Содержание

1 Основная теорема об интеграле Лебега от ограниченных функций

Определение 1.1. Пусть f – ограниченная измеримая функция, определённая на измеримом по Лебегу множестве E. Будем обозначать $m = \inf_{x\in E} f(x)$, $M = \sup_{x\in E} f(x)$. Также Q – разбиение области значений функции f

Определение 1.2.

$$S(Q, f, \{t_i\}) := \sum_{i=1}^{N} f(t_i) \cdot \mu(E_i)$$

, где $E_i = \{x \in E : \ f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}$

Теорема 1.1. *Если f – ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ функция, то она интегрируема по Лебегу (суммируема) на E, причём*

$$\int_E f d\mu(x) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} S(Q, f, \{t_i\})$$

Это значит

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall Q\, \Delta(Q) < \delta\, \forall \{t_i\}, t_i \in E_i : \ \left| S(Q, f, \{t_i\}) - \int_E f d\mu(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Если $P : \ E = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_i$, то $L(P, f) \leqslant S(Q, f, \{t_i\}) \leqslant U(P, f)$ – очевидно из определения интегральных сумм.

Кроме того, $U(P, f)-L(P, f) = \sum_{i=1}^{N} (M_i-m_i)\mu(E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{N} (y_i-y_{i-1})\mu(E_i) \leqslant \Delta(Q) \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) = \Delta(Q)\mu(E)$

Значит, $\delta := \frac{\varepsilon}{\mu(E)}$ □

2 Линейность и монотонность интеграла Лебега

Лемма 2.1. *Признак суммируемости:*

Если $f(x)$ суммируема на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры, а F измерима на E и $\forall x \in E : \ |F(x)| \leqslant f(x)$, то F суммируема на E

Доказательство.

$$\forall P : \ E = \bigsqcup_{i=0}^{\infty}; \ \ U(P, |F|) \leqslant U(P, f)$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists P \ \ U(P, |F|) \leqslant U(P, f) \leqslant \int_E f d\mu(x) + \varepsilon < +\infty$$

$$U(P, |F|) < +\infty \Rightarrow \int_E |F| d\mu(x) = \inf_P U(P, |F|) < \infty$$

Значит $|F|$ суммируема, но мы знаем, что $|F|$ суммируема $\Leftrightarrow$ F суммируема, так как $F = F^+ - F^-$; $|F| = F^+ + F^-$, и мы можем применить предыдущее рассуждение к функциям $F^{\pm}$, которые тоже окажутся суммируемы. □

Теорема 2.1. *1. Если f_1, f_2 суммируемы на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры, то $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}:\ c_1 f_1 + c_2 f_2$ суммируема на E, причём $\int_E (c_1 f_1 + c_2 f_2) d\mu(x) = c_1 \int_E f_1 d\mu(x) + c_2 \int_E f_2 d\mu(x)$*

2. Если f_1, f_2 суммируемы на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры и $\forall x \in E:\ f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то $\int_E f_1 d\mu(x) \leqslant \int_E f_2 d\mu(x)$

Доказательство. 1. Пусть f_1, f_2 – ограниченные измеримые функции, тогда

$$\forall P:\ E = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_i:\ L(P, f_1) + L(P, f_2) \leqslant L(P, f_1 + f_2) \leqslant U(P, f_1 + f_2) \leqslant U(P, f_1) + U(P, f_2)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P_1, P_2\ U(P_i, f_i) - L(P_i, f_i) < \varepsilon;\ i = 1, 2$$

Пусть $P = P_1 \sqcup P_2$, тогда $U(P, f_1) + U(P, f_2) - L(P, f_1) - L(P, f_2) < 2\varepsilon$

Получим, что $\forall \varepsilon > 0:\ \left|\int_E (f_1 + f_2) d\mu(x) - \left(\int_E f_1 d\mu(x) + \int_E f_2 d\mu(x)\right)\right| < 2\varepsilon$, так как эти интегралы будут зажаты между соответствующими верхними и нижними суммами Дарбу.

Предыдущее неравенство верно $\forall \varepsilon > 0$, а значит $\int_E (f_1 + f_2) d\mu(x) = \int_E f_1 d\mu(x) + \int_E f_2 d\mu(x)$

2. Пусть f_1, f_2 – неотрицательные суммируемые

   Фактически, всё остаётся тем же самым, только $\forall P:\ E = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} E_i$, причём $E_0^{(i)} := \{x \in E:\ f_i(x) = +\infty\}$, $i = 1, 2$. Тогда, очевидно, $f_1(x) + f_2(x) = +\infty \Leftrightarrow x \in E_0^{(1)} \cup E_0^{(2)} =: E_0$

   Каждая из функций суммируема, значит $\mu(E_0^i) = 0, i = 1, 2$. Тогда $\mu(E_0) \leqslant \mu(E_0^{(1)}) + \mu(E_0^{(2)}) = 0$, значит $\mu(E_0) = 0$ и у нас всё получилось.

3. Рассмотрим случай умножения на константу

$$\forall c > 0:\ U(P, cf) = cU(P, f);\ L(P, cf) = cL(P, f) \Rightarrow \int_E cf d\mu(x) = c \int_E f d\mu(x)$$

$$\forall c < 0:\ U(P, cf) = cL(P, f);\ L(P, cf) = cU(P, f) \Rightarrow \int_E cf d\mu(x) = c \int_E f d\mu(x)$$

4. Пусть f_1, f_2 – произвольные суммируемые функции.

   $|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \Rightarrow$ По предыдущей лемме $|f_1(x) + f_2(x)|$ суммируема

   Тогда $f_1 = f_1^+ - f_1^-, f_2 = f_2^+ - f_2^- \Rightarrow f_1 + f_2 = (f_1 + f_2)^+ - (f_1 + f_2)^-$. Сложим части, перегруппируем и приравняем:

$$f_1^+ + f_2^+ + (f_1 + f_2)^- = f_1^- + f_2^- + (f_1 + f_2)^+$$

   удовлетворяет пункту про неотрицательные суммируемые, значит

$$\int_E f_1^+ d\mu(x) + \int_E f_2^+ d\mu(x) + \int_E (f_1 + f_2)^- d\mu(x) = \int_E f_1^- d\mu(x) + \int_E f_2^- d\mu(x) + \int_E (f_1 + f_2)^+ d\mu(x)$$

   Перетасуем слагаемые и получим требуемое равенство.

5. Монотонность доказывается очевидно: рассмотрим неотрицательную функцию $f_2 - f_1$. □

3 Интеграл Лебега как предел последовательности интегралов от срезок

Определение 3.1. Назовём срезкой

$$N \in \mathbb{N}:\ f_{[N]}(x) = \begin{cases} f(x), f(x) \leqslant N \\ N, f(x) > N \end{cases}$$

Теорема 3.1. *Если $\forall x \in E \subset \mathbb{R}^n$: $f(x) \geqslant 0$ – измеримая функция, определённая на измеримом множестве конечной меры, то* $\lim\limits_{N\to\infty} \int_E f_{[N]} d\mu(x) = \int_E f d\mu(x)$

Доказательство.

$$\int_E f_{[N]} d\mu(x) \leqslant \int_E f_{[N+1]} d\mu(x)$$

$$\forall N \in \mathbb{N}:\ f_{[N]}(x) \leqslant f(x) \Rightarrow \int_E f_{[N]} d\mu(x) \leqslant \int_E f d\mu(x)$$

$$i := \lim_{N\to\infty} \int_E f_{[N]} d\mu(x); \quad i \leqslant \int_E f d\mu(x)$$

От противного: пусть

$$i < \int_E f d\mu(x) = \sup_P L(P, f) \Rightarrow \exists P_0:\ i < L(P_0, f)$$

Рассмотрим $L(P_0, f) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} m_i \mu(E_i)$.

Пусть $\mu(E_0) > 0 \Rightarrow \forall x \in E_0$: $f_{[N]}(x) = N$. Тогда $\int_E f_{[N]} d\mu(x) \geqslant \int_{E_0} f d\mu(x) = N\mu(E_0)$ – неравенство выполнено по свойству конечной аддитивности, а интеграл раскрыли, так как это интеграл от константы.

Устремляя $N \to \infty$ получим, что $i = +\infty$, что противоречит с предположением, что $i < \int_E f d\mu(x)$. Значит $\mu(E_0) = 0$.

Вернёмся к $L(P_0, f) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} m_i \mu(E_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i \mu(E_i)$.

$$i < \sum_{i=1}^{\infty} m_i \mu(E_i) \Rightarrow \exists K:\ i < \sum_{i=1}^{K} m_i \mu(E_i)$$

$$N := \max(m_1, \ldots, m_K) + 1;\ m_i = \inf_{x\in E_i} f(x) \Rightarrow m_i^{[N]} = \inf_{x \in E_i} f_{[N]}(x) = m_i$$

Тогда

$$\int_E f_{[N]} d\mu(x) \geqslant \sum_{i=1}^{K} \int_{E_i} f_{[N]} d\mu(x) \geqslant \sum_{i=1}^{K} m_i^{[N]} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{K} m_i \mu(E_i)$$

Значит $i \geqslant \sum_{i=1}^{K} m_i \mu(E_i)$ – противоречие. □

4 σ-аддитивность интеграла Лебега

Теорема 4.1. *Если f суммируема на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры и $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k – измеримы, то f суммируема на всех E_k, причём $\int_E f d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu(x)$. Обратно, если f суммируема на всех E_k и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f| d\mu(x)$ сходится, то f суммируема на $E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_k$, причём $\int_E f d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu(x)$*

Доказательство. Пусть f – ограниченная и измеримая, $E = E^1 \sqcup E^2$

$$\inf_{x\in E} f(x) = m = y_0 < y_1 < \ldots < y_N = M = \sup_{x\in E} f(x);\ Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$$

$$\int_E f d\mu(x) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} S(Q, f, \{t_i\}) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} L(P, f) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} U(P, f)$$

$$\int_E f d\mu(x) - \varepsilon < S(Q, f, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\mu(E_i) < \int_E f d\mu(x) + \varepsilon$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{N} M_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{K} M_i(\mu(E_i \cap E^1) + \mu(E_i \cap E^2)) \geqslant U(E^1)(P, f) + U(E^2)(P, f)$$

где $U(E^j)(P, f) := \sum\limits_{i=1}^{N} \sup_{x\in E_i \cap E^j} f(x)\mu(E_i \cap E^j)$

$$\int_E f d\mu(x) - \varepsilon \leqslant L(E^1)(P, f) + L(E^2)(P, f) \leqslant U(E^1)(P, f) + U(E^2)(P, f) \leqslant \int_E f d\mu(x) + \varepsilon$$

$$\int_E f d\mu(x) - \varepsilon \leqslant L(E^i)(P, f) \leqslant U(E^i)(P, f) \leqslant \int_E f d\mu(x) + \varepsilon$$

Зажав сумму интегралов и интеграл объединения, получим конечную аддитивность для ограниченной и измеримой f.

Пусть f – неотрицательная измеримая.

Для $f_{[N]}$ выполнено $\int_E f_{[N]} d\mu(x) = \int_{E_1} f_{[N]} d\mu(x) + \int_{E_2} f_{[N]} d\mu(x)$. Предположение о суммируемости функции f приводит к тому, что предел в левой части конечен, а значит предел в правой части также существует.

Пусть f – измеримая произвольного знака. Доказывается через $f = f^+ - f^-$.

Переходим к σ-аддитивности $E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Пусть f – ограничена и измерима на E и $|f| \leqslant M$.

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \Rightarrow \exists K : \sum_{i=K+1}^{\infty} \mu(E_i) < \frac{\varepsilon}{2M};\ \ R_K := \bigsqcup_{i=K+1}^{\infty} E_i \Rightarrow \mu(R_k) < \frac{\varepsilon}{2M}, E = (\bigsqcup_{i=1}^{K} E_i) \sqcup R_K$$

$$\int_E f d\mu(x) = \sum_{i=1}^{K} \int_{E_i} f d\mu(x) + \int_{R_K} f d\mu(x);\ \left|\int_{R_K} f d\mu(x)\right| \leqslant \int_{R_K} |f| d\mu(x) \leqslant M\mu(R_K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Значит $\int_E f d\mu(x) = \lim\limits_{K\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{K} \int_{E_i} f d\mu(x)$.

Пусть f – неотрицательная и суммируемая.

$$\int_E f d\mu(x) = \lim_{N\to\infty} f_{[N]} d\mu(x) \Rightarrow \exists N : \int_E f d\mu(x) - \varepsilon < \int_E f_{[N]} d\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f_{[N]} d\mu(x) < \int_E f d\mu(x) + \varepsilon$$

$$\exists K : \int_E f d\mu(x) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{K} \int_{E_i} f_{[N]} d\mu(x) \leqslant \int_E f d\mu(x)$$

Устремляя $N \to \infty$ получим:

$$\exists K : \int_E f d\mu(x) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{K} \int_{E_i} f d\mu(x) \leqslant \int_E f d\mu(x)$$

Пусть f – неотрицательная измеримая, тогда в обоих частях неравенства будет стремление к бесконечности.

Пусть f – произвольная суммируемая. Докажем через $f = f^+ - f^-$ □

5 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега

Теорема 5.1. *Если f суммируема на измеримом $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры, то $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall$ измеримого $e \subset E, \mu(e) < \delta :$ $\left|\int_e f d\mu(x)\right| < \varepsilon$*

Доказательство. Пусть f – ограниченная и измеримая и $|f| \leqslant M$

Тогда $\left|\int_e f d\mu(x)\right| \leqslant \int_e |f| d\mu(x) \leqslant M\mu(e)$. Значит $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$

Пусть f – неотрицательная и измеримая $\forall \varepsilon > 0\, \exists N\; 0 \leqslant \int_E f d\mu(x) - \int_E f_{[N]} d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$.

Из предыдущего пункта $\exists e, \mu(e) < \delta : \int_e f d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\int_e f d\mu(x) = \int_e (f - f_{[N]}) d\mu(x) + \int_e f_{[N]} d\mu(x) < \varepsilon$

Пусть f – произвольная измеримая. Найдём δ_1, δ_2 для f^+, f^- и для f возьмём $\min(\delta_1, \delta_2)$. □

6 Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

Теорема 6.1. *Если f_m измеримые на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры, $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = f$ почти всюду на E, и $|f_m(x)| \leqslant F(x)$ при почти всех $x \in E$ при всех $m \in \mathbb{N}$, где F – суммируема на E, то f суммируема на E, причём $\int_E f d\mu(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \int_E f_m d\mu(x)$*

Доказательство. Если $f_m \to f$ почти всюду, то $f_m \rightrightarrows f$. Значит $\forall \varepsilon > 0 : \lim\limits_{m\to\infty} \mu(\{x \in E : \|f_m(x) - f(x)\| \geqslant \varepsilon\} := E_m) = 0$. Значит $\forall \delta > 0\, \exists M \in \mathbb{N}\, \forall m > M : \mu(E_m) < \delta$

Из условия вытекает, что $|f(x)| \leqslant F(x)$ при почти всех $x \in E$. Значит f - суммируемая на E.

$$\left|\int_E (f - f_m) d\mu(x)\right| \leqslant \int_{E_m} |f_m - f| d\mu(x) + \int_{E \setminus E_m} |f_m - f| d\mu(x) \leqslant 2\int_{E_m} F d\mu(x) + \varepsilon\mu(E \setminus E_m) < \varepsilon(\mu(E) + 2)$$

□

7 Теорема Леви

Теорема 7.1. *Если последовательность неотрицательных измеримых на измеримом множестве* $E \subset \mathbb{R}$ *неубывающая при почти всех* $x \in E$, *то* $\lim\limits_{m\to\infty} \int_E f_m d\mu(x) = \int_E \lim\limits_{m\to\infty} f_m d\mu(x)$

Доказательство. Если $f := \lim\limits_{m\to\infty} f_m$ – суммируема на E, то $0 \leqslant f_m(x) \leqslant f(x)$ и мы ссылаемся на теорему Лебега.

Пусть

$$\int_E f d\mu(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int_E f_{[N]} d\mu(x) = +\infty \Rightarrow \forall K\ \exists N_0\ \forall N \geqslant N_0 : \int_E f_{[N]} d\mu(x) > K$$

$$f_{m,[N_0]}(x) \to_{m\to\infty} f_{[N_0]}(x) \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \int_E f_{m,[N_0]} d\mu(x) = \int_E f_{[N_0]} d\mu(x)$$

$$\exists m_0\ \forall m > m_0 : \int_E f_{m,[N_0]} d\mu(x) > K \Rightarrow \int_E f_m d\mu(x) \geqslant \int_E f_{m,[N_0]} d\mu(x) > K$$

Устремляя $K \to \infty$ получим, что $\int_E f_m d\mu(x) \to_{m\to\infty} \infty$ □

8 Теорема Фату

Теорема 8.1. *Если* $f_m(x) \geqslant 0$ *при почти всех* $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ *конечной меры,* $\forall m \in \mathbb{N}\ f_m$ – *измеримые на* E, $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ *почти всюду на* E, *то* $\int_E f d\mu(x) \leqslant \underline{\lim\limits_{m\to\infty}} \int_E f_m d\mu(x)$

Доказательство. Пусть $g_m(x) := \inf\limits_{k\geqslant m} f_k(x)$. Тогда $\int_E \lim\limits_{m\to\infty} g_m d\mu(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \int_E g_m d\mu(x)$. Но $\lim\limits_{m\to\infty} g_m(x) = \lim_{m\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant m} f_k(x) = \underline{\lim\limits_{m\to\infty}} f_m(x) = f(x)$.

Остаётся заметить, что $\int_E g_m d\mu(x) \leqslant \int_E f_k d\mu(x)$. В итоге получаем:

$$\int_E f d\mu(x) \int_E \lim_{m\to\infty} g_m d\mu(x) = \lim_{m\to\infty} \int_E g_m d\mu(x) \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf_{k\geqslant m} \int_E f_k d\mu(x) = \underline{\lim_{m\to\infty}} \int_E f_m d\mu(x)$$

□

9 Корректность определения интеграла Лебега по множеству бесконечной меры

Определение 9.1. Интегралом Лебега неотрицательной измеримой на $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(E) = +\infty$, функции $f(x)$ называется $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f d\mu(x)$, где $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ – последовательность измеримых множеств конечной меры, такой что $\lim\limits_{m\to\infty} E_m = E$

Теорема 9.1. *Корректность определения интеграла Лебега по множеству бесконечной меры:*

Если $f(x) \geqslant 0$, *измеримая на* $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(E) = +\infty$, *то* $\forall$ *последовательностей неубывающих измеримых множеств* $\{E_m\}, \{E'_m\}$ *конечной меры* $\lim\limits_{m\to\infty} E_m = \lim\limits_{m\to\infty} E'_m = E$ *выполняется:* $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f d\mu(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E'_m} f d\mu(x)$

Доказательство. От противного. Пусть $a := \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E_m} f d\mu(x) > \lim\limits_{m\to\infty} \int_{E'_m} f d\mu(x) =: b$. Пусть $a < +\infty$.

$$\exists c: \ b < c < a; \ \exists m: \int\limits_{E_m} f d\mu(x) > c$$

Очевидно

$$E'_1 \cap E_m \subset E'_2 \cap E_m \subset \ldots \Rightarrow \lim_{k\to\infty} (E'_k \cap E_m) = E \cap E_m = E_m \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mu(E'_k \cap E_m) = \mu(E_m)$$

$$\int\limits_{E_m} f d\mu(x) = \int\limits_{E'_k \cap E_m} f d\mu(x) + \int\limits_{E_m \setminus (E'_k \cap E_m)} f d\mu(x) \Rightarrow \exists k_0 \forall k > k_0: \int\limits_{E'_k} f d\mu(x) > \int\limits_{E'_k \cap E_m} f d\mu(x) > c$$

Пришли к противоречию с тем, что $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{E'_m} f d\mu(x) < c$

Пусть теперь $a = +\infty$, $+\infty > c > b \Rightarrow \exists m: \int_{E_m} f d\mu(x) > c + 1 \Rightarrow \exists N: \int_{E_m} f_{[N]} d\mu(x) > c \Rightarrow \exists k_0 \, \forall k > k_0: \int_{E'_k} f d\mu(x) > c \Rightarrow \int_{E'_k} f d\mu(x) \geqslant \int_{E'_k} f_{[N]} d\mu(x) > c$ □

10 Вычисление меры с помощью кратных интегралов

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ – измеримо, то

1. Для μ_X - почти всех $x \in X$ сечения $A_Y(x)$ μ_Y-измеримы, причём $\mu(A) = \int_X \mu_Y(A_Y(x)) d\mu_X(x)$
2. Для μ_Y - почти всех $y \in Y$ сечения $A_X(y)$ μ_X-измеримы, причём $\mu(A) = \int_Y \mu_X(A_X(y)) d\mu_Y(y)$

Доказательство. Этап 1. A – брус, то есть $A = \prod\limits_{j=1}^{n} \langle a_j, b_j \rangle$. Тогда $A_y(x) = \begin{cases} \varnothing, x \notin \prod\limits_{j=1}^{m} \langle a_j, b_j \rangle \\ \prod\limits_{j=m+1}^{n} \langle a_j, b_j \rangle, x \in \prod\limits_{j=1}^{m} \langle a_j, b_j \rangle \end{cases}$

Очевидно, $\mu_Y(A_y(x)) = \begin{cases} 0, x \notin \prod\limits_{j=1}^{m} \langle a_j, b_j \rangle \\ \prod\limits_{j=m+1}^{n} (b_j - a_j), x \in \prod\limits_{j=1}^{m} \langle a_j, b_j \rangle \end{cases}$

Тогда $\int_X \mu_Y(A_Y(x)) d\mu_X(x) = \prod\limits_{j=m+1}^{n} (b_j - a_j) \mu_X(\prod\limits_{j=1}^{m} \langle a_j, b_j \rangle) = \mu(A)$

Этап 2. A – элементарное множество, то есть $A = \bigcup\limits_{j=1}^{N} A_j$, причём внутренности брусьев A_j не пересекаются.

Пусть $A = \bigcup\limits_{j=1}^{M} P_j \times Q_j$, где $P_j = \prod\limits_{i=1}^{m} [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}]$, а Q_j – элементарные множества, это каноническое представление элементарного множества A. Тогда $\mu(A) = \sum\limits_{j=1}^{M} \mu(P_j \times Q_j) = \sum\limits_{j=1}^{M} \int_X \mu_Y((P_j \times Q_j)_Y(x)) d\mu_X(x) = \int_X \mu_Y(A_Y(x)) d\mu_X(x)$.

Этап 3. A – измеримое, конечной меры. Значит $A = \bigcap \bigcup A_{ij} \setminus A_0$, где $A_{i,1} \subset A_{i,2} \subset \ldots$ – открытые элементарные множества, $\mu(A_0) = 0$, $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$.

Мы знаем, что $\mu(A_{ij}) = \int_X \mu_Y(A_{ij}(x))d\mu_X(x)$, $\lim\limits_{j\to\infty}\mu(A_{ij}) = \mu(B_i)$. Также

$A_{ij} \subset A_{i(j+1)} \Rightarrow \mu(A_{ij}) \leqslant \mu(A_{i(j+1)}) \Rightarrow (A_{ij})_Y(x) \subset (A_{i(j+1)})_Y(x) \Rightarrow \mu_Y((A_{ij})_Y(x)) \leqslant \mu_Y((A_{i(j+1)})_Y(x))$

Применяя теорему Леви, получим

$$\mu(B_i) = \int_X \mu_Y((B_i)_Y(x))d\mu(x) = \int_X \lim_{j\to\infty}\mu_Y((A_{ij})_Y(x))d\mu_X(x) = \lim_{j\to\infty}\int_X \mu_Y((A_{ij})_Y(x))d\mu_X(x)$$

Аналогично рассмотрим возрастающую последовательность $B_1 \setminus B_1 \subset B_1 \setminus B_2 \subset \ldots$. Получили требуемое для пересечения объединений открытых элементарных множеств.

Рассмотрим A_0, для него существует пересечение объединений (B_0) по доказанному ранее в этой теореме, причём $\mu(B_0) = 0$ и для него почти всюду верно

$$0 = \mu(B_0) = \int_X \mu_Y((B_0)_Y(x))d\mu_X(x) = \int_X \mu_Y((A_0)_Y(x))d\mu_X(x) = \mu(A_0) = 0$$

Для произвольного измеримого A рассмотрим возрастающую последовательность множеств конечной меры $A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \ldots$, у которой $\bigcup A^{(i)} = A$.

Для них доказано $\mu(A^{(i)}) = \int_X \mu_Y(A_Y^{(i)}(x))d\mu_X(x)$, перейдём к пределу в левой части благодаря непрерывности меры, а в правой части благодаря теореме Леви. То есть мы всё доказали. □

11 Мера подграфика. Теорема Фубини

Определение 11.1. Подграфиком неотрицательной функции $f(x)$, определённой на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $D_{f,E} = \{(x,y) :\ x \in E, y \in [0, f(x)]\}$

Лемма 11.1. *О мере подграфика:*

Если f – неотрицательная, суммируемая на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, функция, то её подграфик измерим, причём $\mu(D_{f,E}) = \int_E f d\mu(x) = \int_{[0,+\infty]} \mu_X(\{x :\ f(x) \geqslant y\})d\mu_Y(y)$, где $X = \mathbb{R}^n, y = \mathbb{R}$

Доказательство. После доказательства измеримость $D_{f,E}$ лемма становится очевидной (показать на рисунке, что является X и Y сечениями подграфика).

Докажем измеримость подграфика. Этап 1: Пусть $f(x) = \chi_{E_1}(x)$. Тогда $D_{f,E} = \{(x,0) :\ x \in E \setminus E_1\} \cup \{E_1 \times [0,1]\}$. Левое слагаемое имеет меру 0, то есть измеримо, а для правого справедливо рассуждение: $\forall\varepsilon > 0\ \exists M :\ \mu(M \triangle E_1) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^*((M \times [0,1]) \triangle (E_1 \times [0,1])) = \mu^*((M \triangle E_1) \times [0,1]) \leqslant \mu_X^*(M \triangle E_1) < \varepsilon$

Докажем для ступенчатых функций $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\chi_{E_i}(x)$. Их подграфик $D_{f,E} = \bigcup\limits_{k=1}^{N} D_{c_k\chi_{E_k},E}$ измерим, как объединение измеримых множеств.

Для неотрицательной суммируемой функции: представим её, как предел неубывающей последовательности измеримых функций, значит её подграфик будет пределом подграфиков этих ступенчатых функций. □

Теорема 11.1. *Теорема Фубини:*

Если f суммируема на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n, X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^k, m + k = n$ (доопределим $f(x,y)$ нулём во всех точках $(x,y) \notin E$), то

1. *Для μ_X-почти всех x функция $f(x,y)$ μ_Y-суммируема на своей области определения*

2. $\int_Y f(x,y)d\mu_Y(y)$ *μ_X-суммируема*

3. $\int_E f(x,y)d\mu(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)d\mu_Y(y)d\mu_X(x)$

Доказательство. Пусть $f(x,y) \geqslant 0$. Тогда $D_{f,E} = \{(x,y,z) : (x,y) \in E, z \in [0, f(x,y)]\}$. Возьмём $\mathbb{R}^{n+1} = X \times (Y \times \mathbb{R})$, по предыдущей лемме $\mu(D_{f,E}) = \int_X \mu_{Y\times\mathbb{R}}(E_{Y\times\mathbb{R}(x)})d\mu_X(x)$.

$(D_{f,E})_{Y\times\mathbb{R}}(x) = \{(y,z) : y \in E_Y(x), z \in [0, f(x,y)]\}$, снова применяем предыдущую лемму $\mu_{Y\times\mathbb{R}}((D_{f,E})_{Y\times\mathbb{R}}(x)) = \int_Y f(x,y)d\mu_Y(y)$. Левая часть конечна при почти всех x, значит правая часть также почти всегда конечна, то есть первый пункт доказан.

Интеграл по X от $\int_Y f(x,y)d\mu_Y(y)$ конечен, так как f суммируема, доказали второй пункт.

Для доказательства третьего пункта вместо $X \times (Y \times \mathbb{R})$ возьмём $(X \times Y) \times \mathbb{R}$ и снова применим предыдущую лемму. $\square$