \begin{cases} h(z), z \in D \\ \tilde{h}(z), z \in C \setminus D \subseteq G \text{ так как } \Gamma \sim 0(\mod D) \end{cases}$$

Получается, $F(z)$ – голоморфна в $\mathbb{C}$.

Заметим, что

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = 0$$

Так как

$$|\tilde{h}(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\max_\Gamma |f| \cdot |d\xi|}{d(z)} \overset{z \to \infty}{\to} 0$$

Где, $d(z) = \text{dist }(z, \Gamma) \Rightarrow d(z) \to \infty$.

Тогда по теореме Луивилля:

$$F(z) \equiv 0$$

Тогда в $D \setminus \Gamma:\ h(z) = F(z) = 0$, то есть

$$f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \Rightarrow$$
$$f(z) \cdot J_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

□

Следствие. *Для односвязной области.*

Пусть D – односвязная область, f голоморфна в D, γ – замкнутая кусочно гладкая кривая в D. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Доказательство. Заметим, что $\forall a \notin D:\ J_\Gamma(a) = 0$, так как a лежит в компоненте связности, содержащей $\infty \Rightarrow$ можем использовать интегральную теорему Коши. □

Следствие. *Коши для многосвязной области.*

Пусть область D ограничена циклом Γ, f голоморфна в области $D' \supset D$. Тогда

1. $\forall z \in D:\ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$
2. $\int_\Gamma f(z)dz = 0$

Доказательство. Имеем 0 оборотов вокруг D', а также один оборот вокруг $D \Rightarrow J_\Gamma(z) = 1 \Rightarrow$ по предыдущей теореме верен первый пункт, а второй выводится аналогично. □

15 Разложение голоморфной функции в ряд Лорана...

Теорема 15.1. *Пусть f голоморфна в $K := \{z \mid r < |z - a| < R\}$. Тогда*

$$\forall z \in K:\ f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

где γ_ρ – положительно ориентированная окружность радиуса $\rho \in (r, R)$ с центром в точке a.

Доказательство. Докажем, что интегральная формула для c_n не зависит от ρ. Возьмём две окружности радиуса ρ и ρ'.

Пусть $\Gamma := \gamma_\rho - \gamma_{\rho'}$. Применим теорему Коши для многосвязной области к функции $\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ (голоморфной в $K \supset K_{(\rho, \rho')}$). Тогда

$$\int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = \int_{\gamma_{\rho'}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Рассмотрим $r < r' < R' < R$. Тогда $\forall z \in K'_{(r',\, R')}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right) =: f_1(z) + f_2(z)$$

Заметим, что

$$f_1(z) = \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

голоморфна в $O_{R'}(a) \Rightarrow$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

где $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Осталось разложить f_2:

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{(z-a) - (\xi - a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

при $\left| \frac{\xi - a}{z - a} \right| < 1$.

Значит

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \cdot \left[c_{-n-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(\xi)(\xi - a)^n d\xi \right]$$

Получается, разложили так, что от r' и R' коэффициенты c_n не зависят. □

Определение 15.1. Такие ряды называются рядами Лорана для голоморфной функции f.

Теорема 15.2. *Теорема о единственности ряда Лорана.*

Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ при $z \in K$, то f – голоморфна в кольце K, причём

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Доказательство. f голоморфна как предел сходящегося ряда

Проверим равенство коэффициентов. Вначале для $n = -1$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n dz = 2\pi i \cdot c_{-1}$$

При $n \neq -1$ обращаемся … □

16 Изолированные особые точки

Определение 16.1. a – устранимая особая точка, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : \lim_{z \to a} f(z) = A$$

Определение 16.2. a полюс, если

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

Определение 16.3. a – существенная особая точка, если

$$\nexists \lim_{z\to a} f(x)$$

Теорема 16.1. *a – УОТ $\Leftrightarrow$ f ограниченна в $\dot{O}_\delta(a)$ для некоторого δ.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) – очевидно по определению предела.

($\Leftarrow$)

Положим $M_\rho(f) = \max_{\gamma_\rho} |f|$. Тогда

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{|f||d\xi|}{\rho^{n+1}} \leqslant \frac{M_\rho(f)}{2\pi\rho^{n+1}} \int_{\gamma_r} |d\xi| = \frac{M_\rho(f)}{\rho^n}, n \in \mathbb{Z}$$

По условию f ограниченный в $\dot{O}(a) \Rightarrow$

$$\exists M\ \forall z \in O_\delta(a) :\ |f| < M$$

Тогда из неравенства для $|c_n|$ следует

$$\forall \rho > 0, \rho < \delta \Rightarrow \forall n < 0 :\ \frac{1}{\rho^n} \overset{\rho\to 0}{\to} 0 \Rightarrow \forall n < 0 :\ c_n = 0$$

Значит

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

она имеет предел в точке a, равный c_0. □

Теорема 16.2. *Пусть a – изолированная особая точка f. Тогда a полюс $\Leftrightarrow$ конечное число коэффициентов в главной части ряда Лорана отличны от нуля.*

Доказательство. ($\Leftarrow$)

По условию

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z)$$

где h – голоморфна в окрестности a.

Значит $\varphi(z) := f(z)(z-a)^m$ – голоморфная в этой области, причём $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{z\to a} f(z) = \frac{\lim f(z)(z-a)^m}{\lim (z-a)^m} = \infty$$

($\Rightarrow$)

По условию

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow$$

функция $\frac{1}{f(x)}$ имеет в т.a УОТ $\Rightarrow$ она голоморфна в окрестности a. При этом $\frac{1}{f} \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m h(z), h(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{h(z)}$$

Где $\frac{1}{h(z)}$ – голоморфная в окрестности $\Rightarrow$ раскладывается в Тейлора. □

Теорема 16.3. *Сохоцкого.*

Пусть f голоморфна в $\dot{O}(a), a$ – СОТ. Тогда

$$\forall A \in \overline{\mathbb{C}}\, \exists z_n \to a:\ f(z_n) \to A$$

Доказательство. 1. Для $A = \infty$ очевидно – если A – не предельная, то f ограничена $\Rightarrow a$ – УОТ.

2. Если $A \neq \infty$, то введём

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - A}$$

Пусть A – не предельная. Тогда

$$\exists \varepsilon\, \exists \delta > 0\, \forall z \in \dot{O}_\delta(a):\ |f(z) - A| \geqslant \varepsilon$$

Значит $g(z)$ голоморфна в $\dot{O}_\delta(a)$ как отношение голоморфных функций. Причём $g(z) \neq 0$ в $\dot{O}_\delta(a)$. Также $|g(z)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$ – ограниченная, то есть точка a – УОТ. Тогда

$$\forall z \in \dot{O}_\delta(a):\ f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$$

Если $g(a) \neq 0$, то a – УОТ для f.

Если $g(a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ имеет полюс в точке $a \Rightarrow$ у f точка a – полюс. Противоречие.

□

17 Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах.

Определение 17.1. Если f голоморфна в $\dot{O}_r(a), a \neq \infty$, то определим вычет f, как

$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$$

Утверждение 17.1. *Вычеты определены корректно (независят от γ).*

Доказательство. Если $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, z \in \dot{O}_r(a)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} c_{-1} 2\pi i = c_{-1}$$

□

Теорема 17.1. *Коши о вычетах.*

Пусть D ограничена циклом $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \cdots - \gamma_n$ (то есть в условиях теореме Коши для многосвязной области).

Пусть $A = \{a_1, \cdots, a_N\} \subseteq D, f$ – голоморфна в $D' \setminus A$, где $D' \supseteq D$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \sum_{i=1}^{N} res_{a_i} f$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\exists R > 0\, \forall i \neq j : \overline{O}_R(a_i) \cap \overline{O}_R(a_j) = \varnothing$$

и $\overline{O}_R(a_i) \subseteq D$.

Обозначим за обход $\delta_k = \partial O_R(a_k)$ (обход против часовой стрелки, то есть положительно ориентировано).

Обозначим $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \sum_{i=1}^N \delta_i, \tilde{D} = D \setminus \cup_{k=1}^N \overline{O}_R(a_k)$ и $\tilde{D}' = D' \setminus A$. Тогда $\partial\tilde{D} = \tilde{\Gamma}$ и f голоморфна в $\tilde{D}'$.

Причём $\tilde{D}' \supseteq \tilde{D}$. Более того, $\tilde{\Gamma} \sim 0 \;(\mod \tilde{D}')$, и $\forall z \notin \tilde{D}' : \; J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$. Аналогично проверим для

1. $z \notin D' \Rightarrow \begin{cases} J_\Gamma(z) = 0 \\ J_{\delta_i}(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$

2. $z \in A \; (z = a_i) \Rightarrow \begin{cases} J_{-\delta_i}(a_i) = -1 \\ J_{-\delta_j}(a_i) = 0 \; (i \neq j) \\ J_{\gamma_k}(a_i) = 0 \\ J_\Gamma(a_i) = 1 \end{cases} \Rightarrow J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$

Тогда по теореме Коши для многосвязной области $\tilde{D}$:

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z)dz = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \int_{\delta_i} f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz \Rightarrow 2\pi i \sum_{i=1}^N \operatorname{res}_{a_i}(f) = \int_\Gamma f(z)dz$$

□

Следствие. *Если a – УОТ* $\Rightarrow res_a f = 0$

Следствие. *Если a – полюс m-ого порядка* $\Rightarrow$

$$res_a f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} (f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}$$

Доказательство. f имеет вид

$$f = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Тогда

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} (f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}$$

□