

# Содержание

1	Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана	2
2	Связность. Теорема о голоморфной в области функции, производная которой равна нулю.	3
3	Теорема об обратной функции	4
4	Степенные ряды. Формула Коши-Адамара...	5
5	Степенные ряды. Свойства экспоненты и тригонометрических.	6
6	Первообразная и полный дифференциал в области. Условия...	8
7	Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области	9
8	Интеграл Коши и его свойства	11
9	Интегральная формула Коши для круга...	12
10	Теорема Морера. Теорема о среднем.	12
11	Целые функции и теорема Луивилля	13
12	Ряд Тейлора и теорема единственности...	14
13	Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки...	15
14	Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши...	17
15	Разложение голоморфной функции в ряд Лорана...	19
16	Изолированные особые точки	20
17	Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах.	22
18	Лемма Жордана...	23
19	Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.	24
20	Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области...	25
21	Принцип максимума модуля и лемма Шварца	26
22	Дробно-линейные отображения. ...	28

# 1 Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана

**Определение 1.1.** Окрестностью назовём

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

Проколотой окрестностью назовём

$$\dot{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

Замкнутой окрестностью назовём

$$\overline{B}_r(z_0) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

**Замечание.** Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x_0; & \Delta y &= y - y_0; & \Delta z &= z - z_0 = \Delta x + i\Delta y \\ \Delta u &= u(x, y) - u(x_0, y_0); & \Delta v &= v(x, y) - v(x_0, y_0); & \Delta f &= f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta u + i\Delta v \end{aligned}$$

**Определение 1.2.** Говорят, что  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в точке  $z_0$ , если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \rightarrow 0$$

**Лемма 1.1.**  $f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в  $z_0 \Leftrightarrow \exists f'(z_0), A = f'(z_0)$ .

**Теорема 1.1.** *Условие Коши-Римана.*

$f : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема в  $z_0$  тогда и только тогда, когда

- $u(x, y), v(x, y)$  дифференцируемы в  $(x_0, y_0)$
- Выполняется условие Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ )

Пусть

$$\exists f'(z_0) = a + ib = A \in \mathbb{C}$$

Значит, по определению дифференцируемости

$$\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z); \quad \alpha(\Delta z) := \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$$

Где  $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z), |\Delta z| \rightarrow 0$

Тогда, раскрыв это выражение по каждой координате, получим

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \end{cases}$$

Из того, что  $|\alpha_1| \leq |\alpha(\Delta z)|$  и  $|\alpha_2| \leq |\alpha(\Delta z)| \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = o(\Delta z), |\Delta z| \rightarrow 0$ .

Значит,  $u$  дифференцируема, причём

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b$$

Аналогично для  $v$ , причём

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a$$

Видим, что УКР выполняется.

( $\Leftarrow$ )

Пусть  $u, v$  дифференцируемы в  $(x_0, y_0)$  и выполняется УКР. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) = \\ \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + \alpha_1(\Delta z) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\right) = \\ &\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1(\Delta z) + i\alpha_2(\Delta z) \end{aligned}$$

Значит,

$$\exists f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

## 2 Связность. Теорема о голоморфной в области функции, производная которой равна нулю.

**Определение 2.1.** Если  $u : G \rightarrow \mathbb{R}, G \subseteq \mathbb{R}^2$  – область, причём

$$u \in C^2(G), \Delta u = 0$$

где  $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

**Определение 2.2.** Функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $G \subseteq \mathbb{C}$  – область, называется регулярной (аналитической, голоморфной), если

$$\forall z \in G \exists f'(z)$$

**Определение 2.3.** Функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}, G \subseteq \mathbb{C}$  называется регулярной в точке  $z_0 \in G$ , если

$$\exists r > 0, B_r(z_0) \subseteq G : f \text{ регулярна на } B_r(z_0)$$

**Определение 2.4.** Множество  $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$  называется связным, если не существует открытых  $G_1, G_2$ :

1.  $G_1 \cup G_2 \supseteq E$
2.  $E \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$

3.  $E \cap G_1 \neq \emptyset$  и  $E \cap G_2 \neq \emptyset$

**Определение 2.5.** Непустое открытое связное множество в  $\overline{\mathbb{C}}$  называется областью.

**Определение 2.6.** Область  $D$  называется односвязной, если  $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$  – связно.

**Теорема 2.1.** Пусть  $f$  голоморфна в области  $D$  и

$$\forall z \in D : f'(z) \equiv 0$$

Тогда  $f \equiv \text{const}$

*Доказательство.* Любые  $(x_0, y_0) \in D$  лежат вместе с каким-то отрезком  $[(x_0, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y)]$ . Тогда

$$f' = u_x + v_x i \Rightarrow u_x \equiv v_x \equiv 0 \Rightarrow u_y \equiv v_y \equiv 0$$

Применим теорему Лагранжа к  $u(x, y)$ . Аналогично к  $v(x, y) \Rightarrow f \equiv \text{const}$  на всех вертикальных отрезках.

Аналогично на горизонтальных. Тогда  $f \equiv \text{const}$  на  $D$  в силу связности.  $\square$

### 3 Теорема об обратной функции

**Теорема 3.1.** Пусть  $f : G \rightarrow H \subseteq \mathbb{C}, g : H \rightarrow \mathbb{C}$  регулярны. Тогда  $\zeta(z) = g(f(z))$  также регулярна, причём

$$\forall z \in G : \zeta'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $z_0 \in G, w_0 = f(z_0) \in G$ .

Из дифференцируемости

$$\Delta f = f(z_0)\Delta z + o(\Delta z), |\Delta z| \rightarrow 0; \quad \Delta g = g'(w_0)\Delta w + o(\Delta w), |\Delta w| \rightarrow 0$$

Пусть  $\Delta w = \Delta f$ , тогда

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta z} = g'(w_0) \frac{\Delta f}{\Delta z} + \frac{o(\Delta f)}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} g'(w_0)f'(z_0) + 0$$

$\square$

**Теорема 3.2.** Об обратной функции.

Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярная и непрерывно дифференцируема на  $G$ . Пусть  $z_0 \in G, w_0 = f(z_0), f'(z_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists B_\delta(z_0), B_\varepsilon(w_0)$ , такие, что

1.  $\forall z \in B_\delta(z_0) : f'(z) \neq 0$

2.  $\forall \hat{w} \in B_\varepsilon(w_0)$  уравнение  $\hat{w} = f(z)$  имеет в  $B_\delta(z_0)$  единственное решение  $\hat{z}$ , то есть на  $B_\varepsilon(w_0)$  определена обратная функция  $g : B_\varepsilon(w_0) \rightarrow B_\delta(z_0)$ , то есть

$$\forall w \in B_\varepsilon(w_0) : f(g(w)) = w$$

3.  $g$  регулярна на  $B_\varepsilon(w_0)$ , причём

$$\forall w \in B_\varepsilon(w_0) : g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

*Доказательство.* Первые два пункта выполняются благодаря обычной теореме об обратной функции из матана.

Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Имеем отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . В силу непрерывной дифференцируемости этих двух функций запишем якобиан и преобразуем согласно УКР:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2 \Rightarrow J(x_0, y_0) \neq 0$$

Третий пункт выполняется благодаря предыдущей теореме:

$$g(f(z)) = z \Rightarrow g'(f(z))f'(z) = 1 \Rightarrow g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} = g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

□

## 4 Степенные ряды. Формула Коши-Адамара...

**Определение 4.1.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty}$  сходится, если сходится последовательность  $\{\sum_{k=1}^n g_k(z)\}_{n=1}^{\infty}$ . Сходимость бывает условной и абсолютной.

**Определение 4.2.** Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$$

**Теорема 4.1.** *Признак Вейерштрасса.*

Пусть

$$\forall n \forall z : |g_n(z)| \leq \alpha_n$$

причём  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$ . Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$  сходится абсолютно равномерно.

**Теорема 4.2.** Пусть  $\frac{1}{R} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ ,  $R \in [0, +\infty]$ . Тогда

1. Если  $|z| \leq r < R$ , то степенной ряд сходится равномерно и абсолютно.
2. Если  $|z| > R$ , то ряд расходится
3.  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  голоморфна при  $|z| < R$  и её производная  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

*Доказательство.* 1. Пусть  $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$ . По определению верхнего предела

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{\rho}$$

Тогда (в условиях текущего пункта):

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n z^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \frac{r}{\rho} < 1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимся числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказали.

2. Пусть  $|z| > R$ , то есть  $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$ . Значит

$$\exists \varepsilon > 0 : \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z| \geq \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$

По определению верхнего предела:

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \forall k : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geq 1$$

Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

3. Заметим, что у  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  ряд сходимости такой же в силу  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ , то есть он сходится при  $|z| < R$ .

Заметим, что частичные суммы  $G_n = F'_n$ , то есть равна производной соответствующей частичной суммы  $f$ .

Распишем производную  $f$  через частичные суммы:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} + \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} = \\ &= \left( \frac{F_N(z) - F_N(z_0)}{z - z_0} - F'_N(z_0) \right) + (F'_N(z_0) - g(z_0)) + g(z_0) + \left( \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} \right) \end{aligned}$$

Устремляя  $N \rightarrow +\infty$ , получим

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{n=N}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=N}^{\infty} \left[ a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \right] \Rightarrow \\ & \left| \frac{H_N(z) - H_N(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \cdot n \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю, как остаток сходящегося ряда.

□

## 5 Степенные ряды. Свойства экспоненты и тригонометрических.

**Определение 5.1.** Голоморфные в  $\mathbb{C}$  функции называют целыми

**Определение 5.2.** Определим экспоненту

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$R_{\text{cx}} = +\infty \Rightarrow e^z$  целая.

**Лемма 5.1.** *Свойства экспоненты:*

1.  $(e^z)' = e^z$
2.  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
3.  $\forall z \in \mathbb{C} : e^z \neq 0$

*Доказательство.* 1. Сразу следует из пункта 3 предыдущей теоремы.

2. Покажем эквивалентное свойство  $e^{a-z}e^z = e^a$ . Пусть

$$g(z) := e^{a-z}e^z \Rightarrow g'(z) = -e^{a-z}e^z + e^{a-z}e^z = 0$$

А это значит, что  $g \equiv \text{const}$ , так как голоморфна.

Посчитаем  $g(0) = e^{a-0}e^0 = e^a \Rightarrow g(z) \equiv e^a$ , что и требовалось доказать.

3.  $\forall z \in \mathbb{C}$  выполняется:

$$e^ze^{-z} = e^0 = 1$$

Значит в  $e^ze^{-z}$  никто не может быть нулём.

□

**Определение 5.3.** Определим тригонометрические функции на  $\mathbb{C}$ :

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**Лемма 5.2.** *Свойства тригонометрических функций:*

1.  $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$
2.  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
3. Если  $e^{z+T} = e^z$ , то  $T = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$

*Доказательство.* 1. Очевидно

2. Очевидно

3. Заметим, что

$$e^T = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} T = 0 \Leftrightarrow T = i\beta$$

Тогда

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \sin(\beta) = 1 \Leftrightarrow \beta = 2\pi k \Rightarrow T = 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$$

□

## 6 Первообразная и полный дифференциал в области. Условия. . .

**Определение 6.1.** Кривая  $\gamma$  – класс эквивалентных параметризаций

$$z(t) = x(t) + iy(t), t \in [t_0, t_1]$$

**Определение 6.2.** Кривая  $\gamma$  называется гладкой, если существует параметризация

$$z(t) = x(t) + iy(t), x \in C^1([t_0, t_1]), y \in C^1([t_0, t_1]); \quad \forall t \in [t_0, t_1] : z'(t) \neq 0$$

**Определение 6.3.** Гладкая кривая  $\gamma$  называется замкнутой, если

$$z(t_0) = z(t_1); \quad z'(t_0 + 0) = z'(t_1 - 0)$$

**Определение 6.4.** Кривая  $\gamma$  называется кусочно гладкой, если

$$\exists t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = t_1$$

что

$$\forall k : z_k(t), t \in [\theta_{k-1}, \theta_k] - \text{это гладкая кривая}$$

**Определение 6.5.** Пусть  $g : G \rightarrow \mathbb{C}$  на области  $G$ . Назовём это первообразной непрерывной функции  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , если  $g$  регулярна на  $G$  и

$$\forall z \in G : g'(z) = f(z)$$

**Определение 6.6.** Выражение  $f(z)dz$  называется полным дифференциалом в области  $G$ , если существует первообразная  $g$  для  $f$  на  $G$ , то есть

$$f(z)dz = g'(z)dz$$

**Теорема 6.1.** Пусть  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна на области  $G$ . Тогда:

1. Если  $f dz$  – полный дифференциал на  $G$ , то для любой замкнутой КГК  $\dot{\gamma} \subseteq G$  выполняется

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = 0$$

2. Если для любой замкнутой ломаной кривой  $\gamma$  выполняется равенство выше, то  $f dz$  – полный дифференциал.

*Доказательство.* 1. По условию  $\exists g : G \rightarrow \mathbb{C}$ , регулярная, такая, что  $g'(z) = f(z)$ . Тогда

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} g'(z(t))z'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(g(z(t)))dt = g(z(t_1)) - g(z(t_0)) = g(z(t_0)) - g(z(t_0)) = 0$$

2. Фиксируем  $a \in G$  как начальную точку ломаной  $\gamma$ . Тогда  $\forall z \in G : \exists \gamma_{az}$  – ломаная с началом в  $a$  и концом в  $z$ .

$$g(z) = \int_{\gamma_{az}} f(z)dz$$

не зависит от  $\gamma_{az}$ , а лишь от  $z$ .



Действительно, если  $\exists \gamma_{az} \not\sim \tilde{\gamma}_{az}$ , то пусть  $\dot{\gamma} = \gamma_{az} \cup \tilde{\gamma}_{az}^{-1}$ , тогда по аддитивности интеграла

$$\int_{\dot{\gamma}} f(z) dz = 0 = \int_{\gamma_{az}} f(z) dz - \int_{\tilde{\gamma}_{az}} f(z) dz$$

Докажем, что  $\forall z : g'(z) = f(z)$ . Рассмотрим  $z_0 : \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(z_0) \subseteq G$  и приращение  $\Delta z : 0 < |\Delta z| < \varepsilon$ . Тогда  $z_0 + \Delta z \in G$ . Рассмотрим

$$\frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0, z_0 + \Delta z]} f(z) dz$$

Значит

$$\left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{[z_0, z_0 + \Delta z]} (f(z) - f(z_0)) dz \right|$$

В силу непрерывности  $f(z)$ , найдём  $r(\varepsilon)$  – радиус шара, где  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ , тогда

$$\forall z \in B_{r(\varepsilon)}(z_0) \cap B_\varepsilon(z_0) : \left| \frac{\Delta g}{\Delta z} - f(z_0) \right| \leq \left| \frac{\varepsilon \min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}}{\min\{r(\varepsilon), \varepsilon\}} \right| = \varepsilon$$

□

## 7 Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области

**Лемма 7.1. Гурса.**

Пусть  $G$  – область,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна. Тогда для любого треугольника из  $G$  верно

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $\triangle ABC \subseteq G$ . Тогда будем рассматривать

$$I := \int_{\partial \triangle ABC} f(z) dz$$

Разобьём треугольник средними линиями:

$$\triangle ABC = \bigcup_{k=1}^4 \triangle_k$$

Тогда

$$I = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial \triangle_k} f(z) dz$$

Докажем, что

$$\exists k_0 : \left| \int_{\partial \triangle_{k_0}} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4}$$

Очевидно от противного, так как триангуляции с ориентацией, то если бы все были меньше, то нельзя было бы набрать  $I$ .

Обозначим найдённый треугольник за  $\Delta^1 := \Delta_{k_0}$ , а  $\Delta^0 := \Delta ABC$ . Аналогично построению  $\Delta^1$  из  $\Delta^0$  можем построить бесконечную последовательность  $\{\Delta^N\}_{N=0}^\infty$ , и для них

$$\left| \int_{\partial \Delta^N} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^N}$$

Теперь заметим, что  $P_N = \frac{P_0}{2^N}$ , где  $P_N$  – периметр  $N$ -го треугольника. В силу компактности

$$\exists z_0 \in \bigcap_{N=1}^\infty \Delta^N$$

Так как  $f$  дифференцируема в  $z_0$ , то по определению:

$$\exists \delta_0(z_0) \forall z \in B_{\delta_0}(z_0) : f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

А для  $o$ -малого верно:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 \leq \delta_0 \forall z \in B_{\delta_1}(z_0) : |o(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$$

Теперь можем расписать интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Delta^N} f(z) dz &= f(z_0) \int_{\partial \Delta^N} dz + f'(z_0) \int_{\partial \Delta^N} z dz - z_0 f'(z_0) \int_{\partial \Delta^N} 1 dz + \int_{\partial \Delta^N} o(z - z_0) dz = \\ &= \int_{\partial \Delta^N} o(z - z_0) dz \end{aligned}$$

Интегралы по 1 и  $z$  равны нулю, так как они, очевидно, полные дифференциалы.

Причём полагаем  $N$  таким, что

$$\forall z \in \Delta^N : |z - z_0| < \delta_1$$

Тогда

$$\left| \int_{\partial \Delta^N} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial \Delta^N} |o(z - z_0)| \cdot |dz| \leq \varepsilon \int_{\partial \Delta^N} |z - z_0| \cdot |dz| \leq \varepsilon P_N^2 \leq \varepsilon \frac{P_0^2}{4^N}$$

Получили, что

$$|I| \leq \varepsilon \frac{P_0^2}{4^N}$$

В силу произвольности  $\varepsilon$ :  $I = 0$ . □

**Теорема 7.1.** Коши для выпуклой области.

Пусть  $D$  – выпуклая область,  $f$  – голоморфна в  $D \setminus \{0\}$ ,  $f$  – непрерывна в  $D$ . Тогда  $\forall \gamma$  – кусочно-гладкой замкнутой кривой

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

*Доказательство.* По лемме Гурса

$$\forall \Delta \subseteq D : \int_{\partial \Delta} f dz = 0$$

Тогда мы можем триангулировать любую ломаную  $\Rightarrow$  по одной из теорем  $f dz$  – полный дифференциал (нужна была непрерывности и нулевой интеграл по всем ломаным).

А как мы знаем, интеграл по любой замкнутой кривой от полного дифференциала нулевой. □

## 8 Интеграл Коши и его свойства

**Определение 8.1.** Пусть  $\gamma$  – кусочно-гладкая кривая в  $\mathbb{C}$ . Тогда  $\forall \varphi \in C(\gamma)$  определим интеграл Коши, как

$$F_n(z, \varphi) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

**Теорема 8.1.** *Свойства интеграла Коши:*

1.  $F_n(z, \varphi)$  – голоморфна ( $\Rightarrow$  непрерывна) в  $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2.  $F'_n(z, \varphi) = nF_{n+1}(z, \varphi)$

*Доказательство.* Вначале покажем непрерывность для  $n = 1$ :

$$F_1(z, \varphi) - F_1(z_0, \varphi) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi)(z - z_0)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi = (z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)$$

Введём  $\delta = \rho(z_0, \gamma)$ . Для  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$  оно, очевидно, не равно нулю.

Тогда

$$\left| (z - z_0) \cdot F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \right| \leq \frac{\text{const}}{\delta^2} |z - z_0|$$

что и гарантирует непрерывность.

Из того же тождества

$$\frac{F_1(z, \varphi) - F_1(z_0, \varphi)}{z - z_0} = F_1\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} F_1\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = F_2(z_0, \varphi(\xi))$$

Доказали голоморфность существованием производной.

Далее по индукции: пусть  $F_{n-1}$  голоморфна в  $D$ :

$$F'_{n-1}(z, \varphi) = (n-1)F_n(z, \varphi)$$

Распишем приращение с помощью умного нуля:

$$\begin{aligned} F_n(z, \varphi) - F_n(z_0, \varphi) &= \\ \int_{\gamma} \left[ \left( \frac{1}{(\xi - z)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} \right) + \frac{1}{(\xi - z)^{n-1}(\xi - z_0)} - \frac{1}{(\xi - z_0)^n} \right] \varphi(\xi) d\xi &= \\ (z - z_0) \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} + F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) \end{aligned}$$

Сходимость к нулю первого слагаемого доказывается аналогично предыдущему пункту с непрерывностью, а последние два слагаемых дают приращение непрерывной функции, которое также стремится к нулю при  $z \rightarrow z_0$ .

Поделим предыдущее выражение на  $z - z_0$  и посчитаем производную:

$$\begin{aligned} \frac{F_n(z, \varphi) - F_n(z_0, \varphi)}{z - z_0} &= \int_{\gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^n(\xi - z_0)} + \frac{F_{n-1}\left(z, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \\ F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + F'_{n-1}\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) &= F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) + (n-1)F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) = \\ n \cdot F_n\left(z_0, \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}\right) &= n \cdot F_{n+1}(z_0, \varphi(\xi)) \end{aligned}$$

Таким образом,  $F_n(z, \varphi)$  – бесконечно дифференцируемая. □

## 9 Интегральная формула Коши для круга...

**Теорема 9.1.** Пусть  $f$  – голоморфна в  $D$ , причём  $\overline{O_r}(a) \subset D$ . Тогда

$$\forall z \in O_r(a) : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

*Доказательство.* Благодаря замкнутости

$$\exists R > r : \overline{O_R}(a) \subseteq D$$

Фиксируем  $z \in O_r(a)$ :

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z \end{cases}$$

$g(\xi)$  – голоморфна в  $O_R(a) \setminus \{z\}$  (как отношение голоморфных функций) и непрерывна в  $O_R(a) \Rightarrow \forall \gamma_r$  – замкнутого контура по теореме Коши:

$$\int_{\gamma_r} g(\xi) d\xi = 0$$

То есть

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = f(z) \int_{\gamma_r} \frac{d\xi}{\xi - z} =: G(z)$$

$G(z)$  – голоморфна в  $O_r(a)$ ,  $G' = \int_{\gamma_r} \frac{d\xi}{(\xi-z)^2} \equiv 0 \Rightarrow G \equiv \text{const} \Rightarrow G(a) = 2\pi i \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

□

**Следствие.** 1.  $f$  – голоморфна в  $D \Rightarrow f$  – интеграл Коши  $\Rightarrow f'$  – голоморфна в  $D$ .

2.  $f$  – голоморфна в  $D \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}$  – голоморфна в  $D$ .

3. В условии формулы Коши для круга:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad (1)$$

## 10 Теорема Морера. Теорема о среднем.

**Теорема 10.1.** Мореры.

Пусть  $f$  – непрерывна в области  $D$  и

$$\forall \overline{\Delta} \subseteq D : \int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

Тогда  $f$  – голоморфна в  $D$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\overline{O}_r(a) \subseteq D$  – выпукло, поэтому применяем лемму:

$$\forall z \in O_r(a) \exists F : F' = f$$

В этом круге по одному из следствий  $F$  голоморфна  $\Rightarrow f$  – голоморфна в  $O_r(a)$ .

Это верно  $\forall a \in D \Rightarrow f$  – голоморфна в  $D$ . □

**Теорема 10.2.** *О среднем.*

Пусть  $f$  – голоморфна в  $\overline{O}_r(a) \subseteq D$ , тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta}r) d\theta$$

*Доказательство.* Пусть  $\xi = a + re^{i\theta}$ . Тогда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$$

□

## 11 Целые функции и теорема Луивилля

**Определение 11.1.**  $f$  – целая, если  $f$  голоморфна в  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 11.1.** *Луивилля.*

Если  $f$  – целая и

$$\exists M, m, R \forall z, |z| > R : |f(z)| < M \cdot |z|^m$$

Тогда  $f(z)$  – полином степени  $\leq m$ .

*Доказательство.* Знаем, что

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, R_{cx} = \infty$$

Тогда по (12.1)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi^{n+1}}$$

Оценим сверху

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=\rho} \frac{|f(\xi)||d\xi|}{|\xi^{n+1}|} \leq \frac{M}{2\pi} \int_{|\xi|=\rho} \frac{|\xi|^m}{|\xi|^{n+1}} |d\xi| = \\ &= \frac{M}{2\pi} \int_{|\xi|=\rho} \frac{1}{|\xi|^{n+1-m}} |d\xi| = \frac{M}{\rho^{n-m}} = M\rho^{m-n} \end{aligned}$$

При  $n > m$ :

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^{n-m}} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \forall n > m : |c_n| = 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^n$$

□

## 12 Ряд Тейлора и теорема единственности...

**Теорема 12.1.** *Ряд Тейлора.*

Пусть  $f$  – голоморфна в  $D$ ,  $O_R(a) \subseteq D$ . Тогда

$$\forall z \in O_R(a) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

*Доказательство.* Пусть  $r < R$ ,  $f$  – голоморфна в  $\overline{O_r(a)} \Rightarrow$

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

Тогда распишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} \\ &\quad \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{\xi-a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

Полученный ряд сходится равномерно, а значит можно умножить на  $f(\xi)$  и почленно интегрировать

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i c_n (z-a)^n \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Причём по (1):

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

В завершение скажем

$$\forall z : |z-a| < R \exists r < R z \in O_r(a) \Rightarrow$$

формула верна во всём  $O_R(a)$ . □

**Определение 12.1.** Пусть  $f \neq 0$  – голоморфна в  $O_r(a)$ ,  $f(a) = 0$ , тогда  $m$  – это порядок нуля в точке  $a$ . если

$$\forall k = \overline{0, m-1} : f^{(k)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0$$

**Утверждение 12.1.**  $f$  имеет нуль порядка  $m \Leftrightarrow \exists g(z)$  – голоморфная в  $O_r(a)$ ,  $g(a) \neq 0$ :

$$f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)$$

*Доказательство.* ( $\Rightarrow$ )

БОО  $a = 0$ . Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n = z^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} z^n$$

Пусть  $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} z^n$ , причём  $g(0) \neq 0$ , так как  $c_m \neq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $f(z) = (z-a)^m g(z)$ . Дифференцируя получаем

$$\forall k = \overline{0, m-1} : f^{(k)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0$$

□

**Замечание.** Пусть  $f$  – голоморфна в окрестности  $a$ ,  $f(a) = 0$ . Тогда

$$\exists \rho > 0 \forall z |z - a| \in (0, \rho) : f(z) \neq 0$$

*Доказательство.* Очевидно следует из предыдущего утверждения.  $\square$

**Теорема 12.2.** *О единственности.*

Пусть  $f$  и  $g$  – голоморфны в области  $D$ ,  $E \subseteq D$ , причём в  $D$  есть хотя бы одна предельная точка  $E$ . Тогда если

$$\forall z \in E : f(z) = g(z)$$

то

$$\forall z \in D : f(z) = g(z)$$

*Доказательство.* Пусть  $h = f - g$ ,  $a$  – предельная точка  $E$ ,  $a \in D$ . Тогда введём

$$Z = \{z \in D \mid h(z) = 0\}$$

Тогда по непрерывности  $a \in Z$ , причём  $a$  – предельная точка  $Z \Rightarrow h(z) \equiv 0$  в окрестности  $a$  (12).

Пусть  $G_1 := \text{int } Z$  – открытое непустое, так как  $a \in G_1$ . Тогда если  $G_2 := D \setminus G_1$  открытое, то из-за связности  $D \Rightarrow G_2$  – пустое, что доказывает теорему.

Пусть  $G_2$  неоткрыто. Пусть  $z^* \in G_2$ , причём  $z^*$  – предельная точка  $G_1$ . Тогда  $\exists z_n \rightarrow z^*, z_n \in G_1$ . Тогда  $h(z_n) = 0 \xrightarrow{\text{непрерывность}} h(z^*) = 0 \Rightarrow z^* \in G_1$  – противоречие.  $\square$

## 13 Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки...

**Определение 13.1.** Пусть  $\gamma$  – кусочно гладкая кривая в  $D$ ,

$$\Gamma = f(\gamma) = \{w = f(z(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

Причём  $\Gamma$  – кусочно гладкая,  $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Тогда приращением аргумента вдоль кривой называется

$$\Delta_\Gamma w := \text{Im} \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \text{Im} \int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} =: \Delta_\gamma f$$

**Лемма 13.1.** *Свойства приращения аргумента:*

1.  $\Delta_\gamma(c \cdot f) = \Delta_\gamma(f), c \neq 0$
2.  $\Delta_\gamma(f_1 \cdot f_2) = \Delta_\gamma(f_1) + \Delta_\gamma(f_2)$
3.  $\Delta_{\gamma^{-1}} f = -\Delta_\gamma f$
4.  $\Delta_{-\gamma}(f) = -\Delta_\gamma(f)$

*Доказательство.* 1. Следует из второго пункта (приращение константы равно нулю)

2. Для доказательства достаточно заметить

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}$$

И воспользоваться линейностью интеграла.

3. Очевидно из предыдущего пункта

4. Очевидно

□

**Определение 13.2.** Индекс  $a$  относительно кривой  $\gamma$ , где  $\gamma$  – кусочно гладкая замкнутая кривая в  $\mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ , называется

$$J_\gamma(a) = \frac{\Delta_\gamma(z - a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

Иными словами, это количество оборотов кривой вокруг  $a$ .

**Лемма 13.2.** Пусть  $\gamma$  – замкнутая кусочно-гладкая кривая в  $\mathbb{C}$ . Тогда

1.  $J_\gamma(z) \equiv \text{const}$  в каждой компоненте связности  $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2. Если какая-то компонента содержит  $\infty$ , то  $J_\gamma(z) \equiv 0$  в ней.

*Доказательство.* Действительно,

$$J_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

интеграл Коши  $\Rightarrow$  голоморфна в  $\mathbb{C} \setminus \gamma \Rightarrow$  непрерывна и, так как принимает только значения из  $\mathbb{Z}$ , постоянна в своих компонентах связности. Это следует из того, что

$$J'_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{(\xi - z)^2} = 0 \Rightarrow J_\gamma(a) \equiv \text{const} \text{ в компоненте связности}$$

Для неограниченной компоненты

$$f(z) := \text{dist}(\gamma, z) = \min_{\zeta \in \gamma} |z - \zeta| > 0$$

Тогда

$$|J_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right| \leq \frac{1}{2\pi d(z)} \int_\gamma |d\xi|$$

Но  $d(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty \Rightarrow J_\gamma(z) = 0$ .

□



## 14 Общая форма теоремы Коши и интегральной формулы Коши...

**Лемма 14.1.** *Общая теорема Коши.*

Пусть  $D$  – область в  $\mathbb{C}$ ,  $f$  – голоморфна в области  $D$ . Тогда

1. Функция

$$g(\xi, z) := \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \neq z \\ f'(z), & \xi = z \end{cases}$$

непрерывна в  $D \times D$ .

2.  $\forall$  кусочно гладкой  $\gamma \subset D$ :

$$h(z) = \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi$$

голоморфна в  $D$ .

*Доказательство.* 1. При  $\xi \neq z$  непрерывна как отношение непрерывных функций.

При  $\xi = z$  зафиксируем  $z_0 \in D$ , по открытости  $D \Rightarrow \exists \overline{O}_r(z_0) \subset D$ . Тогда будем рассматривать сколь угодно близкие  $z, \xi \in O_\varepsilon(z_0), \varepsilon < r$ .

Распишем в этой окрестности ряд Тейлора для двух точек:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ f(\xi) - f(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n \end{aligned}$$

Далее нам понадобится следующая оценка:

$$\left| \frac{(z - z_0)^n - (\xi - z_0)^n}{z - \xi} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (z - z_0)^{n-1-k} (\xi - z_0)^k \right| \leq n \varepsilon^{n-1}$$

Рассмотрим приращение

$$\begin{aligned} |g(z, \xi) - g(z_0, z_0)| &= |g(z, \xi) - f'(z_0)| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n - (\xi - z_0)^n}{z - \xi} \right| \leq \\ &\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot \varepsilon^{n-1} \leq \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot n \cdot r^{n-2} = \varepsilon M \end{aligned}$$

Где  $M < \infty$  взяли из сходимости ряда Тейлора путём дифференцирования ( $\exists R > r : O_R(z_0) \subseteq D, \overline{O}_r(z_0) \subseteq D$ ).

Заметим, что мы доказали непрерывность, оценив приращение  $g$ .

2. Видно, что  $h$  – непрерывна в  $D$ . Тогда для  $\overline{\Delta} \subset D$ :

$$\int_{\partial \Delta} h(z) dz = \int_{\partial \Delta} \int_{\gamma} g(\xi, z) d\xi dz = \int_{\gamma} \int_{\partial \Delta} g(\xi, z) dz d\xi = 0$$

Это верно, так как  $g(\xi_0, \cdot)$  голоморфна в  $D \setminus \{\xi\}$ , непрерывна в  $D \Rightarrow$  по лемме Гурса  $\int_{\partial\Delta} g(\xi, z)dz = 0$ .

В итоге можем применить теорему Морера, из которой будет следовать, что  $h$  – голоморфна.

□

**Теорема 14.1.** *Интегральная теорема Коши.*

Пусть  $D$  – область в  $\mathbb{C}$ ,  $f$  – голоморфна в  $D$ . Пусть  $\Gamma$  – цикл в  $D$ , причём  $\Gamma \sim 0 \pmod{D}$ . Тогда

$$1. \forall z \in D \setminus \Gamma : J_\Gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

$$2. \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

*Доказательство.*  $(1 \Rightarrow 2)$

Применим 1 к  $\tilde{f}(z) = (z - a)f(z)$ . Где  $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ , если  $f(a)$  определена (или  $a \in D \setminus \Gamma$ ). Тогда

$$0 = J_\Gamma(a)(a - a)f(a) = J_\Gamma(a) \cdot \tilde{f}(a) = \int_\Gamma \frac{\tilde{f}(\xi)d\xi}{\xi - a} = \int_\Gamma f(\xi)d\xi$$

Докажем первый пункт.

Введём

$$G := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_\Gamma(z) = 0\}$$

– открытое множество. Рассмотрим две функции

$$2\pi i \cdot \tilde{h}(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

– голоморфна в  $G$ , как интеграл Коши.

$$2\pi i \cdot h(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi$$

– голоморфна в  $D$ , как функция из второго пункта предыдущей теоремы.

Заметим, что  $\forall z \in G \cap D : h(z) = \tilde{h}(z)$ , так как

$$\tilde{h}(z) = h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)d\xi}{\xi - z} = f(z)J_\Gamma(z) = 0$$

Тогда введём новую функцию

$$F(z) := \begin{cases} h(z), & z \in D \\ \tilde{h}(z), & z \in C \setminus D \subseteq G \text{ так как } \Gamma \sim 0 \pmod{D} \end{cases}$$

Получается,  $F(z)$  – голоморфна в  $\mathbb{C}$ .

Заметим, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$$

Так как

$$|\tilde{h}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\max_\Gamma |f| \cdot |d\xi|}{d(z)} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$$

Где,  $d(z) = \text{dist}(z, \Gamma) \Rightarrow d(z) \rightarrow \infty$ .

Тогда по теореме Луивилля:

$$F(z) \equiv 0$$

Тогда в  $D \setminus \Gamma$ :  $h(z) = F(z) = 0$ , то есть

$$\begin{aligned} f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \Rightarrow \\ f(z) \cdot J_{\Gamma}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Для односвязной области.

Пусть  $D$  – односвязная область,  $f$  голоморфна в  $D$ ,  $\gamma$  – замкнутая кусочно гладкая кривая в  $D$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

*Доказательство.* Заметим, что  $\forall a \notin D$ :  $J_{\Gamma}(a) = 0$ , так как  $a$  лежит в компоненте связности, содержащей  $\infty \Rightarrow$  можем использовать интегральную теорему Коши. □

**Следствие.** Коши для многосвязной области.

Пусть область  $D$  ограничена циклом  $\Gamma$ ,  $f$  голоморфна в области  $D' \supset D$ . Тогда

1.  $\forall z \in D$ :  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$
2.  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

*Доказательство.* Имеем 0 оборотов вокруг  $D'$ , а также один оборот вокруг  $D \Rightarrow J_{\Gamma}(z) = 1 \Rightarrow$  по предыдущей теореме верен первый пункт, а второй выводится аналогично. □

## 15 Разложение голоморфной функции в ряд Лорана...

**Теорема 15.1.** Пусть  $f$  голоморфна в  $K := \{z \mid r < |z - a| < R\}$ . Тогда

$$\forall z \in K : f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

где  $\gamma_{\rho}$  – положительно ориентированная окружность радиуса  $\rho \in (r, R)$  с центром в точке  $a$ .

*Доказательство.* Докажем, что интегральная формула для  $c_n$  не зависит от  $\rho$ . Возьмём две окружности радиуса  $\rho$  и  $\rho'$ .

Пусть  $\Gamma := \gamma_{\rho} - \gamma_{\rho'}$ . Применим теорему Коши для многосвязной области к функции  $\frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}$  (голоморфной в  $K \supset K_{(\rho, \rho')}$ ). Тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} = \int_{\gamma_{\rho'}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Рассмотрим  $r < r' < R' < R$ . Тогда  $\forall z \in K'_{(r', R')}$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right) =: f_1(z) + f_2(z)$$

Заметим, что

$$f_1(z) = \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

голоморфна в  $O_{R'}(a) \Rightarrow$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

где  $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ .

Осталось разложить  $f_2$ :

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{(z - a) - (\xi - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z - a)^{n+1}}$$

при  $\left| \frac{\xi - a}{z - a} \right| < 1$ .

Значит

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - a)^{n+1}} \cdot \left[ c_{-n-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(\xi) (\xi - a)^n d\xi \right]$$

Получается, разложили так, что от  $r'$  и  $R'$  коэффициенты  $c_n$  не зависят. □

**Определение 15.1.** Такие ряды называются рядами Лорана для голоморфной функции  $f$ .

**Теорема 15.2.** Теорема о единственности ряда Лорана.

Если  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$  при  $z \in K$ , то  $f$  – голоморфна в кольце  $K$ , причём

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$$

*Доказательство.*  $f$  голоморфна как предел сходящегося ряда

Проверим равенство коэффициентов. Вначале для  $n = -1$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \int_{\gamma_\rho} (z - a)^n dz = 2\pi i \cdot c_{-1}$$

При  $n \neq -1$  обращаемся ... □

## 16 Изолированные особые точки

**Определение 16.1.**  $a$  – устранимая особая точка, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$$

**Определение 16.2.**  $a$  полюс, если

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

**Определение 16.3.**  $a$  – существенная особая точка, если

$$\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(x)$$

**Теорема 16.1.**  $a$  – УОТ  $\Leftrightarrow f$  ограничена в  $\dot{O}_\delta(a)$  для некоторого  $\delta$ .

*Доказательство.*  $(\Rightarrow)$  – очевидно по определению предела.

$(\Leftarrow)$

Положим  $M_\rho(f) = \max_{\gamma_\rho} |f|$ . Тогда

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{|f||d\xi|}{\rho^{n+1}} \leq \frac{M_\rho(f)}{2\pi\rho^{n+1}} \int_{\gamma_\rho} |d\xi| = \frac{M_\rho(f)}{\rho^n}, n \in \mathbb{Z}$$

По условию  $f$  ограниченный в  $\dot{O}(a) \Rightarrow$

$$\exists M \forall z \in O_\delta(a) : |f| < M$$

Тогда из неравенства для  $|c_n|$  следует

$$\forall \rho > 0, \rho < \delta \Rightarrow \forall n < 0 : \frac{1}{\rho^n} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \forall n < 0 : c_n = 0$$

Значит

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

она имеет предел в точке  $a$ , равный  $c_0$ . □

**Теорема 16.2.** Пусть  $a$  – изолированная особая точка  $f$ . Тогда  $a$  полюс  $\Leftrightarrow$  конечное число коэффициентов в главной части ряда Лорана отличны от нуля.

*Доказательство.*  $(\Leftarrow)$

По условию

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z)$$

где  $h$  – голоморфна в окрестности  $a$ .

Значит  $\varphi(z) := f(z)(z-a)^m$  – голоморфная в этой области, причём  $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \frac{\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)^m}{\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m} = \infty$$

$(\Rightarrow)$

По условию

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow$$

функция  $\frac{1}{f(z)}$  имеет в т.а УОТ  $\Rightarrow$  она голоморфна в окрестности  $a$ . При этом  $\frac{1}{f} \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m h(z), h(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{h(z)}$$

Где  $\frac{1}{h(z)}$  – голоморфная в окрестности  $\Rightarrow$  раскладывается в Тейлора. □

**Теорема 16.3.** *Сохотского.*

Пусть  $f$  голоморфна в  $\dot{O}(a)$ ,  $a - \text{COT}$ . Тогда

$$\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \exists z_n \rightarrow a : f(z_n) \rightarrow A$$

*Доказательство.* 1. Для  $A = \infty$  очевидно – если  $A$  – не предельная, то  $f$  ограничена  $\Rightarrow a - \text{YOT}$ .

2. Если  $A \neq \infty$ , то введём

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - A}$$

Пусть  $A$  – не предельная. Тогда

$$\exists \varepsilon \exists \delta > 0 \forall z \in \dot{O}_\delta(a) : |f(z) - A| \geq \varepsilon$$

Значит  $g(z)$  голоморфна в  $\dot{O}_\delta(a)$  как отношение голоморфных функций. Причём  $g(z) \neq 0$  в  $\dot{O}_\delta(a)$ . Также  $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$  – ограниченная, то есть точка  $a - \text{YOT}$ . Тогда

$$\forall z \in \dot{O}_\delta(a) : f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$$

Если  $g(a) \neq 0$ , то  $a - \text{YOT}$  для  $f$ .

Если  $g(a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$  имеет полюс в точке  $a \Rightarrow f$  точка  $a - \text{полюс}$ . Противоречие.  $\square$

## 17 Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах.

**Определение 17.1.** Если  $f$  голоморфна в  $\dot{O}_r(a)$ ,  $a \neq \infty$ , то определим вычет  $f$ , как

$$\text{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$$

**Утверждение 17.1.** *Вычеты определены корректно (независят от  $\gamma$ ).*

*Доказательство.* Если  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ ,  $z \in \dot{O}_r(a)$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n \int_{\gamma_\rho} (z - a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} c_{-1} 2\pi i = c_{-1}$$

$\square$

**Теорема 17.1.** *Коши о вычетах.*

Пусть  $D$  ограничена циклом  $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n$  (то есть в условиях теореме Коши для многосвязной области).

Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_N\} \subseteq D$ ,  $f$  – голоморфна в  $D' \setminus A$ , где  $D' \supseteq D$ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^N \text{res}_{a_i} f$$

*Доказательство.* Очевидно, что

$$\exists R > 0 \forall i \neq j : \overline{O}_R(a_i) \cap \overline{O}_R(a_j) = \emptyset$$

и  $\overline{O}_R(a_i) \subseteq D$ .

Обозначим за обход  $\delta_k = \partial O_R(a_k)$  (обход против часовой стрелки, то есть положительно ориентировано).

Обозначим  $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \sum_{i=1}^N \delta_i$ ,  $\tilde{D} = D \setminus \cup_{k=1}^N \overline{O}_R(a_k)$  и  $\tilde{D}' = D' \setminus A$ . Тогда  $\partial \tilde{D} = \tilde{\Gamma}$  и  $f$  голоморфна в  $\tilde{D}'$ .

Причём  $\tilde{D}' \supseteq \tilde{D}$ . Более того,  $\tilde{\Gamma} \sim 0 \pmod{\tilde{D}'}$ , и  $\forall z \notin \tilde{D}' : J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$ . Аналогично проверим для

$$1. z \notin D' \Rightarrow \begin{cases} J_{\Gamma}(z) = 0 \\ J_{\delta_i}(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$$

$$2. z \in A (z = a_i) \Rightarrow \begin{cases} J_{-\delta_i}(a_i) = -1 \\ J_{-\delta_j}(a_i) = 0 (i \neq j) \\ J_{\gamma_k}(a_i) = 0 \\ J_{\Gamma}(a_i) = 1 \end{cases} \Rightarrow J_{\tilde{\Gamma}}(z) = 0$$

Тогда по теореме Коши для многосвязной области  $\tilde{D}$ :

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \int_{\delta_i} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz \Rightarrow 2\pi i \sum_{i=1}^N \text{res}_{a_i}(f) = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

□

**Следствие.** Если  $a$  – УОТ  $\Rightarrow \text{res}_a f = 0$

**Следствие.** Если  $a$  – полюс  $m$ -ого порядка  $\Rightarrow$

$$\text{res}_a f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}$$

*Доказательство.*  $f$  имеет вид

$$f = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Тогда

$$\text{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} (f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}$$

□

## 18 Лемма Жордана...

**Теорема 18.1.** Пусть  $g$  – непрерывная функция в  $\{z \mid \text{Im}(z) \geq 0, |z| > R'\}$ , причём  $\max_{\Gamma_R} |g| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , где  $\Gamma_R = \{z \mid \text{Im}(z) \geq 0, |z| = R\}$ . Тогда

$$\forall \alpha > 0 : \int_{\Gamma_R} g(z) e^{i\alpha z} dz \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$$

*Доказательство.* Достаточно доказать, что  $\int_{\Gamma_R} |e^{i\alpha z}| |dz|$  равномерно ограничен. (то есть  $\exists M > 0 \forall R > R' : \int_{\Gamma_R} |e^{i\alpha z}| |dz| \leq M$ ).

Пусть  $z = Re^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in (0, \varphi)$ , тогда очевидно,

$$|e^{i\alpha z}| = e^{\operatorname{Re}(i\alpha z)} = e^{-R\alpha \sin(\varphi)}$$

Теперь распишем интеграл

$$\int_{\Gamma_R} |e^{i\alpha z}| |dz| = \int_0^\pi e^{-R\alpha \sin \varphi} R d\varphi = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\alpha \sin \varphi} d\varphi$$

Вспомним, что  $\sin \varphi$  вогнут на  $[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$ . Продолжим цепочку неравенств

$$2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\alpha \sin \varphi} d\varphi \leq 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R\alpha \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{\alpha} \int_0^{R\alpha} e^{-t} dt \leq \frac{\pi}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{\alpha}$$

□

## 19 Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

**Теорема 19.1.** *Принцип аргумента.*

Пусть  $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n$ ,  $D$  – область, ограниченная  $\Gamma$ ,  $A := \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq D$ ,  $f$  голоморфна в  $D' \setminus A$ ,  $D' \supset D$ .  $a_j$  – полюса функции  $f$  и  $\forall z \in \Gamma : f(z) \neq 0$ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz = J_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} f = N - P$$

где  $N$  и  $P$  – число нулей и полюсов  $f$  в  $D$  с учётом их кратностей соответственно.

*Доказательство.* Из определения  $f$ , можем её представить в виде

$$f = \frac{(z - b_1)^{n_1} \dots (z - b_\eta)^{n_\eta}}{(z - a_1)^{p_1} \dots (z - a_k)^{p_k}} g(z)$$

где  $g$  – голоморфна в  $\bar{D}$  и не содержит там нулей.

Тогда

$$\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{\eta} \frac{n_i}{z - b_i} - \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{z - a_i} + \frac{g'}{g}$$

Значит

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz = \sum_{i=1}^{\eta} n_i J_{\Gamma}(b_i) - \sum_{i=1}^k p_i J_{\Gamma}(a_i) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g'}{g} dz = \sum_{i=1}^{\eta} n_i - \sum_{i=1}^k p_i = N - P$$

так как  $J_{\Gamma}(b_i) = 1$ ,  $J_{\Gamma}(a_i) = 1$

□

**Теорема 19.2.** *Теорема Руше.*

Пусть  $f, g$  – голоморфные в  $\bar{D}$ , где  $D$  ограничивает  $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n$ . Пусть  $|f| > |g|$  на  $\Gamma$ . Тогда

$$N_f(D) = N_{f+g}(D)$$

где  $N_f(D)$  – число нулей функции  $f$  в области  $D$ .



*Доказательство.* Заметим, что  $|f| > 0$  и  $|f + g| > 0$  на  $\Gamma$ .

$|f|$  по условию,  $|f| > |g| \geq 0$ ,  $|f + g|$  по неравенству треугольника.

Тогда по принципу аргументов

$$f + g = f \cdot \left(1 + \frac{g}{f}\right) : \Delta_{\Gamma}(f + g) = \Delta_{\Gamma}f + \Delta_{\Gamma}\left(1 + \frac{g}{f}\right)$$

Но  $|g| < |f|$ , то есть  $\left|\frac{g}{f}\right| < 1 \Rightarrow \Delta_{\Gamma}\left(1 + \frac{g}{f}\right) = 0$ .

Тогда  $\Delta_{\Gamma}(f + g) = \Delta_{\Gamma}(f) \Rightarrow$  по принципу аргументов (так как нет полюсов):

$$N_f(D) = N_{f+g}(D)$$

□

**Теорема 19.3.** *Основная теорема алгебры.*

*Пусть  $p$  – многочлен степени  $n$  с коэффициентом из  $\mathbb{C}$ . Тогда  $p$  имеет в  $\mathbb{C}$  ровно  $n$  нулей с учётом кратности.*

*Доказательство.* Введём для  $p$ :

$$p(z) = [f ::= z^n] + [g := c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0]$$

$p$  голоморфно в  $\overline{D} = \overline{O}_R(0)$  при  $R > 1$ .

Оценим

$$|g| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i z^i| \leq n \cdot \max_i |c_i| R^{n-1}$$

И возьмём

$$R > n \cdot \max_i |c_i|$$

тогда  $|f| = R^n > n \cdot \max_i |c_i| \cdot R^{n-1} \geq |g|$ .

Применяя теорему Руше, получим

$$N_D(p) = N_D(f) = n$$

□

## 20 Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области...

**Теорема 20.1.** *Пусть  $f$  голоморфна в области  $D$ . Пусть  $z_0 \in D$ ,  $f(z_0) = w_0$ , причём  $z_0$  – нуль  $n$ -го порядка. Тогда*

$$\exists O_{\rho}(w_0) \exists O_r(z_0) : \forall w^* \in \dot{O}_{\rho}(w_0)$$

*уравнение  $f(z) = w^*$  имеет ровно  $n$  решений в  $\dot{O}_r(z_0)$ .*

*Доказательство.* Пусть  $f \not\equiv \text{const} \Rightarrow$

$$\exists r' \forall z \in \dot{O}_{r'}(z_0) : f(z) \neq w_0, f'(z) \neq 0$$

Пусть  $r \in (0, r')$ . Введём

$$\gamma = \partial O_r(z_0); \quad \Gamma = f(\gamma)$$

Тогда

$$z \in \gamma \Rightarrow \rho := \text{dist}(\Gamma, w_0) > 0$$

Пусть  $w^* \in \dot{O}_\rho(w_0)$ , тогда рассмотрим

$$\forall z \in \gamma : |f(z) - w_0| \geq \rho > |w^* - w_0|$$

Тогда по теореме Руше

$$N_{O_r(z_0)}(f(z) - w^*) = N_{O_r(z_0)}(f(z) - w_0) = n$$

Кратных нулей нет, так как  $f'(z) \neq 0$ . □

**Теорема 20.2.** *Принцип сохранения области или открытости.*

*Пусть  $f \not\equiv \text{const}$  – голоморфна в области  $D$ . Тогда  $f(D)$  тоже является областью. Если  $U \subseteq D$  и  $U$  – открыто, то  $f(U)$  тоже открыто*

*Доказательство.* Образ связного множества, очевидно, связан. Достаточно показать, что образ открытого открыт. Пусть

$$w_0 \in f(D), \exists z_0 : f(z_0) = w_0, \exists n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

Тогда

$$\exists O_r(z_0) \exists O_\rho(w_0) : \forall w^* \in O_\rho(w_0) \exists z^* \in O_r(z_0) \Rightarrow O_\rho(w_0) \subseteq f(O_r(z_0))$$

Выбирая малое  $r$ , получим требуемое. □

**Определение 20.1.**  $f$  голоморфная в  $D$  называется однолистной, если

$$\forall z_1, z_2 : z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

**Определение 20.2.**  $f$  локально однолистка в некоторой области  $O(z_0)$ .

**Утверждение 20.1.** *Если  $f'(z_0) = 0$ , то она не однолистка.*

**Утверждение 20.2.** *Найдётся достаточно малая окрестность  $z_0$ , в которой  $f$  константа.*

## 21 Принцип максимума модуля и лемма Шварца

**Теорема 21.1.** *Принцип максимума модуля.*

*Пусть  $f$  голоморфна в  $D$  и  $f \not\equiv \text{const}$ . Тогда  $|f|$  не может достигать максимума в  $z \in D$ .*

*Доказательство.* От противного. Пусть  $z_0 \in D$ :

$$\forall z \in D : |f(z_0)| \geq |f(z)|$$

Рассмотрим  $w_0 = f(z_0)$ . Тогда

$$\forall w \in f(D) : |w_0| \geq |w|$$

То есть  $f(D) \subset \overline{O}_{|w_0|}(0)$ , а  $|w_0|$  лежит на его границе  $\Rightarrow$  противоречие с принципом сохранения открытости.  $\square$

**Лемма 21.1.** *Шварца.*

Пусть  $f(z)$  в  $D = \{z \mid |z| < 1\}$  голоморфна, а  $0$  – неподвижная точка  $f(z)$  и  $\forall z \in D : |f(z)| \leq 1$ . Тогда

1.  $\forall z \in D : |f(z)| \leq |z|; \quad |f'(0)| \leq 1$
2. Если  $\exists z_0$ : в любом из неравенств предыдущего пункта достигается равенство, то  $f(z) = ze^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$

*Доказательство.* 1. Рассмотрим  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ , она голоморфна в  $\dot{O}_1(0)$ , причём точка  $0$  – устранимая особая. Тогда

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(z), & z = 0 \end{cases}$$

Голоморфна в  $D$ .

Тогда в  $O_r(0)$  по принципу максимумов:

$$\max_{|z| \leq r} |g| = \max_{|z|=r} |g| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Фиксируем  $z \in D$ . Тогда

$$\forall r \in (|z|, 1) : |g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Перейдём к пределу  $r \rightarrow 1$  и получим  $|g(z)| \leq 1$ , тогда  $|f(z)| \leq |z|$ . Из этого неравенства как раз следует  $|f'(0)| \leq 1$ :

$$\left| \frac{f(0) - f(z)}{0 - z} \right| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$$

2. Пусть  $|f(z_0)| = |z_0|$  при каком-то  $z_0 \neq 0, z_0 \in D$ . Тогда

$$|g(z_0)| = 1 \Rightarrow g(z) \equiv \text{const}$$

по принципу максимума, причём  $|g(z)| = 1 \Rightarrow g(z) = e^{i\theta} \Rightarrow f(z) = z \cdot e^{i\theta}$ . Если  $|f'(0)| = 1 \Rightarrow g(0) = 1 \Rightarrow$  аналогично берём  $z_0 = 0$ .  $\square$

## 22 Дробно-линейные отображения. . . .

**Определение 22.1.** Пусть  $f$  – отображение из  $D$  в  $\mathbb{C}$ , которое переводит гладкие кривые в гладкие кривые. Оно называется конформным в точке  $z_0$ , если оно сохраняет углы между кривыми в точке  $z_0$ .

**Утверждение 22.1.** Если  $f$  – голоморфная функция и  $f'(z_0) \neq 0$ , то  $f$  конформно в точке  $z_0$ .

**Лемма 22.1.** 1. Пусть  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ , тогда  $f$  конформна в  $a \Leftrightarrow f$  имеет полюс первого порядка.

2. Пусть  $a = \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \in \mathbb{C}$ , тогда  $f$  конформна в  $a \Leftrightarrow \operatorname{res}_{\infty} f \neq 0$

3. Пусть  $a = \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ , тогда  $f$  конформна в  $a \Leftrightarrow f$  имеет полюс первого порядка.

*Доказательство.* 1.  $f$  конформна в  $a \Leftrightarrow f'(a) \neq 0 \Leftrightarrow$  для  $g(z) := \frac{1}{f(z)}$  выполняется

$$g'(a) \neq 0 \Leftrightarrow g(z) = g'(a)(z - a) + o(z - a) \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{g'(a)(z - a)}(1 + o(1))$$

то есть  $f$  имеет простой полюс.

2. Знаем, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$$

Определим

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = A + g'(0)w + o(w)$$

Тогда

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w) - A}{w} \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - A) = -\operatorname{res}_{\infty} f \neq 0$$

3. Знаем, что

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

Тогда для

$$g(w) := \frac{1}{f\left(\frac{1}{w}\right)}$$

будет верно, что  $w = 0$  – УОТ, причём  $g(0) = 0$ .

Значит

$$g(w) = g'(0)w + o(w)$$

Тогда критерием конформности будет  $g'(0) \neq 0$ , то есть

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w)}{w} \neq 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{f(z)}$$

то есть  $f$  имеет простой полюс (П1П).

□

**Определение 22.2.**  $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  – дробно линейное отображение, если  $L(z) \neq const$ , то есть  $ad - bc \neq 0$ .

Пусть  $\mathfrak{M}$  – множество всех ДЛО.

**Утверждение 22.2.**  $\mathfrak{M}$  – группа относительно композиции.

*Доказательство.* Подставим и проверим:

$$\frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}$$

Заметим, что коэффициенты нового элемента могут быть получены перемножением матриц (это, кстати, доказывает, что сохраняется свойство ненулевого определителя):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Для поиска обратного элемента в группе, возьмём обратную матрицу (существует, так как определитель ненулевой  $ad - bc \neq 0$ ) – это будет матрица коэффициентов искомого элемента.  $\square$

**Утверждение 22.3.** Пусть  $L \in \mathfrak{M}$ ,  $L$  – биекция  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Тогда  $L$  – конформное отображение в любой точке.

*Доказательство.* Посчитаем производную

$$L'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

Если  $z \neq \infty, z \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0$ , то  $cz + d \neq 0 \Rightarrow L'(z) \neq 0 \Rightarrow$  конформное.

Пусть  $c \neq 0, z = \infty$ . Если  $c \neq 0$ , то в  $z = \infty$  УОТ, хотим проверить  $\operatorname{res}_{\infty} L \neq 0$  из чего следовала бы конформность.

Считаем вычет:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left( \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$$

При  $c \neq 0, z = -\frac{d}{c}$  – действительно, простой полюс (1 порядка).

При  $c = 0$  – линейная функция, которая, очевидно, конформная в  $\infty$  – простой полюс.  $\square$