

## Содержание

1. О криптографии .....	2
2. О криптографических протоколах .....	3
3. О теории сложности .....	3
4. Об односторонних функциях .....	6
5. О трудных предикатах .....	9
6. О вычислительной неотличимости .....	10
7. О предсказании следующего бита .....	11
8. О псевдослучайных генераторах .....	12
9. О криптосистемах .....	13
10. О стойкости криптосистем .....	14
11. Конкретный пример стойкости .....	15
15. О электронной подписи. ....	16
15.1. Определения .....	16
15.2. Примеры схем .....	18
15.2.1. RSA .....	18
15.2.2. Схема Лемпорта (одноразовая) .....	18

# Крипта ИСП

**Disclaymer:** доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

## 1. О криптографии

**Определение 1.1:** Криптографические средства защиты информации (КСЗИ) – основанные на математических методах преобразования защищаемой информации.

**Определение 1.2:** Теоретическая криптография (математическая криптография, криптология) – раздел дискретной математики, изучающий математические модели КСЗИ с научной точки зрения.

Основной предмет теоретической криптографии – криптографический протокол. (о нём в следующей главе).

*Пример:* Криптографические примитивы:

- **Односторонняя функция** – эффективно вычисляемая функция, задача инвертирования которой вычислительно трудна.
- **Псевдослучайный генератор** – эффективный алгоритм, генерирующий длинные последовательности, которые никакой эффективный алгоритм не отличит от чисто случайных.
- **Криптографическая хэш-функция** – эффективно вычисляемое семейство функций, уменьшающих длину аргумента, для которого задача поиска коллизий вычислительно трудна.

**Определение 1.3:** Атака – совокупность предположений о возможностях противника, о том, какие действия ему доступны (помимо вычислений).

**Определение 1.4:** Угроза – цель противника, состоящая в нарушении одного или нескольких из трёх условий (задач) криптографического протокола.

## 2. О криптографических протоколах

**Определение 2.1:** Криптографический протокол – это протокол, решающий хотя бы одну из трёх задач:

- Обеспечение **конфиденциальности** данных
- Обеспечение **целостности** сообщений и системы в целом – гарантия отсутствия нежелательных последствий вмешательства противника
- Обеспечение **неотслеживаемости** – невозможность установления противником, кто из участников выполнил определённое действие

*Пример:* Прикладные КП:

- Системы шифрования
- Подбрасывание монеты по телефону
- Схемы электронной подписи
- Протоколы аутентификации
- Системы электронных платежей

*Пример:* Примитивные КП:

- bit-commitment (схема обязательства)
- oblivious transfer (протокол с забыванием)

**Определение 2.2:** Стойкость – формализация понятия качества криптографического протокола, его способность решать поставленную перед ним задачу.

**Замечание 2.1:** Стойкость определяется **только** для конкретной модели противника, состоящей из трёх основных компонентов:

- Вычислительные ресурсы (включая модель вычислений)
- Атака
- Угроза

## 3. О теории сложности

**Замечание 3.1:** Задача кодируется множеством строк в некотором конечном алфавите  $\Sigma$ ,  $|\Sigma| \geq 2$ . Без ограничения общности, будем рассматривать только  $\Sigma = \{0, 1\} = \mathbb{B}$ .

**Определение 3.1:**  $\Sigma^*$  – множество всех слов в алфавите  $\Sigma$ , то есть  $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$ .

**Определение 3.2:** **Язык** – некоторое множество слов, то есть подмножество в  $\Sigma^*$ .

**Определение 3.3:** Модель вычислений, которую мы будем использовать в дальнейшем – **машина Тьюринга**

$$M = (Q, q_0, q_f, \Sigma, b, \sigma)$$

где:

- $Q$  – множество состояний (конечное, непустое)
- $q_0, q_f \in Q$  – выделенные состояния: начальное и конечное
- $\Sigma$  – конечный алфавит
- $b$  – специальный «пустой символ»
- $\sigma : \Sigma \times Q \rightarrow \Sigma \times Q \times \{-1, 0, 1\}$  – функция перехода (частично определённая, в общем случае многозначная)

**Определение 3.4:** С машиной Тьюринга  $M$  связаны отображения:

- **Вычисляемая машиной функция**  $M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^* \cup \{\perp\}$ , где  $M(w)$  – выход машины  $M$ , если на вход подана строка  $w$ . (Выдаёт  $\perp$  если вычисление не закончено)
- **Время её работы**  $T_M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , где  $T_M(w)$  – число тактов работы машины  $M$  при вычислении на входе  $w$ .
- **Используемая ею память**  $S_M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , где  $S_M(w)$  – число ячеек ленты, задействованных в вычислении на входе  $w$ .

**Определение 3.5:** Введём  $\text{poly}(x)$  – обозначение для «**некоторого полинома**» от переменной  $x$ . Важен не сам полином, факт его существования.

**Определение 3.6:** Введём названия для некоторых видов машин Тьюринга:

- **Детерминированная машина Тьюринга** – функция перехода  $\sigma$  однозначна
- **Полиномиальная (детерминированная) машина Тьюринга  $M$**  – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : T_M(w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Недетерминированная машина Тьюринга** – функция перехода  $\sigma$ , вообще говоря, многозначна, выбор её значений в конкретном вычислении осуществляется с помощью строки «Недетерминированного выбора»  $\psi \in \mathbb{B}^\infty$ , записанной на специальную ленту
- **Полиномиальная недетерминированная машина Тьюринга  $M$**  – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : \forall \psi \in \mathbb{B}^* : T_M(\psi; w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Вероятностная машина Тьюринга** – функция перехода  $\sigma$  принимает случайные значения,  $M(w)$  – случайная величина (при фиксированном  $w$ ). Выбор значения функции перехода в каждом такте осуществляется с помощью случайной строки  $\rho \in \mathbb{B}^\infty$ , записанной на специальную ленту.
- **Полиномиальная вероятностная машина Тьюринга (п.в.м.Т.)  $M$**  – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : \forall \rho \in \mathbb{B}^\infty : T_M(\rho; w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Полиномиальная в среднем вероятностная машина Тьюринга  $M$**  – обладает свойством:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \forall \rho \in \mathbb{B}^\infty : \forall w \in \mathbb{B}^n : \mathbb{E}(T_M(\rho; w))^\varepsilon \leq n$$

**Определение 3.7:** Класс сложности **Bounded-error Probabilistic Polynomial time:**

$$\text{BPP} = \left\{ L \subseteq \mathbb{B}^* \mid \exists \text{ п.в.м.Т. } M : \begin{cases} w \in L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \geq \frac{2}{3} \\ w \notin L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \leq \frac{1}{3} \end{cases} \right\}$$

**Определение 3.8:** Класс сложности **Randomized Polynomial time:**

$$\text{RP} = \left\{ L \subseteq \mathbb{B}^* \mid \exists \text{ п.в.м.Т. } M : \begin{cases} w \in L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \geq \frac{2}{3} \\ w \notin L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) = 0 \end{cases} \right\}$$

**Определение 3.9:** Однородной моделью вычислителя противника называется полиномиальная вероятностная машина Тьюринга или полиномиальная в среднем вероятностная машина Тьюринга.

**Определение 3.10:** Булевой схемой называется отображение  $C : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^m$ , такое, что для каждой координаты образа существует логическая функция от входа, тождественно задающая её.

**Размером булевой схемы** называется размерность её выхода.

*Пример:* Булева схема  $C : \mathbb{B}^1 \rightarrow \mathbb{B}^3$  имеет размер 3:

$$C(x_1) = (x_1, \neg x_1, x_1 \vee \neg x_1)$$

**Определение 3.11:** Неоднородной моделью вычислителя противника называется семейство булевых схем полиномиального размера  $C = \{C_n\}_{n=1}^\infty$ :

$$\forall n : |C_n| \leq \text{poly}(n)$$

причём для каждого размера входа  $|w|$  выбирается  $C_{|w|}$  схема.

## 4. Об односторонних функциях

**Определение 4.1:** Функция  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  называется **пренебрежимо малой**, если

$$\forall \text{ полинома } p : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \nu(n) \leq \frac{1}{p(n)}$$

Обозначение:  $\text{negl}(n)$ .

**Определение 4.2:** Функция  $f : X \rightarrow Y; X, Y \subseteq \mathbb{B}^*$  называется **полиномиально вычислимой**, если существует полиномиальная (детерминированная) машина Тьюринга  $M$  такая, что

$$\forall x \in X : M(x) = f(x)$$

**Замечание 4.1:**

- $\mathcal{U}$  – равномерное распределение вероятностей
- $x \underset{\mathcal{U}}{\in} Z$  значит, что  $x$  выбран случайно из множества  $Z$  в соответствии с равномерным распределением вероятностей на этом множестве
- $y \leftarrow M(x)$  значит, что  $y$  – случайный выход в.м.Т.  $M$ , на вход которой был подан  $x$ .
- Под возведением в степень 0 или 1 имеется в виду декартово умножение

**Определение 4.3:** Функция  $f : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$  называется **(сильно) односторонней**, если

1.  $f$  полиномиально вычислима
- 2.

$$\forall \text{ п.в.м.Т. } A : \mu_{x \underset{\mathcal{U}}{\in} \mathbb{B}^n} (\{A(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) = \text{negl}(n)$$

**Определение 4.4:** Функция  $f : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$  называется **слабо односторонней**, если

1.  $f$  полиномиально вычислима
- 2.

$$\exists \text{ полином } p : \forall \text{ п.в.м.Т. } A : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \\ \mu_{x \in \mathbb{B}^n}(\{A(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) \leq 1 - \frac{1}{p(n)}$$

**Лемма 4.1:** Любую полиномиально вычислимую, а значит и (сильно/слабо) одностороннюю функцию можно преобразовать так, чтобы она сохраняла длину аргумента.

*Доказательство:*

- Выберем какой-нибудь полином  $m$ , существующий в силу полиномиальности вычислимости функции  $f$ :

$$\forall x : |f(x)| \leq m(|x|)$$

это верно, так как машина Тьюринга совершит не более некоторого полиномиального числа тактов, а за такт она может прибавить максимум 1 к длине вывода.

- Определим функцию  $h$  на множестве  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{B}^{m(n)+1}$ , для чего представим каждый  $x$  из этого множества в виде  $x = x'x''$ , где  $x' \in \mathbb{B}^n$ ,  $x'' \in \mathbb{B}^{m(n)+1-n}$ , и положим

$$h(x) = f(x') \times 1 \times 0^{m(|x'|)-|f(x')|}$$

Заметим, что вывод теперь имеет такую же длину, как и вход. (Почему нужно добавить единицу, а не все нули?)  $\square$

**Теорема 4.1 (Яо):** Если существует слабо односторонняя функция, то существует и сильно односторонняя функция.

*Доказательство:* Пусть  $f$  – слабо односторонняя функция, БОО предположим, что мы уже преобразовали её к виду, сохраняющему длину входа, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$$

Зафиксируем некоторый полином  $p$  из определения слабой односторонности.

Для любой п.в.м.Т.  $A$  и для всех достаточно больших  $n$ :

$$\mu_{x \in \mathbb{B}^n}(\{A(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) \leq 1 - \frac{1}{p(n)}$$

Введём функцию

$$g(x_1, \dots, x_t) := (f(x_1), \dots, f(x_t)); \quad x_i \in \mathbb{B}^n, t(n) := n \cdot p(n)$$

Предположим, что  $g$  – не односторонняя, тогда для произвольного полинома  $q$  существует п.в.м.Т.  $B$  и бесконечное множество  $N \subseteq \mathbb{N}$ , что

$$\forall n \in N : \mu_{x \in \mathbb{B}^{nt(n)}}(\{B(1^{nt(n)}; g(x)) \in g^{-1}(g(x))\}) > \frac{1}{q(nt(n))}$$

Определим вероятностную машину  $C_0$  на входе  $y \in \mathbb{B}^n$ :

1. for  $i$  in  $[1..t]$
2. let  $z = B(f(x_1), \dots, f(x_{i-1}), y, f(x_{i+1}), \dots, f(x_t))$
3. if  $f(z_i) = y$ : return  $z_i$

Также определим вероятностный алгоритм  $C$  на входе  $y$ , выполняющий алгоритм  $C_0$  на этом входе  $k(n) := 2 \cdot n \cdot t(n) \cdot q(n \cdot t(n))$  раз.

Если на некоторой итерации алгоритм  $C_0$  что-то вернул, то это будет результатом  $C$ , иначе  $C$  заканчивает работу без выходного значения.

Для произвольного  $n \in \mathbb{N}$  положим

$$E_n = \{x \in \mathbb{B}^n \mid \mu(\{C_0(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) > \frac{n}{k(n)}\}$$

Где берём те  $x$ , при которых вероятность (теперь  $x$  фиксирован, случайность осталась лишь в случайном векторе  $1^n$ ) обращения  $f$  отделима от нуля.

#### Лемма 4.2:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in E^n : \mu(\{C(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) > 1 - e^{-n}$$

Эта лемма показывает, что ограниченная на  $E^n$   $f$  является сильно односторонней.

*Доказательство:* Зная, что:

- $C$  – применение алгоритма  $C_0$   $k$  раз, а значит если  $C$  не угадал прообраз, то и  $k$  раз применённый  $C_0$  тоже не угадал. (Оценка вероятности)
- Мы взяли  $x \in E_n$ , в котором вероятность угадать прообраз алгоритмом  $C_0 > \frac{n}{k}$ , а значит вероятность не угадать  $< 1 - \frac{n}{k}$
- $\forall r : \ln r \leq r - 1$

получим:

$$\mu(\{C(1^n; f(x)) \notin f^{-1}(f(x))\}) < (1 - \frac{n}{k})^k = e^{k \ln(1 - \frac{n}{k})} \leq e^{-n}$$

□

#### Лемма 4.3:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : \mu(E_n) > 1 - \frac{1}{2p(n)}$$

Этой леммой мы хотим показать, что с какого-то момента  $E_n$  достаточно большое.

*Доказательство:* Пока скип, большое

□

Из доказанных лемм вытекает, что

$$\begin{aligned} & \mu(\{C(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) \geq \\ & \mu(\{C(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x)) \mid E_n\})\mu(E_n) > (1 - e^{-n})\left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right) \end{aligned}$$



Но если вспомним, что  $f$  слабо односторонняя, то получим неравенство:

$$1 - \frac{1}{p(n)} > (1 - e^{-n}) \left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right)$$

Раскрыв скобки в правой части получим, что

$$\frac{1}{p(n)} < e^{-n} + \frac{1}{2p(n)} - \frac{e^{-n}}{2p(n)} < e^{-n} + \frac{1}{2p(n)}$$

Что неверно при достаточно больших  $n$ , так как  $e^{-n}$  убывает быстрее  $\frac{1}{2p(n)}$ .

## 5. О трудных предикатах

**Определение 5.1:** Функция  $\mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}$  называется **трудным предикатом** для функции  $f : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$ , если

- $b$  – полиномиально вычислимая функция
- $\forall$  п.в.м.Т.  $A : \mu_{x \in \mathbb{B}^n}(\{A(1^n; f(x)) = b(x)\}) < \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$

**Теорема 5.1** (Гольдрайха-Левина): Пусть  $f$  – односторонняя функция, определённая всюду и сохраняющая длину, и пусть для всех  $x, r \in \mathbb{B}^* : |x| = |r|$ , определены функции

$$g(x, r) = (f(x), r) \quad b(x, r) = \bigoplus_{i=1}^{|x|} x^{[i]} r^{[i]}$$

Тогда  $b$  – трудный предикат для функции  $g$ .

*Доказательство:* Предположим, что  $b$  не является трудным предикатом для функции  $g$ .

Это значит, что существуют полиномиальный вероятностный алгоритм  $A$ , полином  $p$  и бесконечное множество  $N \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$  такие, что

$$\forall n \in N : \varepsilon(n) = \mu(\{A(1^{2n}; f(x), r) = b(x, r)\}) - \frac{1}{2} > \frac{1}{p(n)}$$

Пусть  $n \in N$  и  $x \in \mathbb{B}^n$ . Положим

$$t(n, x) = \mu(\{A(1^{2n}; f(x), r) = b(x, r)\}) \quad E_n = \left\{x \in \mathbb{B}^n \mid t(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(n)}{2}\right\}$$

Тогда, заметив, что

- $\mathbb{E}_x(t(n, x)) = \varepsilon(n) + \frac{1}{2}$  – по определению
- Можно применить неравенство Чебышёва, так как  $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon(n)}{2} > 0$ .

$$\mu\left(\left\{t(x) < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(n)}{2}\right\}\right) = \mu\left(\left\{1 - t(x) > \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon(n)}{2}\right\}\right) \leq$$

$$\frac{\mathbb{E}_x(1 - t(n, x))}{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon(n)}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon(n)}{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon(n)}{2}} = 1 - \frac{\varepsilon(n)}{1 - \varepsilon(n)} < 1 - \varepsilon(n)$$

Воспользовавшись отрицанием обеих частей неравенства, получим

$$\mu(E_n) = \mu\left(\left\{t(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(n)}{2}\right\}\right) > \varepsilon(n) > \frac{1}{p(n)}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно построить полиномиальный вероятностный алгоритм  $B$ , определённый для всех  $n$  и на  $f(E_n)$ , такой, что

$$\mu(\{B(1^n; f(x)) = x\}) \geq \frac{1}{\text{poly}(n)}$$

Тогда этой вероятностью мы сможем оценить снизу вероятность угадать прообраз  $f$ , что будет противоречить односторонности  $f$ .

Введём обозначение  $e_i \in \mathbb{B}^n$  – вектор с единицей на  $i$ -м месте.

Алгоритм  $B$  на входе  $(1^n; f(x))$ , где  $n \in N$  и  $x \in E_n$ , будет искать каждый бит  $x^{[i]}$  отдельно. Для этого алгоритм  $B$ :

- Выбирает случайные элементы  $r_1, \dots, r_{\pi(n)} \in \underset{\mathcal{U}}{\mathbb{B}}^n$ , где  $\pi$  – некоторый полиномиальный параметр на  $N$ , принимающий лишь нечётные значения.
- Для каждого  $j \in \{1, \dots, \pi(n)\}$  вычисляет биты  $\beta_j, \rho_j$ , являющиеся предполагаемыми значениями  $b(x, r_j \oplus e_i)$  и  $b(x, r_j)$  соответственно
- Выбирает в качестве предполагаемого значения  $x^{[i]}$  бит, который встречается в последовательности  $\beta_j \oplus \rho_j; j \in \{1, \dots, \pi(n)\}$  более  $\frac{\pi(n)}{2}$  раз

Очевидно, если  $\beta_j = b(x, r_j \oplus e_i)$  и  $\rho_j = b(x, r_j)$  для более чем половины индексов  $j \in \{1, \dots, \pi(n)\}$ , то  $x^{[i]}$  будет найден правильно, так как

$$b(x, r_j \oplus e_i) \oplus b(x, r_j) = b(x, e_i) = x^{[i]}$$

Бит  $\beta_j$  вычисляется как  $A(1^{2n}; f(x), r_j \oplus e_i)$ . Мы не получим нужную оценку вероятности успеха алгоритма  $B$ , если будем вычислять  $\rho_j$  как  $A(1^{2n}; f(x), r_j)$ . Вместо этого алгоритм пытается угадать значение  $b(x, r_j)$  для всех  $j$ .

Но если просто выбрать  $\rho_j \in \underset{\mathcal{U}}{\mathbb{B}}$ , то вероятность того, что  $\rho_j = b(x, r_j)$  для всех  $j \in \{1, \dots, \pi(n)\}$  будет равна  $\frac{1}{2^{\pi(n)}}$ , а эта величина при нужном для нас росте  $\pi(n)$  будет пренебрежимо малой, как функция от  $n$ . Чтобы обойти это препятствие, алгоритм  $B$  делает некую грязь.  $\square$

## 6. О вычислительной неотличимости

**Определение 6.1:** Семейства случайных величин  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  и  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  называются **вычислительно неразличимыми**, если для любой п.в.м.т.  $D$ :

$$|\mu(\{D(1^n; \xi_n) = 1\}) - \mu(\{D(1^n; \zeta_n) = 1\})| = \text{negl}(n)$$

**Замечание 6.1:** Равномерно распределённым семейством случайных величин на  $\mathbb{B}^n$  будем называть  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\forall x \in \mathbb{B}^n : \mu(\{v_n = x\}) = \frac{1}{2^n}$$

**Определение 6.2:** Семейство случайных величин  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  называется **псевдослучайным**, если оно вычислительно неотлично от равномерно распределённого семейства случайных величин  $\{v_{m(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$

**Определение 6.3:** Функция  $g: \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$ , такая, что  $g(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^{m(n)}$  для некоторого полинома  $m$ , называется **псевдослучайным генератором** или, полностью, **криптографически стойким генератором псевдослучайных последовательностей**, если

1.  $g$  – полиномиально вычислима
2.  $m(n) > n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$
3.  $\{g(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  – псевдослучайное семейство случайных величин

## 7. О предсказании следующего бита

**Определение 7.1:** Семейство случайных величин  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  удовлетворяет условию **непредсказуемости следующего бита**, если для любой п.в.м.Т.  $P$ :

$$\mu_{i \in \{1, \dots, m(n)\}} \left( \left\{ P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]} \right\} \right) \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

**Теорема 7.1** (Яо об эквивалентности): Семейство случайных величин  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  псевдослучайно тогда и только тогда, когда  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  удовлетворяет условию непредсказуемости следующего бита.

*Доказательство:*  $\Rightarrow$  От обратного, пусть существует п.в.м.Т.  $P$  «предсказатель» и полином  $p$ :

$$\mu_i \left( \left\{ P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]} \right\} \right) > \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$$

Построим «различитель» - п.в.м.Т.  $D$ , работающую на входах  $(1^n; x)$ ,  $x \in \mathbb{B}^{m(n)}$ , работающий по алгоритму:

1. Выбираем случайный  $i \in \{1, \dots, m(n)\}$
2. Если «предсказатель» угадал по  $x^{[1, \dots, i-1]}$  битам  $i$ -й, то «различитель» возвращает 1, иначе 0.

Рассмотрим вероятность:

- $\mu(\{D(1^n; \xi_n) = 1\}) = \mu_i \left( \left\{ P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]} \right\} \right) > \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$
- $\mu(\{D(1^n; v_{m(n)}) = 1\}) =$

$$\mu \left( \left\{ P(1^n; v_{m(n)}^{[1, \dots, i-1]}) = v_{m(n)}^{[i]} \right\} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{m(n)} \mu \left( \left\{ P(1^n; v_{m(n)}^{[1, \dots, k-1]}) = v_{m(n)}^{[k]}, i = k \right\} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{m(n)} \mu \left( \left\{ P(1^n; v_{m(n)}^{[1, \dots, k-1]}) = v_{m(n)}^{[k]} \right\} \right) \mu(\{i = k\}) = m(n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m(n)} = \frac{1}{2}$$

Разность этих вероятностей  $> \frac{1}{p(n)}$  для бесконечно многих  $n$  – противоречие.

$\Leftarrow$  От противного. Предположим,  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  и  $\{v_{m(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  не вычислимо неразличимы: существует такая п.в.м.Т.  $D$  «различитель» и полином  $p$ , что для бесконечно многих  $n$ :

$$|\mu(\{D(1^n; \xi_n) = 1\}) - \mu(\{D(1^n; v_{m(n)}) = 1\})| > \frac{1}{p(n)}$$

Построим «предсказатель следующего бита» – п.в.м.Т.  $P$ , работающую на входах  $(1^n; x)$ ,  $x \in \mathbb{B}^{<m(n)}$ , следующим образом:

1. Выбираем случайный  $y \in \mathbb{B}^{m(n)-|x|}$
2. Если «различитель» на входе  $x \times y$  выдал 1, то возвращаем  $y^{[1]}$ , иначе  $\neg y^{[1]}$ .

Обозначим  $\sigma_i(n) = \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i]} \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 1\})$ ;  $0 \leq i \leq m(n)$  Тогда рассмотрим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]}, v_{m(n)}^{[i]} = \xi_n^{[i]}\}) + \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]}, v_{m(n)}^{[i]} = \neg \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = v_{m(n)}^{[i]}, v_{m(n)}^{[i]} = \xi_n^{[i]}\}) + \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \neg v_{m(n)}^{[i]}, v_{m(n)}^{[i]} = \neg \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times v_{m(n)}^{[i, \dots, m(n)]}) = 1, v_{m(n)}^{[i]} = \xi_n^{[i]}\}) + \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times v_{m(n)}^{[i, \dots, m(n)]}) = 0, v_{m(n)}^{[i]} = \neg \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \sum_{b \in \mathbb{B}} \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times b \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 1, v_{m(n)}^{[i]} = b, b = \xi_n^{[i]}\}) + \\ & \sum_{b \in \mathbb{B}} \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times b \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 0, v_{m(n)}^{[i]} = b, b = \neg \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \frac{1}{2} \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i]} \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 1\}) + \frac{1}{2} \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times \neg \xi_n^{[i]} \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 0\}) = \\ & \frac{1}{2} \sigma_i(n) + \frac{1}{2} (1 - 2\sigma_{i-1}(n) + \sigma_i(n)) = \frac{1}{2} + \sigma_i(n) - \sigma_{i-1}(n) \end{aligned}$$

Где в последнем переходе используется равенство:

$$\mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times \neg \xi_n^{[i]} \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 1\}) = 2\sigma_{i-1}(n) - \sigma_i(n)$$

которое получается аналогичным расписываниям выше, но для предсказания  $i - 1$  бита.

В итоге

$$\begin{aligned} \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]}\}) &= \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{m(n)} \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, k-1]}) = \xi_n^{[k]}\}) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{m(n)} (\sigma_k(n) - \sigma_{k-1}(n)) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{m(n)} (\mu(\{D(1^n; \xi_n) = 1\}) - \mu(\{D(1^n; v_{m(n)}) = 1\})) > \frac{1}{2} + \frac{1}{m(n)p(n)} \end{aligned}$$

Что для бесконечно многих  $n$  даёт противоречие с условием непредсказуемости следующего бита.  $\square$

## 8. О псевдослучайных генераторах

**Определение 8.1:** Функция, являющаяся одновременно односторонней и биекцией называется **односторонней перестановкой**.

**Утверждение 8.1 (Яо):** Если существует односторонняя перестановка, то существует псевдослучайный генератор.

*Доказательство:* Пусть  $f$  – односторонняя перестановка.

Продолжим её на всё  $\mathbb{B}^*$  (обрубаем до префикса, на котором была определена) и построим  $f'(x, r) = (f(x), r)$ , как в теореме Гольдрайха-Левина.

Получили, что  $f'$  также односторонняя перестановка с трудным предикатом  $b(\cdot)$ .

Определим  $g : x \mapsto f'(x)b(x)$ , который и будет псевдослучайным генератором.  $\square$

**Замечание 8.1:** То, что  $f$  перестановка, нужно не только для обеспечения правильных длин значений, но и для того, чтобы  $f(x)$  было равномерно распределено на  $\mathbb{B}^n$  при  $x \in \mathbb{B}^n$ .

**Теорема 8.1** (Хостада и других, без доказательства): псевдослучайные генераторы существуют тогда и только тогда, когда существуют односторонние функции.

## 9. О криптосистемах

**Замечание 9.1:** Будем использовать обозначения:

- $n \in \mathbb{N}$  – **параметр стойкости**
- $M_n \subseteq \mathbb{B}^*$  – пространство сообщений (открытых текстов)
- $\text{supp}(\xi) = \{x \mid \mu(\{\xi = x\}) \neq 0\}$  – **носитель** случайной величины

**Определение 9.1:** Система (вероятностного) шифрования с секретным ключом (криптосистема, шифр) – это тройка алгоритмов  $(G, E, D)$ :

- Генератор ключей  $G$  – п.в.м.Т.,  $G(1^n) = k$  – **секретный ключ**, можно считать, что  $k$  выбирается из  $K_n = \text{supp}(G(1^n))$  согласно вероятностному распределению  $\mathcal{G}_n$ , задаваемому случайной величиной  $G(1^n)$ .
- Алгоритм шифрования  $E$  – п. (в.) м.Т., для  $m \in M_n, k \in K_n : E(1^n; k, m) = c$  – **криптограмма (шифртекст)** открытого текста  $m$  на ключе  $k$ .
- Алгоритм дешифрования  $D$  – п.д.м.Т.

$$\forall m \in M_n : \forall k \in K_n : D(1^n; k, E(1^n; k, m)) = m$$

**Определение 9.2:** Система шифрования называется **блоковой**, если в ней алгоритм шифрования разбивает сообщение произвольной длины на блоки и шифрует каждый блок отдельно по **одному и тому же** алгоритму.

**Определение 9.3:** **Потоковая** же криптосистема последовательно шифрует элементы открытого текста, такими элементами чаще всего являются биты, данный тип криптосистем имеет внутренне состояние, **изменяющееся** после шифрования каждого нового сообщения.

## 10. О стойкости криптосистем

**Определение 10.1:** **Стойкость** криптосистемы определяется относительно конкретного противника.

**Замечание 10.1** (Модель противника):

- Вычислительные ресурсы = п.в.м.Т.
- Атака – возможность получения исходных данных
- Угроза – цель противника

**Замечание 10.2** (Основные типы атак):

1. **Атака с известными шифртекстами:**

$$c_1, c_2, \dots, c_l$$

2. **Атака с известными открытыми текстами:**

$$(m_1, c_1), (m_2, c_2), \dots, (m_l, c_l); \quad c_i = E(1^n; k, m_i)$$

3. **Атака с выбором открытых текстов:**

$$m_1, \dots, m_l \mapsto (m_1, c_1), \dots, (m_l, c_l); \quad c_i = E(1^n; k, m_i)$$

4. **Атака с выбором шифртекстов:**

$$c_1, \dots, c_l \mapsto (m_1, c_1), \dots, (m_l, c_l); \quad m_i = D(1^n; k, c_i)$$

5. **Атака с выбором текстов** – комбинация 3 и 4.

Атаки 3-5 бывают:

- **Неадаптивными**, когда противник получает весь набор данных разом
- **Адаптивными**, когда пары к выбранным данным он получает последовательно по  $i$ , то есть выбор следующего запроса может зависеть от результатов предыдущего.

**Замечание 10.3** (Основные типы угроз):

1. **Полное раскрытие** – найти использованный ключ
2. **Извлечение открытого текста** – по известной информации и случайному значению  $E(1^n; k, m)$  найти сообщение  $m$
3. **Извлечение частичной информации об открытом тексте**: для некоторой функции  $f: \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$  по известной информации и случайному значению  $E(1^n; k, m)$  найти  $f(m)$
4. **Различие двух шифртекстов** – при подходящей выборке  $m^0, m^1$  открытых сообщений, не появлявшихся при атаке, по криптограмме  $E(1^n; k, m^b)$  для случайного  $b \in \{0, 1\}$  определить  $b$ , то есть какое из двух сообщений было зашифровано

## 11. Конкретный пример стойкости

**Замечание 11.1:** Определим IND-CPA-стойкость криптосистемы с секретным ключом – стойкость относительно пары угрозы 4/атака 3.

Формализуем предположения о противнике с помощью специального оракула, к которому имеет доступ алгоритм противника.

Оракул  $\mathcal{O}$ , определяемый для криптосистемы  $(G, E, D)$ :

- В начале работы выбирает секретный ключ  $k \in K_n$
- После этого принимает запросы двух типов:
  1.  $(1; x)$ , где  $x \in M_n$  в ответ на который возвращает  $E(1^n; k, x)$
  2.  $(2; y^0, y^1)$ , где  $y^0, y^1 \in M_n$ , получив который, проверяет, что  $y^0$  и  $y^1$  не появлялись ранее, выбирает случайный бит  $b \in \{0, 1\}$  и в зависимости от значения  $b$  возвращает либо  $E(1^n, k, y^0)$ , либо  $E(1^n, k, y^1)$ .
- Ответив на один запрос второго типа, завершает свою работу

**Определение 11.1:** Криптосистема  $(G, E, D)$  называется **IND-CPA-стойкой**, если для любой п.в.м.Т.  $A$  с вышеописанным оракулом  $\mathcal{O}$ :

$$\mu(\{A^{\mathcal{O}}(1^n) = b\}) \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

*Пример:* Пусть  $g$  – псевдослучайный генератор,  $g(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^{q(n)}$

$m_1, \dots, m_t \in \mathbb{B}^n$  – сообщения, причём  $t \cdot n + 1 < q(n)$

Участники обмениваются по защищённому каналу секретным ключом  $k \in \mathbb{B}^n$ , причём  $g(k) = g_1 \dots g_t, g_i \in \mathbb{B}^n$ .

Тогда для  $1 \leq i \leq t$ :

- Шифрование –  $c_i = E(1^n; k, m_i) = m_i \oplus g_i$
- Дешифрование –  $m_i = D(1^n; k, c_i) = c_i \oplus g_i$

**Утверждение 11.1:** Если  $g$  – псевдослучайный генератор, то описанная выше криптосистема – IND-CPA-стойкая.

*Доказательство:* Предположим, что существует такая п.в.м.Т.  $A$ , что для некоторого полинома  $p$  и бесконечно многих  $n$   $\mu(\{A^O(1^n) = b\}) > \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$ .

Построим п.в.м.Т.  $S$ , работающую на входе  $(1^n; z)$ ,  $z \in \mathbb{B}^{q(n)}$ ,  $z = z_1 \dots z_t$ ,  $z_i \in \mathbb{B}^n$  следующим образом:

1.  $S$  запускает машину  $A$  на входе  $1^n$  и берёт на себя роль оракула, делая хог с элементами  $z$ .
2. Вычисляет выход –  $S(1^n; z) = \begin{cases} 1 & A^S(1^n) = b \\ 0 & A^S(1^n) \neq b \end{cases}$

Таким образом,

- если  $z = g(v_n)$ , то по предположению  $A$  вычисляет  $b$  с вероятностью  $> \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$
- иначе  $z = v_{q(n)}$  – произвольная равномерная случайная величина, отгадывающая ответ с вероятностью подбрасывания монетки

Получили, что  $\mu(\{S(1^n, g(v_n)) = 1\}) - \mu(\{S(1^n, v_{q(n)}) = 1\}) > \frac{1}{p(n)}$ , что противоречит с тем, что  $g$  – псевдослучайный генератор.  $\square$

## 15. О электронной подписи.

### 15.1. Определения

**Определение 15.1.1:** Схемой электронной подписи называется следующую тройку алгоритмов  $(G, S, V)$  вместе с процедурой  $A$ :

1. Генератор ключей  $G$  – п.в.м.Т :  $G(1^n) = (\hat{k}, k)$  – пара секретный/открытый ключ.  $K_n = \text{supp}(G(1^n))$  – пространство ключей.
2. Генератор подписей  $S$  – п.в.м.Т :  $m \in M_n, (\hat{k}, k) \in K_n \Rightarrow S(1^n, \hat{k}, m) = s$  – подпись для сообщения  $m$ .
3. Алгоритм проверки п.д.м.Т  $V : V(1^n, k, m, s) \in \mathbb{B}$  – принимается ли подпись. Причём  $V(1^n, k, m, S(1^n, \hat{k}, m)) = 1$ . То есть правильная подпись всегда принимается.
4.  $A$  – процедура арбитража (разрешения споров). Арбитр – кто-то кому все участники доверяют, и он может получить доступ к секретам.

**Определение 15.1.2:** Схема аутентификации сообщений (MAC).

Строится аналогично, только без открытого ключа

- $\hat{k}$  известен обоим участникам
- Оба могут как подписывать так и проверять подпись.
- Нет задачи убедить в чём-то третью сторону. MAC предназначен для сети из небольшого числа доверяющих друг другу участников



**Замечание 15.1.1:** Считаем, что противнику по умолчанию известна схема, то есть  $(G, S, V)$ , параметр  $n$ , а так же открытый ключ.

**Замечание 15.1.2:** Основные типы атак

1. Атака с известным открытым ключом - **ККА**.
  - Знаем только открытый ключ
2. Атака с известными сообщениями - **КМА**
  - Известен набор сообщений с подписями  $\{(m_i, s_i)\}_{i=0..l}$
3. Атака с выбором сообщений - **СМА**.
  - Противник может подписывать некоторые сообщения.  $\{m_i\} \rightsquigarrow \{(m_i, s_i)\}$
  - Может быть с априорным знанием  $k$  (направленная) или нет (простая).
  - Может быть адаптивной или неадаптивной. (Зависит ли  $m_i$ , от ответов на предыдущие запросы).

**Замечание 15.1.3:** Основные типы угроз

1. Полное раскрытие (total breaking).
2. Универсальная подделка (universal forgery)
  - Найти п.в.м.Т  $S' : \forall m \in M_n V(1^n, k, m, S'(1^n, k, m)) = 1$ . То есть научиться подписывать без приватного ключа  $\hat{k}$ .
3. Селективная подделка Selective forgery
  - Найти подпись для какого то конкретного сообщения  $m$ . (Здесь и далее всегда неявно подразумевается, что подпись сообщения которое хочет подписать атакующий ему не была известна заранее / сказана оракулом).
4. Экзистенциальная подделка.
  - Найти пару  $(m', s') : V(1^n, k, m', s') = 1$ .

**Определение 15.1.3:** Если никакой эффективный алгоритм не может осуществить угрозу экзистенциальной подделки с существенной вероятностью, то схема электронной подписи называется EU-стойкой.

**Определение 15.1.4:** EU-СМА стойкость

Оракул-подписант:  $\mathcal{O} : \mathcal{O}(m) = S(1^n, \hat{k}, m)$ .

Схема  $(G, S, V)$  EU-СМА стойкая если

$\forall$  п.в.м.Т  $A^{\mathcal{O}} : \mu(\{A^{\mathcal{O}}(1^n, k) = (m, s), V(1^n, k, m, s) = 1\}) = \text{negl}(n)$

**Теорема 15.1.1: Rompel** Если существует односторонняя функция, то существует EU-СМА стойкая схема электронной подписи.

**Замечание 15.1.4:** В обратную сторону тоже верно. Предположим противное, тогда можно эффективно обратить генератор ключей, и тем самым по открытому ключу получить секретный. Другими словами  $f(r) = k \Leftrightarrow G(r, 1^n) = (k, \hat{k})$  должна быть односторонней.

## 15.2. Примеры схем

### 15.2.1. RSA

$$N = pq, \quad p, q \in \mathbb{P}$$

$\gcd(e, \varphi(N)) = 1, ed \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$ , где  $\varphi$  – функция Эйлера.

- $G : k = (N, e), \hat{k} = (N, d)$
- $S : s = m^d \pmod{N}$
- $V : s^e \stackrel{?}{=} m \pmod{N}. m^{de} \equiv m^{1+l\varphi(N)} \equiv m \pmod{N}$

**Замечание 15.2.1.1:** RSA НЕ является ни EU-ККА стойкой ни UU-СМА стойкой.

### 15.2.2. Схема Лемпорта (одноразовая)

Пусть  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  односторонняя функция сохраняющая длину. Сообщение  $m \in M_n = \mathbb{B}^n$ .  $m = m^{[1]}m^{[2]}...m^{[n]}$

- G. Нагенерируем  $2n$  случайных последовательностей:  $\{x_i^0, x_i^1\}_{i=0}^n$ . Они будут нашим секретным ключом. Ко всем ним применяем  $f$ . Получаем  $\{y_i^0, y_i^1\}_{i=0}^n$  это публичный ключ.
- S. В зависимости от значения  $i$ -го бита в числе выбираем либо  $x_i^0$  либо  $x_i^1$ . Формально  $s = s^{[1]}s^{[2]}...s^{[n]} = x_0^{m^{[0]}}x_1^{m^{[1]}}...x_n^{m^{[n]}}$
- V. Применяем  $f$  к подписи и сверяемся что все сходится:  $y_i^{m^{[i]}} = f(s_i)$ .

**Замечание 15.2.2.1:** Эта схема EU-СМА1-стойкая — при условии, что противнику доступно только одно обращение к оракулу ( $l = 1$ ).

**Замечание 15.2.2.2:** Чтобы снять ограничение на длину сообщения, достаточно подписывать хеш от сообщения. Далее это будет считаться стратегией по умолчанию.