А. ТИТОВ.

Закон отражения света от движущегося зеркала.

Специальная теория относительности в физике явилась следствием неудачных результатов целого ряда опытов, произведенных с целью обнаружить поступательное движение земли в пространстве.

Формулы преобразования Лоренца, лежащие в основе этой теории, приводят к целому ряду физических законов, которые должны иметь место в равномерно движущихся системах. Однако экстриментальное подтверждение теории относительности весьма затруднительно; в виду требующихся для этой цели огромных скоростей, выводы теории могут быть подтверждены на ограниченном круге явлений (коэфициент увеличения света, отклонение β лучей радия С в электрическом и магнитном поле, тончайшая структура спектральных линий по Зоммерфельду и некот. друг.). Но можно итти и другим путем и этот путь не отмечен с достаточной резкостью в научной литературе. Можно пытаться, исходя из теории относительности, подтвердить теоретические результаты классической электродинамики относительно процессов в движущихся системах в той части, где выводы не зависят от применения формул преобразования и принципа относительности. К таким теоретическим результатам относится закон отражения света от движущегося зеркала, полученный М. Абрагамом в 1904 г. на основании положений классической элекродинамики, независимо от соображений теории относительности. В работах по принципу относительности этот закон в форме данной М. Абрагамом, не был получен.

В настоящей работе рассмотрено равномерное и прямолинейное движение зеркала (случай, когда кроме нормальной составляющей скорости, имеется еще и тангенциальная в плоскости падения луча), при чем показывается, что при применении только одной гипотезы сокращения Лоренца (без формулы преобразования времени), получаются результаты, найденные М. Амбрагамом. Для удобства рассуждений автор останавливается на точке зрения Лоренца (о действительности сокращения), а не Эйнштейна (неотдающий предпочтения какой-либо движущейся системе). Обе точки зрения Лоренца и Эйнштейна, как известно приводят к формально одинаковым результатам.

Представим себе следующую материальную установку (черт. 1) и пусть эта установка находится в состоянии покоя.

B_0 зеркало; γ_0 угол, обращенный осью OX с плоскостью зеркала; B_0C_0 материальная нормаль к зеркалу. Из т. A_0 материальной прямой перпендикулярной нормали выходит луч и по отражении в т. B_0 зеркала пересокает эту материальную прямую в т. A'_0.

Обозначим:

$$B_0C_0 = b_0;\ A_0C_0 = a_0;\ \angle N_0C_0X = \delta_0;$$

Тогда, если зеркало находится в покое.

$$\angle A_0B_0C = \angle C_0B_0A'_0 = \alpha_0;\ A_0C_0 = C_0A'_0 = a_0;$$

Теперь предположим, что вся эта материальная установка приходит в движение по направлению OX с постоянной скоростью V (черт. 2). Тогда вследствие сокращения в направлении движения размеры материальных отрезков a_6 и b_0, их проэкций a_{0_x} и b_{0_x} на ось OX, и углы γ_0 и δ_0, составляемые материальными прямыми с осью OX, изменятся в: a; b; a_x b_x; γ и δ_1. Нормаль к движущемуся зеркалу будет составлять с осью OX некоторый угол δ, отличный от δ_1.

Покоющаяся система в наших рассуждениях является вспомогательной системой. Покажем, что величины: a; проэкции a и b на оси OX и OY и углы γ и δ_1 являются фукциями: a_0; b_0 и v как вектора.

Обозначим нормальную и тангенциальную слагаемые скорости движения зеркала на нормаль и плоскость зеркала через v_n и v_t.

Определим сначала зависимость между: γ_0; γ и δ_1.

Пусть $O_0\ B_0\ C_0$ (черт. 3) некоторый материальный прямоугольный треугольник $\left(B_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ в состоянии покоя. OB_0C—тот же материальный треугольник в состоянии прямолинейного равномерного движения со скоростью v по оси OX. Обозначим:

$\angle B_0O_0X = \gamma_0$; $\angle BOX = \gamma$; $\angle N_0C_0X = \delta_0$; $\angle MCX = \delta_1$; $\angle NKX = \delta$; $B_0H = y$; $O_0H = X$; $C_0H = u$; Очевидно γ и γ_0 соответствуют углам плоскости зеркала с осью OX в состоянии покоя и в состоянии движения, углы: δ_0; δ и δ_1 аналогично углам нормали и материальной прямой, служившей нормалью к зеркалу.

Пусть c будет скорость света в пустоте. Введем обозначения:

$$\frac{v}{c} = \beta;\ \frac{v_n}{c} = \beta_n;\ \frac{v_t}{c} = \beta_t;\ k = \sqrt{1-\beta^2}\ k_n = \sqrt{1-\beta_n^2};\ k_t = \sqrt{1-\beta_t^2};$$

Тогда из черт. 2 и 3

$$tg\gamma = \frac{v_n}{v_t} = \frac{\beta_n}{\beta_t};\ \sin\gamma = \frac{\beta_n}{\beta};\ Cos\gamma = \frac{\beta_t}{\beta}\ \ldots\ldots \quad (1)$$

Согласно гипотезе сокращения Лоренца будем иметь (черт. 3) $OH = kx$ и $CH = ku$ и т. к. поперечные размеры при движении не меняются:

$$y = xtg\gamma_0 = kxtg\gamma\ \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$y = u\,tg\delta_0 = k u\,tg\delta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Из (2)

$$tg\gamma_0 = k\,tg\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Перемножая (2) на (3) и замечая, что $tg\gamma_0 \cdot tg\delta_0 = 1$, получаем

$$tg\delta_1 = \frac{1}{k^2 tg\gamma}$$

Подставляя из (1) $tg\gamma$ имеем

$$tg\delta_1 = \frac{\beta_t}{k^2\beta_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Выразим $Cos\gamma_0$ и $Sin\gamma_0$ через β_n и β_t

$$Cos\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2\beta_n^2}{\beta_t^2}}} = \frac{\beta_t}{\beta k_n} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$Sin\gamma_0 = \frac{tg\gamma_0}{\sqrt{1+tg^2\gamma_0}} = \frac{\frac{k\beta_n}{\beta_t}}{\sqrt{1+\frac{k^2\beta_n^2}{\beta_t^2}}} = \frac{k\beta_n}{\beta k_n} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Теперь из черт. 1 и 2 вычислим: a_y; a; a_x; b_y и b_x. Т. к. раз- a_y и b_y не меняются при движении, то имеем:

$$a_y = a_0\,Sin\gamma_0 = a\,Sin\gamma = a_x tg\gamma$$

$$b_y = b_0\,Cos\gamma_0 = b_x tg\delta_1$$

откуда:

$$a_y = a_0\,Sin\gamma_0; \qquad b_y = b_0\,Cos\gamma_0;$$

$$a_x = a_0\frac{Sin\gamma_0}{tg\gamma}; \qquad b_x = b_0\frac{Cos\gamma_0}{tg\delta_1};$$

$$a = a_0\frac{Sin\gamma_0}{Sin\gamma};$$

Подставляя из (5), (6) и (7) значения tg, Cos и Sin, получим окончательно; a; a_x; a_y; b_x; b_y как функции: a_0; b_0 и скорости движения зеркала

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0\frac{k}{k_n} \\ a_x &= a_0\frac{k\beta_t}{\beta k_n} \\ a_y &= a_0\frac{k\beta_n}{\beta k_n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8) \qquad \begin{aligned} b_y &= b_0\frac{\beta_t}{\beta k_n}; \\ b_x &= b_0\frac{k^2\beta_n}{\beta k_n} \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Рассмотрим теперь движение лучей, падающих на зеркало и отраженных от зеркала (черт. 4). Пусть в тот момент, когда луч вышел из точки

А зеркало находилось в т. В. В промежуток времени, за который луч проходит путь $l_1 = AB_1$ до встречи с зеркалом в т. B_1; зеркало совершит путь $PP_1 = S_1$; (точки материальной установки: A; C; A^1 займут положения в момент встречи: A_1; C_1; A_1'). В промежуток же времени, когда луч, отразившись нагонит т. A^1 нашей материальной установки в ее положении A_2' (пройдя путь $B_1A_2^1 = l_2$), зеркало пройдет путь $P_1P_2 = S_2$; (Точки материальной установки: A; C; A^1 займут положение в этот момент: A_2; C_2; A_2^1).

Тогда очевидно:

$$\frac{s_1}{l_1} = \frac{v}{c} = \beta; \ \frac{s_2}{l_2} = \frac{v}{c} = \beta;$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \beta l_1 \\ s_2 &= \beta l_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Вычислим $\operatorname{Sin}\alpha_1$ и $\operatorname{Sin}\alpha_2$; где α_1 угол падения, α_2 угол отражения ($B_1 N_1$ нормаль к зеркалу).

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\alpha_1 &= \frac{a + \overline{CD} + \overline{DF}}{l_1} \\ \operatorname{Sin}\alpha_2 &= \frac{a - \overline{C_2D_2} + \overline{D_2F_2}}{l_2} \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$\overline{DF} = \overline{NN_1} \operatorname{Cog}\gamma = s_1 \operatorname{Cog}\gamma = \beta l_1 \operatorname{Cos}\gamma = \beta_t l_1$; $\overline{D_2F_2} = \overline{N_1N_2} \operatorname{Cos}\gamma = s_2 \operatorname{Cos}\gamma = \beta l_2 \operatorname{Cos}\gamma = \beta_t l_2$.

Определим CD; из треугольника BCD (черт. 2) имеем, т. к. $\angle OCB = \angle MCX = \delta_1$; $\angle A_1CX = \gamma$; и $BC = b$:

$\overline{CD} = b \operatorname{Cos} [\pi - (\gamma + \delta_1)] = -b \operatorname{Cos} (\gamma + \delta_1)$ замечая, что $b = \frac{b_y}{\operatorname{Sin}\delta_1}$: получим

$$\overline{CD} = \frac{-b_y \operatorname{Cos} (\gamma + \delta_1)}{\operatorname{Sin} \delta_1} = -b_y \left(\frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{tg}\delta_1} - \operatorname{Sin}\gamma \right) =$$

$$= -b_y (k^2 \operatorname{tg}\gamma \operatorname{Cos}\gamma - \operatorname{Sin}\gamma) = -b_y \operatorname{Sin}\gamma \,.\, (-\beta^2);$$

и подставляя значения b_y и $\operatorname{Sin}\gamma$ из (1) и (9) имеем:

$$\overline{CD} = b_0 \frac{\beta_t \beta_n}{k_n}$$

Подставляя значения $\overline{CD}$: $\overline{DF}$ и a из (8) в (11) получим

$$\operatorname{Sin} \alpha_1 = \frac{a_0 k + b_0 \beta_n \beta_t + k_n \beta_t l_1}{k_n l_1} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

аналогично

$$\operatorname{Sin} \alpha_2 = \frac{a_0 k - b_0 \beta_n \beta_t + k_n \beta_t l_2}{k_n l_2} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Из треугольников AB_1Q_1 и $A_2^1B_1Q_2$ имеем уравнения для l_1 и l_1

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 &= (a_y + b_y)^2 + [b_x - (a_x + s_1)]^2 \\ l_2^2 &= (b_y - a_y)^2 + [b_x + (a_x + s_2)]^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (15)$$

Подставляя из (10) s_1 и s_2, после преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} k^2 l_1^2 + 2\beta (b_x - a_x)\, l_1 - [(b_y + a_y)^2 + (b_x - a_x)^2] \\ k^2 l_2^2 - 2\beta (b_x + a_x)\, l_2 - [(b_y - a_y)^2 + (b_x + a_x)^2] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

Уравнение (16) дает по упрощении выражения под корнем

$$l_1 = \frac{-2\beta (b_x - a_x) \pm \sqrt{4k^2 (a_y + b_y)^2 + 4(b_x - a_x)^2}}{2k^2} \quad (17)$$

Подставляя значения a_x; a_y; b_x; b_y из (8) и (9) в (17), раскрывая скобки и замечая, что $k^2\beta_n^2 + \beta_t^2 = k_n^2\beta^2$; после несложных преобразований будем иметь:

$$l_1 = \frac{-b_0 k\beta_n + a_0\beta_t \pm k_n\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}{kk_n} \quad \ldots\ldots (18)$$

аналогично для l_2

$$l_2 = \frac{b_0 k\beta_n + a_0\beta_t \pm k_n\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}{kk_n}; \quad \ldots\ldots (19)$$

Т. к. длину пути луча будем считать положительной, то перед корнем следует выбрать знак $+$, что видно из частного случая, полагая $\beta_t = 0$, тогда в формулах (18) и (19);

$$|b_0 k\beta_n| < k_n \sqrt{a_0^2 + b_0^2},$$

ибо $k = k_n$, а β_n всегда меньше единицы.

Подставляя найденные значения l_1 и l_2 в (13) и (14), для $\operatorname{Sin}\alpha_1$ и $\operatorname{Sin}\alpha_2$ получим.

$$\operatorname{Sin}\alpha_1 = \frac{a_0 k_n^2 + k_n\beta_t\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}{a^0\beta_t - b_0 k\beta_n + k_n\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}$$

$$\operatorname{Sin}\alpha_2 = \frac{a_0 k_n^2 + k_n\beta_t\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}{a_0\beta_t + b_0 k\beta_n + k_n\sqrt{a_0^2 + b_0^2}}$$

Вводим в полученные выражения переменный параметр $Z = \dfrac{b_0}{a_0}$

$$\operatorname{Sin}\alpha_1 = \frac{k_n^2 + k_n\beta_t\sqrt{1 + Z^2}}{\beta_t - k\beta_n Z + k_n\sqrt{1 + Z^2}} \quad \ldots\ldots (20)$$

$$\operatorname{Sin}\alpha_2 = \frac{k_n^2 + k_n\beta_t\sqrt{1 + Z^2}}{\beta_t + k\beta_n z + k_u\sqrt{1 + z^2}} \quad \ldots\ldots (21)$$

Можно было бы решить относительно z уравнения (20) и (21) и, приравняв значения z, найти таким образом, зависимости между α_1; α_2 и скоростью v как вектором, т. е. закон отражения света от движущегося зеркал, но непосредственное решение относительно z приводит к сложным выкладкам.

Мы воспользуемся некоторой подстановкой.

Рассмотрим сначала частный случай, когда $\beta_n = 0$, т. е. тангенциальное движение зеркала; тогда

$$\mathrm{Sin}_1 = \mathrm{Sin}_2 = \frac{1 + \beta_t \sqrt{1 + z^2}}{\beta_t + \sqrt{1 + z^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Имеем следовательно обычный закон отражения. Тангенциональное движение зеркала не меняет закона отражения.

Решая выражение (22) относительно z, получим:

$$z = \frac{\kappa_t \,\mathrm{Cos}\alpha_1}{\mathrm{Sin}\alpha_1 - \beta_t}$$

Обращаемся вновь к общему случаю. Введем в выражение (20) и (21) новую переменную ω вместо z уравнением;

$$z = \frac{\kappa_t^1 \,\mathrm{Cos}\omega}{\mathrm{Sin}\omega - \beta_t^1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

положим: $\beta_t^1 = \dfrac{\beta_t}{\kappa_n}$ и $\kappa_t^1 = \sqrt{1 - \beta_t^{1\,2}}$; тогда $\kappa_t^1 = \dfrac{\kappa}{\kappa_n}$; при чем изменения переменной ω ограничим первой четвертью, что вполне достаточно, чтобы получить все значения $z = \dfrac{b_0}{a_0}$ от 0 до $+\infty$;

Приводим некоторые этапы вычислений:

$$\sqrt{1 + z^2} = \frac{1 - \beta_t^1 \,\mathrm{Sin}\omega}{\mathrm{Sin}\omega - \beta_t^1}$$

$$\mathrm{Sin}\alpha_1 = \frac{\kappa_n^2 (\mathrm{Sin}\omega - \beta_t^1) + \beta_t \kappa_n (1 - \beta_t^1 \,\mathrm{Sin}\omega)}{\beta_t (\mathrm{Sin}\omega - \beta_t^1) - \beta_n \kappa\kappa_t^1 \,\mathrm{Cos}\omega + \kappa_n (1 - \beta_t^1 \,\mathrm{Sin}\omega)} =$$

$$= \frac{\kappa_n^2 \,\mathrm{Sin}\omega - \kappa_n\beta_t + \kappa_n\beta_t - \beta_t^{1\,2}\kappa_n^2 \,\mathrm{Sin}\omega}{\beta_t \,\mathrm{Sin}\omega - \beta_t^{1\,2}\kappa_n - \beta_n\kappa_n\kappa_t^{1\,2} \,\mathrm{Cos}\omega + \kappa_n - \beta_t \,\mathrm{Sin}\omega} =$$

$$= \frac{\kappa_n^2\kappa_t^{1\,2} \,\mathrm{Sin}\omega}{\kappa_n\kappa_t^{1\,2} - \beta_n\kappa_n\kappa_t^{1\,2} \,\mathrm{Cos}\omega} = \frac{\kappa_n \,\mathrm{Sin}\omega}{1 - \beta_n \,\mathrm{Cos}\omega}$$

Окончательно для (20) и (21) получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Sin}\alpha_1 &= \frac{\kappa_n \,\mathrm{Sin}\omega}{1 - \beta_n \,\mathrm{Cos}\omega} \\ \mathrm{Sin}\alpha_2 &= \frac{\kappa_n \,\mathrm{Sin}\omega}{1 + \beta_n \,\mathrm{Cos}\omega} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Решая уравнение (24) относительно $\mathrm{Cotg}\omega = y$, получаем

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\beta_n \pm \mathrm{Cos}\alpha_1}{k_n \,\mathrm{Sin}\alpha_1} \\ y &= \frac{-\beta_n \pm \mathrm{Cos}\alpha_2}{k_n \,\mathrm{Sin}\alpha_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Знак перед косинусами следует выбрать $+$, что видно из частного члучая $\beta_n = 0$, ибо $y = \mathrm{Cotg}\varphi$ в силу нашего выбора положителен.

Приравнивая значения y и сокращая на k_n, получим одну из найденных М. Абрагамом *) форм закона отражения света от движущегося зеркала

$$\frac{\beta_n + \mathrm{Cos}\alpha_1}{\mathrm{Sin}\alpha_1} = \frac{-\beta_n + \mathrm{Cos}\alpha_2}{\mathrm{Sin}\alpha_2}$$

Екатеринбург,
1 февраля 1921 г.

А. Титов.

*) Annalen d. Physik 1904. B. 14. S. 255.

The law of the reflecion of light from a moving mirror.

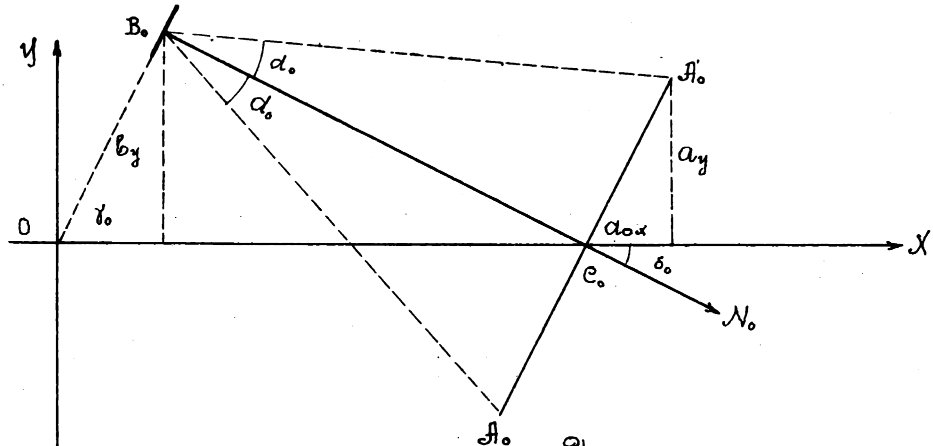
A. M. Titow.

Experimental control of the theory of relativeness is a very difficulty. In consequence of the necessariness for this purpose a veri high velocities the deductions of this theory can be control upon limited circle of the phenomena. But it is possible to soon other way and this way has not noted with sufficient clearness to the scientifical literary. Can to essay to issue from the scientifical of relativeness for the control of the theorifical results of classical electrodinamik relative to a processes in a moving sistems end in that part where the dedictions are not depended from the formuls of the reforms by Lorenz and the principle of relativeness. To such a theoritical results belongs the law of the reflectin of linght from a moving mirror has been received by M-r Abraham in the 1904 (Annalen d. Phys. 1904 B. 14. S. 236) out of principle of the classical electrodinamice undepenly a consideration of the theory of relativeness. In a works on the principle of relativeness this law was not received in the form was given by M-r Abraham.

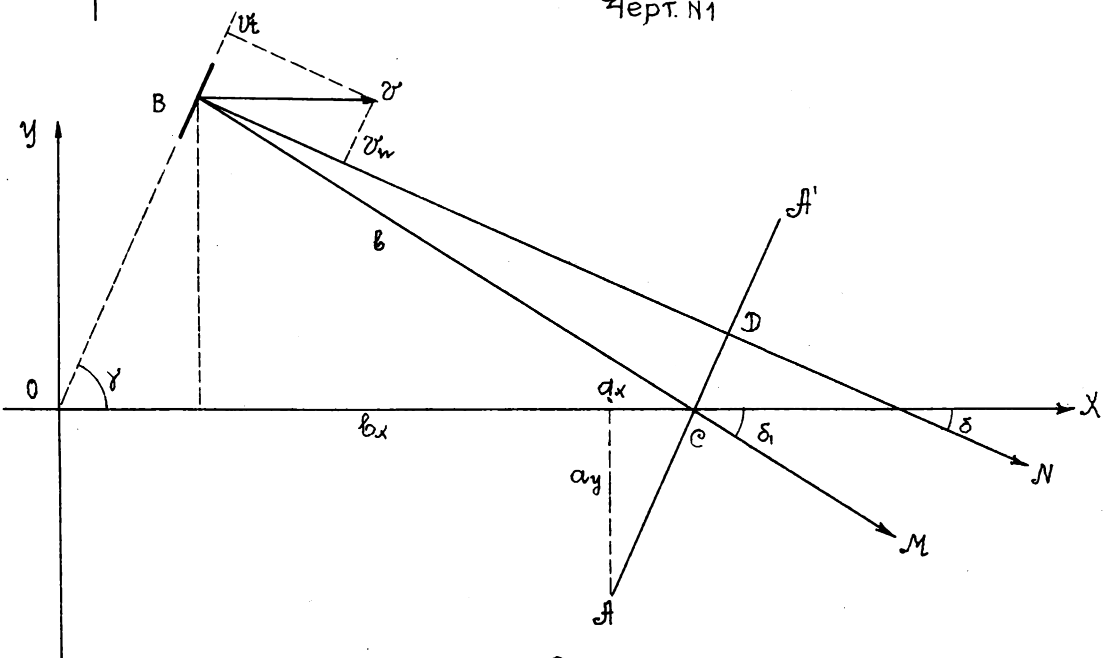
At the present work examined a rectilineal and uniform moving of mirror and it is shown by dint of application only of the hypothesis of contraction by Lorenz one receives the results which found M-r Abraham.

A. T I T O W.

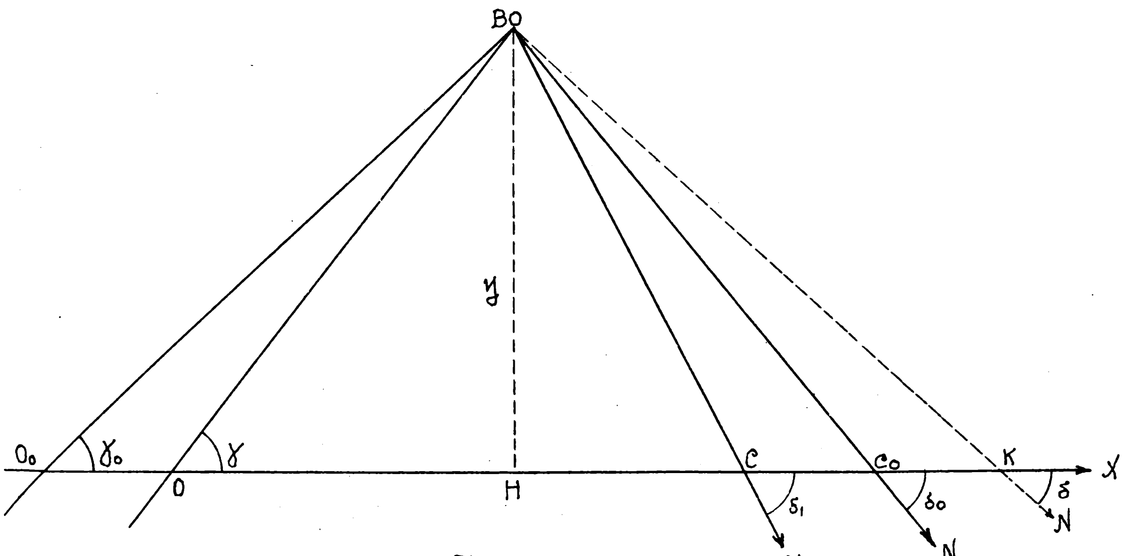
1 February 1921.
Ekaterinburg.



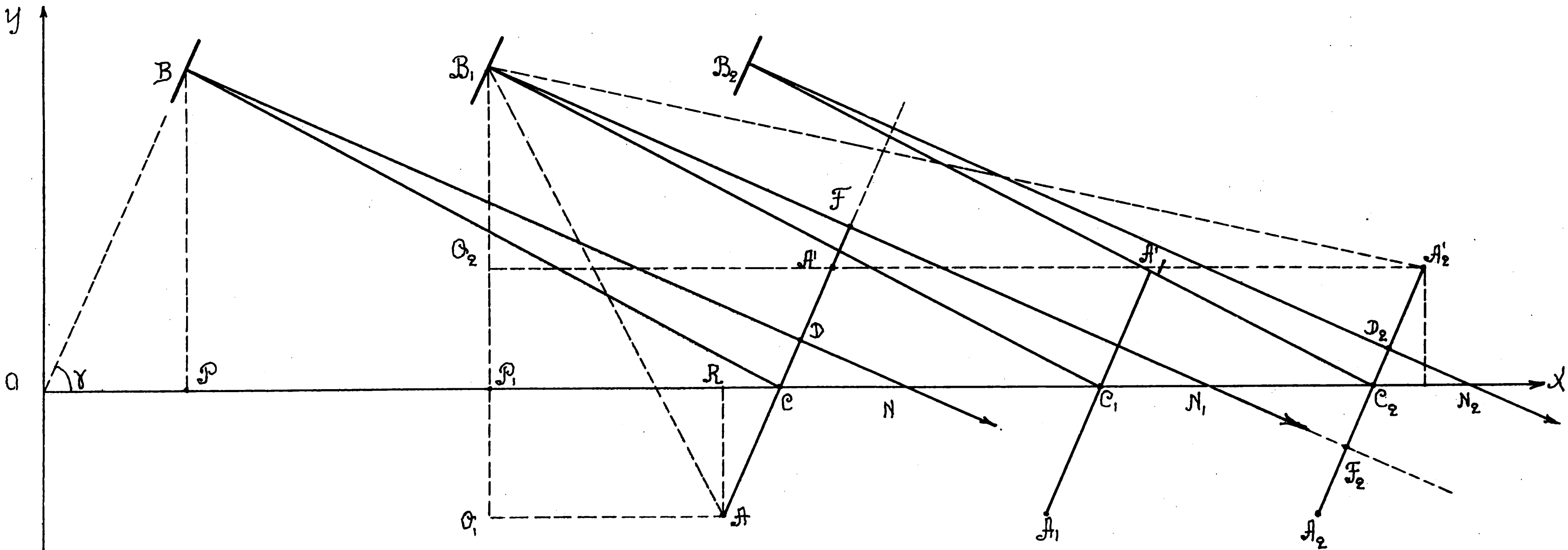
Черт. N1



Черт. N2



Черт. N3.



Черт. N4.