Abitur 2018 Mathematik Geometrie V

Gegeben ist die Kugel mit Mittelpunkt $M(1|4|0)$ und Radius 6.

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Bestimmen Sie alle Werte $p \in \mathbb{R}$, für die der Punkt $P\ (5|1|p)$ auf der Kugel liegt.

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Die Gerade g berührt die Kugel im Punkt $B(-3|8|2)$. Ermitteln Sie eine mögliche Gleichung von g.

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade g_a gegeben durch

$$g_a : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Punkts, in dem g_a die $x_1 x_2$-Ebene schneidet.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Für genau einen Wert von a hat die Gerade g_a einen Schnittpunkt mit der x_3-Achse. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts.

Auf einem Spielplatz wird ein dreieckiges Sonnensegel errichtet, um einen Sandkasten zu beschatten. Hierzu werden an drei Ecken des Sandkastens Metallstangen im Boden befestigt, an deren Enden das Sonnensegel fixiert wird.
In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die $x_1 x_2$ -Ebene den horizontalen Boden dar. Der Sandkasten wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $K_1(0|4|0)$, $K_2(0|0|0)$, $K_3(3|0|0)$ und $K_4(3|4|0)$ beschrieben. Das Sonnensegel wird durch das ebene Dreieck mit den Eckpunkten $S_1(0|6|2,5)$, $S_2(0|0|3)$ und $S_3(6|0|2,5)$ dargestellt (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

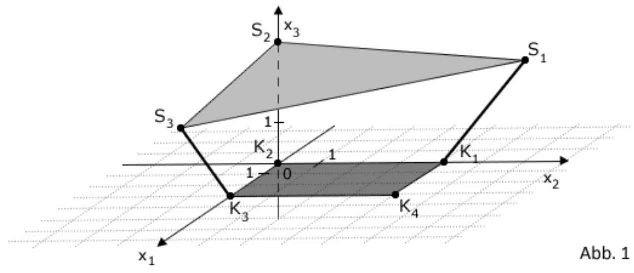


Abb. 1

Die drei Punkte S_1, S_2 und S_3 legen die Ebene E fest.

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(zur Kontrolle: $E : x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0$)

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Der Hersteller des Sonnensegels empfiehlt, die verwendeten Metallstangen bei einer Sonnensegelfläche von mehr als 20 m^2 durch zusätzliche Sicherungsseile zu stabilisieren. Beurteilen Sie, ob eine solche Sicherung aufgrund dieser Empfehlung in der vorliegenden Situation nötig ist.

Auf das Sonnensegel fallen Sonnenstrahlen, die im Modell und in der Abbildung 1 durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_1 K_1}$ dargestellt werden können. Das Sonnensegel erzeugt auf dem Boden einen dreieckigen Schatten. Die Schatten der mit S_2 bzw. S_3 bezeichneten Ecken des Sonnensegels werden mit S_2' bzw. S_3' bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass S_2' auf der x_2 -Achse liegt.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

S_3' hat die Koordinaten $(6|-2|0)$. Zeichnen Sie das Dreieck, das den Schatten des Sonnensegels darstellt, in Abbildung 1 ein. Entscheiden Sie anhand der Zeichnung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Um das Abfließen von Regenwasser sicherzustellen, muss das Sonnensegel einen Neigungswinkel von mindestens $8°$ gegenüber dem horizontalen Boden aufweisen. Begründen Sie, dass das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt ist.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Bei starkem Regen verformt sich das Sonnensegel und hängt durch. Es bildet sich eine sogenannte Wassertasche aus Regenwasser, das nicht abfließen kann. Die Oberseite der Wassertasche verläuft horizontal und ist näherungsweise kreisförmig mit einem Durchmesser von 50 cm. An ihrer tiefsten Stelle ist die Wassertasche 5 cm tief. Vereinfachend wird die Wassertasche als Kugelsegment betrachtet (vgl. Abbildung 2).

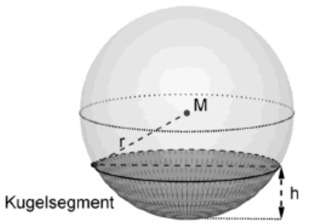


Abb. 2

Das Volumen V eines Kugelsegments kann mit der Formel $V = \frac{1}{3}\pi\, h^2 \cdot (3r - h)$ berechnet werden, wobei r den Radius der Kugel und h die Höhe des Kugelsegments bezeichnen. Ermitteln Sie, wie viele Liter Wasser sich in der Wassertasche befinden.

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (3 BE)

Gegeben ist die Kugel mit Mittelpunkt $M(1|4|0)$ und Radius 6.

Bestimmen Sie alle Werte $p \in \mathbb{R}$, für die der Punkt $P\ (5|1|p)$ auf der Kugel liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Kugel

$$K: \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 6^2$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 6^2$$

$$\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ p \end{pmatrix}\right]^2 = 6^2$$

$$4^2 + (-3)^2 + p^2 = 36$$

$$p^2 + 25 = 36$$

$$p^2 = 11$$

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{11}$$

Teilaufgabe Teil A 1b (2 BE)

Die Gerade g berührt die Kugel im Punkt $B(-3|8|2)$. Ermitteln Sie eine mögliche Gleichung von g.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

Geradengleichung aufstellen

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

möglicher Richtungsvektor der Geraden g: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 + 4 + 0 = 0$

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Eine Gerade g ist durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ eindeutig bestimmt:
>
> $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{P} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \quad , \mu \in \mathbb{R}$
>
> Wenn B als Aufpunkt genommen wird, dann ist $\overrightarrow{B}$ der Ortsvektor (des Aufpunkts) der Geraden g.

$$g: \overrightarrow{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{B}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade g_a gegeben durch

$$g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Punkts, in dem g_a die $x_1 x_2$-Ebene schneidet.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Spurpunkte einer Ebene

$$g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$x_1 x_2$-Ebene: $\quad x_3 = 0$

> Erläuterung: *Spurpunkte einer Geraden*
>
> Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen nennt man Spurpunkte. Um sie zu bestimmen, setzt man die Gleichung der Geraden in die Normalenform (Koordinatenform) der Ebene ein, löst nach dem Parameter λ auf und setzt diesen Wert in die Geradengleichung ein.

Spurpunkt S_2 mit der $x_1 x_2$-Koordinatenebene:

$4 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -4$

$$\overrightarrow{S_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_2(-6|a+4|0)$$

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Für genau einen Wert von a hat die Gerade g_a einen Schnittpunkt mit der x_3-Achse. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Schnitt zweier Geraden

$$g_a: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_3-Achse: $\quad \overrightarrow{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gerade g_a und x_3-Achse schneiden:

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die Geradengleichungen werden gleichgesetzt. Es entsteht somit ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrcl} \text{I.} & 2+2\lambda & = & 0 \\ \text{II.} & a-4-2\lambda & = & 0 \\ \text{III.} & 4+\lambda & = & \mu \end{array}$$

$\text{I} + \text{II}$: $\quad a-2=0 \quad \Rightarrow \quad a=2$

$-2\cdot\text{III}+\text{I}$: $\quad -8-2\lambda+2+2\lambda=-2\mu \quad \Rightarrow \quad -6=-2\mu \quad \Rightarrow \quad \mu=3$

Schnittpunkt: $\quad S(0|0|3)$

Teilaufgabe Teil B a (4 BE)

Auf einem Spielplatz wird ein dreieckiges Sonnensegel errichtet, um einen Sandkasten zu beschatten. Hierzu werden an drei Ecken des Sandkastens Metallstangen im Boden befestigt, an deren Enden das Sonnensegel fixiert wird.
In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die $x_1 x_2$ -Ebene den horizontalen Boden dar. Der Sandkasten wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $K_1(0|4|0)$, $K_2(0|0|0)$, $K_3(3|0|0)$ und $K_4(3|4|0)$ beschrieben. Das Sonnensegel wird durch das ebene Dreieck mit den Eckpunkten $S_1(0|6|2,5)$, $S_2(0|0|3)$ und $S_3(6|0|2,5)$ dargestellt (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

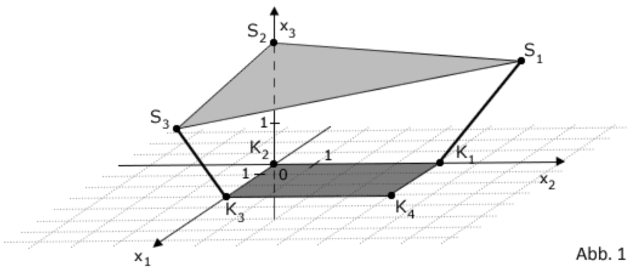


Abb. 1

Die drei Punkte S_1, S_2 und S_3 legen die Ebene E fest.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Ebene aus drei Punkte

Richtungsvektoren der Ebene E:

$$\overrightarrow{S_2S_3} = \overrightarrow{S_3} - \overrightarrow{S_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{S_2S_1} = \overrightarrow{S_1} - \overrightarrow{S_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$S_2(0|0|3)$ sei Aufpunkt des Ortsvektors der Ebene E.

Ebenengleichung in Normalenform

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{S_2S_3} \times \overrightarrow{S_2S_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebenengleichung.
Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Teilen/Multiplizieren durch/mit einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor mit $\frac{1}{3}$ multipliziert.

Das erleichtert das Weiterrechnen <u>wesentlich</u>.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Normalenform bestimmen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E : \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (S_2 ist Aufpunkt):

$$E : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{S_2}}$$

$E : x_1 + x_2 + 12x_3 = 0 + 0 + 36$

$E : x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0$

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

Der Hersteller des Sonnensegels empfiehlt, die verwendeten Metallstangen bei einer Son-

nensegelfläche von mehr als 20 m^2 durch zusätzliche Sicherungsseile zu stabilisieren. Beurteilen Sie, ob eine solche Sicherung aufgrund dieser Empfehlung in der vorliegenden Situation nötig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt des Sonnensegels:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{S_2 S3} \times \overrightarrow{S_2 s_1} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9 + 9 + 1269} \approx 18 < 20$$

Es ist keine Sicherung notwendig.

Teilaufgabe Teil B c (2 BE)

Auf das Sonnensegel fallen Sonnenstrahlen, die im Modell und in der Abbildung 1 durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_1 K_1}$ dargestellt werden können. Das Sonnensegel erzeugt auf dem Boden einen dreieckigen Schatten. Die Schatten der mit S_2 bzw. S_3 bezeichneten Ecken des Sonnensegels werden mit S_2' bzw. S_3' bezeichnet.

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass S_2' auf der x_2 -Achse liegt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B c

Lage eines Punktes

S_2' liegt in der $x_2 x_3$-Ebene, da $S_2 S_2'$ parallel zu $S_1 K_1$ ist und die Punkte S_1, K_1 und S_2 in der $x_2 x_3$-Ebene liegen.

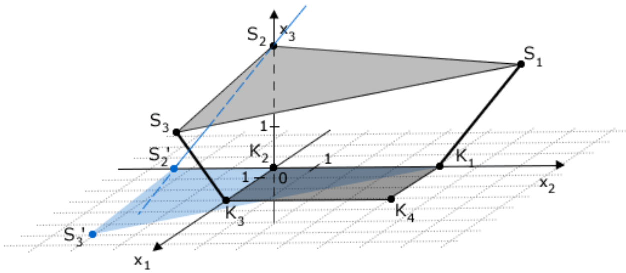
S_2' liegt auch in der $x_1 x_2$-Ebene, also liegt S_2' auf der x_2-Achse.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

S_3' hat die Koordinaten $(6|-2|0)$. Zeichnen Sie das Dreieck, das den Schatten des Sonnensegels darstellt, in Abbildung 1 ein. Entscheiden Sie anhand der Zeichnung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Skizze



Es wird mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Um das Abfließen von Regenwasser sicherzustellen, muss das Sonnensegel einen Neigungswinkel von mindestens 8° gegenüber dem horizontalen Boden aufweisen. Begründen Sie, dass das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt ist.

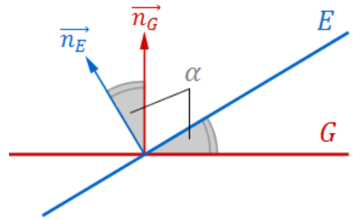
Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Winkel zwischen zwei Ebenen

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der $x_1 x_2$-Ebene: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel φ zwischen den Normalenvektoren der Ebene E und der $x_1 x_2$-Ebene bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Ebenen*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Für den Richtungsvektor der x_1x_2-Ebene $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt z.B:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{0 + 0 + 12}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 12^2} \cdot 1} = \frac{12}{\sqrt{146}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{146}}\right) \approx 6{,}72^\circ$$

Der Neigungswinkel ist zu gering.

Teilaufgabe Teil B f (5 BE)

Bei starkem Regen verformt sich das Sonnensegel und hängt durch. Es bildet sich eine sogenannte Wassertasche aus Regenwasser, das nicht abfließen kann. Die Oberseite der Wassertasche verläuft horizontal und ist näherungsweise kreisförmig mit einem Durchmesser von 50 cm. An ihrer tiefsten Stelle ist die Wassertasche 5 cm tief. Vereinfachend wird die Wassertasche als Kugelsegment betrachtet (vgl. Abbildung 2).

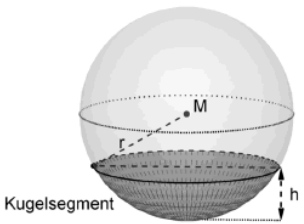


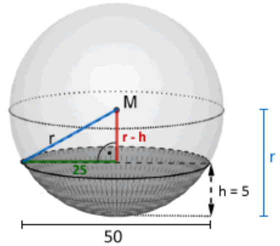
Abb. 2

Das Volumen V eines Kugelsegments kann mit der Formel $V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r - h)$ berechnet

werden, wobei r den Radius der Kugel und h die Höhe des Kugelsegments bezeichnen. Ermitteln Sie, wie viele Liter Wasser sich in der Wassertasche befinden.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B f

2-dimensionale Geometrie



Radius r der Kugel bestimmen:

$$25^2 + (r - 5)^2 = r^2$$

$$625 + r^2 - 10r + 25 = r^2$$

$$650 - 10r = 0$$

$$r = 65 \text{ cm}$$

Volumen des Kugelsegments bestimmen:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot (3 \cdot 65 - 5) \approx 4974{,}2 \text{ cm}^3$$

Es befinden sich ca. 5 Liter Wasser in der Wassertasche.