Probabilitas dan Proses Stokastika

Reza Pulungan

Departemen Ilmu Komputer dan Elektronika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

August 14, 2024

Ruang Probabilitas
(Probability Space)

Monty Hall problem

Pada edisi 9 September 1990 majalah *Parade*, Marilyn vos Savant menerima surat berikut:

> *Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say number 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say number 3, which has a goat. He says to you, "Do you want to pick door number 2?" Is it to your advantage to switch your choice of doors?*

Memperjelas masalah

Surat di atas ambigu; oleh karena itu kita mesti membuat asumsi-asumsi:

- Mobil diletakkan di belakang pintu yang ada secara random dan uniform.
- Pemain memilih satu di antara ketiga pintu yang ada secara random dan uniform; tanpa memperdulikan letak mobil.
- Setelah pemain memilih sebuah pintu, host *mesti* membuka pintu *berbeda* dengan kambing di belakangnya dan kemudian menawarkan kepada pemain untuk tetap dengan pintu semula yang dipilihnya atau berpindah.
- Jika host punya pilihan untuk pintu-pintu yang akan dibuka, dia memilihnya secara random dan uniform.

Masalah probabilitas: berapa probabilitas pemain yang memilih berpindah mendapatkan mobil?

Metode empat langkah

Setiap masalah probabilitas selalu melibatkan eksperimen, proses atau permainan yang random.
Untuk menyelesaikan setiap masalah probabilitas, kita harus menjawab dua pertanyaan:

1. Bagaimana memodelkan situasi yang ada secara matematis?
2. Bagaimana memecahkan masalah matematis yang dihasilkan?

Kita akan mendiskusikan metode empat langkah untuk menjawab setiap pertanyaan berbentuk “berapakah probabilitas...”.

Metode empat langkah

Langkah 1: Tentukan ruang sampel (sample space).

Tujuan pertama kita adalah mengidentifikasi semua hasil (outcome) yang mungkin dari eksperimen. Biasanya eksperimen melibatkan beberapa kuantitas yang ditentukan secara random.

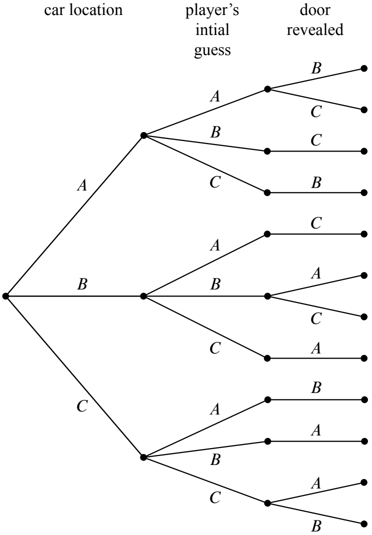
Misalnya, untuk masalah Monty Hall ada 3 kuantitas:

1. Nomor pintu untuk mobil.
2. Nomor pintu yang dipilih oleh pemain di awal.
3. Nomor pintu yang dibuka oleh host (berisi kambing).

Outcome: suatu kombinasi yang mungkin dari semua kuantitas yang ditentukan secara random tersebut.
Sample space: himpunan dari semua outcome yang mungkin.
Kita dapat menggambarkan semua outcome sebagai tree diagram (diagram pohon).

Metode empat langkah

Langkah 1: Tentukan ruang sampel (sample space).



- Setiap daun merepresentasikan sebuah outcome.
- Himpunan semua daun merepresentasikan sample space.

Metode empat langkah

Langkah 1: Tentukan ruang sampel (sample space).

- Kita dapat melabeli setiap outcome sebagai barisan dengan elemen-elemen:

  (pintu untuk mobil, pintu yang dipilih, pintu yang dibuka).

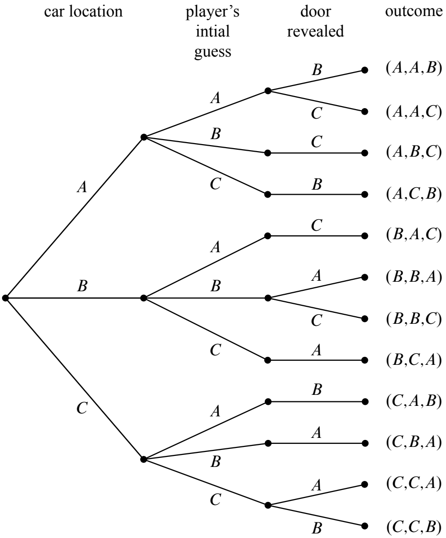
- Oleh karena itu, sample space:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (A, A, B), (A, A, C), (A, B, C), (A, C, B), \\ (B, A, C), (B, B, A), (B, B, C), (B, C, A), \\ (C, A, B), (C, B, A), (C, C, A), (C, C, B) \end{array} \right\}$$

Interpretasi diagram pohon: eksperimen dapat kita pandang sebagai traversal melalui suatu path dari root ke sebuah daun, di mana percabangan diambil secara random.

Metode empat langkah

Langkah 1: Tentukan ruang sampel (sample space).



Metode empat langkah

Langkah 2: Mendefinisikan event of interest.

- Sekumpulan outcome yang merupakan himpunan bagian dari sample space disebut event.
- Event biasanya dikarakterisasi dengan ungkapan dalam bahasa sehari-hari. Umpamanya, event yang bersesuaian dengan "mobil berada di pintu C" adalah:

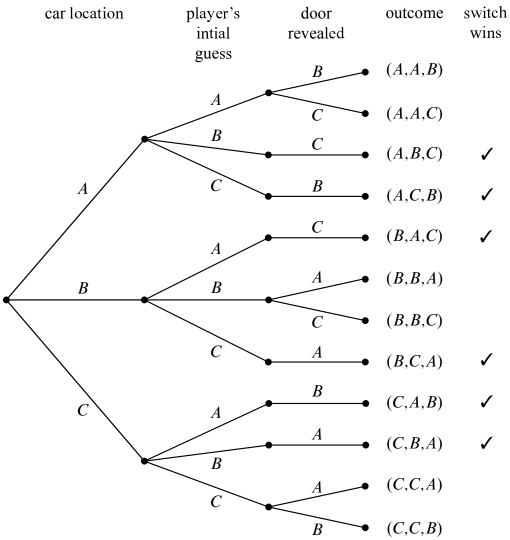
$$\{(C, A, B), (C, B, A), (C, C, A), (C, C, B)\}.$$

- Untuk contoh kita, kita mencari event yang dikarakterisasi oleh "pemain memilih berpindah dan mendapatkan mobil". Event tersebut adalah:

$$\left\{ \begin{array}{c} (A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), \\ (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A) \end{array} \right\}$$

Metode empat langkah

Langkah 2: Mendefinisikan event of interest.



Metode empat langkah

Langkah 2: Mendefinisikan event of interest.

- Perhatikan bahwa persis separuh dari outcome adalah anggota dari event of interest kita.
- Kemungkinan besar anda akan berpikir bahwa probabilitas dari event tersebut oleh karena itu sama dengan 1/2.
- Ini salah, karena probabilitas dari masing-masing outcome tidak sama. Ini akan kita lihat di bagian berikutnya.

Metode empat langkah

Langkah 3: Menentukan probabilitas outcome.

- Pada bagian ini, kepada setiap outcome kita akan assign sebuah probabilitas, yang menggambarkan harapan kemunculan outcome tersebut.
- Jumlahan dari semua probabilitas outcome mestilah 1, karena setiap eksperimen selalu menghasilkan satu outcome.
- Tentu saja, probabilitas ini ditentukan oleh fenomena yang akan kita modelkan, bukan kuantitas yang dapat diperoleh secara matematis.

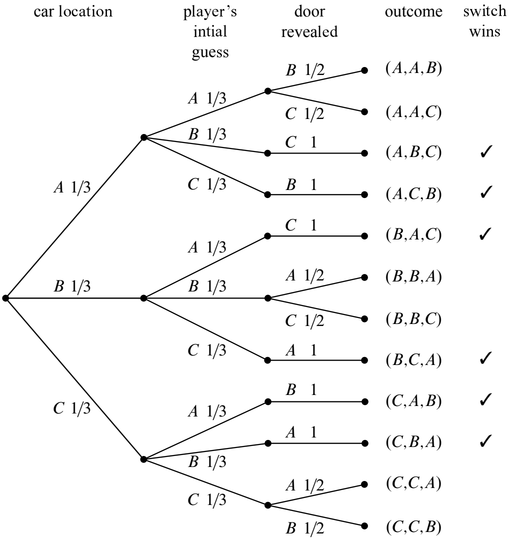
Metode empat langkah

Langkah 3a: Mengassign probabilitas edge.

- Pertama-tama, kita tentukan probabilitas masing-masing edge dari diagram pohon.
- Probabilitas ini ditentukan oleh asumsi yang kita buat tentang model matematika kita.
- Misalnya, kita punya asumsi bahwa “Mobil diletakkan di belakang pintu yang ada secara random dan uniform”. Oleh karena itu, setiap edge pada level pertama memiliki probabilitas yang sama, yaitu 1/3.

Metode empat langkah

Langkah 3a: Mengassign probabilitas edge.



Metode empat langkah

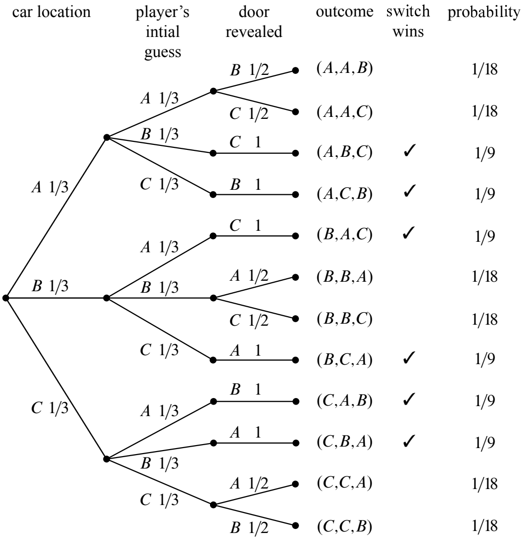
Langkah 3b: Menghitung probabilitas outcome.

- Tugas kita berikutnya adalah mengubah probabilitas edge menjadi probabilitas outcome.
- Probabilitas dari sebuah outcome sama dengan perkalian dari probabilitas dari semua edge yang berada pada path dari root ke daun yang merepresentasikan outcome tersebut.
- Misalnya, untuk probabilitas dari outcome (A, A, B) adalah:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{18}.$$

Metode empat langkah

Langkah 3b: Menghitung probabilitas outcome.



Metode empat langkah

Langkah 3b: Menghitung probabilitas outcome

- Pada waktu kita menentukan probabilitas outcome, kita sebenarnya mendefinisikan sebuah fungsi yang memetakan setiap outcome ke sebuah nilai probabilitas.
- Fungsi ini disebut fungsi $\Pr$.
- Sebagai contoh:

$$\Pr((A, B, C)) = \frac{1}{9}.$$

Metode empat langkah

Langkah 4: Menghitung probabilitas event.

- Langkah terakhir adalah menghitung probabilitas dari event of interest.
- Probabilitas dari event E, dilambangkan oleh $\Pr(E)$ sama dengan jumlahan dari probabilitas dari semua outcome di E.
- Untuk contoh kita, di mana $E =$"pemain memilih berpindah dan mendapatkan mobil" :

$$
\begin{aligned}
\Pr(E) &= \Pr((A,B,C)) + \Pr((A,C,B)) + \Pr((B,A,C)) \\
&\quad + \Pr((B,C,A)) + \Pr((C,A,B)) + \Pr((C,B,A)), \\
&= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}, \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Teori himpunan dan probabilitas

- Probabilitas sangat erat hubungannya dengan teori himpunan.
- Sembarang himpunan bisa menjadi ruang sampel dan sembarang himpunan bagian bisa menjadi event.
- Oleh karena itu, semua teori yang kita ketahui untuk himpunan, berlaku juga untuk probabilitas.

Teori himpunan dan probabilitas

Probability Spaces

Definition (Sample space dan outcome)

- Sebuah sample space (ruang sampel) yang *countable* $\mathcal{S}$ adalah sebuah himpunan *countable* yang tidak kosong.
- Sebuah elemen $\omega \in \mathcal{S}$ disebut sebuah outcome.
- Sebuah himpunan bagian $E \subseteq \mathcal{S}$ disebut sebuah event.

Definition (Probability function)

Sebuah probability function (fungsi probabilitas) yang didefinisikan di atas sebuah sample space $\mathcal{S}$ adalah sebuah fungsi total $\Pr : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga:

- $\Pr(\omega) \geq 0$ untuk semua $\omega \in \mathcal{S}$, dan
- $\sum_{\omega \in \mathcal{S}} \Pr(\omega) = 1$.

Teori himpunan dan probabilitas

Probability Spaces

Definition (Probability function)

Sebuah probability function (fungsi probabilitas) yang didefinisikan di atas sebuah sample space $\mathcal{S}$ adalah sebuah fungsi total $\Pr : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga:

- $\Pr(\omega) \geq 0$ untuk semua $\omega \in \mathcal{S}$, dan
- $\sum_{\omega \in \mathcal{S}} \Pr(\omega) = 1$.

- Suatu sample space bersama dengan probability function (oleh karena itu membentuk struktur $(\mathcal{S}, \Pr)$) disebut probability space.
- Untuk sembarang event $E \subseteq \mathcal{S}$, probabilitas dari event E didefinisikan sebagai:

$$\Pr(E) = \sum_{\omega \in E} \Pr(\omega).$$

Teori himpunan dan probabilitas

Aturan-aturan probabilitas

Theorem (Aturan penjumlahan (sum rule))

Jika $\{E_0, E_1, \cdots,\}$ adalah sekumpulan event yang disjoint, maka:

$$\Pr\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Pr(E_n).$$

Berdasarkan aturan ini, dan karena $\Pr(\mathcal{S}) = 1$, maka $\Pr(A) + \Pr(\bar{A}) = 1$.

Teori himpunan dan probabilitas

Aturan-aturan probabilitas

Theorem (Aturan komplemen (complement rule))

$$\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A).$$

Berdasarkan kedua aturan ini, dan fakta-fakta dasar dari teori himpunan kita peroleh:

- $\Pr(B - A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$,
- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$,
- $\Pr(A \cap B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$,
- Jika $A \subseteq B$, maka $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.

Teori himpunan dan probabilitas

Ruang probabilitas uniform

Definition

Suatu probability space yang *finite* $(\mathcal{S}, \Pr)$ disebut uniform jika $\Pr(\omega)$ sama untuk semua outcome $\omega \in \mathcal{S}$.

Probability space uniform sangat mudah, karena untuk sembarang event $E \subseteq \mathcal{S}$:

$$\Pr(E) = \frac{|E|}{|\mathcal{S}|}.$$

Oleh karena itu, kita hanya perlu mengetahui kardinalitas dari himpunan-himpunan yang kita bicarakan untuk mengetahui probabilitasnya.

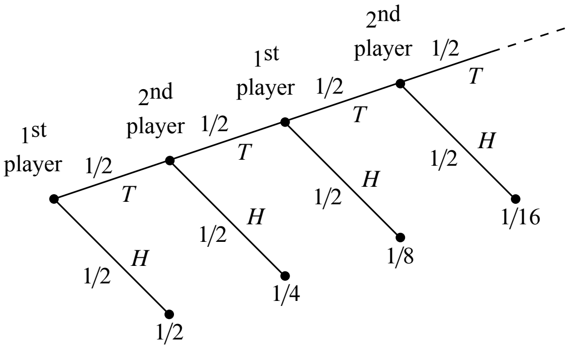
Ruang probabilitas tak hingga

- Teori probabilitas yang umum tidak hanya terbatas pada himpunan yang countable, namun juga himpunan yang tak hingga (infinite) atau bahkan yang uncountable seperti $\mathbb{R}$.
- Ruang probabilitas yang infinite lumayan sering muncul.

Ruang probabilitas tak hingga

Sebagai contoh: dua pemain berganti melemparkan koin; pemain yang memperoleh *head* pertama menjadi pemenang. Berapakah probabilitas pemain pertama menang?

Diagram pohon untuk masalah tersebut adalah sebagai berikut:



Ruang probabilitas tak hingga

- Sample space adalah sebuah himpunan tak hingga:

$$\mathcal{S} ::= \{T^n H \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Probability function adalah:

$$\Pr(T^n H) ::= \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- Untuk memverifikasi, kita bisa pastikan bahwa jumlahan dari semua probabilitas sama dengan 1:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \Pr(T^n H) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

Ruang probabilitas tak hingga

- Sekarang kita bisa menghitung probabilitas dari event of interest kita:

$$\begin{aligned}\Pr(\#1\text{ menang}) &= \Pr(H) + \Pr(TTH) + \Pr(T^4H) + \Pr(T^6H) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots, \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n, \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

- Untuk pemain kedua:

$$\Pr(\#2\text{ menang}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Ruang probabilitas tak hingga

Perhatikan bahwa dalam model ini tidak ada outcome di mana kedua pemain melemparkan koin terus-menerus selamanya. Ini karena probabilitasnya akan sama dengan:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0.$$