Abitur 2018 Mathematik Stochastik III

In Sonnenstadt gibt es 6000 Einfamilienhäuser, von denen 2400 mit einer Holzpelletheizung ausgestattet sind. Bei zwei Dritteln der Einfamilienhäuser mit Holzpelletheizung ist diese mit einer solarthermischen Anlage kombiniert. 50% aller Einfamilienhäuser sind weder mit einer Holzpelletheizung noch mit einer solarthermischen Anlage ausgestattet.

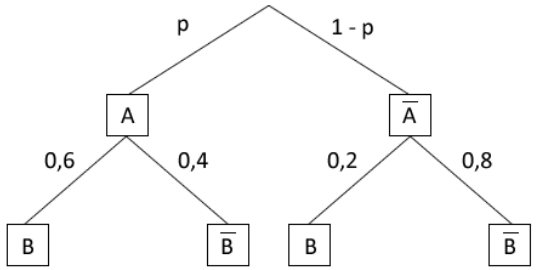
Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Ein zufällig ausgewähltes Einfamilienhaus ist mit einer solarthermischen Anlage ausgestattet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es eine Holzpelletheizung?

Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ dar.



Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

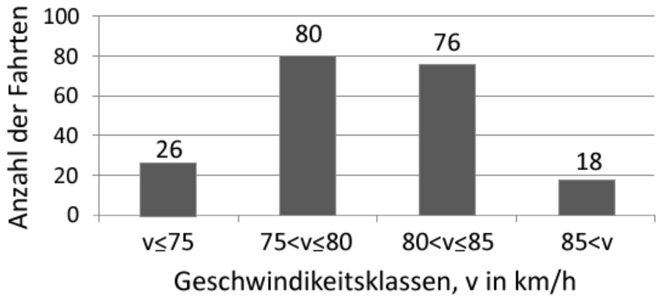
Bestimmen Sie den Wert von p so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment mit der Wahrscheinlichkeit $0,3$ eintritt.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann.

Auf einem Abschnitt einer wenig befahrenen Landstraße ist eine Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h zugelassen. An einer Stelle dieses Abschnitts wird die Geschwindigkeit vorbeifahrender Pkw gemessen. Im Folgenden werden vereinfachend nur solche Fahrten betrachtet, bei denen die Fahrer die Geschwindigkeit unabhängig voneinander wählen konnten.

Für die ersten 200 erfassten Fahrten ergab sich nach Einteilung in Geschwindigkeitsklassen die folgende Verteilung:



Bei 62% der 200 Fahrten war der Fahrer allein unterwegs, 65 dieser Alleinfahrer fuhren zu schnell. Aus den 200 Fahrten wird eine zufällig ausgewählt.
Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: „Der Fahrer war allein unterwegs."

S: „Der Pkw war zu schnell."

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Weisen Sie nach, dass die Ereignisse A und S stochastisch abhängig sind, und geben Sie hierfür einen möglichen Grund im Sachzusammenhang an.

Die Geschwindigkeitsmessungen werden über einen längeren Zeitraum fortgesetzt. Dabei zeigt sich, dass die Verteilung der auf km/h genau gemessenen Geschwindigkeiten näherungsweise durch eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0,8$ beschrieben werden kann. Beispielsweise entspricht $B(100; 0,8; 77)$ näherungsweise dem Anteil der mit einer Geschwindigkeit von 77 km/h erfassten Pkw.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestätigen Sie exemplarisch für eine der beiden mittleren Geschwindigkeitsklassen der oben dargestellten Stichprobe, dass die ermittelte Anzahl der Fahrten mit der Beschreibung durch die Binomialverteilung im Einklang steht.

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Binomialverteilung die kleinste Geschwindigkeit v^*, für die die folgende Aussage zutrifft: „Bei mehr als 95% der erfassten Fahrten wird v^* nicht überschritten."

Die Polizei führt an der Messstelle eine Geschwindigkeitskontrolle durch.
Bei einer Geschwindigkeit von mehr als 83 km/h liegt ein Tempoverstoß vor.
Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass die Geschwindigkeit eines vorbeifahrenden Pkw mit einer Wahrscheinlichkeit von 19% größer als 83 km/h ist.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Berechnen Sie die Anzahl der Geschwindigkeitsmessungen, die mindestens durchgeführt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein Tempoverstoß erfasst wird.

Teilaufgabe Teil B 2b (5 BE)

Liegt in einer Stichprobe von 50 Geschwindigkeitsmessungen die Zahl der Tempoverstöße um mehr als eine Standardabweichung unter dem Erwartungswert, geht die Polizei davon aus, dass wirksam vor der Geschwindigkeitskontrolle gewarnt wurde, und bricht die Kontrolle ab. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geschwindigkeitskontrolle fortgeführt wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tempoverstoß begangen wird, auf 10% gesunken ist.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

In Sonnenstadt gibt es 6000 Einfamilienhäuser, von denen 2400 mit einer Holzpelletheizung ausgestattet sind. Bei zwei Dritteln der Einfamilienhäuser mit Holzpelletheizung ist diese mit einer solarthermischen Anlage kombiniert. 50% aller Einfamilienhäuser sind weder mit einer Holzpelletheizung noch mit einer solarthermischen Anlage ausgestattet.

Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Vierfeldertafel für zwei Ereignisse

H: „Haus mit Holzpelletheizung"

S : „Haus mit solarthermischer Anlage"

$|H| = 2400$

$|H \cap S| = \dfrac{2}{3} \cdot 2400 = 1600$

$|\overline{H} \cap \overline{S}| = 50\% \cdot 6000 = 3000$

	H	$\overline{H}$	
S	1600		
$\overline{S}$		3000	
	2400		6000

Tafel vervollständigen:

	H	$\overline{H}$	
S	1600	600	2200
$\overline{S}$	800	3000	3800
	2400	3600	6000

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Ein zufällig ausgewähltes Einfamilienhaus ist mit einer solarthermischen Anlage ausgestattet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es eine Holzpelletheizung?

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P_S(H) = \frac{P(S \cap H)}{P(S)} = \frac{1600}{2200} = \frac{8}{11}$$

Erläuterung: *Bedingte Wahrscheinlichkeit*

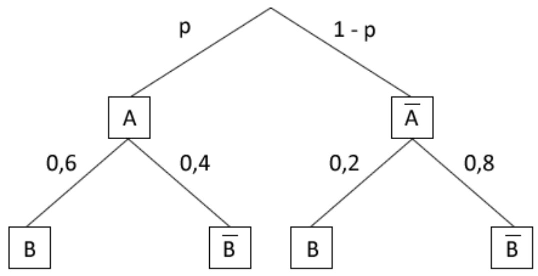
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts geteilt durch die Wahrscheinlichkeit der Bedingung.

Hinweis: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

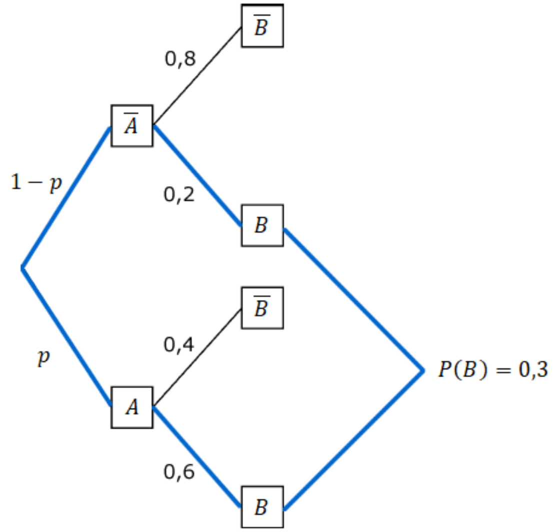
Das abgebildete Baumdiagramm stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B sowie deren Gegenereignissen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ dar.



Bestimmen Sie den Wert von p so, dass das Ereignis B bei diesem Zufallsexperiment mit der Wahrscheinlichkeit $0,3$ eintritt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Wahrscheinlichkeit



$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

$P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \cdot P_{\overline{A}}(B)$

$P(B) = p \cdot 0,6 + (1-p) \cdot 0,2$

$P(B) = 0,4 \cdot p + 0,2$

$0,3 = 0,4 \cdot p + 0,2$

$0,4 \cdot p = 0,1$

$\Rightarrow \quad p = 0,25$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Ermitteln Sie den größtmöglichen Wert, den die Wahrscheinlichkeit von B annehmen kann.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Wahrscheinlichkeit

$P(B) = 0,4 \cdot p + 0,2$

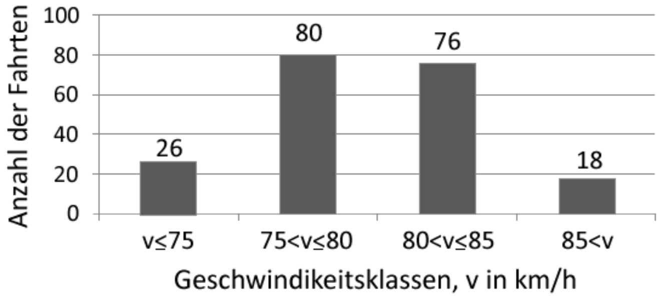
Für $p = 1$ ist $P(B) = 0,6$.

$\Rightarrow \quad P(B) \leq 0,6$, da $p \leq 1$

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Auf einem Abschnitt einer wenig befahrenen Landstraße ist eine Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h zugelassen. An einer Stelle dieses Abschnitts wird die Geschwindigkeit vorbeifahrender Pkw gemessen. Im Folgenden werden vereinfachend nur solche Fahrten betrachtet, bei denen die Fahrer die Geschwindigkeit unabhängig voneinander wählen konnten.

Für die ersten 200 erfassten Fahrten ergab sich nach Einteilung in Geschwindigkeitsklassen die folgende Verteilung:



Bei 62% der 200 Fahrten war der Fahrer allein unterwegs, 65 dieser Alleinfahrer fuhren zu schnell. Aus den 200 Fahrten wird eine zufällig ausgewählt.
Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: „Der Fahrer war allein unterwegs.“

S: „Der Pkw war zu schnell.“

Weisen Sie nach, dass die Ereignisse A und S stochastisch abhängig sind, und geben Sie hierfür einen möglichen Grund im Sachzusammenhang an.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1a

Stochastische Unabhängigkeit

$P(A) = 62\% = 0,62$

$P(S) = \dfrac{76+18}{200} = 0,47$

$P(A \cap S) = \dfrac{65}{200} = 0,325$

$P(A) \cdot P(S) = 0,62 \cdot 0,47 = 0,2914 \neq 0,325 = P(A \cap S)$

möglicher Grund:

Die Anwesenheit eines Mitfahrers beeinflusst die Risikobereitschaft für schnelles Fahren.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Die Geschwindigkeitsmessungen werden über einen längeren Zeitraum fortgesetzt. Dabei zeigt sich, dass die Verteilung der auf km/h genau gemessenen Geschwindigkeiten näherungsweise durch eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0,8$ beschrieben werden kann. Beispielsweise entspricht $B(100; 0,8; 77)$ näherungsweise dem Anteil der mit einer Geschwindigkeit von 77 km/h erfassten Pkw.

Bestätigen Sie exemplarisch für eine der beiden mittleren Geschwindigkeitsklassen der oben dargestellten Stichprobe, dass die ermittelte Anzahl der Fahrten mit der Beschreibung durch die Binomialverteilung im Einklang steht.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1b

Binomialverteilung

Geschwindigkeit: $80 < v \leq 85$

$P_{80}^{100}(80 < X \leq 85) = P_{80}^{100}(81 \leq X \leq 85)$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Wenn die Zufallsvariable X zwischen zwei Zahlen a und b liegen soll, dann gilt:

$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$

„Obere Grenze minus die um 1 verkleinerte untere Grenze“

$P_{80}^{100}(80 < X \leq 85) = P_{80}^{100}(X \leq 85) - P_{80}^{100}(X \leq 80)$

$P_{80}^{100}(80 < X \leq 85) \overset{\text{TW}}{=} 0,91956 - 0,53984 \approx 0,380$

$\dfrac{76}{200} = 0,38$

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Binomialverteilung die kleinste Geschwindigkeit v^*, für die die folgende Aussage zutrifft: „Bei mehr als 95% der erfassten Fahrten wird v^* nicht überschritten.“

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 1c

Binomialverteilung

$P_{0,8}^{100}(X \leq k) > 0,95 \quad \overset{\text{TW}}{\Rightarrow} \quad k \geq 86$

$v^* = 86$ km/h

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

Die Polizei führt an der Messstelle eine Geschwindigkeitskontrolle durch.
Bei einer Geschwindigkeit von mehr als 83 km/h liegt ein Tempoverstoß vor.
Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass die Geschwindigkeit eines vorbeifahrenden Pkw mit einer Wahrscheinlichkeit von 19% größer als 83 km/h ist.

Berechnen Sie die Anzahl der Geschwindigkeitsmessungen, die mindestens durchgeführt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein Tempoverstoß erfasst wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2a

Binomialverteilung

Text analysieren:

p(„Tempoverstoß“) $= 19\% = 0,19$

„Berechnen Sie die Anzahl der Geschwindigkeitsmessungen ..“ $\Rightarrow$ n ist gesucht

“ ...mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% ...“ $\Rightarrow$ $P > 0,99$

“ ... mindestens ein Tempoverstoß ...“ $\Rightarrow$ $X \geq 1$

Es muss also gelten:

Erläuterung: *Bernoulli-Kette*

Das Zufallsexperiment kann als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,19$ angesehen werden.

$P^n_{0,19}(X \geq 1) > 0,99$

Erläuterung: *Gegenereignis*

Wahrscheinlichkeiten des Typs P(mind. 1 Treffer) können meist leicht über das Gegenereignis bestimmt werden.

$P(\text{mind. 1 Treffer}) = 1 - P(\text{kein Treffer})$

$1 - P^n_{0,19}(X = 0) > 0,99 \qquad | -1$

$-P^n_{0,19}(X = 0) > -0,01 \qquad | \cdot(-1)$

$P^n_{0,19}(X = 0) < 0,01$

Erläuterung: *Bernoulli-Formel*

Die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer bei n Versuchen zu erzielen beträgt:

$P(\text{k Treffer}) = P^n_p(Z = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Dabei ist:

$n =$ Anzahl der Versuche
$k =$ Anzahl der Treffer
$p =$ Wahrscheinlichkeit eines Treffers pro Versuch
$1 - p =$ Wahrscheinlichkeit einer Niete pro Versuch

Spezialfall $k = 0$:

$P(\text{0 Treffer}) = P^n_p(Z = 0) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \cdot \underbrace{p^0}_{1} \cdot (1-p)^{n-0}$

$\Rightarrow P(\text{0 Treffer}) = (1-p)^n$

$\binom{n}{0} \cdot 0,19^0 \cdot 0,81^n < 0,01$

$0,81^n < 0,01$

Erläuterung: *Rechenweg*

$0,81^n < 0,01 \qquad | \quad \ln()$

$\ln\left(0,81^n\right) < \ln(0,01)$

$n \cdot \ln(0,81) < \ln(0,01) \qquad | \quad : \ln(0,81)$

(da die Ungleichung durch eine negative Zahl geteilt wird, ändert sich das Relationszeichen)

$n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,81)}$

$n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,81)} \approx 21,85$

$\Rightarrow \quad n \geq 22$ (Messungen)

Teilaufgabe Teil B 2b (5 BE)

Liegt in einer Stichprobe von 50 Geschwindigkeitsmessungen die Zahl der Tempoverstöße um mehr als eine Standardabweichung unter dem Erwartungswert, geht die Polizei davon aus, dass wirksam vor der Geschwindigkeitskontrolle gewarnt wurde, und bricht die Kontrolle ab. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geschwindigkeitskontrolle fortgeführt wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tempoverstoß begangen wird, auf 10% gesunken ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B 2b

Erwartungswert und Standardabweichung

$n = 50$

Erläuterung: *Binomialverteilte Zufallsgröße*

Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt, wenn es genau zwei Ergebnisse gibt: Niete und Treffer.

In diesem Fall:

Treffer = Tempoverstoß ($p = 0,25$)
Niete = kein Tempoverstoß ($q = 0,75$)

$p = 0,19$
$q = 0,81$

Erwartungswert μ_X bestimmen:

Erläuterung: *Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Erwartungswert von X: $\mu = n \cdot p$

$\mu_X = 50 \cdot 0,19 = 9,5$

Standardabweichung σ_X bestimmen:

Erläuterung: *Standardabweichung einer Zufallsgröße*

Ist X binomialverteilt, dann gilt :

Standardabweichung (Streuung) von X: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$\sigma_X = \sqrt{50 \cdot 0,19 \cdot 0,81} = \sqrt{7,695}$

Binomialverteilung

Bereich der geforderten Abweichung: $9,5 - \sqrt{7,695} \approx 6,7 \quad \Rightarrow \quad X \geq 7$

$p = 10\% = 0,10$

$P_{0,10}^{50}(X \geq 7) = 1 - P_{0,10}^{50}(X \leq 6) \overset{\text{TW}}{=} 1 - 0,77023 \approx 23,0\%$