

Содержание

1. О криптографии	2
2. О криптографических протоколах	3
3. О теории сложности	3
4. Об односторонних функциях	6

Крипта ИСП

Disclaimer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

1. О криптографии

Определение 1.1: Криптографические средства защиты информации (КСЗИ) – основанные на математических методах преобразования защищаемой информации.

Определение 1.2: Теоретическая криптография (математическая криптография, криптология) – раздел дискретной математики, изучающий математические модели КСЗИ с научной точки зрения.

Основной предмет теоретической криптографии – криптографический протокол. (о нём в следующей главе).

Пример: Криптографические примитивы:

- **Односторонняя функция** – эффективно вычисляемая функция, задача инвертирования которой вычислительно трудна.
- **Псевдослучайный генератор** – эффективный алгоритм, генерирующий длинные последовательности, которые никакой эффективный алгоритм не отличит от чисто случайных.
- **Криптографическая хэш-функция** – эффективно вычисляемое семейство функций, уменьшающих длину аргумента, для которого задача поиска коллизий вычислительно трудна.

Определение 1.3: Атака – совокупность предположений о возможностях противника, о том, какие действия ему доступны (помимо вычислений).

Определение 1.4: Угроза – цель противника, состоящая в нарушении одного или нескольких из трёх условий (задач) криптографического протокола.

2. О криптографических протоколах

Определение 2.1: Криптографический протокол – это протокол, решающий хотя бы одну из трёх задач:

- Обеспечение **конфиденциальности** данных
- Обеспечение **целостности** сообщений и системы в целом – гарантия отсутствия нежелательных последствий вмешательства противника
- Обеспечение **неотслеживаемости** – невозможность установления противником, кто из участников выполнил определённое действие

Пример: Прикладные КП:

- Системы шифрования
- Подбрасывание монеты по телефону
- Схемы электронной подписи
- Протоколы аутентификации
- Системы электронных платежей

Пример: Примитивные КП:

- bit-commitment (схема обязательства)
- oblivious transfer (протокол с забыванием)

Определение 2.2: Стойкость – формализация понятия качества криптографического протокола, его способность решать поставленную перед ним задачу.

Замечание 2.1: Стойкость определяется **только** для конкретной модели противника, состоящей из трёх основных компонентов:

- Вычислительные ресурсы (включая модель вычислений)
- Атака
- Угроза

3. О теории сложности

Замечание 3.1: Задача кодируется множеством строк в некотором конечном алфавите Σ , $|\Sigma| \geq 2$. Без ограничения общности, будем рассматривать только $\Sigma = \{0, 1\} = \mathbb{B}$.

Определение 3.1: Σ^* – множество всех слов в алфавите Σ , то есть $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$.

Определение 3.2: **Язык** – некоторое множество слов, то есть подмножество в Σ^* .

Определение 3.3: Модель вычислений, которую мы будем использовать в дальнейшем – **машина Тьюринга**

$$M = (Q, q_0, q_f, \Sigma, b, \sigma)$$

где:

- Q – множество состояний (конечное, непустое)
- $q_0, q_f \in Q$ – выделенные состояния: начальное и конечное
- Σ – конечный алфавит
- b – специальный «пустой символ»
- $\sigma : \Sigma \times Q \rightarrow \Sigma \times Q \times \{-1, 0, 1\}$ – функция перехода (частично определённая, в общем случае многозначная)

Определение 3.4: С машиной Тьюринга M связаны отображения:

- **Вычисляемая машиной функция** $M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow B^* \cup \{\perp\}$, где $M(w)$ – выход машины M , если на вход подана строка w . (Выдаёт \perp если вычисление не закончено)
- **Время её работы** $T_M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $T_M(w)$ – число тактов работы машины M при вычислении на входе w .
- **Используемая ею память** $S_M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $S_M(w)$ – число ячеек ленты, задействованных в вычислении на входе w .

Определение 3.5: Введём $\text{poly}(x)$ – обозначение для «**некоторого полинома**» от переменной x . Важен не сам полином, факт его существования.

Определение 3.6: Введём названия для некоторых видов машин Тьюринга:

- **Детерминированная машина Тьюринга** – функция перехода σ однозначна
- **Полиномиальная (детерминированная) машина Тьюринга M** – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : T_M(w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Недетерминированная машина Тьюринга** – функция перехода σ , вообще говоря, многозначна, выбор её значений в конкретном вычислении осуществляется с помощью строки «Недетерминированного выбора» $\psi \in \mathbb{B}^\infty$, записанной на специальную ленту
- **Полиномиальная недетерминированная машина Тьюринга M** – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : \forall \psi \in \mathbb{B}^* : T_M(\psi; w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Вероятностная машина Тьюринга** – функция перехода σ принимает случайные значения, $M(w)$ – случайная величина (при фиксированном w). Выбор значения функции перехода в каждом такте осуществляется с помощью случайной строки $\rho \in \mathbb{B}^\infty$, записанной на специальную ленту.
- **Полиномиальная вероятностная машина Тьюринга (п.в.м.Т.) M** – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : \forall \rho \in \mathbb{B}^\infty : T_M(\rho; w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Полиномиальная в среднем вероятностная машина Тьюринга M** – обладает свойством:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \forall \rho \in \mathbb{B}^\infty : \forall w \in \mathbb{B}^n : \mathbb{E}(T_M(\rho; w))^\varepsilon \leq n$$

Определение 3.7: Класс сложности **Bounded-error Probabilistic Polynomial time:**

$$\text{BPP} = \left\{ L \subseteq \mathbb{B}^* \mid \exists \text{ п.в.м.Т. } M \left\{ \begin{array}{l} w \in L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \geq \frac{2}{3} \\ w \notin L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \leq \frac{1}{3} \end{array} \right\} \right\}$$

Определение 3.8: Класс сложности **Randomized Polynomial time:**

$$\text{RP} = \left\{ L \subseteq \mathbb{B}^* \mid \exists \text{ п.в.м.Т. } M \left\{ \begin{array}{l} w \in L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \geq \frac{2}{3} \\ w \notin L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) = 0 \end{array} \right\} \right\}$$

Определение 3.9: Однородной моделью вычислителя противника называется полиномиальная вероятностная машина Тьюринга или полиномиальная в среднем вероятностная машина Тьюринга.

Определение 3.10: Булевой схемой называется отображение $C : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^m$, такое, что для каждой координаты образа существует логическая функция от входа, тождественно задающая её.

Размером булевой схемы называется размерность её выхода.

Пример: Булевая схема $C : \mathbb{B}^1 \rightarrow \mathbb{B}^3$ имеет размер 3:

$$C(x_1) = (x_1, \neg x_1, x_1 \vee \neg x_1)$$

Определение 3.11: Неоднородной моделью вычислителя противника называется семейство булевых схем полиномиального размера $C = \{C_n\}_{n=1}^\infty$:

$$\forall n : |C_n| \leq \text{poly}(n)$$

причём для каждого размера входа $|w|$ выбирается $C_{|w|}$ схема.

4. Об односторонних функциях

Определение 4.1: Функция $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется **пренебрежимо малой**, если

$$\forall \text{ полинома } p : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \nu(n) \leq \frac{1}{p(n)}$$

Обозначение: $\text{negl}(n)$.

Определение 4.2: Функция $f : X \rightarrow Y$; $X, Y \subseteq \mathbb{B}^*$ называется **полиномиально вычислимой**, если существует полиномиальная (детерминированная) машина Тьюринга M такая, что

$$\forall x \in X : M(x) = f(x)$$

Замечание 4.1:

- \mathcal{U} – равномерное распределение вероятностей
- $x \stackrel{\mathcal{U}}{\in} Z$ значит, что x выбран случайно из множества Z в соответствии с равномерным распределением вероятностей на этом множестве
- $y \leftarrow M(x)$ значит, что y – случайный выход в.м.Т. M , на вход которой был подан x .
- Под возведением в степень 0 или 1 имеется в виду декартово умножение

Определение 4.3: Функция $f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^*$ называется **сильно односторонней**, если

1. f полиномиально вычислима
- 2.

$$\forall \text{ п.в.м.Т. } A : \mu_{x \in \mathbb{B}^n}^{\mathcal{U}} (\{A(1^n, f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) = \text{negl}(n)$$

Определение 4.4: Функция $f : \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^*$ называется **слабо односторонней**, если

1. f полиномиально вычислима
- 2.

$$\exists \text{ полином } p : \forall \text{ п.в.м.Т. } A : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \\ \mu_{x \in \mathbb{B}^n}(\{A(1^n, f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) \leq 1 - \frac{1}{p(n)}$$

Лемма 4.1: Любую полиномиально вычислимую, а значит и (сильно/слабо) одностороннюю функцию можно преобразовать так, чтобы она сохраняла длину аргумента.

Доказательство:

- Выберем какой-нибудь полином m , существующий в силу полиномиальности вычислимости функции f :

$$\forall x : |f(x)| \leq m(|x|)$$

это верно, так как машина Тьюринга совершит не более некоторого полиномиального числа тактов, а за такт она может прибавить максимум 1 к длине вывода.

- Определим функцию h на множестве $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{B}^{m(n)+1}$, для чего представим каждый x из этого множества в виде $x = x'x''$, где $x' \in \mathbb{B}^n$, $x'' \in \mathbb{B}^{m(n)+1-n}$, и положим

$$h(x) = f(x') \times 1 \times 0^{m(|x'|)-|f(x')|}$$

Заметим, что вывод теперь имеет такую же длину, как и вход. (Почему нужно добавить единицу, а не все нули?) \square

Теорема 4.1 (Яо): Если существует слабо односторонняя функция, то существует и сильно односторонняя функция.

Доказательство: Пусть f – слабо односторонняя функция, БОО предположим, что мы уже преобразовали её к виду, сохраняющему длину входа, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$$

Зафиксируем некоторый полином p из определения слабой односторонности.

Для любой п.в.м.Т. A и для всех достаточно больших n :

$$\mu_{x \in \mathbb{B}^n}(\{A(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) \leq 1 - \frac{1}{p(n)}$$

Введём функцию

$$g(x_1, \dots, x_t) := (f(x_1), \dots, f(x_t)); \quad x_i \in \mathbb{B}^n, t = n \cdot p(n)$$

Предположим, что g – не односторонняя, тогда для произвольного полинома q существует п.в.м.Т. B и бесконечное множество $N \subseteq \mathbb{N}$, что

$$\forall n \in N : \mu_{x \in \mathbb{B}^{nt}}(\{B(1^{nt}; g(x)) \in g^{-1}(g(x))\}) > \frac{1}{q(nt)}$$

Определим вероятностную машину C_0 на входе $y \in \mathbb{B}^n$:

1. for i in $[1..t]$
2. let $z = B(f(x_1), \dots, f(x_{i-1}), y, f(x_{i+1}), \dots, f(x_t))$
3. if $f(z_i) = y$: return z_i

Также определим вероятностный алгоритм C на входе y , выполняющий алгоритм C_0 на этом входе не более $k := 2 \cdot n \cdot t \cdot q(n \cdot t)$ раз.

Если на некоторой итерации алгоритм C_0 что-то вернул, то это будет результатом C , иначе C заканчивает работу без выходного значения.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ положим

$$E_n = \{x \in \mathbb{B}^n \mid \mu(\{C_0(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) > \frac{n}{k}\}$$

Лемма 4.2:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in E_n : \mu(\{C(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) > 1 - e^{-n}$$

Эта лемма показывает, что ограниченная на E^n f является сильно односторонней.

Доказательство: Зная, что:

- C – применение алгоритма C_0 k раз, а значит если C не угадал прообраз, то и k раз применённый C_0 тоже не угадал. (Оценка вероятности)
- Мы взяли $x \in E_n$, в котором вероятность угадать прообраз алгоритмом $C_0 > \frac{n}{k}$, а значит вероятность не угадать $< 1 - \frac{n}{k}$
- $\forall r : \ln r \leq r - 1$

получим:

$$\mu(\{C(1^n; f(x)) \notin f^{-1}(f(x))\}) < \left(1 - \frac{n}{k}\right)^k = e^{k \ln(1 - \frac{n}{k})} \leq e^{-n}$$

□

Лемма 4.3:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : \mu(E_n) > 1 - \frac{1}{2p(n)}$$

Этой леммой мы хотим показать, что с какого-то момента E_n достаточно большое.

Доказательство: Пока скип, большое

□

Из доказанных лемм вытекает, что

$$\begin{aligned} & \mu(\{C(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) \geq \\ & \mu(\{A(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\} \mid E_n) \mu(E_n) > (1 - e^{-n}) \left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right) \end{aligned}$$

Но если вспомним, что f слабо односторонняя, то получим неравенство:

$$1 - \frac{1}{p(n)} > (1 - e^{-n}) \left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right)$$

Раскрыв скобки в правой части получим, что

$$\frac{1}{p(n)} < e^{-n} + \frac{1}{2p(n)} - \frac{e^{-n}}{2p(n)} < e^{-n} + \frac{1}{2p(n)}$$

Что неверно при достаточно больших n , так как e^{-n} убывает быстрее $\frac{1}{2p(n)}$.