

オムニマシンのカスケード制御を利用したロボスト最適制御

H_{∞} 制御と μ 制御

しだ

平成 27 年 6 月 29 日

1 はじめに

近年の大学ロボコンの足回りにおいて、全方向移動ロボットの制御が非常に盛んである。他にもメカナムホイールなどを利用する大学¹や4輪全方向ステアリング車²を利用する大学もある。全方向移動ロボットの実装手法は差異あれど、以下の利点がある。

- 移動方向に制限を受けない → 単純に移動時間の短縮
- 移動方向の制限を受けない → 位置合わせの簡単化
- 人間の直感と近い動作 → 高い手動ロボット適正
- 任意の方向に加速度を発生可能 → 高い敏捷性

これらの点から、全方向移動ロボットを正しく制御するノウハウがあれば、自動ロボットとしては位置合わせの高精度化と経路設計の簡単化によって大きく制御プログラム作成時間を短縮し、手動ロボットとしては操縦者の習得しやすさの高さから、より高い練度の操縦者を用意でき、大学ロボコンのルールにおいて、これらは圧倒的に有用であるため、長年採用したい足回り機構であり続けている。

一方でこれらのロボットにはそれぞれ制御上の難点が存在する。まず、オムニホイールについては、

- MIMO (多入力多出力) 系であるため、単純な PID 制御系で制御することが難しい
- x 軸方向速度、 y 軸方向速度、角速度の微分方程式にクロスタームがあり、モーターの角速度を制御するだけでは、それらを独立して制御できない。

メカナムホイールについては、

- MIMO (多入力多出力) 系であるため、単純な PID 制御系で制御することが難しい
- 4 輪以上を要求され、タイヤが滑るため、解析と自己位置推定が難しい。
- 平面移動ロボットとしては冗長系になる。

4 輪全方向ステアリング車については、

- ステアリング角度変更の位相遅れが制御に悪影響をもたらすケースがある
- ステアリング角度の導出計算が重く、定数で扱えない。³
- 平面移動ロボットとしては冗長系になる。

これらの特徴から、最も制御しやすいのは4輪全方向ステアリング車となるが、ステアリングの切り角の制定を待つ場合最も簡単となるだけであることに留意は必要である。ただそれでも任意の円軌道近傍での制御や、任意方向へ直進移動できるなど、非常に強力な特性を持つ。オムニロボットは劣駆動でも冗長系でない設計を行うことができ、すべりも位相遅れもほぼ存在しないためよい応答を示す。しかしその場合はさらに制御難易度が高く、PID 制御による安定化はほぼ不可能となる。また全体の特徴として、

- センサ数とアクチュエータ数が非常に多く要求され、MCU に高い回路能力が要求される。
- 制御系の計算量が多く MCU に高い計算能力が要求される。

という MCU に要求する能力の高さも相まって長年採用できないチームが多かったのである。

一方、従来からよく使用されていた独立二輪車はモーターの最大トルク、最大角速度を利用できるため、モーター数あたりの直進加速、移動速度で最高能力を誇る。これは直進性で比較すると4輪駆動ステアリング車両に一步譲るものの、ステアリング車に特有なステアリングを「切る」ことに必要な制定時間が転回性能に位相遅れ、時間遅れを生じさせる悪特性を持たないためである。また、独立二輪車と4輪ステアリング車両の制御パラメータはそれぞれ「左右モーターの角速度の差」と「ステアリングの切り角」のみであり、2自由度のシステムであるが、1自由度のシステムであると近似して簡単なPID制御を試行錯誤によって実装でき、制御できるという制御系を設計しやすい強みがあった。さらに言えば自由度の少なさから必要となるアクチュエータ数やセンサー数

¹金工さんとかだったはず

²どこか失念

³私の引継資料で導出している定数で扱えるケースは全方向移動ロボットの場合は使用できません。

も少なくよく、MCU 能力を高めることが難しい大学ロボコンに置いては、長年有用な選択肢であり続けて来たわけである。

しかし近年、制御 MCU としてのマイコンが ARM マイコンの登場などにより、回路的能力と計算能力の両面で大きく向上したこと、企業や大学のサポートが増加したことによる、使用できるセンサーの質、種類が増加したこと、MATLAB の包括契約を結ぶなど制御系やシミュレータ設計能力が向上した大学が増えていること等、全方向移動ロボットを制御する際の問題点が少なくなっており、全方向移動ロボットへの参入障壁が少なくなっている。このような状況下で本学では長年全方向移動ロボットの実装で出遅れている面があり、これ以上全方向移動ロボットのノウハウを持たない状況が続くのは非常に問題であると言える。

そこで本稿は、対象をオムニマシンに限定し、簡単な制御系設計例を示すことで、今後のロボットの制御系設計のサポートを行うことを目的とする。そのため、最終目標と考えられる、 H_∞ 制御や μ コントローラの実装については概論のみとし、既存研究として十分に議論されている、LQR(Linear-Quadratic Regulator) コントローラと LQG(Linear-Quadratic-Gaussian) コントローラそれぞれを利用した、二自由度制御とカスケード制御による軌道追従制御を紹介する。

2 一般オムニマシンのモデル

2.1 モデル化の仮定

Fig. 1 に考える ℓ 個のタイヤを持つオムニロボットの力の釣り合いを表す図を示す。ここで、マシンとタイヤは全て剛体として扱え、オムニホイールの厚さの影響は無視でき、回転中心と重心が一致しており、スラスト方向グリップ力は 0 とする、タイヤの角度は全て、マシン中心点とタイヤ中心を結んだ線分に直交するとし、マシン重心位置がマシン中心点からマシン座標系で $[x_g^* y_g^*]^T = [r_G^* \cos(\theta_G^*) r_G^* \sin(\theta_G^*)]^T$ に存在しているとする。そして全てのタイヤは滑らないと仮定する。タイヤ i について、赤の矢印が加えるグリップ力 F_i 、 ω_i がタイヤの回転角速度、 v_i^* はマシンのタイヤ方向の速度成分であり、 D_i はタイヤ直径、 J_i がタイヤの回転軸方向の慣性モーメントであり、 r_i と α_i はそれぞれマシン中心とタイヤの距離とマシン相対座標系 x^* 軸からのタイヤ位置の角度である。

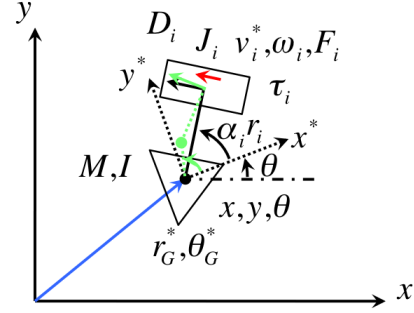


Fig. 1: ℓ 個のタイヤを持つ一般オムニホイールによる全方向ロボットの i 番目のタイヤに置ける力学関係

Fig. 2 に各オムニホイールを駆動するモーターユニットのモデル図を示す。 τ_{Ai} がモーターの駆動トルクで、 ω_{Ai} と J_{Ai} がローターの角速度と慣性モーメントである。 K_{Ti} , K_{Ei} , R_i , L_i はそれぞれ、モーター i のトルク定数、逆起電力定数、内部抵抗、リアクタンスである。このモーター i にそれぞれ印加電圧 V_i を加え、伝達効率 η_i 、減速比 G_i の減速機を通じて、駆動トルク τ_i でオムニホイールを駆動する。また、このときモーターに流れる電流を i_i とする。

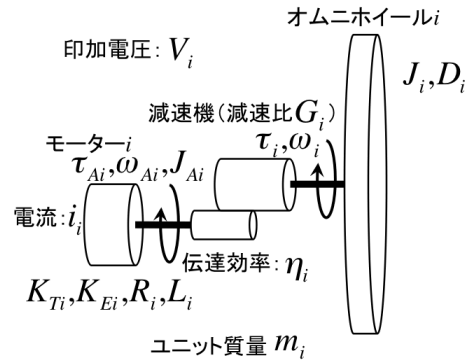


Fig. 2: オムニホイールと駆動モーター間のトルク関係

マシン座標は、ワールド座標系からみたマシン中心点の x 座標と y 座標と、マシン相対座標系 x^* 軸とワールド座標系 x 軸のなす角度 θ を用いて、 $q_1 = [x y \theta]^T$ とマシン座標系を定義する。第 2 の一般化座標として、モーターの電流 i_i をとり、 $q_2 = [i_1 \cdots i_\ell]^T$ として表す。

このように定義したオムニロボットの状態量を $x = [q_1 q_1 q_2]^T$ 、入力を $u = [V_1 \cdots V_\ell]^T$ としたとき、ワールド座標系での状態方程式が次式の連立非線形微分方程式

で書き表される．式で示す非線形状態方程式を得る．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ {}_w F_1(x) \\ {}_w F_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times \ell} \\ 0_{3 \times \ell} \\ {}_w B_2 \end{bmatrix} u \quad (2.1.1)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= {}_w M^\#(\theta) \{ {}_w C(\theta) \dot{\theta} + {}_w D(\theta) \} \dot{q}_1 + {}_w A(\theta) q_2 \\ &= {}_w F_1(x) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= {}_w K(\theta) \dot{q}_1 - {}_w R q_2 + {}_w B_2 u \\ &= {}_w F_2(x) + {}_w B_2 u \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

そして，ワールド座標系からマシン座標系からみたものに射影する座標変換行列を，

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

と定義し，マシン座標系からみた速度は $v^* = [v_x^* v_y^* v_\theta^*]^T = T(\theta) \dot{q}_1$ とする．この状態量 $\dot{q}_1^* = [v_x^* v_y^* v_\theta^*]^T$ と， $q_2 = [i_1 \cdots i_\ell]^T$ を用いて， $x^* = [\dot{q}_1^{*T} q_2^T]^T$ として速度と電流に限り，マシン座標系と同じ角度の座標系から見れば，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^* \\ q_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}_m M^{-1} {}_m D & {}_m M^{-1} {}_m A \\ {}_m K_\omega & -{}_m R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^* \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0_{3 \times \ell} \\ {}_m B_2 \end{bmatrix} u \\ \dot{x}^* &= {}_m A x^* + {}_m B u \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

という線形微分方程式に近似できる．これらの導出は煩雑で本筋ではないため，付録 A に譲るが，運動方程式の導出仮定は重要かつ検算にも必須となるため，付記することとする．

さて，式 (2.1.1) の微分方程式を 4 次のルンゲ=クッタ法で解くのが一般的なロボットのシミュレーション法である．ここで状態量 x と入力 u とシミュレーションのサンプリングタイム Δt_{cir} を引数として，ルンゲクッタ法により状態量の更新量 dx を求める関数を $f_{dx}(x, u, \Delta t_{cir})$ とし，状態量 x と入力の更新サンプリングタイム Δt_{con} から制御入力を決定する関数を $K_u(x, \Delta t_{con})$ とすると，下記の例の通り入力の更新の間にもシミュレーションを行うアルゴリズムとする必要がある．

ルンゲ=クッタ法によるシミュレーションの例

```
while(1){
  u ← K_u(x, Δt_con)
  for(i = 0; i ≤ Δt_con/Δt_cir; i++){
    x ← x + f_dx(x, u, Δt_cir)
  }
  ただし, Δt_cir > Δt_cir とする.
```

付録 A オムニマシン動特性の導出

付録 A.1 オムニホイールの運動学

タイヤが滑らないと仮定して i 個のタイヤを持つオムニロボットの運動学を解く．タイヤ i 中心でのタイヤ方向のマシン速度 v_i^* は，ワールド座標系でのマシン速度 \dot{q}_1 を用いて表す方法と，マシン座標系からみた速度 $v^* = T(\theta) \dot{q}_1$ を用いて表す方法の 2 種類がある．ただし座標変換行列 $T(\theta)$ は次式で定義し， $v^* = [v_x^* v_y^* v_\theta^*]^T$ の各成分を次式で表す．

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.1.1)$$

ワールド座標系で表す場合，

$$v_i^* = -\sin(\theta + \alpha_i) \dot{x} + \cos(\theta + \alpha_i) \dot{y} + r_i \dot{\theta} \quad (A.1.2)$$

となり，マシン座標系から見た速度 v^* で表す場合，

$$v_i^* = -\sin(\alpha_i) v_x^* + \cos(\alpha_i) v_y^* + r_i v_\theta^* \quad (A.1.3)$$

となる．そして回転によるタイヤ接地点の速度は， $-D_i \omega_i / 2$ で表され，タイヤが滑らない仮定から，

$$v_i^* = -\frac{D_i}{2} \omega_i \quad (A.1.4)$$

が成り立つことが分かる．つまり，運動学として次の 2 式が各タイヤについて成り立つ．ワールド座標系で表す場合，

$$\frac{D_i}{2} \omega_i = \sin(\theta + \alpha_i) \dot{x} - \cos(\theta + \alpha_i) \dot{y} - r_i \dot{\theta} \quad (A.1.5)$$

となり，マシン座標系から見た速度 v^* で表す場合，

$$\frac{D_i}{2} \omega_i = \sin(\alpha_i) v_x^* - \cos(\alpha_i) v_y^* - r_i v_\theta^* \quad (A.1.6)$$

となる．この運動学を利用して，タイヤが滑らない場合の運動方程式を導出することとするが，この時間微分を利用するため，微分後の結果も同一であることを示す必要がある．まず， $\dot{v}^* = [\dot{v}_x^* \ \dot{v}_y^* \ \dot{v}_\theta^*]^T$ は，

$$\begin{aligned}\dot{v}_x^* &= \frac{d}{dt} \left\{ \cos(\theta) \dot{x} + \sin(\theta) \dot{y} \right\} \\ &= \cos(\theta) \ddot{x} + \sin(\theta) \ddot{y} - \sin(\theta) \dot{x} \dot{\theta} + \cos(\theta) \dot{y} \dot{\theta}\end{aligned}\quad (A.1.7)$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_y^* &= \frac{d}{dt} \left\{ -\sin(\theta) \dot{x} + \cos(\theta) \dot{y} \right\} \\ &= -\sin(\theta) \ddot{x} + \cos(\theta) \ddot{y} - \cos(\theta) \dot{x} \dot{\theta} - \sin(\theta) \dot{y} \dot{\theta}\end{aligned}\quad (A.1.8)$$

$$\dot{v}_\theta^* = \frac{d}{dt} \dot{\theta} = \ddot{\theta} \quad (A.1.9)$$

である．式 (A.1.2) の時間微分は，

$$\begin{aligned}v_i^* &= -\sin(\theta + \alpha_i) \ddot{x} + \cos(\theta + \alpha_i) \ddot{y} + r_i \ddot{\theta} \\ &\quad - \cos(\theta + \alpha_i) \dot{x} \dot{\theta} - \sin(\theta + \alpha_i) \dot{y} \dot{\theta}\end{aligned}\quad (A.1.10)$$

であり，これを次の変形をし，

$$\begin{aligned}v_i^* &= -\{\sin(\theta) \cos(\alpha_i) + \sin(\alpha_i) \cos(\theta)\} \ddot{x} \\ &\quad + \{\cos(\theta) \cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_i) \sin(\theta)\} \ddot{y} \\ &\quad - \{\cos(\theta) \cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_i) \sin(\theta)\} \dot{x} \dot{\theta} \\ &\quad - \{\sin(\theta) \cos(\alpha_i) + \sin(\alpha_i) \cos(\theta)\} \dot{y} \dot{\theta} + r_i \ddot{\theta}\end{aligned}$$

さらに変形して，

$$\begin{aligned}v_i^* &= -\sin(\alpha_i) \{\cos(\theta) \ddot{x} + \sin(\theta) \ddot{y} \\ &\quad - \sin(\theta) \dot{x} \dot{\theta} + \cos(\theta) \dot{y} \dot{\theta}\} \\ &\quad + \cos(\alpha_i) \{-\sin(\theta) \ddot{x} + \cos(\theta) \ddot{y} \\ &\quad - \cos(\theta) \dot{x} \dot{\theta} - \sin(\theta) \dot{y} \dot{\theta}\} \\ &\quad + r_i \ddot{\theta}\end{aligned}\quad (A.1.11)$$

式 (A.1.7)，(A.1.8)，(A.1.9) を代入すると，式 (A.1.11) がに書き変わり，

$$v_i^* = -\sin(\alpha_i) \dot{v}_x^* + \cos(\alpha_i) \dot{v}_y^* + r_i \dot{v}_\theta^* \quad (A.1.12)$$

と導出できる．これは，式 (A.1.3) の時間微分である，

$$v_i^* = -\sin(\alpha_i) \dot{v}_x^* + \cos(\alpha_i) \dot{v}_y^* + r_i \dot{v}_\theta^* \quad (A.1.13)$$

と同一であるため，微分しても同一の関係が成り立つと示された．

そのため，微分後の運動学は次の 2 通りで書き表される．まず，ワールド座標系で表す場合，

$$\begin{aligned}\frac{D_i}{2} \dot{\omega}_i &= \sin(\theta + \alpha_i) \ddot{x} - \cos(\theta + \alpha_i) \ddot{y} - r_i \ddot{\theta} \\ &\quad + \cos(\theta + \alpha_i) \dot{x} \dot{\theta} + \sin(\theta + \alpha_i) \dot{y} \dot{\theta}\end{aligned}\quad (A.1.14)$$

であり，マシン座標系で表す場合，

$$\frac{D_i}{2} \dot{\omega}_i = \sin(\alpha_i) \dot{v}_x^* - \cos(\alpha_i) \dot{v}_y^* - r_i \dot{v}_\theta^* \quad (A.1.15)$$

と導出できる．

付録 A.2 ワールド座標系とマシン座標系の共通項

ワールド座標系とマシン座標系での状態方程式で，共通項があるためここで導出する．Fig. 1 での，車輪の回転についての運動方程式は，駆動トルク τ_i と，グリップ力 F_i による反トルク $-D_i F_i/2$ と粘性抵抗 d_i の関係から，

$$J_i \dot{\omega}_i = \tau_i - \frac{D_i}{2} F_i - d_i \omega_i \quad (A.2.16)$$

となり，Fig. 2 に示す，モーターの駆動トルク τ_{Ai} と，ホイールを駆動する反動トルク τ_i との間の力学関係から，モーターのローターの角速度 ω_{Ai} の運動方程式が次式で成り立つ．

$$J_{Ai} \dot{\omega}_{Ai} = \tau_{Ai} - \frac{1}{\eta_i G_i} \tau_i \quad (A.2.17)$$

モーターの回路方程式は，

$$V_i = R_i \dot{i}_i + L_i \ddot{i}_i + K_{Ei} \omega_{Ai} \quad (A.2.18)$$

となり，減速機によって速比が $\omega_i = G_i \omega_{Ai}$ となり，トルク定数 K_{Ti} から，トルク $\tau_{Ai} = K_{Ti} \dot{i}_i$ となるため，式 (A.2.16) は，

$$\tau_i = \eta_i G_i K_{Ti} \dot{i}_i - \eta_i G_i^2 J_{Ai} \dot{\omega}_i \quad (A.2.19)$$

となり，式 (A.2.18) は，

$$V_i = R_i \dot{i}_i + L_i \ddot{i}_i + G_i K_{Ei} \omega_i \quad (A.2.20)$$

となる．式 (A.2.19) を，式 (A.2.16) に代入すれば，

$$(J_i + \eta_i G_i^2 J_{Ai}) \dot{\omega}_i = \eta_i G_i K_{Ti} \dot{i}_i - \frac{D_i}{2} F_i - d_i \omega_i \quad (A.2.21)$$

となり，これを変形し，

$$F_i = \frac{2\eta_i G_i K_{Ti}}{D_i} \dot{i}_i - \frac{2(J_i + \eta_i G_i^2 J_{Ai})}{D_i} \dot{\omega}_i - d_i \omega_i \quad (A.2.22)$$

グリップ力 F_i に関する式を得る．

付録 A.3 ワールド座標系での状態方程式

付録 A.1 章で導出したワールド座標系の運動学を利用してワールド座標系から見た運動方程式の導出をする。この運動方程式の導出は、シミュレーションによる運動の検討を行うために必要な作業である。タイヤが滑らない場合に付録 A.1 章の運動学が守られるため、 $\omega_i, \dot{\omega}_i$ に関して式 (A.1.5) と式 (A.1.14) より次式が成立する。

$$\omega_i = \frac{2}{D_i} \{ \sin(\theta + \alpha_i) \dot{x} - \cos(\theta + \alpha_i) \dot{y} - r_i \dot{\theta} \} \quad (\text{A.3.1})$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i = & \frac{2}{D_i} \{ \sin(\theta + \alpha_i) \ddot{x} - \cos(\theta + \alpha_i) \ddot{y} - r_i \ddot{\theta} \\ & + \cos(\theta + \alpha_i) \dot{x} \dot{\theta} + \sin(\theta + \alpha_i) \dot{y} \dot{\theta} \} \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

ロボットの重心回りの運動方程式を立てるが、ロボット質量を $M = m_0 + \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ とする。ここで、 m_0 はロボットの足回りユニットを除いた質量である。そして、Fig. 1 の重心とオムニホイールの幾何関係を拡大した図を Fig. 3 に示す。Fig. 1 の幾何関係から、オムニホ

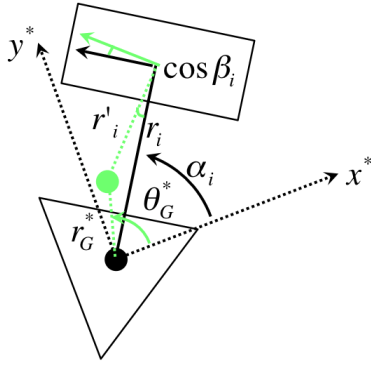


Fig. 3: 重心とオムニホイールの幾何学的関係

ールと重心の幾何関係を導出すると、その半径 r_i' は、余弦定理より、

$$(r_i')^2 = (r_G^*)^2 + (r_i)^2 - 2r_G^* r_i \cos(\theta_G^* - \alpha_i)$$

となり、角度誤差 β_i も余弦定理より、

$$\cos(\beta_i) = \frac{r_i'}{2r_i} + \frac{r_i}{2r_i'} - \frac{(r_G^*)^2}{2r_i' r_i}$$

となる。これを利用して、マシンの回転中心回りのヨー慣性モーメントは、 $I = I_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (I_i + m_i r_i^2)$ とする。ここで I_0 は、オムニホイールの駆動ユニットを除いた、重心回りの慣性モーメントである。ここまでの値 β_i, r_i'

はロボットの姿勢に依存するため厳密には時変数なのだが、姿勢が大きく変化することにコントローラーを設計し、その間はコントローラのロバスト性によって安定化させるとすれば、定数として扱える。ただしその場合はコントローラ設計時の r_G^* と θ_G^* の不確かさを充分検討した大きさを確保しておく必要がある。これらの議論から、重心回りの運動方程式が次式で定まる。

$$\ddot{x}' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{ -\sin(\theta + \alpha_i) F_i \} \quad (\text{A.3.3})$$

$$\ddot{y}' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\theta + \alpha_i) F_i \} \quad (\text{A.3.4})$$

$$\ddot{\theta}' = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\beta_i) r_i' F_i \} \quad (\text{A.3.5})$$

重心とマシン中心の幾何関係を考えると、

$$x' = x + r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta)$$

$$y' = y + r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta)$$

$$\theta' = \theta$$

となるため、幾何関係からの加速度の関係式は、

$$\ddot{x}' = \ddot{x} - \ddot{\theta} r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) - \dot{\theta}^2 r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta)$$

$$\ddot{y}' = \ddot{y} + \ddot{\theta} r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) - \dot{\theta}^2 r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta)$$

$$\ddot{\theta}' = \ddot{\theta}$$

となるから、結局マシン中心点での運動方程式は、

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{ -\sin(\theta + \alpha_i) F_i \} \\ & + \ddot{\theta} r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) + \dot{\theta}^2 r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\theta + \alpha_i) F_i \} \\ & - \ddot{\theta} r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) + \dot{\theta}^2 r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\beta_i) r_i' F_i \} \quad (\text{A.3.8})$$

となる。

結局、式 (A.2.22) に式 (A.3.2) を代入して $\dot{\omega}_i$ を消去し、式 (A.2.20) に式 (A.3.1) を代入して、 ω_i を消去すれば、 ω_i が状態方程式から消去される。そのうえで、式 (A.2.22) をこれらの式 (A.3.6), (A.3.7), (A.3.8) に代入すれば、グリップ力 F_i も状態方程式から消去される。式

の見通しを良くするために、次の文字を定義すると、

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2\eta_i G_i K_{Ti}}{D_i} \\ b_i &= \frac{2(J_i + \eta_i G_i^2 J_{Ai})}{D_i} \\ c_i &= \frac{2b_i}{D_i} = \frac{4(J_i + \eta_i G_i^2 J_{Ai})}{D_i^2} \end{aligned}$$

式 (A.2.22) が次式に書き変わり、

$$F_i = a_i \dot{i}_i - b_i \dot{\omega}_i - d_i \omega_i \quad (\text{A.3.9})$$

式 (A.3.9) を式 (A.3.6) , (A.3.7) , (A.3.8) に代入して、 F_i を消去すると、

$$\ddot{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{-\sin(\theta + \alpha_i)(a_i \dot{i}_i - b_i \dot{\omega}_i - d_i \omega_i)\} + \ddot{\theta} r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) + \dot{\theta}^2 r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) \quad (\text{A.3.10})$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i)(a_i \dot{i}_i - b_i \dot{\omega}_i - d_i \omega_i)\} - \ddot{\theta} r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) + \dot{\theta}^2 r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) \quad (\text{A.3.11})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r_i' (a_i \dot{i}_i - b_i \dot{\omega}_i - d_i \omega_i)\} \quad (\text{A.3.12})$$

とワールド座標系での運動方程式が導出され、加速度と ω_i 項を左辺、それ以外を右辺にまとめると、

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{-\sin(\theta + \alpha_i) b_i \dot{\omega}_i\} - \ddot{\theta} r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) \\ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{-\sin(\theta + \alpha_i)(a_i \dot{i}_i - d_i \omega_i)\} + \dot{\theta}^2 r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) \\ \ddot{y} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i) b_i \dot{\omega}_i\} + \ddot{\theta} r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) \\ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i)(a_i \dot{i}_i - d_i \omega_i)\} + \dot{\theta}^2 r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) \\ \ddot{\theta} + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r_i' b_i \dot{\omega}_i\} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r_i' (a_i \dot{i}_i - d_i \omega_i)\} \end{aligned}$$

という運動方程式が導出される。この ω_i に式 (A.3.2) を代入、 ω_i に式 (A.3.1) を代入してそれぞれ消去し、加速度を左辺、それ以外を右辺としてまとめると、

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\sin(\theta + \alpha_i) c_i \sin(\theta + \alpha_i)\}\right] \ddot{x} \\ + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\sin(\theta + \alpha_i) c_i \cos(\theta + \alpha_i)\} \ddot{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \left[-r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\sin(\theta + \alpha_i) c_i r_i\}\right] \ddot{\theta} \\ = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\sin(\theta + \alpha_i) c_i \cos(\theta + \alpha_i)\} \dot{x} \dot{\theta} \quad (\text{A.3.13}) \\ + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\sin(\theta + \alpha_i) c_i \sin(\theta + \alpha_i)\} \dot{y} \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\sin(\theta + \alpha_i) a_i \dot{i}_i\} \\ + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \sin^2(\theta + \alpha_i) \frac{2d_i}{D_i} \right\} \dot{x} \\ - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \sin(\theta + \alpha_i) \cos(\theta + \alpha_i) \frac{2d_i}{D_i} \right\} \dot{y} \\ - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \sin(\theta + \alpha_i) \frac{2d_i}{D_i} r_i \right\} \dot{\theta} \\ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i) c_i \sin(\theta + \alpha_i)\} \ddot{x} \\ + \left[1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i) c_i \cos(\theta + \alpha_i)\}\right] \ddot{y} \\ + \left[r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i) c_i r_i\}\right] \ddot{\theta} \\ = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i) c_i \cos(\theta + \alpha_i)\} \dot{x} \dot{\theta} \quad (\text{A.3.14}) \\ - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i) c_i \sin(\theta + \alpha_i)\} \dot{y} \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\theta + \alpha_i) a_i \dot{i}_i\} \\ - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \sin(\theta + \alpha_i) \cos(\theta + \alpha_i) \frac{2d_i}{D_i} \right\} \dot{x} \\ + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \cos^2(\theta + \alpha_i) \frac{2d_i}{D_i} \right\} \dot{y} \\ + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \cos(\theta + \alpha_i) \frac{2d_i}{D_i} r_i \right\} \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r_i' c_i \sin(\theta + \alpha_i)\} \ddot{x} \\ - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r_i' c_i \cos(\theta + \alpha_i)\} \ddot{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[1 - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\beta_i) r'_i c_i r_i \} \right] \ddot{\theta} \\
& = -\frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\beta_i) r'_i c_i \cos(\theta + \alpha_i) \} \dot{x} \dot{\theta} \\
& \quad - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\beta_i) r'_i c_i \sin(\theta + \alpha_i) \} \dot{y} \dot{\theta} \\
& \quad + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\beta_i) r'_i a_i i_i \} \quad (\text{A.3.15}) \\
& \quad - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \cos(\beta_i) r'_i d_i \frac{2}{D_i} \{ \sin(\theta + \alpha_i) \} \right\} \dot{x} \\
& \quad + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \cos(\beta_i) r'_i d_i \frac{2}{D_i} \{ \cos(\theta + \alpha_i) \} \right\} \dot{y} \\
& \quad + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \cos(\beta_i) r'_i d_i \frac{2}{D_i} \{ r_i \} \right\} \dot{\theta}
\end{aligned}$$

とワールド座標系の運動方程式に帰着される．ここで，式の見通しをよくするため，更に次の文字を導入し，

$$\begin{aligned}
{}_{wM}C_{ss}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} c_i \sin^2(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wM}C_{cc}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cos^2(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wM}C_{sc}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} c_i \sin(\theta + \alpha_i) \cos(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wM}C_{rs}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} r_i c_i \sin(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wM}C_{rc}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} r_i c_i \cos(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wI}C_{\beta s}(\theta) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} r'_i c_i \cos(\beta_i) \sin(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wI}C_{\beta c}(\theta) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} r'_i c_i \cos(\beta_i) \cos(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wI}C_{\beta r}(\theta) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} r'_i r_i c_i \cos(\beta_i) \\
{}_{wM}D_{ss}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2d_i}{D_i} \sin^2(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wM}D_{cc}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2d_i}{D_i} \cos^2(\theta + \alpha_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{wM}D_{sc}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2d_i}{D_i} \sin(\theta + \alpha_i) \cos(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wM}D_{rs}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r_i d_i}{D_i} \sin(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wM}D_{rc}(\theta) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r_i d_i}{D_i} \cos(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wI}D_{\beta s}(\theta) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r'_i d_i}{D_i} \cos(\beta_i) \sin(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wI}D_{\beta c}(\theta) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r'_i d_i}{D_i} \cos(\beta_i) \cos(\theta + \alpha_i) \\
{}_{wI}D_{\beta r}(\theta) &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r'_i r_i d_i}{D_i} \cos(\beta_i) \\
{}_{wM}A_s(\theta) &= \frac{1}{M} [a_1 \sin(\theta + \alpha_1) \cdots a_{\ell} \sin(\theta + \alpha_{\ell})] \\
{}_{wM}A_c(\theta) &= \frac{1}{M} [a_1 \cos(\theta + \alpha_1) \cdots a_{\ell} \cos(\theta + \alpha_{\ell})] \\
{}_{wI}A_r(\theta) &= \frac{1}{I} [r'_1 a_1 \cos(\beta_1) \cdots r'_{\ell} a_{\ell} \cos(\beta_{\ell})]
\end{aligned}$$

第 2 の一般化座標として，モーターの電流 i_i をとり， $q_2 = [i_1 \cdots i_{\ell}]^T$ として表すと，ワールド座標系の運動方程式，式 (A.3.14)，(A.3.15)，(A.3.15) は次の形に書き変わる．

$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 - {}_{wM}C_{ss}(\theta) \right\} \ddot{x} + {}_{wM}C_{sc}(\theta) \ddot{y} \\
& + \left\{ -r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) + {}_{wM}C_{rs}(\theta) \right\} \ddot{\theta} \\
& = {}_{wM}C_{sc}(\theta) \dot{x} \dot{\theta} + {}_{wM}C_{ss}(\theta) \dot{y} \dot{\theta} \\
& + r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) \dot{\theta}^2 - {}_{wM}A_s(\theta) q_2 \quad (\text{A.3.16}) \\
& + [{}_{wM}D_{ss}(\theta) - {}_{wM}D_{sc}(\theta) - {}_{wM}D_{rs}(\theta)] \dot{q}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}_{wM}C_{sc}(\theta) \ddot{x} + \left\{ 1 - {}_{wM}C_{cc}(\theta) \right\} \ddot{y} \\
& + \left[r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) - {}_{wM}C_{rc}(\theta) \right] \ddot{\theta} \\
& = -{}_{wM}C_{cc}(\theta) \dot{x} \dot{\theta} - {}_{wM}C_{sc}(\theta) \dot{y} \dot{\theta} \\
& + r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) \dot{\theta}^2 + {}_{wM}A_c(\theta) q_2 \quad (\text{A.3.17}) \\
& + [-{}_{wM}D_{sc}(\theta) {}_{wM}D_{cc}(\theta) {}_{wM}D_{rc}(\theta)] \dot{q}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}_{wI}C_{\beta s}(\theta) \ddot{x} - {}_{wI}C_{\beta c}(\theta) \ddot{y} \\
& + \left\{ 1 - {}_{wI}C_{\beta r}(\theta) \right\} \ddot{\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -{}_wI C_{\beta c}(\theta) \dot{x} \dot{\theta} - {}_wI C_{\beta s}(\theta) \dot{y} \dot{\theta} \\
&+ {}_wI A_r(\theta) q_2 \\
&+ [-{}_wI D_{\beta s}(\theta) {}_wI D_{\beta c}(\theta) {}_wI D_{\beta r}(\theta)] \dot{q}_1
\end{aligned} \tag{A.3.18}$$

これを行列形式にまとめると、次式となる

$${}_wM(\theta) \ddot{q}_1 = \{ {}_wC(\theta) \dot{\theta} + {}_wD(\theta) \} \dot{q}_1 + {}_wA(\theta) q_2 \tag{A.3.19}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
{}_wM(\theta) &= \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_\theta \end{bmatrix} \\
{}_wM_x(\theta) &= \begin{bmatrix} 1 - {}_wM C_{ss}(\theta) \\ {}_wM C_{sc}(\theta) \\ {}_wI C_{\beta s}(\theta) \end{bmatrix} \\
{}_wM_y(\theta) &= \begin{bmatrix} {}_wM C_{sc}(\theta) \\ 1 - {}_wM C_{cc}(\theta) \\ -{}_wI C_{\beta c}(\theta) \end{bmatrix} \\
{}_wM_\theta(\theta) &= \begin{bmatrix} -r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) + {}_wM C_{rs}(\theta) \\ r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) - {}_wM C_{rc}(\theta) \\ 1 - {}_wI C_{\beta r}(\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$${}_wC(\theta) = \begin{bmatrix} {}_wM C_{sc}(\theta) & {}_wM C_{ss}(\theta) & r_G^* \cos(\theta_G^* + \theta) \\ -{}_wM C_{cc}(\theta) & -{}_wM C_{sc}(\theta) & r_G^* \sin(\theta_G^* + \theta) \\ -{}_wI C_{\beta c}(\theta) & -{}_wI C_{\beta s}(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

$${}_wD(\theta) = \begin{bmatrix} {}_wM D_{ss}(\theta) & -{}_wM D_{sc}(\theta) & -{}_wM D_{rs}(\theta) \\ -{}_wM D_{sc}(\theta) & {}_wM D_{cc}(\theta) & {}_wM D_{rc}(\theta) \\ -{}_wI D_{\beta s}(\theta) & {}_wI D_{\beta c}(\theta) & {}_wI D_{\beta r}(\theta) \end{bmatrix}$$

$${}_wA(\theta) = \begin{bmatrix} -{}_wM A_s(\theta) \\ {}_wM A_c(\theta) \\ {}_wI A_r(\theta) \end{bmatrix}$$

である．状態量を $x = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2]^T$ ととり、これを变形すれば、

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= {}_wM^\#(\theta) [\{ {}_wC(\theta) \dot{\theta} + {}_wD(\theta) \} \dot{q}_1 + {}_wA(\theta) q_2] \\
&= {}_wF_1(x)
\end{aligned} \tag{A.3.20}$$

というマシンに関する非線形状態方程式を得る．ただし、 ${}_wM^\#(\theta)$ は、ムーアペンローズの擬似逆行列である．

次に、式 (A.2.20) に、式 (A.3.1) を代入し、電流 i_i についての状態方程式を立てると、

$$\begin{aligned}
V_i &= R_i i_i + L_i \dot{i}_i \\
&+ \frac{2G_i K_{Ei}}{D_i} \{ \sin(\theta + \alpha_i) \dot{x} - \cos(\theta + \alpha_i) \dot{y} - r_i \dot{\theta} \}
\end{aligned}$$

となる．これを変形すると電流 i_i についての微分方程式が、

$$\begin{aligned}
\dot{i}_i &= -\frac{2G_i K_{Ei}}{L_i D_i} \{ \sin(\theta + \alpha_i) \dot{x} - \cos(\theta + \alpha_i) \dot{y} - r_i \dot{\theta} \} \\
&- \frac{R_i}{L_i} i_i + \frac{1}{L_i} V_i
\end{aligned} \tag{A.3.21}$$

となる．ここで式の見通しを良くするため、

$$\begin{aligned}
K_{\omega i} &= \frac{2G_i K_{Ei}}{L_i D_i} \\
K_{xi}(\theta) &= K_{\omega i} \sin(\theta + \alpha_i) \\
K_{yi}(\theta) &= K_{\omega i} \cos(\theta + \alpha_i) \\
K_{\theta i} &= K_{\omega i} r_i
\end{aligned}$$

という文字を定義し、状態方程式の入力を、 $u = [V_1 \cdots V_\ell]^T$ ととれば、式 (A.3.21) は次の非線形状態方程式となる．

$$\begin{aligned}
\dot{q}_2 &= {}_wK(\theta) \dot{q}_1 - {}_wR q_2 + {}_wB_2 u \\
&= {}_wF_2(x) + {}_wB_2 u
\end{aligned} \tag{A.3.22}$$

ただし、

$${}_wK(\theta) = \begin{bmatrix} -K_{x1}(\theta) & K_{y1}(\theta) & K_{\theta 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -K_{x\ell}(\theta) & K_{y\ell}(\theta) & K_{\theta \ell} \end{bmatrix}$$

$${}_wR = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{R_\ell}{L_\ell} \end{bmatrix}$$

$${}_wB_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{L_\ell} \end{bmatrix}$$

である．式 (A.3.20) と式 (A.3.22) に、 $d/dt q_1 = \dot{q}_1$ という状態方程式を加えれば、次式で示す非線形状態方程式

を得る．

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ {}_wF_1(x) \\ {}_wF_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times \ell} \\ 0_{3 \times \ell} \\ {}_wB_2 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.3.23})$$

これを4次のルンゲ=クッタ法などで積分し，制御周期毎にフィードバックループを更新するプログラムを用意すれば，作成したコントローラのマシン状での評価が可能となる．また，式 (A.3.9) のグリップ力を各ステップ毎に見ておくことは重要で，これがある範囲内に収まる（基本的には静止摩擦力）ようにコントローラの調整を行えるとベストであろう．よってこの場合のグリップ力を書き下しておく．

$$\begin{aligned} F_i &= a_i i_i - c_i \{ \sin(\theta + \alpha_i) \ddot{x} - \cos(\theta + \alpha_i) \ddot{y} - r_i \ddot{\theta} \\ &\quad + \cos(\theta + \alpha_i) \dot{x} \dot{\theta} + \sin(\theta + \alpha_i) \dot{y} \dot{\theta} \} \quad (\text{A.3.24}) \\ &\quad - \frac{2d_i}{D_i} \{ \sin(\theta + \alpha_i) \dot{x} - \cos(\theta + \alpha_i) \dot{y} - r_i \dot{\theta} \} \end{aligned}$$

[1]

つまり，積分の各ステップに置いて，重心から算出した垂直抗力 N_i と，各タイヤの摩擦係数 μ_i から次式が成り立つようにするということである．

$$\mu N_i \geq |F_i| \quad (\text{A.3.25})$$

付録 A.4 マシン座標系での状態方程式

マシン座標系での運動学式 (A.1.6) と式 (A.1.15) から，マシン座標系での ω_i と $\dot{\omega}_i$ を次式で示す．

$$\omega_i = \frac{2}{D_i} \{ \sin(\alpha_i) v_x^* - \cos(\alpha_i) v_y^* - r_i \dot{\theta}^* \} \quad (\text{A.4.1})$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{2}{D_i} \{ \sin(\alpha_i) \dot{v}_x^* - \cos(\alpha_i) \dot{v}_y^* - r_i \dot{\theta}^* \} \quad (\text{A.4.2})$$

式 (A.3.3) , (A.3.4) , (A.3.5) のワールド座標系での重心回りの運動方程式は，マシン座標系で速度についてののみ議論すると，次式に書き変わる．

$$\dot{v}_x^{*'} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{ -\sin(\alpha_i) F_i \} \quad (\text{A.4.3})$$

$$\dot{v}_y^{*'} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\alpha_i) F_i \} \quad (\text{A.4.4})$$

$$\dot{v}_{\theta}^{*'} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{ \cos(\beta_i) r_i' F_i \} \quad (\text{A.4.5})$$

マシン座標系では，重心とマシン中心の幾何関係を考えと，

$$x^{*'} = x^* + r_G^* \cos(\theta_G^*)$$

$$y^{*'} = y^* + r_G^* \sin(\theta_G^*)$$

$$\theta^{*'} = \theta^*$$

となり，重心のマシン座標系から見た速度は，

$$v_x^{*'} = v_x^* - v_{\theta}^* r_G^* \sin(\theta_G^*)$$

$$v_y^{*'} = v_y^* + v_{\theta}^* r_G^* \cos(\theta_G^*)$$

$$v_{\theta}^{*'} = v_{\theta}^*$$

となる．このことから，重心のマシン座標系から見た加速度は，

$$\begin{aligned} \dot{v}_x^{*'} &= \dot{v}_x^* - \dot{v}_{\theta}^* r_G^* \sin(\theta_G^*) \\ &\quad - v_{\theta}^{*2} r_G^* \cos(\theta_G^*) \end{aligned} \quad (\text{A.4.6})$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_y^{*'} &= \dot{v}_y^* + \dot{v}_{\theta}^* r_G^* \cos(\theta_G^*) \\ &\quad - v_{\theta}^{*2} r_G^* \sin(\theta_G^*) \end{aligned} \quad (\text{A.4.7})$$

$$\dot{v}_{\theta}^{*'} = \dot{v}_{\theta}^* \quad (\text{A.4.8})$$

と表される．これを利用してロボットの重心回りの運動方程式を立てるが，ロボット質量を $M = m_0 + \sum_{i=1}^{\ell} m_i$ とする．ここで， m_0 はロボットの足回りユニットを除いた質量である．そして，Fig. 1 の重心とオムニホイールの幾何関係を拡大した図を Fig. 4 に示す．Fig. 1 の

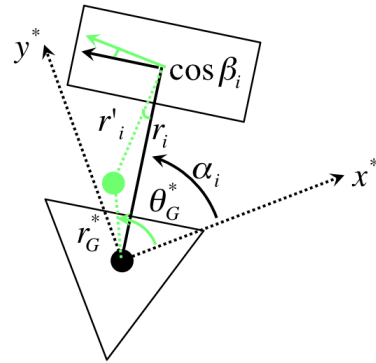


Fig. 4: 重心とオムニホイールの幾何学的関係

幾何関係から，オムニホイールと重心の幾何関係を導出すると，その半径 r_i' は，余弦定理より，

$$(r_i')^2 = (r_G^*)^2 + (r_i)^2 - 2r_G^* r_i \cos(\theta_G^* - \alpha_i)$$

となり，角度誤差 β_i も余弦定理より，

$$\cos(\beta_i) = \frac{r'_i}{2r_i} + \frac{r_i}{2r'_i} - \frac{(r_G^*)^2}{2r'_i r_i}$$

となる．これを利用して，マシンの回転中心回りのヨー慣性モーメントは， $I = I_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (I_i + m_i r_i^2)$ とする．これらの議論から，重心回りの運動方程式が次式で定まる．

$$\dot{v}_x^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{-\sin(\alpha_i) F_i\}$$

$$\dot{v}_y^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\alpha_i) F_i\}$$

$$\dot{v}_\theta^* = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r'_i F_i\}$$

これに，式 (A.4.6)，(A.4.7)，(A.4.8) を代入すれば，以下のロボットの原点回りの運動方程式に帰着できる．

$$\dot{v}_x^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{-\sin(\alpha_i) F_i\} \quad (\text{A.4.9})$$

$$\dot{v}_y^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\alpha_i) F_i\} \quad (\text{A.4.10})$$

$$\dot{v}_\theta^* = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r'_i F_i\} \quad (\text{A.4.11})$$

ここで，グリップ力 F_i は，式 (A.3.9) で消去できるため，これらの運動方程式は，

$$\dot{v}_x^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{-\sin(\alpha_i) (a_i \dot{i}_i - b_i \dot{\omega}_i - d_i \omega_i)\} + \dot{v}_\theta^* r_G^* \sin(\theta_G^*) + v_\theta^{*2} r_G^* \cos(\theta_G^*) \quad (\text{A.4.12})$$

$$\dot{v}_y^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\alpha_i) (a_i \dot{i}_i - b_i \dot{\omega}_i - d_i \omega_i)\} - \dot{v}_\theta^* r_G^* \cos(\theta_G^*) + v_\theta^{*2} r_G^* \sin(\theta_G^*) \quad (\text{A.4.13})$$

$$\dot{v}_\theta^* = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r'_i (a_i \dot{i}_i - b_i \dot{\omega}_i - d_i \omega_i)\} \quad (\text{A.4.14})$$

と省略できる．ここに，式 (A.4.1) と式 (A.4.2) を代入すると，

$$\dot{v}_x^* - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\sin(\alpha_i) c_i \{\sin(\alpha_i) \dot{v}_x^* - \cos(\alpha_i) \dot{v}_y^* - r_i \dot{v}_\theta^*\}\}$$

$$- \dot{v}_\theta^* r_G^* \sin(\theta_G^*) = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{(\sin(\alpha_i) a_i \dot{i}_i)\} \quad (\text{A.4.15})$$

$$+ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \sin(\alpha_i) \frac{2d_i}{D_i} \{\sin(\alpha_i) v_x^* - \cos(\alpha_i) v_y^* - r_i \dot{v}_\theta^*\} \right\} + v_\theta^{*2} r_G^* \cos(\theta_G^*) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\alpha_i) c_i \{\sin(\alpha_i) \dot{v}_x^* - \cos(\alpha_i) \dot{v}_y^* - r_i \dot{v}_\theta^*\}\} + \dot{v}_\theta^* r_G^* \cos(\theta_G^*) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\alpha_i) (a_i \dot{i}_i)\} \quad (\text{A.4.16})$$

$$- \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \cos(\alpha_i) \frac{2d_i}{D_i} \{\sin(\alpha_i) v_x^* - \cos(\alpha_i) v_y^* - r_i \dot{v}_\theta^*\} \right\} + v_\theta^{*2} r_G^* \sin(\theta_G^*) + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r'_i c_i \{\sin(\alpha_i) \dot{v}_x^* - \cos(\alpha_i) \dot{v}_y^* - r_i \dot{v}_\theta^*\}\} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \{\cos(\beta_i) r'_i a_i \dot{i}_i\} \quad (\text{A.4.17})$$

$$- \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \cos(\beta_i) r'_i \frac{2d_i}{D_i} \{\sin(\alpha_i) v_x^* - \cos(\alpha_i) v_y^* - r_i \dot{v}_\theta^*\} \right\} \quad (\text{A.4.18})$$

ここで，式の見通しを良くするために，次の定数を定義する．

$$m_M C_{ss} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} c_i \sin^2(\alpha_i)$$

$$m_M C_{cc} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cos^2(\alpha_i)$$

$$m_M C_{sc} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} c_i \sin(\alpha_i) \cos(\alpha_i)$$

$$m_M C_{rs} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} r_i c_i \sin(\alpha_i)$$

$$m_M C_{rc} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} r_i c_i \cos(\alpha_i)$$

$$m_I C_{\beta s} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} r'_i c_i \cos(\beta_i) \sin(\alpha_i)$$

$$m_I C_{\beta c} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} r'_i c_i \cos(\beta_i) \cos(\alpha_i)$$

$${}_m I C_{\beta r} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} r'_i r_i c_i \cos(\beta_i)$$

$${}_m M D_{ss} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2d_i}{D_i} \sin^2(\alpha_i)$$

$${}_m M D_{cc} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2d_i}{D_i} \cos^2(\alpha_i)$$

$${}_m M D_{sc} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2d_i}{D_i} \sin(\alpha_i) \cos(\alpha_i)$$

$${}_m M D_{rs} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r_i d_i}{D_i} \sin(\alpha_i)$$

$${}_m M D_{rc} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r_i d_i}{D_i} \cos(\alpha_i)$$

$${}_m I D_{\beta s} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r'_i d_i}{D_i} \cos(\beta_i) \sin(\alpha_i)$$

$${}_m I D_{\beta c} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r'_i d_i}{D_i} \cos(\beta_i) \cos(\alpha_i)$$

$${}_m I D_{\beta r} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{\ell} \frac{2r'_i r_i d_i}{D_i} \cos(\beta_i)$$

$${}_m M A_s = \frac{1}{M} [a_1 \sin(\alpha_1) \cdots a_{\ell} \sin(\alpha_{\ell})]$$

$${}_m M A_c = \frac{1}{M} [a_1 \sin(\alpha_1) \cdots a_{\ell} \cos(\alpha_{\ell})]$$

$${}_m I A_r = \frac{1}{I} [r'_1 a_1 \cos(\beta_1) \cdots r'_{\ell} a_{\ell} \cos(\beta_{\ell})]$$

$\dot{q}_1^* = [v_x^* \ v_y^* \ v_{\theta}^*]^T$ と, $q_2 = [i_1 \cdots i_{\ell}]^T$ を用いて, 式となる.

$x^* = [\dot{q}_1^{*T} \ q_2^T]^T$ として状態変数を選ぶと, 式 (A.4.15),

(A.4.16), (A.4.17) は,

$${}_m M = \begin{bmatrix} 1 - {}_m M C_{ss} & {}_m M C_{sc} & {}_m M C_{rs} - r_G^* \sin(\theta_G^*) \\ {}_m M C_{sc} & 1 - {}_m M C_{cc} & -{}_m M C_{rc} + r_G^* \cos(\theta_G^*) \\ {}_m I C_{\beta s} & -{}_m I C_{\beta c} & 1 - {}_m I C_{\beta r} \end{bmatrix}$$

$${}_m A = \begin{bmatrix} -{}_m M A_s \\ {}_m M A_c \\ {}_m I A_r \end{bmatrix}$$

$${}_m D = \begin{bmatrix} {}_m M D_{ss} & -{}_m M D_{sc} & -{}_m M D_{rs} \\ -{}_m M D_{sc} & {}_m M D_{cc} & {}_m M D_{rc} \\ -{}_m I D_{\beta s} & {}_m I D_{\beta c} & {}_m I D_{\beta r} \end{bmatrix}$$

$${}_m C_G = \begin{bmatrix} r_G^* \cos(\theta_G^*) \\ r_G^* \sin(\theta_G^*) \\ 0 \end{bmatrix}$$

と定義すれば,

$$\dot{q}_1^* = {}_m M^{-1} \{ {}_m D q_1 + {}_m A q_2 + {}_m C_G v_{\theta}^{*2} \} \quad (\text{A.4.19})$$

とマシンに関する状態方程式を得る.

次に, 式 (A.2.20) に, 式 (A.4.1) を代入し, 電流 i_i についての状態方程式を立てると,

$$V_i = R_i i_i + L_i \dot{i}_i + \frac{2G_i K_{Ei}}{D_i} \{ \sin(\alpha_i) v_x^* - \cos(\alpha_i) v_y^* - r_i \dot{v}_{\theta}^* \} \quad (\text{A.4.20})$$

を变形し,

$$\begin{aligned} \dot{i}_i = & -\frac{2G_i K_{Ei}}{L_i D_i} \{ \sin(\alpha_i) v_x^* - \cos(\alpha_i) v_y^* - r_i \dot{v}_{\theta}^* \} \\ & - \frac{R_i}{L_i} i_i + \frac{1}{L_i} V_i \end{aligned} \quad (\text{A.4.21})$$

ここで式の見通しを良くするため,

$$K_{\omega i} = \frac{2G_i K_{Ei}}{L_i D_i} \quad (\text{A.4.22})$$

$$K_{xi} = K_{\omega i} \sin(\alpha_i) \quad (\text{A.4.23})$$

$$K_{yi} = K_{\omega i} \cos(\alpha_i) \quad (\text{A.4.24})$$

$$K_{\theta i} = K_{\omega i} r_i \quad (\text{A.4.25})$$

という文字を定義し, 状態方程式の入力を, $u = [V_1 \cdots V_{\ell}]^T$ とすれば, 式 (A.4.21) は次の線形状態方程

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 = & \begin{bmatrix} -K_{x1} & K_{y1} & K_{\theta 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -K_{x\ell} & K_{y\ell} & K_{\theta \ell} \end{bmatrix} \dot{q}_1^* \\ & - \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{R_{\ell}}{L_{\ell}} \end{bmatrix} q_2 + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{L_{\ell}} \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (\text{A.4.26})$$

この線形微分方程式を次の行列を定義し,

$${}_m K_{\omega} = \begin{bmatrix} -K_{x1} & K_{y1} & K_{\theta 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -K_{x\ell} & K_{y\ell} & K_{\theta \ell} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.27})$$

$${}_m R = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{R_{\ell}}{L_{\ell}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.28})$$

$${}_m B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{L_\ell} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.29})$$

で定義される．このとき， $\ell = 3$ ならば，電流センサなしでも可観測性行列が可観測を満たすが， $\ell \geq 4$ であれば，電流センサが必要となる．

次の様書き表す．

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= {}_m K_\omega \dot{q}_1^* - {}_m R q_2 + {}_m B_2 u \\ &= [{}_m K_\omega \quad -{}_m R] x + {}_m B_2 u \end{aligned} \quad (\text{A.4.30})$$

結局，このモデルの状態方程式は，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^* \\ q_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}_m M^{-1} {}_m D & {}_m M^{-1} {}_m A \\ {}_m K_\omega & -{}_m R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^* \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0_{3 \times \ell} \\ {}_m B_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} {}_m M^{-1} {}_m C_G \\ 0_{\ell \times 1} \end{bmatrix} v_\theta^{*2} \\ \dot{x}^* &= {}_m A x^* + {}_m B u + {}_m C_\theta v_\theta^{*2} \end{aligned} \quad (\text{A.4.31})$$

と簡単な状態方程式で書き表され，これは一般に，

$$\dot{x}^* = {}_m A x^* + {}_m B u \quad (\text{A.4.32})$$

と線形状態方程式に近似でき，ワールド座標系で位置まで取り扱ったときと比べ線形系で取り扱うことができる．次に観測行列について議論する．マシンに取り付けたロータリーエンコーダやジャイロセンサから \dot{q}_1^* が得られるときは，

$${}_m C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2 \sin(\alpha_1)}{D_1} & -\frac{2 \cos(\alpha_1)}{D_1} & -\frac{2r_1}{D_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2 \sin(\alpha_\ell)}{D_\ell} & -\frac{2 \cos(\alpha_\ell)}{D_\ell} & -\frac{2r_\ell}{D_\ell} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.33})$$

が存在し，各モータに電流センサが取り付けられており，電流 q_2 が得られるときは，

$${}_m C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.34})$$

が存在する．マシン座標系速度のみが得られるとき，観測行列 ${}_m C$ は，

$${}_m C = {}_m C_1 \quad (\text{A.4.35})$$

で定義され，それに加えて電流が得られるとき，観測行列 ${}_m C$ は，

$${}_m C = \begin{bmatrix} {}_m C_1 \\ {}_m C_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.36})$$