

# Ridge と Lasso の推定

2019 年 5 月 8 日

大森 夢拓

## 1 はじめに

複雑な構造を内在する現象の分析では、多項式回帰などの説明変数に関して非線形なモデルを考える必要がある。このような複雑なモデルの推定において生じる過学習を防ぐ手法が正則化法である。本稿では正則化法の中でも、Ridge と Lasso を用いた推定を紹介する。また、それらを用いて実際のデータに対して計算機実験を行った。

## 2 Ridge と Lasso の推定

$i$  番目 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) のデータの目的変数を  $y_i$ , 説明変数を  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top \in \mathbb{R}^p$ , 誤差を  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , および回帰係数を  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^\top \in \mathbb{R}^{p+1}$  として、線形回帰モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i \quad (1)$$

を考える。パラメータベクトルの長さの概念を一般化した  $L_q$  ノルムに基づく正則化項を用いると、正則化最小 2 乗法は

$$S_\alpha(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}))^2 + \alpha \sum_{j=1}^p |\beta_j|^q \quad (2)$$

のよう記述できる。 $\alpha \in \mathbb{R}^+$  はモデルの複雑度を設定するハイパーパラメータであり、式 (2) の第 2 項が  $q = 1$  ( $L_1$  ノルム) の場合を Lasso,  $q = 2$  の場合を Ridge と呼ぶ。

### 2.1 Ridge

切片を除く回帰係数の 2 乗和を正則化項としてとることで、説明変数間の強い相関によって生じる回帰係数の推定値の不安定性を回避する手法を Ridge という。Ridge 推定量の求め方は次のようになる。

$j$  番目の説明変数に関するデータの平均値  $\bar{x}_j$  を中心化したデータを  $z_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_j$  とすると、式 (1) は次のように変形できる。

$$y_i = \beta_0^* + \beta_1 z_{i1} + \dots + \beta_p z_{ip} + \epsilon_i \quad (3)$$

ただし、 $\beta_0^* = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \dots + \beta_p \bar{x}_p$  である。さらに、 $\boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^\top \in \mathbb{R}^p$  および  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$  と定

義すると式 (3) は以下の行列形式で記述できる。

$$\mathbf{y} = \beta_0^* \mathbf{1} + Z \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\epsilon}$$
$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{np} \end{bmatrix} \quad (4)$$

よって、Ridge 回帰モデルは、

$$S_\alpha(\beta_0^*, \boldsymbol{\beta}_1) = (\mathbf{y} - \beta_0^* \mathbf{1} - Z \boldsymbol{\beta}_1)^\top (\mathbf{y} - \beta_0^* \mathbf{1} - Z \boldsymbol{\beta}_1) + \alpha \boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{\beta}_1 \quad (5)$$

と記述できる。これを最小化することで、次のような切片と回帰係数ベクトルの推定量が与えられる。

$$\hat{\beta}_0^* = \bar{y}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (Z^\top Z + \alpha I_p)^{-1} Z^\top \mathbf{y} \quad (6)$$

ただし、 $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n$  とする。式 (6) の結果から、式 (1) の切片は  $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \dots - \hat{\beta}_p \bar{x}_p$  と推定されることが分かる。つまり、中心化したデータから構成された計画行列  $Z$  を用いれば、式 (5) の  $\beta_0^*$  を考えることなく、

$$S_\alpha(\boldsymbol{\beta}_1) = (\mathbf{y} - Z \boldsymbol{\beta}_1)^\top (\mathbf{y} - Z \boldsymbol{\beta}_1) + \alpha \boldsymbol{\beta}_1^\top \boldsymbol{\beta}_1 \quad (7)$$

の最小化によって  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$  を得られる。

### 2.2 Lasso

切片を除く回帰係数の絶対値の和を正則化項としてとることで、パラメータの一部は完全に 0 と推定される。このようなモデルの推定と変数選択を同時に実行できる手法を Lasso という。切片を除く回帰係数はデータを中心化することによって切片と切り離して推定できるため

$$S_\alpha(\boldsymbol{\beta}_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j z_{ij})^2 + \alpha \sum_{j=1}^p |\beta_j| \quad (8)$$

の最小化によって与えられる。しかし、 $L_1$  正則化項が微分不可能であるため解析的に  $\boldsymbol{\beta}_1$  を求めることはできない。このため、Fu (1998) による shooting アルゴリズムや Efron et al. (2004) による LARS (Least Angle Regression) と呼ばれる計算手法が用いられる。

また、ラグランジュの未定乗数法を適用すると、次の様な制約条件付きのベクトルの最小化と同等になる。

$$\min \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j z_{ij})^2 \quad \text{subject to} \quad \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq \eta \quad (9)$$

### 3 計算機実験

実データ実験として、アメリカのボストン州の住宅価格を、線形回帰モデルにより推定する。データ数は506で、住宅価格に影響を与えていると思われる以下の13個の説明変数を持つ。

- $x_1$ : 犯罪率

$x_3$ : 非商用地

$x_5$ : 窒素酸化物

$x_7$ : 築年

$x_9$ : ハイウェイアクセス指数

$x_{11}$ : 生徒と教師の比率

$x_{13}$ : 低所得者の割合
- $x_2$ : 宅地の割合

$x_4$ : チャールズ川流域か否か

$x_6$ : 部屋数

$x_8$ : ビジネス地域への距離

$x_{10}$ : 固定資産税

$x_{12}$ : 有色人種の割合

通常の最小2乗法、Ridge および Lasso を用いて回帰係数  $\beta$  の推定を行い、結果を比較した。Ridge および Lasso は  $\alpha \in \{0.01, 0.1, 1, 10, 100\}$  で実験を行った。この実験結果として、最小2乗法により推定された  $\hat{\beta}$  の値を図1、 $\alpha$  の変化による Ridge および Lasso の推定値  $\hat{\beta}$  の解パスをそれぞれ図2、図3に示す。 $\alpha$  が0に近い場合、Ridge と Lasso の各推定値は最小2乗法のそれとかなり近いことが分かる。 $\alpha$  が大きくなるにつれて、Ridge も Lasso も全ての説明変数の推定値が0に向かって縮小している。特に、Lasso において  $\alpha=100$  の場合は全ての回帰係数の値がほぼ0となっている。これらの結果から、 $\alpha$  の大きさの違いによって正則化の強さが変化することを確認できる。また、Lasso での変数選択の結果も図3から確認できる。実際に  $\alpha = 100$  において変数選択されたのは、固定資産税 ( $x_{10}$ ) と有色人種の割合 ( $x_{12}$ ) であり、 $\alpha = 10$  において変数選択されたのは、先ほどの  $x_{10}$  と  $x_{12}$  に加えて、宅地の割合 ( $x_2$ ) と低所得者の割合 ( $x_{13}$ ) であった。

続いて、先の実データの説明変数の数を103に増やしたもので同様の実験を行い、推定手法の精度の指標である決定係数

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad (10)$$

を比較した。この実験結果として、Ridge と Lasso の訓練データとテストデータにおける、 $\alpha$  の変化による決定係数の推移を図4と表1に示す。訓練データでは、 $\alpha$  が大きくなるにつれて、Ridge と Lasso の両方の決定係数の値が小さくなっている。特に、Lasso では  $\alpha \geq 10$  の時点で決定係数が0となっている。これらの結果から、Ridge と Lasso の両方において、 $\alpha$  が0に近づくほど最小2乗法の決定係数に近づくことが分かる。また、テストデータでは、適切な  $\alpha$  を設定することで、Ridge と Lasso の両方において、最小2乗法を上回る精度を出すことが分かった。

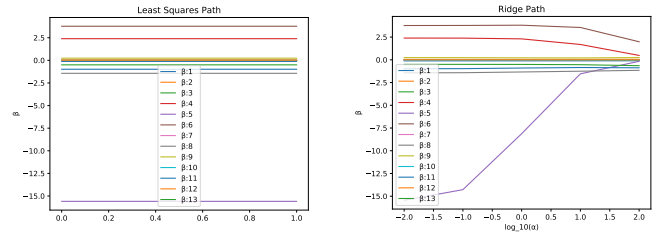


図 1: 最小2乗法の推定値

図 2: Ridge の解パス

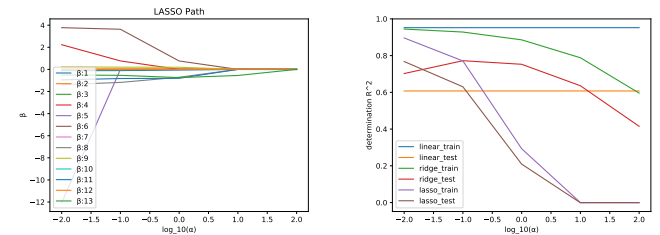


図 3: Lasso の解パス

図 4: 決定係数

表 1: 決定係数

$\alpha$	0.01	0.1	1	10	100
train					
linear	0.95				
ridge	0.94	0.93	0.89	0.79	0.60
lasso	0.90	0.77	0.29	0.00	0.00
test					
linear	0.61				
ridge	0.70	0.77	0.75	0.64	0.42
lasso	0.77	0.63	0.21	0.00	0.00

### 4 まとめ

Ridge と Lasso を中心に、正則化法や線形回帰モデルについて学ぶことができた。数式だけでなく、Python のパッケージを用いた計算機実験による可視化を通して、自分の中でさらにイメージを具体化させることができた。

今後は、Lasso の計算に用いるアルゴリズムを理解して、パッケージを使わずに実装することが課題である。

### 参考文献

- [1] 小西貞則, 『多変量解析入門』. 岩波書店, 2009.