

Содержание

1. О криптографии	2
2. О криптографических протоколах	3
3. О теории сложности	3
4. Об односторонних функциях	6
5. О трудных предикатах	9
6. О вычислительной неотличимости	10
7. О предсказании следующего бита	11
8. О псевдослучайных генераторах	12
9. О криптосистемах	13
10. О стойкости криптосистем	14
11. Конкретный пример стойкости	15

Крипта ИСП

Disclaimer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

1. О криптографии

Определение 1.1: Криптографические средства защиты информации (КСЗИ) – основанные на математических методах преобразования защищаемой информации.

Определение 1.2: Теоретическая криптография (математическая криптография, криптология) – раздел дискретной математики, изучающий математические модели КСЗИ с научной точки зрения.

Основной предмет теоретической криптографии – криптографический протокол. (о нём в следующей главе).

Пример: Криптографические примитивы:

- **Односторонняя функция** – эффективно вычисляемая функция, задача инвертирования которой вычислительно трудна.
- **Псевдослучайный генератор** – эффективный алгоритм, генерирующий длинные последовательности, которые никакой эффективный алгоритм не отличит от чисто случайных.
- **Криптографическая хэш-функция** – эффективно вычисляемое семейство функций, уменьшающих длину аргумента, для которого задача поиска коллизий вычислительно трудна.

Определение 1.3: Атака – совокупность предположений о возможностях противника, о том, какие действия ему доступны (помимо вычислений).

Определение 1.4: Угроза – цель противника, состоящая в нарушении одного или нескольких из трёх условий (задач) криптографического протокола.

2. О криптографических протоколах

Определение 2.1: Криптографический протокол – это протокол, решающий хотя бы одну из трёх задач:

- Обеспечение **конфиденциальности** данных
- Обеспечение **целостности** сообщений и системы в целом – гарантия отсутствия нежелательных последствий вмешательства противника
- Обеспечение **неотслеживаемости** – невозможность установления противником, кто из участников выполнил определённое действие

Пример: Прикладные КП:

- Системы шифрования
- Подбрасывание монеты по телефону
- Схемы электронной подписи
- Протоколы аутентификации
- Системы электронных платежей

Пример: Примитивные КП:

- bit-commitment (схема обязательства)
- oblivious transfer (протокол с забыванием)

Определение 2.2: Стойкость – формализация понятия качества криптографического протокола, его способность решать поставленную перед ним задачу.

Замечание 2.1: Стойкость определяется **только** для конкретной модели противника, состоящей из трёх основных компонентов:

- Вычислительные ресурсы (включая модель вычислений)
- Атака
- Угроза

3. О теории сложности

Замечание 3.1: Задача кодируется множеством строк в некотором конечном алфавите Σ , $|\Sigma| \geq 2$. Без ограничения общности, будем рассматривать только $\Sigma = \{0, 1\} = \mathbb{B}$.

Определение 3.1: Σ^* – множество всех слов в алфавите Σ , то есть $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$.

Определение 3.2: **Язык** – некоторое множество слов, то есть подмножество в Σ^* .

Определение 3.3: Модель вычислений, которую мы будем использовать в дальнейшем – **машина Тьюринга**

$$M = (Q, q_0, q_f, \Sigma, b, \sigma)$$

где:

- Q – множество состояний (конечное, непустое)
- $q_0, q_f \in Q$ – выделенные состояния: начальное и конечное
- Σ – конечный алфавит
- b – специальный «пустой символ»
- $\sigma : \Sigma \times Q \rightarrow \Sigma \times Q \times \{-1, 0, 1\}$ – функция перехода (частично определённая, в общем случае многозначная)

Определение 3.4: С машиной Тьюринга M связаны отображения:

- **Вычисляемая машиной функция** $M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^* \cup \{\perp\}$, где $M(w)$ – выход машины M , если на вход подана строка w . (Выдаёт \perp если вычисление не закончено)
- **Время её работы** $T_M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $T_M(w)$ – число тактов работы машины M при вычислении на входе w .
- **Используемая ею память** $S_M(\cdot) : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $S_M(w)$ – число ячеек ленты, задействованных в вычислении на входе w .

Определение 3.5: Введём $\text{poly}(x)$ – обозначение для «**некоторого полинома**» от переменной x . Важен не сам полином, факт его существования.

Определение 3.6: Введём названия для некоторых видов машин Тьюринга:

- **Детерминированная машина Тьюринга** – функция перехода σ однозначна
- **Полиномиальная (детерминированная) машина Тьюринга M** – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : T_M(w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Недетерминированная машина Тьюринга** – функция перехода σ , вообще говоря, многозначна, выбор её значений в конкретном вычислении осуществляется с помощью строки «Недетерминированного выбора» $\psi \in \mathbb{B}^\infty$, записанной на специальную ленту
- **Полиномиальная недетерминированная машина Тьюринга M** – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : \forall \psi \in \mathbb{B}^* : T_M(\psi; w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Вероятностная машина Тьюринга** – функция перехода σ принимает случайные значения, $M(w)$ – случайная величина (при фиксированном w). Выбор значения функции перехода в каждом такте осуществляется с помощью случайной строки $\rho \in \mathbb{B}^\infty$, записанной на специальную ленту.
- **Полиномиальная вероятностная машина Тьюринга (п.в.м.Т.) M** – обладает свойством:

$$\forall w \in \mathbb{B}^* : \forall \rho \in \mathbb{B}^\infty : T_M(\rho; w) \leq \text{poly}(|w|)$$

- **Полиномиальная в среднем вероятностная машина Тьюринга M** – обладает свойством:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \forall \rho \in \mathbb{B}^\infty : \forall w \in \mathbb{B}^n : \mathbb{E}(T_M(\rho; w))^\varepsilon \leq n$$

Определение 3.7: Класс сложности **Bounded-error Probabilistic Polynomial time:**

$$\text{BPP} = \left\{ L \subseteq \mathbb{B}^* \mid \exists \text{ п.в.м.Т. } M : \begin{cases} w \in L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \geq \frac{2}{3} \\ w \notin L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \leq \frac{1}{3} \end{cases} \right\}$$

Определение 3.8: Класс сложности **Randomized Polynomial time:**

$$\text{RP} = \left\{ L \subseteq \mathbb{B}^* \mid \exists \text{ п.в.м.Т. } M : \begin{cases} w \in L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) \geq \frac{2}{3} \\ w \notin L \Rightarrow \mu(\{M(w)=1\}) = 0 \end{cases} \right\}$$

Определение 3.9: Однородной моделью вычислителя противника называется полиномиальная вероятностная машина Тьюринга или полиномиальная в среднем вероятностная машина Тьюринга.

Определение 3.10: Булевой схемой называется отображение $C : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^m$, такое, что для каждой координаты образа существует логическая функция от входа, тождественно задающая её.

Размером булевой схемы называется размерность её выхода.

Пример: Булева схема $C : \mathbb{B}^1 \rightarrow \mathbb{B}^3$ имеет размер 3:

$$C(x_1) = (x_1, \neg x_1, x_1 \vee \neg x_1)$$

Определение 3.11: Неоднородной моделью вычислителя противника называется семейство булевых схем полиномиального размера $C = \{C_n\}_{n=1}^\infty$:

$$\forall n : |C_n| \leq \text{poly}(n)$$

причём для каждого размера входа $|w|$ выбирается $C_{|w|}$ схема.

4. Об односторонних функциях

Определение 4.1: Функция $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется **пренебрежимо малой**, если

$$\forall \text{ полинома } p : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \nu(n) \leq \frac{1}{p(n)}$$

Обозначение: $\text{negl}(n)$.

Определение 4.2: Функция $f : X \rightarrow Y; X, Y \subseteq \mathbb{B}^*$ называется **полиномиально вычислимой**, если существует полиномиальная (детерминированная) машина Тьюринга M такая, что

$$\forall x \in X : M(x) = f(x)$$

Замечание 4.1:

- \mathcal{U} – равномерное распределение вероятностей
- $x \underset{\mathcal{U}}{\in} Z$ значит, что x выбран случайно из множества Z в соответствии с равномерным распределением вероятностей на этом множестве
- $y \leftarrow M(x)$ значит, что y – случайный выход в.м.Т. M , на вход которой был подан x .
- Под возведением в степень 0 или 1 имеется в виду декартово умножение

Определение 4.3: Функция $f : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$ называется **(сильно) односторонней**, если

1. f полиномиально вычислима
- 2.

$$\forall \text{ п.в.м.Т. } A : \mu_{x \underset{\mathcal{U}}{\in} \mathbb{B}^n} (\{A(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) = \text{negl}(n)$$

Определение 4.4: Функция $f : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$ называется **слабо односторонней**, если

1. f полиномиально вычислима
- 2.

$$\exists \text{ полином } p : \forall \text{ п.в.м.Т. } A : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \\ \mu_{x \in \mathbb{B}^n}(\{A(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) \leq 1 - \frac{1}{p(n)}$$

Лемма 4.1: Любую полиномиально вычислимую, а значит и (сильно/слабо) одностороннюю функцию можно преобразовать так, чтобы она сохраняла длину аргумента.

Доказательство:

- Выберем какой-нибудь полином m , существующий в силу полиномиальности вычислимости функции f :

$$\forall x : |f(x)| \leq m(|x|)$$

это верно, так как машина Тьюринга совершит не более некоторого полиномиального числа тактов, а за такт она может прибавить максимум 1 к длине вывода.

- Определим функцию h на множестве $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{B}^{m(n)+1}$, для чего представим каждый x из этого множества в виде $x = x'x''$, где $x' \in \mathbb{B}^n$, $x'' \in \mathbb{B}^{m(n)+1-n}$, и положим

$$h(x) = f(x') \times 1 \times 0^{m(|x'|)-|f(x')|}$$

Заметим, что вывод теперь имеет такую же длину, как и вход. (Почему нужно добавить единицу, а не все нули?) \square

Теорема 4.1 (Яо): Если существует слабо односторонняя функция, то существует и сильно односторонняя функция.

Доказательство: Пусть f – слабо односторонняя функция, БОО предположим, что мы уже преобразовали её к виду, сохраняющему длину входа, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$$

Зафиксируем некоторый полином p из определения слабой односторонности.

Для любой п.в.м.Т. A и для всех достаточно больших n :

$$\mu_{x \in \mathbb{B}^n}(\{A(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) \leq 1 - \frac{1}{p(n)}$$

Введём функцию

$$g(x_1, \dots, x_t) := (f(x_1), \dots, f(x_t)); \quad x_i \in \mathbb{B}^n, t(n) := n \cdot p(n)$$

Предположим, что g – не односторонняя, тогда для произвольного полинома q существует п.в.м.Т. B и бесконечное множество $N \subseteq \mathbb{N}$, что

$$\forall n \in N : \mu_{x \in \mathbb{B}^{nt(n)}}(\{B(1^{nt(n)}; g(x)) \in g^{-1}(g(x))\}) > \frac{1}{q(nt(n))}$$

Определим вероятностную машину C_0 на входе $y \in \mathbb{B}^n$:

1. for i in $[1..t]$
2. let $z = B(f(x_1), \dots, f(x_{i-1}), y, f(x_{i+1}), \dots, f(x_t))$
3. if $f(z_i) = y$: return z_i

Также определим вероятностный алгоритм C на входе y , выполняющий алгоритм C_0 на этом входе $k(n) := 2 \cdot n \cdot t(n) \cdot q(n \cdot t(n))$ раз.

Если на некоторой итерации алгоритм C_0 что-то вернул, то это будет результатом C , иначе C заканчивает работу без выходного значения.

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ положим

$$E_n = \{x \in \mathbb{B}^n \mid \mu(\{C_0(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) > \frac{n}{k(n)}\}$$

Где берём те x , при которых вероятность (теперь x фиксирован, случайность осталась лишь в случайном векторе 1^n) обращения f отделима от нуля.

Лемма 4.2:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in E^n : \mu(\{C(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) > 1 - e^{-n}$$

Эта лемма показывает, что ограниченная на E^n f является сильно односторонней.

Доказательство: Зная, что:

- C – применение алгоритма C_0 k раз, а значит если C не угадал прообраз, то и k раз применённый C_0 тоже не угадал. (Оценка вероятности)
- Мы взяли $x \in E_n$, в котором вероятность угадать прообраз алгоритмом $C_0 > \frac{n}{k}$, а значит вероятность не угадать $< 1 - \frac{n}{k}$
- $\forall r : \ln r \leq r - 1$

получим:

$$\mu(\{C(1^n; f(x)) \notin f^{-1}(f(x))\}) < (1 - \frac{n}{k})^k = e^{k \ln(1 - \frac{n}{k})} \leq e^{-n}$$

□

Лемма 4.3:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : \mu(E_n) > 1 - \frac{1}{2p(n)}$$

Этой леммой мы хотим показать, что с какого-то момента E_n достаточно большое.

Доказательство: Пока скип, большое

□

Из доказанных лемм вытекает, что

$$\begin{aligned} \mu(\{C(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x))\}) &\geq \\ \mu(\{C(1^n; f(x)) \in f^{-1}(f(x)) \mid E_n\})\mu(E_n) &> (1 - e^{-n})\left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right) \end{aligned}$$

Но если вспомним, что f слабо односторонняя, то получим неравенство:

$$1 - \frac{1}{p(n)} > (1 - e^{-n}) \left(1 - \frac{1}{2p(n)}\right)$$

Раскрыв скобки в правой части получим, что

$$\frac{1}{p(n)} < e^{-n} + \frac{1}{2p(n)} - \frac{e^{-n}}{2p(n)} < e^{-n} + \frac{1}{2p(n)}$$

Что неверно при достаточно больших n , так как e^{-n} убывает быстрее $\frac{1}{2p(n)}$.

5. О трудных предикатах

Определение 5.1: Функция $\mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}$ называется **трудным предикатом** для функции $f : \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$, если

- b – полиномиально вычислимая функция
- \forall п.в.м.Т. $A : \mu_{x \in \mathbb{B}^n}(\{A(1^n; f(x)) = b(x)\}) < \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$

Теорема 5.1 (Гольдрайха-Левина): Пусть f – односторонняя функция, определённая всюду и сохраняющая длину, и пусть для всех $x, r \in \mathbb{B}^* : |x| = |r|$, определены функции

$$g(x, r) = (f(x), r) \quad b(x, r) = \bigoplus_{i=1}^{|x|} x^{[i]} r^{[i]}$$

Тогда b – трудный предикат для функции g .

Доказательство: Предположим, что b не является трудным предикатом для функции g .

Это значит, что существуют полиномиальный вероятностный алгоритм A , полином p и бесконечное множество $N \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ такие, что

$$\forall n \in N : \varepsilon(n) = \mu(\{A(1^{2n}; f(x), r) = b(x, r)\}) - \frac{1}{2} > \frac{1}{p(n)}$$

Пусть $n \in N$ и $x \in \mathbb{B}^n$. Положим

$$t(n, x) = \mu(\{A(1^{2n}; f(x), r) = b(x, r)\}) \quad E_n = \left\{x \in \mathbb{B}^n \mid t(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(n)}{2}\right\}$$

Тогда, заметив, что

- $\mathbb{E}_x(t(n, x)) = \varepsilon(n) + \frac{1}{2}$ – по определению
- Можно применить неравенство Чебышёва, так как $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon(n)}{2} > 0$.

$$\mu\left(\left\{t(x) < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(n)}{2}\right\}\right) = \mu\left(\left\{1 - t(x) > \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon(n)}{2}\right\}\right) \leq$$

$$\frac{\mathbb{E}_x(1 - t(n, x))}{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon(n)}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon(n)}{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon(n)}{2}} = 1 - \frac{\varepsilon(n)}{1 - \varepsilon(n)} < 1 - \varepsilon(n)$$

Воспользовавшись отрицанием обеих частей неравенства, получим

$$\mu(E_n) = \mu\left(\left\{t(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon(n)}{2}\right\}\right) > \varepsilon(n) > \frac{1}{p(n)}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно построить полиномиальный вероятностный алгоритм B , определённый для всех n и на $f(E_n)$, такой, что

$$\mu(\{B(1^n; f(x)) = x\}) \geq \frac{1}{\text{poly}(n)}$$

Тогда этой вероятностью мы сможем оценить снизу вероятность угадать прообраз f , что будет противоречить односторонности f .

Введём обозначение $e_i \in \mathbb{B}^n$ – вектор с единицей на i -м месте.

Алгоритм B на входе $(1^n; f(x))$, где $n \in N$ и $x \in E_n$, будет искать каждый бит $x^{[i]}$ отдельно. Для этого алгоритм B :

- Выбирает случайные элементы $r_1, \dots, r_{\pi(n)} \in \mathbb{B}^n$, где π – некоторый полиномиальный параметр на N , принимающий лишь нечётные значения.
- Для каждого $j \in \{1, \dots, \pi(n)\}$ вычисляет биты β_j, ρ_j , являющиеся предполагаемыми значениями $b(x, r_j \oplus e_i)$ и $b(x, r_j)$ соответственно
- Выбирает в качестве предполагаемого значения $x^{[i]}$ бит, который встречается в последовательности $\beta_j \oplus \rho_j; j \in \{1, \dots, \pi(n)\}$ более $\frac{\pi(n)}{2}$ раз

Очевидно, если $\beta_j = b(x, r_j \oplus e_i)$ и $\rho_j = b(x, r_j)$ для более чем половины индексов $j \in \{1, \dots, \pi(n)\}$, то $x^{[i]}$ будет найден правильно, так как

$$b(x, r_j \oplus e_i) \oplus b(x, r_j) = b(x, e_i) = x^{[i]}$$

Бит β_j вычисляется как $A(1^{2n}; f(x), r_j \oplus e_i)$. Мы не получим нужную оценку вероятности успеха алгоритма B , если будем вычислять ρ_j как $A(1^{2n}; f(x), r_j)$. Вместо этого алгоритм пытается угадать значение $b(x, r_j)$ для всех j .

Но если просто выбрать $\rho_j \in \mathbb{B}$, то вероятность того, что $\rho_j = b(x, r_j)$ для всех $j \in \{1, \dots, \pi(n)\}$ будет равна $\frac{1}{2^{\pi(n)}}$, а эта величина при нужном для нас росте $\pi(n)$ будет пренебрежимо малой, как функция от n . Чтобы обойти это препятствие, алгоритм B делает некую грязь. \square

6. О вычислительной неотличимости

Определение 6.1: Семейства случайных величин $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называются **вычислительно неразличимыми**, если для любой п.в.м.т. D :

$$|\mu(\{D(1^n; \xi_n) = 1\}) - \mu(\{D(1^n; \zeta_n) = 1\})| = \text{negl}(n)$$

Замечание 6.1: Равномерно распределённым семейством случайных величин на \mathbb{B}^n будем называть $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall x \in \mathbb{B}^n : \mu(\{v_n = x\}) = \frac{1}{2^n}$$

Определение 6.2: Семейство случайных величин $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется **псевдослучайным**, если оно вычислительно неотлично от равномерно распределённого семейства случайных величин $\{v_{m(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$

Определение 6.3: Функция $g: \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$, такая, что $g(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^{m(n)}$ для некоторого полинома m , называется **псевдослучайным генератором** или, полностью, **криптографически стойким генератором псевдослучайных последовательностей**, если

1. g – полиномиально вычислима
2. $m(n) > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$
3. $\{g(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – псевдослучайное семейство случайных величин

7. О предсказании следующего бита

Определение 7.1: Семейство случайных величин $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию **непредсказуемости следующего бита**, если для любой п.в.м.Т. P :

$$\mu_{i \in \{1, \dots, m(n)\}} \left(\left\{ P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]} \right\} \right) \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

Теорема 7.1 (Яо об эквивалентности): Семейство случайных величин $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ псевдослучайно тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию непредсказуемости следующего бита.

Доказательство: \Rightarrow От обратного, пусть существует п.в.м.Т. P «предсказатель» и полином p :

$$\mu_i \left(\left\{ P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]} \right\} \right) > \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$$

Построим «различитель» - п.в.м.Т. D , работающую на входах $(1^n; x)$, $x \in \mathbb{B}^{m(n)}$, работающий по алгоритму:

1. Выбираем случайный $i \in \{1, \dots, m(n)\}$
2. Если «предсказатель» угадал по $x^{[1, \dots, i-1]}$ битам i -й, то «различитель» возвращает 1, иначе 0.

Рассмотрим вероятность:

- $\mu(\{D(1^n; \xi_n) = 1\}) = \mu_i \left(\left\{ P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]} \right\} \right) > \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$
- $\mu(\{D(1^n; v_{m(n)}) = 1\}) =$

$$\mu \left(\left\{ P(1^n; v_{m(n)}^{[1, \dots, i-1]}) = v_{m(n)}^{[i]} \right\} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{m(n)} \mu \left(\left\{ P(1^n; v_{m(n)}^{[1, \dots, k-1]}) = v_{m(n)}^{[k]}, i = k \right\} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{m(n)} \mu \left(\left\{ P(1^n; v_{m(n)}^{[1, \dots, k-1]}) = v_{m(n)}^{[k]} \right\} \right) \mu(\{i = k\}) = m(n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m(n)} = \frac{1}{2}$$

Разность этих вероятностей $> \frac{1}{p(n)}$ для бесконечно многих n – противоречие.

\Leftarrow От противного. Предположим, $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{v_{m(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ не вычислимо неразличимы: существует такая п.в.м.Т. D «различитель» и полином p , что для бесконечно многих n :

$$|\mu(\{D(1^n; \xi_n) = 1\}) - \mu(\{D(1^n; v_{m(n)}) = 1\})| > \frac{1}{p(n)}$$

Построим «предсказатель следующего бита» – п.в.м.Т. P , работающую на входах $(1^n; x)$, $x \in \mathbb{B}^{<m(n)}$, следующим образом:

1. Выбираем случайный $y \in \mathbb{B}^{m(n)-|x|}$
2. Если «различитель» на входе $x \times y$ выдал 1, то возвращаем $y^{[1]}$, иначе $\neg y^{[1]}$.

Обозначим $\sigma_i(n) = \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i]} \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 1\})$; $0 \leq i \leq m(n)$ Тогда рассмотрим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]}, v_{m(n)}^{[i]} = \xi_n^{[i]}\}) + \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]}, v_{m(n)}^{[i]} = \neg \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = v_{m(n)}^{[i]}, v_{m(n)}^{[i]} = \xi_n^{[i]}\}) + \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \neg v_{m(n)}^{[i]}, v_{m(n)}^{[i]} = \neg \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times v_{m(n)}^{[i, \dots, m(n)]}) = 1, v_{m(n)}^{[i]} = \xi_n^{[i]}\}) + \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times v_{m(n)}^{[i, \dots, m(n)]}) = 0, v_{m(n)}^{[i]} = \neg \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \sum_{b \in \mathbb{B}} \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times b \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 1, v_{m(n)}^{[i]} = b, b = \xi_n^{[i]}\}) + \\ & \sum_{b \in \mathbb{B}} \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times b \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 0, v_{m(n)}^{[i]} = b, b = \neg \xi_n^{[i]}\}) = \\ & \frac{1}{2} \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i]} \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 1\}) + \frac{1}{2} \mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times \neg \xi_n^{[i]} \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 0\}) = \\ & \frac{1}{2} \sigma_i(n) + \frac{1}{2} (1 - 2\sigma_{i-1}(n) + \sigma_i(n)) = \frac{1}{2} + \sigma_i(n) - \sigma_{i-1}(n) \end{aligned}$$

Где в последнем переходе используется равенство:

$$\mu(\{D(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]} \times \neg \xi_n^{[i]} \times v_{m(n)}^{[i+1, \dots, m(n)]}) = 1\}) = 2\sigma_{i-1}(n) - \sigma_i(n)$$

которое получается аналогичным расписываниям выше, но для предсказания $i - 1$ бита.

В итоге

$$\begin{aligned} \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, i-1]}) = \xi_n^{[i]}\}) &= \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{m(n)} \mu(\{P(1^n; \xi_n^{[1, \dots, k-1]}) = \xi_n^{[k]}\}) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{m(n)} \sum_{k=1}^{m(n)} (\sigma_k(n) - \sigma_{k-1}(n)) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{m(n)} (\mu(\{D(1^n; \xi_n) = 1\}) - \mu(\{D(1^n; v_{m(n)}) = 1\})) > \frac{1}{2} + \frac{1}{m(n)p(n)} \end{aligned}$$

Что для бесконечно многих n даёт противоречие с условием непредсказуемости следующего бита. \square

8. О псевдослучайных генераторах

Определение 8.1: Функция, являющаяся одновременно односторонней и биекцией называется **односторонней перестановкой**.

Утверждение 8.1 (Яо): Если существует односторонняя перестановка, то существует псевдослучайный генератор.

Доказательство: Пусть f – односторонняя перестановка.

Продолжим её на всё \mathbb{B}^* (обрубаем до префикса, на котором была определена) и построим $f'(x, r) = (f(x), r)$, как в теореме Гольдрайха-Левина.

Получили, что f' также односторонняя перестановка с трудным предикатом $b(\cdot)$.

Определим $g : x \mapsto f'(x)b(x)$, который и будет псевдослучайным генератором. \square

Замечание 8.1: То, что f перестановка, нужно не только для обеспечения правильных длин значений, но и для того, чтобы $f(x)$ было равномерно распределено на \mathbb{B}^n при $x \in \mathbb{B}^n$.

Теорема 8.1 (Хостада и других, без доказательства): псевдослучайные генераторы существуют тогда и только тогда, когда существуют односторонние функции.

9. О криптосистемах

Замечание 9.1: Будем использовать обозначения:

- $n \in \mathbb{N}$ – **параметр стойкости**
- $M_n \subseteq \mathbb{B}^*$ – пространство сообщений (открытых текстов)
- $\text{supp}(\xi) = \{x \mid \mu(\{\xi = x\}) \neq 0\}$ – **носитель** случайной величины

Определение 9.1: Система (вероятностного) шифрования с секретным ключом (криптосистема, шифр) – это тройка алгоритмов (G, E, D) :

- Генератор ключей G – п.в.м.Т., $G(1^n) = k$ – **секретный ключ**, можно считать, что k выбирается из $K_n = \text{supp}(G(1^n))$ согласно вероятностному распределению \mathcal{G}_n , задаваемому случайной величиной $G(1^n)$.
- Алгоритм шифрования E – п. (в.) м.Т., для $m \in M_n, k \in K_n : E(1^n; k, m) = c$ – **криптограмма (шифртекст)** открытого текста m на ключе k .
- Алгоритм дешифрования D – п.д.м.Т.

$$\forall m \in M_n : \forall k \in K_n : D(1^n; k, E(1^n; k, m)) = m$$

Определение 9.2: Система шифрования называется **блоковой**, если в ней алгоритм шифрования разбивает сообщение произвольной длины на блоки и шифрует каждый блок отдельно по **одному и тому же** алгоритму.

Определение 9.3: Поточковая же криптосистема последовательно шифрует элементы открытого текста, такими элементами чаще всего являются биты, данный тип криптосистем имеет внутренне состояние, **изменяющееся** после шифрования каждого нового сообщения.

10. О стойкости криптосистем

Определение 10.1: Стойкость криптосистемы определяется относительно конкретного противника.

Замечание 10.1 (Модель противника):

- Вычислительные ресурсы = п.в.м.Т.
- Атака – возможность получения исходных данных
- Угроза – цель противника

Замечание 10.2 (Основные типы атак):

1. Атака с известными шифртекстами:

$$c_1, c_2, \dots, c_l$$

2. Атака с известными открытыми текстами:

$$(m_1, c_1), (m_2, c_2), \dots, (m_l, c_l); \quad c_i = E(1^n; k, m_i)$$

3. Атака с выбором открытых текстов:

$$m_1, \dots, m_l \mapsto (m_1, c_1), \dots, (m_l, c_l); \quad c_i = E(1^n; k, m_i)$$

4. Атака с выбором шифртекстов:

$$c_1, \dots, c_l \mapsto (m_1, c_1), \dots, (m_l, c_l); \quad m_i = D(1^n; k, c_i)$$

5. Атака с выбором текстов – комбинация 3 и 4.

Атаки 3-5 бывают:

- **Неадаптивными**, когда противник получает весь набор данных разом
- **Адаптивными**, когда пары к выбранным данным он получает последовательно по i , то есть выбор следующего запроса может зависеть от результатов предыдущего.

Замечание 10.3 (Основные типы угроз):

1. **Полное раскрытие** – найти использованный ключ
2. **Извлечение открытого текста** – по известной информации и случайному значению $E(1^n; k, m)$ найти сообщение m
3. **Извлечение частичной информации об открытом тексте**: для некоторой функции $f: \mathbb{B}^* \rightarrow \mathbb{B}^*$ по известной информации и случайному значению $E(1^n; k, m)$ найти $f(m)$
4. **Различие двух шифртекстов** – при подходящей выборке m^0, m^1 открытых сообщений, не появлявшихся при атаке, по криптограмме $E(1^n; k, m^b)$ для случайного $b \in \{0, 1\}$ определить b , то есть какое из двух сообщений было зашифровано

11. Конкретный пример стойкости

Замечание 11.1: Определим IND-CPA-стойкость криптосистемы с секретным ключом – стойкость относительно пары угрозы 4/атака 3.

Формализуем предположения о противнике с помощью специального оракула, к которому имеет доступ алгоритм противника.

Оракул \mathcal{O} , определяемый для криптосистемы (G, E, D) :

- В начале работы выбирает секретный ключ $k \in K_n$
- После этого принимает запросы двух типов:
 1. $(1; x)$, где $x \in M_n$ в ответ на который возвращает $E(1^n; k, x)$
 2. $(2; y^0, y^1)$, где $y^0, y^1 \in M_n$, получив который, проверяет, что y^0 и y^1 не появлялись ранее, выбирает случайный бит $b \in \{0, 1\}$ и в зависимости от значения b возвращает либо $E(1^n, k, y^0)$, либо $E(1^n, k, y^1)$.
- Ответив на один запрос второго типа, завершает свою работу

Определение 11.1: Криптосистема (G, E, D) называется **IND-CPA-стойкой**, если для любой п.в.м.Т. A с вышеописанным оракулом \mathcal{O} :

$$\mu(\{A^{\mathcal{O}}(1^n) = b\}) \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

Пример: Пусть g – псевдослучайный генератор, $g(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^{q(n)}$

$m_1, \dots, m_t \in \mathbb{B}^n$ – сообщения, причём $t \cdot n + 1 < q(n)$

Участники обмениваются по защищённому каналу секретным ключом $k \in \mathbb{B}^n$, причём $g(k) = g_1 \dots g_t, g_i \in \mathbb{B}^n$.

Тогда для $1 \leq i \leq t$:

- Шифрование – $c_i = E(1^n; k, m_i) = m_i \oplus g_i$
- Дешифрование – $m_i = D(1^n; k, c_i) = c_i \oplus g_i$

Утверждение 11.1: Если g – псевдослучайный генератор, то описанная выше криптосистема – IND-CPA-стойкая.

Доказательство: Предположим, что существует такая п.в.м.Т. A , что для некоторого полинома p и бесконечно многих n $\mu(\{A^{\mathcal{O}}(1^n) = b\}) > \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$.

Построим п.в.м.Т. S , работающую на входе $(1^n; z)$, $z \in \mathbb{B}^{q(n)}$, $z = z_1 \dots z_t$, $z_i \in \mathbb{B}^n$ следующим образом:

1. S запускает машину A на входе 1^n и берёт на себя роль оракула, делая хог с элементами z .
2. Вычисляет выход – $S(1^n; z) = \begin{cases} 1 & A^S(1^n) = b \\ 0 & A^S(1^n) \neq b \end{cases}$

Таким образом,

- если $z = g(v_n)$, то по предположению A вычисляет b с вероятностью $> \frac{1}{2} + \frac{1}{p(n)}$
- иначе $z = v_{q(n)}$ – произвольная равномерная случайная величина, отгадывающая ответ с вероятностью подбрасывания монетки

Получили, что $\mu(\{S(1^n, g(v_n)) = 1\}) - \mu(\{S(1^n, v_{q(n)}) = 1\}) > \frac{1}{p(n)}$, что противоречит с тем, что g – псевдослучайный генератор. \square