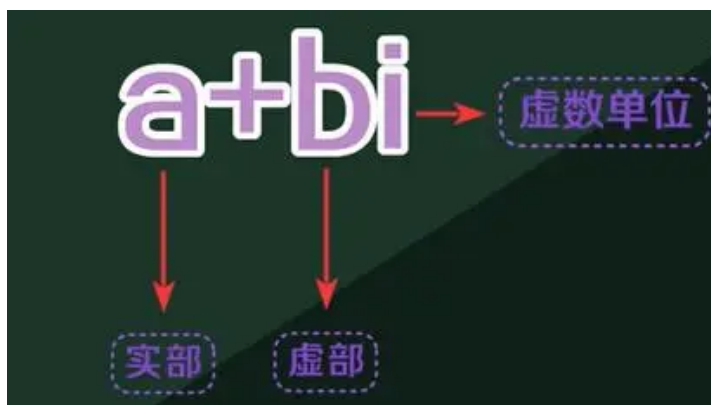


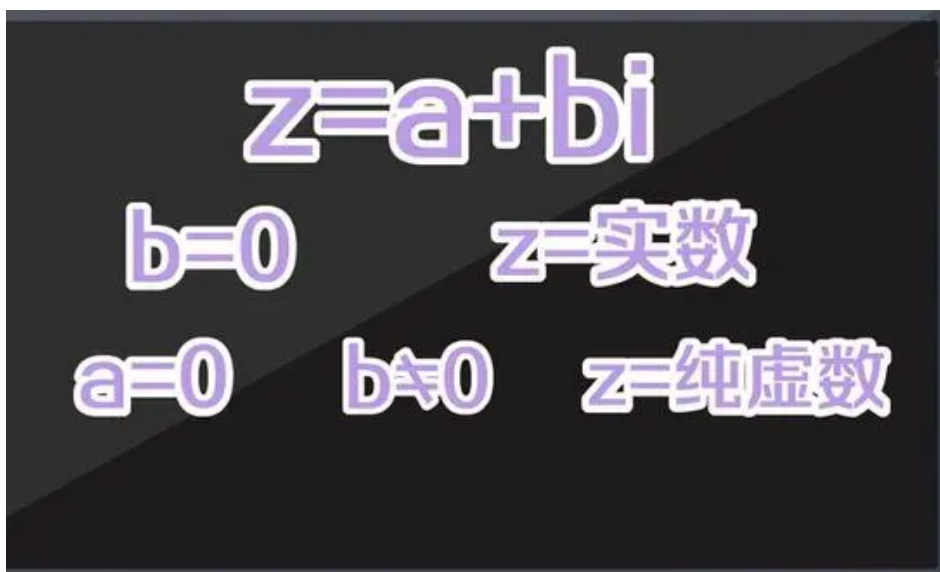
○ 复数

一、什么是复数

我们把形如 $z=a+bi$ （ a 、 b 均为实数）的数称为复数。其中， a 称为实部， b 称为虚部， i 称为虚数单位。



当 z 的虚部 $b=0$ 时，则 z 为实数；当 z 的虚部 $b\neq 0$ 时，实部 $a=0$ 时，常称 z 为纯虚数。



复数域是实数域的代数闭包，即任何复系数多项式在复数域中总有根。

复数是由意大利米兰学者卡当在十六世纪首次引入，经过达朗贝尔、棣莫弗、欧拉、高斯等人的工作，此概念逐渐为数学家所接受。

二、复数的分类



复数分类

复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 可以分类如下:

复数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{实数 } (b = 0), \\ \text{虚数 } (b \neq 0) \text{ (当 } a = 0 \text{ 时为纯虚数)}. \end{array} \right.$

复数可以分为两类数: 实数、虚数。

复数中的实部就是**实数**, 包括有理数和无理数。

虚部就是以*i*为基本单位的**虚数**。*i*的定义是在复数域中, 规定 $i^2 = -1$, 同样 $(-i)^2 = -1$ 。二者加到一块就是复数, 比如: $1+2i$, $3+4i$, $3i$ 等等。

三、复数与实数虚数的关系

实数、虚数和复数的关系

- 1、复数可以分为两类数: 实数、虚数。
- 2、所有实数和所有虚数构成了所有的复数, 复数不含实数、虚数之外的数。
- 3、实数、虚数都是复数; 不存在既是实数, 又是虚数的复数; 任何一个复数, 不属于实数就属于虚数, 二者必居其一。

实数、虚数都是复数; 不存在既是实数, 又是虚数的复数; 任何一个复数, 不属于实数就属于虚数, 二者必居其一。

复数是实数、虚数判定的充要条件。

- 1、当虚部 $b=0$ 时, 复数 $z=a \in \mathbf{R}$, 此时“ z ”属于复数中的实数。即, 复数 $z=a+bi$ 为实数的充要条件是“ $b=0$ ”。
- 2、当虚部 $b \neq 0$ 时, 复数 z 具有形式“ $a+bi$ ”, 此时不管实部 a 是否为0, 复数 z 都属于复数中的虚数。即, 复数 $z=a+bi$ 为虚数的充要条件是“ $b \neq 0$ ”。

四、共轭复数

两个实部相等, 虚部互为相反数的复数互为共轭复数 (conjugate complex number)。



当虚部不为零时，共轭复数就是实部相等，虚部相反；如果虚部为零，其共轭复数就是自身。

五、复数的运算法则和运算律

加法法则： 设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ 是任意两个复数。两者和的实部是原来两个复数实部的和，它的虚部是原来两个虚部的和。两个复数的和依然是复数，即 $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ ；

复数的四则运算：

1 复数的加法与减法

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a + c) \pm (b + d)i$$

即：两个复数相加（减）就是实数部与实数部，虚数部与虚数部分别相加（减）

乘法法则： 把两个复数相乘，类似两个多项式相乘，结果中 $i^2 = -1$ ，把实部与虚部分别合并。两个复数的积仍然是一个复数。即 $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$ ；

设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ 是任意两个复数，那么它们的积

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

任何 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

交换律 $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

结合律 $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

分配律 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

除法法则： 满足 $(c + di)(x + yi) = (a + bi)$ 的复数 $x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ 叫复数 $a + bi$ 除以复数 $c + di$ 的商。运算方法：可以把除法换算成乘法做，将分子分母同时乘上分母的共轭复数，再用乘法运算。

先把除式写成分式的形式, 再把分子与分母都乘以分母的共轭复数, 化简后写成代数形式(分母实数化). 即

$$\begin{aligned}(a+bi) \div (c+di) &= \frac{a+bi}{c+di} \\&= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \\&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (c+di \neq 0).\end{aligned}$$

分母实数化

运算律:

加法交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1$

乘法交换律: $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$

加法结合律: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

乘法结合律: $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$

分配律: $z_1 \times (z_2+z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$

六、复数的基本性质

(1)共轭复数所对应的点关于实轴对称。

(2)两个复数: $x+yi$ 与 $x-yi$ 称为共轭复数, 它们的实部相等, 虚部互为相反数。

(3)在复平面上, 表示两个共轭复数的点关于X轴对称。

七、复数的应用

系统分析中, 系统常常通过拉普拉斯变换从时域变换到频域。因此可在复平面上分析系统的极点和零点。分析系统稳定性的根轨迹法、奈奎斯特图法和尼科尔斯图法都是在复平面上进行的。无论系统极点和零点在左半平面还是右半平面, 根轨迹法都很重要。如果系统极点位于右半平面, 则因果系统不稳定; 都位于左半平面, 则因果系统稳定; 位于虚轴上, 则系统为临界稳定的。如果系统的全部零点和极点都在左半平面, 则这是个最小相位系统。如果系统的极点和零点关于虚轴对称, 则这是全通系统。

信号分析和其他领域使用复数可以方便的表示周期信号。模值 $|z|$ 表示信号的幅度, 辐角 $\arg(z)$ 表示给定频率的正弦波的相位。利用傅立叶变换可将实信号表示成一系列周期函数的和。这些周期函数通常用形式如下的复函数的实部表示: 其中 ω 对应角频率, 复数 z 包含了幅度和相位的信息。

电路分析中, 引入电容、电感与频率有关的虚部可以方便的将电压、电流的关系用简单的线性方程表示并求解。