Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Summenformel und ihre Anwendung auf Fragen der analytischen Zahlentheorie

Von Claus Müller in Bonn

Diese Arbeit enthält die Herleitung und Anwendung einer Summenformel, die als Verallgemeinerung der Euler-MacLaurinschen Summenformel auf zwei Veränderliche angesehen werden kann und neue Methoden zur Diskussion mehrdimensionaler Reihen der analytischen Zahlentheorie ermöglicht, die am Beispiel der Funktionalgleichung der Epsteinschen Zetafunktion, der Kroneckerschen Grenzformel und der Hardyschen Identität dargelegt werden. Ähnliche Verfahren wurden im eindimensionalen Fall von L. J. Mordell [1] entwickelt.

Die Darstellung der Arbeit ist so angelegt, daß ihre Übertragung auf mehr als zwei Veränderliche unschwer zu erkennen ist. Es werden jedoch zunächst nur die zweidimensionalen Methoden mit einigen charakteristischen Anwendungen entwickelt.

Im einzelnen wird folgendes ausgeführt: Es sei Ω ein ebenes Gitter, dessen Punkte wir mit $\mathfrak{g}$ bezeichnen. Der Flächeninhalt des Fundamentalbereiches von Ω sei $\sqrt{\mathfrak{g}}$. Wir benutzen den Ortsvektor

$$\mathfrak{x} = x^1\mathfrak{e}_1 + x^2\mathfrak{e}_2$$

und den Laplaceschen Operator

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2.$$

Dann definieren wir eine Funktion $G(0;\mathfrak{x})$, die wir Grundfunktion nennen, durch die folgenden Eigenschaften:

1. $G(0;\mathfrak{x}+\mathfrak{g}) = G(0;\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{g} \in \Omega$ und $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$,
2. $\Delta G(0;\mathfrak{x}) = \frac{1}{\sqrt{g}}$ für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$,
3. $G(0;\mathfrak{x}) + \frac{1}{2\pi}\lg|\mathfrak{x}|$ ist stetig differenzierbar in der Umgebung des Ursprungs,
4. $\int\limits_{\mathfrak{F}} G(0;\mathfrak{x})\,dF = 0.$

Dabei stellt $\mathfrak{F}$ den Fundamentalbereich des Gitters Ω dar. Diese Bedingungen lassen die Grundfunktion als eine Verallgemeinerung der ersten Eulerschen Funktion erkennen und ermöglichen durch Anwendung des Greenschen Satzes die Ableitung einer Summenformel, die wesentliche Elemente der Euler-MacLaurinschen Summenformel auf zwei Veränderliche überträgt.

Wir nehmen an, $\mathfrak{G}$ sei ein reguläres Gebiet im Sinne der Potentialtheorie, das von der Kurve $\mathfrak{C}$ berandet wird, und $f(\mathfrak{x})$ sei eine in $\mathfrak{G}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann folgt aus dem GREENschen Satz unter Berücksichtigung der logarithmischen Singularitäten

$$\sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}{}' f(\mathfrak{g}) = \sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}} f(\mathfrak{g}) - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{C}} f(\mathfrak{g})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\int_{\mathfrak{G}} f(\mathfrak{x})dF - \int_{\mathfrak{G}} G(0;\mathfrak{x})\Delta f(\mathfrak{x})dF + \int_{\mathfrak{C}}\left(\frac{\partial f}{\partial n}G - f\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen auf $\mathfrak{C}$ bezeichnet.

Diese Formel kann noch wesentlich verallgemeinert werden, wenn die zweite Bedingung, die eine Beziehung zwischen der Grundfunktion und dem LAPLACEschen Operator Δ herstellt, durch eine Forderung ersetzt wird, die statt Δ den allgemeineren Operator $\Delta + \lambda$ benutzt. Da die dann definierten, vom Parameter λ abhängigen Grundfunktionen $G(\lambda;\mathfrak{x})$ im wesentlichen mit den GREENschen Funktionen des Operators $\Delta + \lambda$ zur Randwertaufgabe der Periodizität übereinstimmen, kann ihre Existenz und Eindeutigkeit aus bekannten Sätzen gefolgert werden. Der einfachste Zugang zu diesen Zusammenhängen dürfte nach dem Vorgang von D. HILBERT mit Hilfe der Methode der linearen Integralgleichungen gewonnen werden, die auch FOURIER-Entwicklungen durch ihre Entwicklungssätze liefert [3].

Ist nämlich Ω^{-1} das zu Ω reziproke Gitter, dessen allgemeinen Punkt wir mit $\mathfrak{h}$ bezeichnen, so ergibt sich für $G(0;\mathfrak{x})$ beispielsweise die Entwicklung

$$G(0;\mathfrak{x}) \sim \sum_{\mathfrak{h}^2>0} \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{e^{2\pi i(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}}{4\pi^2\mathfrak{h}^2}.$$

Entsprechende Entwicklungen gelten auch für die verallgemeinerten Grundfunktionen.

Die Anwendung dieses Ergebnisses in der oben abgeleiteten Summenformel, namentlich die Frage der Vertauschung von Integration und Summation, ist bekanntlich schwierig und nur in wenigen Fällen voll durchgeführt worden. Wir beweisen hier einige charakteristische Ergebnisse, bei denen sich diese Vertauschung vornehmen läßt.

Zunächst betrachten wir die EPSTEINsche Zetafunktion [10]

$$\zeta(s;\Omega) = \sum_{|\mathfrak{g}|>0} \frac{1}{|\mathfrak{g}|^s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 2$, beweisen ihre Fortsetzbarkeit und ihre Funktionalgleichung. Dann leiten wir die KRONECKERsche Grenzformel

$$\lim_{s\to 2}\left(\zeta(s;\Omega) - \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\,\frac{1}{s-2}\right) = a(\Omega)$$

her. Die vom Gitter Ω abhängige Konstante $a(\Omega)$ können wir durch die Funktion $G(0;\mathfrak{x})$ ausdrücken. Da diese Funktion im engen Zusammenhang mit den elliptischen Funktionen der Funktionentheorie steht, läßt sich die Konstante $a(\Omega)$, die als Entwicklungskoeffizient von $G(0;\mathfrak{x})$ auftritt, durch Thetareihen darstellen.

Als letzte Anwendung wird dann ein neuer Beweis der HARDYschen Identität erbracht, die bekanntlich

$$\lim_{N\to\infty}\frac{R}{\sqrt{g}}\sum_{|\mathfrak{g}|\leq N}\frac{J_1(2\pi R|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|}=\sum_{|\mathfrak{h}|\leq R}{}' 1$$

lautet, wobei $\mathfrak{h}$ die Punkte des reziproken Gitters bezeichnet [5]. Neuartig an dieser Methode ist die Benutzung der Abschätzung

$$(\Delta+4\pi^2R^2)\frac{J_1(2\pi R|\mathfrak{x}|)}{|\mathfrak{x}|}=O\left(\frac{1}{|\mathfrak{x}|^{5/2}}\right),$$

die mit Hilfe der durch Einführung des Parameters $\lambda=4\pi^2R^2$ verallgemeinerten zweidimensionalen Summenformel einen einfachen und durchsichtigen Beweis dieser bekannten Identität ermöglicht.

§ 1. Definitionen und Bezeichnungen

Es seien $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ zwei linear unabhängige ebene Vektoren. Wir setzen

(1,1) $$\mathfrak{g}_i\mathfrak{g}_k=g_{ik}\qquad g=\det|g_{ik}|$$

und bilden durch

(1,2) $$g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$$

die inversen g^{ij}. Dann definieren wir

(1,3) $$\mathfrak{g}^i=g^{ij}\mathfrak{g}_j$$

und erhalten

(1,4) $$\mathfrak{g}^i\mathfrak{g}_k=\delta^i_k.$$

Mit n^i und n_i bezeichnen wir ganze Zahlen und nennen die Gesamtheit der Punkte $n^i\mathfrak{g}_i$ das Gitter Ω, während das zu Ω reziproke Gitter Ω^{-1} durch die Gsamtheit der Punkte $n_i\mathfrak{g}^i$ dargestellt wird. Es ist daher

(1,5) $$\Omega^{-1}(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)=\Omega(\mathfrak{g}^1,\mathfrak{g}^2).$$

Für die Punkte aus Ω benutzen wir stets $\mathfrak{g}$ und bezeichnen die Punkte aus Ω^{-1} mit $\mathfrak{h}$, so daß $\mathfrak{h}\mathfrak{g}$ wegen (1,2) immer ganzzahlig ist.

Drücken wir den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ durch

(1,6) $$\mathfrak{x}=\mathfrak{g}_i\xi^i$$

aus, so können wir einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ von Ω durch

(1,7) $$|\xi^i|\leq\tfrac{1}{2}$$

definieren. Es wird nach (1,6)

$$(1,8)\qquad \int\limits_{\mathfrak{F}} dF = \frac{1}{\sqrt{g}} \int\limits_{-1/2}^{+1/2} \int\limits_{-1/2}^{+1/2} d\xi^1 d\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

Sind α_j^i ganze Zahlen mit

$$(1,9)\qquad \det|\alpha_j^i| = \pm 1,$$

so ist offenbar

$$(1,10)\qquad \Omega(\alpha_1^j \mathfrak{g}_j, \alpha_2^j \mathfrak{g}_j) = \Omega(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2),$$

da das Gitter gegenüber unimodularen Transformationen der Basisvektoren invariant ist.

Wir benutzten die Abkürzung

$$(1,11)\qquad e(x) = e^{2\pi i x}$$

und bilden

$$(1,12)\qquad \varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x}) = \frac{1}{\sqrt[4]{g}} e(\mathfrak{h}\mathfrak{x}).$$

Diese Funktionen sind periodisch bzgl. Ω, genügen den Differentialgleichungen

$$(1,13)\qquad \Delta\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x}) + 4\pi^2\mathfrak{h}^2\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x}) = 0$$

und sind wegen

$$(1,14)\qquad \int\limits_{\mathfrak{F}} \varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})\overline{\varphi(\mathfrak{h}'\mathfrak{x})}dF_{\mathfrak{x}} = \delta_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}'} = \left.\begin{matrix} 1 & \text{für } \mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \\ 0 & \text{für } \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}' \end{matrix}\right.$$

auch normiert.

Im Mittelpunkt unserer Betrachtung stehen die Grundfunktionen des Gitters zum Parameter λ, die wir nun durch ihre charakteristischen Eigenschaften einführen:

Definition: Die Funktion $G(\lambda; \mathfrak{x})$ heißt Grundfunktion zum Parameter λ, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$ und alle $\mathfrak{g}$ aus Ω gilt
$$G(\lambda; \mathfrak{x} + \mathfrak{g}) = G(\lambda; \mathfrak{x}).$$
2. Für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$ ist $G(\lambda; \mathfrak{x})$ analytisch und es gilt
$$\Delta G(\lambda; \mathfrak{x}) + \lambda G(\lambda; \mathfrak{x}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2} e(\mathfrak{h}\mathfrak{x}),$$
wobei die Summation über alle $\mathfrak{h}$ zu erstrecken ist, die der Summationsbedingung genügen. Für $\lambda \neq 4\pi^2\mathfrak{h}^2$ verschwindet daher die rechte Seite.
3. In $\mathfrak{F}$ ist
$$G(\lambda; \mathfrak{x}) + \frac{1}{2\pi}\lg|\mathfrak{x}|$$
stetig differenzierbar.

4. Falls $\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2$ ist, gilt

$$\int_{\mathfrak{F}} G(\lambda;\mathfrak{x})\overline{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}\,dF_{\mathfrak{x}} = 0$$

für alle $\mathfrak{h}$ mit $\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2$.

§ 2. Die Grundfunktionen

Wir zeigen zunächst, daß die Grundfunktionen durch die genannten Bedingungen eindeutig definiert sind, denn gäbe es zwei verschiedene Grundfunktionen zum Parameter λ, so würde ihre Differenz $D(\lambda;\mathfrak{x})$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Für alle $\mathfrak{x}$ und alle $\mathfrak{g}$ aus Ω gilt

$$D(\lambda;\mathfrak{x}+\mathfrak{g}) = D(\lambda;\mathfrak{x}).$$

2. Für alle $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$ ist $D(\lambda;\mathfrak{x})$ analytisch und genügt der Differentialgleichung

$$\Delta D(\lambda;\mathfrak{x}) + \lambda D(\lambda;\mathfrak{x}) = 0.$$

3. $D(\lambda;\mathfrak{x})$ ist überall stetig differenzierbar.
4. Falls $\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2$ ist, gilt

$$\int_{\mathfrak{F}} D(\lambda;\mathfrak{x})\overline{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}\,dF_{\mathfrak{x}} = 0$$

für alle $\mathfrak{h}$ mit $4\pi^2\mathfrak{h}^2 = \lambda$.

Aus den ersten drei Bedingungen folgt, daß $D(\lambda;\mathfrak{x})$ überall analytisch sowie periodisch bzgl. Ω ist und die in der zweiten Bedingung genannte Differentialgleichung erfüllt. Die Theorie der zweidimensionalen Fourier-Reihen zeigt dann, daß $\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2$ sein muß und $D(\lambda;\mathfrak{x})$ eine Linearkombination der Funktion $\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})$ mit $4\pi^2\mathfrak{h}^2 = \lambda$ ist. Aus der letzten Bedingung ergibt sich daher $D(\lambda;\mathfrak{x}) = 0$.

Wir bilden nun die Grundfunktion für $\lambda = -1$ und benötigen dazu die aus der Theorie der Besselfunktionen bekannte Funktion [7]

$$K_0(x) = \int_1^\infty e^{-xt}\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}. \tag{2,1}$$

Für $x > 0$ gilt hier

$$\begin{aligned} 0 < K_0(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-x(t+1)}}{\sqrt{2t+t^2}}\,dt \\ &\leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}, \end{aligned} \tag{2,2}$$

während sich für $x \to 0$

$$(2,3)\quad K_0(x) = -\lg\frac{x}{2} - C + O(x^2 \lg x);\quad K_0'(x) = -\frac{1}{x} + O(x \lg x)$$

ergibt [8]. Hier stellt $C = 0{,}577\ldots$ die EULERsche Konstante dar.

Den Anschluß an die Theorie der Grundfunktionen liefert die Differentialgleichung

$$(2,4)\qquad (xK_0')' - xK_0 = 0,$$

aus der

$$(2,5)\qquad \Delta K_0(|\mathfrak{x} - \mathfrak{g}|) - K_0(|\mathfrak{x} - \mathfrak{g}|) = 0$$

für alle $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$ folgt. Bilden wir nun

$$(2,6)\qquad F(\mathfrak{x}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\mathfrak{g}\in\Omega} K_0(|\mathfrak{x} - \mathfrak{g}|) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{|\mathfrak{g}|\leq N} K_0(|\mathfrak{x} - \mathfrak{g}|),$$

so konvergiert diese Reihe wegen (2,2) gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilgebiet des Fundamentalbereiches, das den Nullpunkt nicht enthält, und wir erhalten

$$(2,7)\qquad \Delta F(\mathfrak{x}) - F(\mathfrak{x}) = 0$$

für alle $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$. Da weiterhin

$$(2,8)\qquad \frac{1}{2\pi}\sum_{|\mathfrak{g}|>0} K_0(|\mathfrak{x} - \mathfrak{g}|)$$

in $\mathfrak{F}$ analytisch ist, ergibt sich

Lemma 1: Es ist

$$G(-1;\mathfrak{x}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\mathfrak{g}\in\Omega} K_0(|\mathfrak{x} - \mathfrak{g}|).$$

Hieraus folgt auch

$$(2,9)\qquad G(-1;\mathfrak{x}) = G(-1;-\mathfrak{x}),$$

so daß

$$(2,10)\qquad G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y}) = G(-1;\mathfrak{y}-\mathfrak{x})$$

in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ symmetrisch ist. Diese Funktion stellt daher die GREENsche Funktion des Operators $\Delta - 1$ zur Randwertaufgabe der Periodizität dar, und es ergibt sich nach dem GREENschen Satz unter Berücksichtigung der logarithmischen Singularität und der Periodizität [6]

$$(2,11)\qquad (1 + 4\pi^2\mathfrak{h}^2)\int_{\mathfrak{F}} G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\overline{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{y})}\,dF_{\mathfrak{y}} = \overline{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}.$$

Es folgt somit

Lemma 2: Im Sinne der Theorie der FOURIER-Entwicklungen ist

$$G(-1;\mathfrak{x}) \sim \sum_{\mathfrak{h}\in\Omega}\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{e(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}{1 + 4\pi^2\mathfrak{h}^2}.$$

Zunächst ist nach (2,11) nämlich

$$G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y}) \sim \sum_{\mathfrak{h}\in\Omega^{-1}} \frac{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})\,\overline{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{y})}}{1+4\pi^2\mathfrak{h}^2}, \tag{2,12}$$

so daß sich Lemma 2 aus (2,10) ergibt.

Betrachten wir $G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y})$ als symmetrischen Kern im Sinne der Theorie der linearen Integralgleichungen, so finden wir

Lemma 3: Die Eigenwerte des Kernes $G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y})$ werden durch $1+4\pi^2\mathfrak{h}^2$, *die Eigenfunktionen durch $\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})$ dargestellt.*

Zum Beweis der Existenz der allgemeinen Grundfunktion setzen wir nun

$$G(\lambda;\mathfrak{x}) = G(-1;\mathfrak{x}) + F(\lambda;\mathfrak{x}) \tag{2,13}$$

und bestimmen $F(\lambda;\mathfrak{x})$ für $\lambda \neq 4\pi^2\mathfrak{h}^2$ durch die Integralgleichung

$$F(\lambda;\mathfrak{x}) = G^{(2)}(-1;\mathfrak{x})\,(1+\lambda) + (1+\lambda)\int_{\mathfrak{F}} G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y})F(\lambda;\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} \tag{2,14}$$

mit

$$G^{(2)}(-1;\mathfrak{x}) = \int_{\mathfrak{F}} G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y})G(-1;\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}. \tag{2,15}$$

Da $1+\lambda$ nicht Eigenwert dieses Kernes ist, existiert eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $F(\mathfrak{x})$, die diese Integralgleichung löst [3]. Die rechte Seite der Integralgleichung (2,14) stellt eine periodische Funktion von $\mathfrak{x}$ dar, so daß auch $F(\lambda;\mathfrak{x})$ periodisch bzgl. Ω ist. Weiterhin folgt aus den in der Potentialtheorie üblichen Abschätzungen, daß die rechte Seite der Integralgleichung für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$ stetig differenzierbar ist. Dann können wir, wiederum für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$, auf die rechte Seite den Operator $\Delta - 1$ anwenden und finden unter Benutzung der für stetig differenzierbare $f(\mathfrak{y})$ gültigen Formel [6]

$$(\Delta_{\mathfrak{x}} - 1)\int_{\mathfrak{F}} G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y})f(\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}} = -f(\mathfrak{x}) \tag{2,16}$$

aus (2,14) für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$

$$(\Delta+\lambda)F(\lambda;\mathfrak{x}) = -(1+\lambda)G(-1;\mathfrak{x}). \tag{2,17}$$

Mit (2,13) folgt somit

$$(\Delta+\lambda)G(\lambda;\mathfrak{x}) = 0. \tag{2,18}$$

Wir haben damit die Existenz der Grundfunktion für $\lambda \neq 4\pi^2\mathfrak{h}^2$ nachgewiesen.

Für $\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2$ bestimmen wir $F(\lambda;\mathfrak{x})$ als Lösung der Integralgleichung

$$\begin{aligned} F(\lambda;\mathfrak{x}) = (1+\lambda)G^{(2)}(-1;\mathfrak{x}) - \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\lambda=4\pi^2\mathfrak{h}^2} \frac{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}{1+\lambda} \\ + (1+\lambda)\int_{\mathfrak{F}} G(-1;\mathfrak{x}-\mathfrak{y})F(\lambda;\mathfrak{y})\,dF_{\mathfrak{y}}. \end{aligned} \tag{2,19}$$

Hier ist der inhomogene Bestandteil wegen

$$G^{(2)}(-1;\mathfrak{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathfrak{h}\in\Omega^{-1}} \frac{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}{(1+4\pi^2\mathfrak{h}^2)^2} \tag{2,20}$$

orthogonal zu den zum Eigenwert $1 + \lambda$ gehörigen Eigenfunktionen. Unsere Integralgleichung besitzt daher eine eindeutige stetige Lösung, wenn wir noch fordern, daß für alle $\mathfrak{h}$ mit $4\pi^2\mathfrak{h}^2 = \lambda$

$$\int_{\mathfrak{F}} F(\lambda; \mathfrak{x}) \overline{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})} dF_{\mathfrak{x}} = \frac{-1}{1+\lambda} \tag{2,21}$$

ist [3]. Durch diese Bedingung erreichen wir

$$\int_{\mathfrak{F}} G(\lambda; \mathfrak{x}) \overline{\varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x})} dF_{\mathfrak{x}} = 0 \tag{2,22}$$

für alle $\mathfrak{h}$ mit $4\pi^2\mathfrak{h}^2 = \lambda$.

Aus (2,19) ergibt sich analog zu (2,17)

$$(\Delta + \lambda) F(\lambda; \mathfrak{x}) = -(1+\lambda) G(-1; \mathfrak{x}) + \frac{1}{\sqrt[4]{g}} \sum_{4\pi^2\mathfrak{h}^2 = \lambda} \varphi(\mathfrak{h}\mathfrak{x}). \tag{2,23}$$

In Verbindung mit (2,13) haben wir daher auch die Grundfunktion für die Ausnahmewerte gefunden.

Wir können nun auch die Fourier-Entwicklungen der allgemeinen Grundfunktionen angeben und erhalten nach Lemma 2

Lemma 4: Im Sinne der Theorie der Fourier-Reihen ist

$$G(\lambda; \mathfrak{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{4\pi^2\mathfrak{h}^2 \neq \lambda} \frac{e(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}{4\pi^2\mathfrak{h}^2 - \lambda}.$$

Daraus folgt, daß für jede in $\mathfrak{F}$ quadratintegrierbare Funktion $f(\mathfrak{y})$

$$\int_{\mathfrak{F}} G(\lambda; \mathfrak{x} - \mathfrak{y}) f(\mathfrak{y}) dF_{\mathfrak{y}} = \sum_{4\pi^2\mathfrak{h}^2 \neq \lambda} c(\mathfrak{h}) e(\mathfrak{h}\mathfrak{x}) \tag{2,24}$$

ist, wenn die Koeffizienten $c(\mathfrak{h})$ durch

$$c(\mathfrak{h}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{4\pi^2\mathfrak{h}^2 - \lambda} \int_{\mathfrak{F}} f(\mathfrak{y}) \overline{e(\mathfrak{h}\mathfrak{y})} dF_{\mathfrak{y}} \tag{2,25}$$

bestimmt werden. Die Konvergenz der unendlichen Reihe wird hier im Sinne von

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|\mathfrak{h}| \leq N} \tag{2,26}$$

verstanden, so daß aus den Hilbertschen Entwicklungssätzen der Theorie der symmetrischen Kerne die gleichmäßige Konvergenz der Reihe folgt [3].

§ 3. Die Funktion $G(0, \mathfrak{x})$

Wir entwickeln nun Eigenschaften der Funktion $G(0; \mathfrak{x})$, die fast unmittelbar aus der Fourier-Entwicklung folgen. Wir schreiben dabei der Kürze halber statt $G(0; \mathfrak{x})$ stets $G(\mathfrak{x})$.

Zunächst folgt aus Lemma 4

$$G(\mathfrak{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathfrak{h}^2 > 0} \frac{e(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}{4\pi^2\mathfrak{h}^2}. \tag{3,1}$$

Dann wird

$$(3,2)\quad \begin{aligned} &G(\mathfrak{x}) + G(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{x}) + G(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{x}) + G(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{x}) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathfrak{h}^2>0} \left(1 + e(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_1\mathfrak{h})\right)\left(1 + e(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_2\mathfrak{h})\right) \frac{e(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}{4\pi^2\mathfrak{h}^2}. \end{aligned}$$

Mit

$$(3,3)\quad \mathfrak{h} = n_1\mathfrak{g}^1 + n_2\mathfrak{g}^2$$

erhalten wir für diese Fourier-Entwicklung

$$(3,4)\quad \begin{aligned} &\sim \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathfrak{h}^2>0} \left(1 + (-1)^{n_1}\right)\left(1 + (-1)^{n_2}\right) \frac{e(\mathfrak{h}\mathfrak{x})}{4\pi^2\mathfrak{h}^2} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathfrak{h}^2>0} \frac{e(2\mathfrak{h}\mathfrak{x})}{4\pi^2\mathfrak{h}^2} \sim G(2\mathfrak{x}), \end{aligned}$$

da nur diejenigen $\mathfrak{h}$ in der Entwicklung auftreten, für die n_1 und n_2 gerade sind. Damit hat der Ausdruck (3,2) dieselbe Fourier-Entwicklung wie $G(2\mathfrak{x})$ und wir finden

Lemma 5: Es ist

$$G(\mathfrak{x}) + G(\mathfrak{x} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_1) + G(\mathfrak{x} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_2) + G(\mathfrak{x} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_2) = G(2\mathfrak{x}).$$

Da $G(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{g}$ der Differentialgleichung

$$(3,5)\quad \Delta G = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

genügt, erhalten wir in der Umgebung des Nullpunktes mit einer dort harmonischen Funktion $H(\mathfrak{x})$

$$(3,6)\quad G(\mathfrak{x}) = -\frac{1}{2\pi}\lg|\mathfrak{x}| + \frac{1}{4\sqrt{g}}|\mathfrak{x}|^2 + H(\mathfrak{x}),$$

so daß

$$(3,7)\quad \lim_{\mathfrak{x}\to 0}\left[G(\mathfrak{x}) - G(2\mathfrak{x})\right] = \frac{1}{2\pi}\lg 2$$

ist. Aus Lemma 5 folgt daher durch den Grenzübergang $\mathfrak{x} \to 0$

Lemma 6: Es ist

$$G(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_1) + G(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_2) + G(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_2) = -\frac{1}{2\pi}\lg 2.$$

§ 4. Beziehungen zu den elliptischen Funktionen

Wir führen durch

$$(4,1)\quad \mathfrak{x} = \xi^i\mathfrak{g}_i$$

die Koordinaten ξ^i ein, so daß

$$(4,2)\quad G(\mathfrak{x}) = G'(\xi^1, \xi^2)$$

wird. Dann liefert die FOURIER-Entwicklung

(4,3) $$G'(\xi^1, \xi^2) \sim \frac{1}{4\pi^2\sqrt{g}} \sum_{n_1^2+n_2^2>0} \frac{e(\xi^1 n_1)\, e(\xi^2 n_2)}{g^{ik} n_i n_k}.$$

Bei festem ξ^1 mit $0 < \xi^1 < 1$ hängt die Funktion (4,2) analytisch von ξ^2 ab und besitzt in dieser Veränderlichen die Periode Eins. Für $0 < \xi^1 < 1$ ist daher

(4,4) $$G'(\xi^1, \xi^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(\xi^1)\, e(n\xi^2).$$

Aus (4,3) ergibt sich für $n \neq 0$

(4,5) $$a_n(\xi^1) = \frac{1}{4\pi^2\sqrt{g}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e(\xi^1 k)}{g^{11}k^2 + 2g^{12}kn + g^{22}n^2}.$$

Definieren wir τ durch

(4,6) $$g^{11}\tau^2 + 2g^{12}\tau + g^{22} = 0;\ \mathrm{Im}(\tau) > 0,$$

so wird für $n \neq 0$ und $0 < \xi^1 < 1$

(4,7) $$\begin{aligned} a_n(\xi^1) &= \frac{1}{4\pi n}\left(\frac{e^{2\pi i\tau\xi^1 n}}{1-e^{2\pi i\tau n}} + \frac{e^{2\pi i\bar\tau(\xi^1-1)n}}{1-e^{-2\pi i\bar\tau n}}\right)\\ &= \frac{-1}{4\pi n}\left(\frac{e^{2\pi i\tau(\xi^1-1)n}}{1-e^{-2\pi i\tau n}} + \frac{e^{2\pi i\bar\tau\xi^1 n}}{1-e^{2\pi i\bar\tau n}}\right), \end{aligned}$$

wie sich mit Hilfe des Residuenkalküls unter Benutzung der Funktion

(4,8) $$f(z) = \frac{\sqrt{g}}{2in}\frac{e^{2\pi i\xi^1 z}}{1-e^{2\pi iz}}\left(\frac{1}{z-\tau n} - \frac{1}{z-\bar\tau n}\right)$$

ergibt. Für $a_0(\xi^1)$ finden wir

(4,9) $$a_0(\xi^1) = \frac{1}{4\pi^2\sqrt{g}\,g^{11}} \sum_{n\neq 0} \frac{e(\xi^1 n)}{n^2} = \frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\left(\frac{(\xi^1)^2}{2} - \frac{\xi^1}{2} + \frac{1}{12}\right).$$

Es wird daher

(4,10) $$G'(\xi^1, 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(\xi^1),$$

so daß sich aus den beiden Darstellungen (4,7) nach elementarer Umformung

(4,11) $$\lim_{\xi^1\to 0}\left(G'(\xi^1, 0) + \frac{1}{2\pi}\lg\left|1 - e^{2\pi i\tau\xi^1}\right|\right) = \frac{1}{12}\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} - \frac{1}{2\pi}\lg\prod_{n=1}^{\infty}|1 - e^{2\pi i\tau n}|^2$$

ergibt.

In (3,6) hatten wir

(4,12) $$G(\mathfrak{x}) = -\frac{1}{2\pi}\lg|\mathfrak{x}| + \frac{|\mathfrak{x}|^2}{4\sqrt{g}} + H(\mathfrak{x})$$

gesetzt, wo $H(\mathfrak{x})$ eine in der Umgebung des Nullpunktes harmonische Funktion bezeichnet. Führen wir durch

$$\mathfrak{x} = r(\cos\varphi\, \mathfrak{e}_1 + \sin\varphi\, \mathfrak{e}_2) \tag{4,13}$$

Polarkoordinaten ein, so wird mit geeignetem $c > 0$ für alle $\mathfrak{x}$ mit $|\mathfrak{x}| \leq c$

$$H(\mathfrak{x}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{4,14}$$

so daß sich

$$\lim_{\mathfrak{x}=0} \left(G(\mathfrak{x}) + \frac{1}{2\pi} \lg |\mathfrak{x}| \right) = a_0 \tag{4,15}$$

ergibt. Für alle $\mathfrak{x}$ der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{g}_1 \xi^1$ erhalten wir nach (4,11)

$$\lim_{\mathfrak{x}\to 0} \left[G(\mathfrak{x}) + \frac{1}{2\pi} \lg |\mathfrak{x}| \right] = \frac{1}{12} \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} - \frac{1}{2\pi} \lg \left| \frac{2\pi}{\sqrt{g_{11}}} \tau \right| - \frac{1}{2\pi} \lg \prod_{n=1}^{\infty} |1 - e^{2\pi i \tau n}|^2. \tag{4,16}$$

Wegen

$$\tau = \frac{g_{12}}{g_{22}} + i \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \tag{4,17}$$

ergibt sich daher mit der Abkürzung

$$\Theta(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \tau n}) \tag{4,18}$$

nach (4,15)

Lemma 7: Mit

$$\tau = \frac{g_{12}}{g_{22}} + i \frac{\sqrt{g}}{g_{22}}$$

ist

$$H(0) = a_0(\Omega) = -\frac{1}{2\pi} \lg \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g_{22}}} \left| \Theta(\tau) e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \right|^2 \right).$$

Entwickeln wir $G'(\xi^1, \xi^2)$ bei festem ξ^2 als Funktion von ξ^1 und führen die analogen Betrachtungen durch, so wird

$$a_0(\Omega) = -\frac{1}{2\pi} \lg \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g_{11}}} \left| \Theta\left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{\pi i}{12\tau}} \right|^2 \right), \tag{4,19}$$

da die τ entsprechende Wurzel

$$\frac{g_{12}}{g_{11}} + i \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} = \frac{1}{\bar{\tau}} \tag{4,20}$$

und

$$\Theta\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right) = \overline{\Theta\left(-\frac{1}{\tau}\right)} \tag{4,21}$$

ist. Wir haben damit wegen $|\tau| = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}$ die aus der Theorie der Thetareihen bekannte Identität

$$(4,22) \qquad |\tau\Theta^2(\tau)| = \left|\Theta\left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{\pi i}{12}(\tau+\tau^{-1})}\right|^2$$

wiedergewonnen.

Die höheren Entwicklungskoeffizienten der Funktion $H(\mathfrak{x})$ können wir leicht durch die Koeffizienten der WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion ausdrücken.

Setzen wir nämlich

$$(4,23) \qquad \mathfrak{x} = x\mathfrak{e}_1 + y\mathfrak{e}_2;\; z = x + iy,$$

so wird durch

$$(4,24) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} G - i \frac{\partial}{\partial x \partial y} G$$

wegen

$$(4,25) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

eine regulär analytische Funktion dargestellt, die in allen Gitterpunkten wie

$$(4,26) \qquad \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z^2}$$

singulär wird.

Wir erhalten daher

$$(4,27) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i \frac{\partial}{\partial x \partial y}\right) G = \frac{1}{2\pi} \wp(z).$$

Nun ist aber

$$(4,28) \qquad r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n)z^n + \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n)\bar{z}^n$$

und

$$(4,29) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x^2} - i \frac{\partial}{\partial x \partial y}\right) r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = \frac{n(n-1)}{2}(a_n - ib_n)z^n,$$

so daß aus (4,27)

$$(4,30) \qquad \frac{1}{2\pi}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} (a_n - ib_n) z^{n-2} = \frac{1}{2\pi} \wp(z)$$

folgt. Da sich aus $G(\mathfrak{x}) = G(-\mathfrak{x})$ noch

$$(4,31) \qquad a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0 \qquad \text{für } n = 0, 1, \ldots$$

ergibt, sind in Verbindung mit Lemma 7 somit alle Entwicklungskoeffizienten der Funktion $G(\mathfrak{x})$ durch bekannte Größen ausgedrückt.

Diese Darstellungen gelten für jedes Gitter, insbesondere also auch für das reziproke Gitter Ω^{-1}. Zur Berechnung von $a_0(\Omega)^{-1}$ bilden wir nun nach Lemma 7

$$(4,32) \qquad \tau^* = \frac{g^{12}}{g^{22}} + i \frac{1}{g^{22}\sqrt{g}} = -\frac{g_{12}}{g_{11}} + i \frac{\sqrt{g}}{g_{11}}$$

und finden mit (4,20)

$$\tau^* = -\frac{1}{\tau} \tag{4,33}$$

so daß sich

$$a_0(\Omega^{-1}) = -\frac{1}{2\pi}\lg\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g^{22}}}\left|\Theta\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{\pi i}{12\tau}}\right|^2\right) \tag{4,34}$$

ergibt. Auf Grund der Identität (4,24) läßt sich dies auch als

$$a_0(\Omega^{-1}) = -\frac{1}{2\pi}\lg\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g^{11}}}\sqrt{g}\,|\tau|\left|\Theta(\tau)e^{\frac{\pi i \tau}{12}}\right|^2\right) \tag{4,35}$$

schreiben und wir finden wegen $|\tau| = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}$.

Lemma 8: Es ist

$$a_0(\Omega^{-1}) = a_0(\Omega) - \frac{1}{4\pi}\lg g.$$

§ 5. Die Eulersche Summenformel in zwei Veränderlichen

Es sei $\mathfrak{G}$ ein reguläres, von einer stetig differenzierbaren Randkurve $\mathfrak{C}$ berandetes Gebiet und $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ eine in $\mathfrak{G}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}_\varrho$ das Gebiet, dessen Punkte die Bedingungen

$$\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}; \quad |\mathfrak{x} - \mathfrak{g}| \geq \varrho \quad \text{für alle } \mathfrak{g} \in \mathfrak{G} \tag{5,1}$$

erfüllen, so daß $\mathfrak{G}_\varrho$ aus $\mathfrak{G}$ entsteht, wenn wir die Kreise vom Radius ϱ um die in $\mathfrak{G}$ gelegenen Gitterpunkte $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{G}$ „herausschneiden". Dann folgt aus dem Greenschen Satz

$$\int\limits_{\mathfrak{G}_\varrho} (f\Delta G(0;\mathfrak{x}) - G(0;\mathfrak{x})\Delta f)\,dF = \int\limits_{\mathfrak{C}_\varrho}\left(f\frac{\partial}{\partial n}G(0;\mathfrak{x}) - G(0;\mathfrak{x})\frac{\partial}{\partial n}f\right)ds, \tag{5,2}$$

wobei $\mathfrak{C}_\varrho$ den Rand von $\mathfrak{G}_\varrho$ bezeichnet, und $\frac{\partial}{\partial n}$ auf diesen Randstücken jeweils die Differentiation in Richtung der äußeren Normalen bezeichnet. Durch den Grenzübergang $\varrho \to 0$ folgt dann wegen der logarithmischen Singularitäten der Funktion $G(0;\mathfrak{x})$ nach dem bekannten Vorgang der Potentialtheorie

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\int\limits_{\mathfrak{G}} f\,dF - \int\limits_{\mathfrak{G}} G(0;\mathfrak{x})\Delta f\,dF = \int\limits_{\mathfrak{C}}\left(f\frac{\partial}{\partial n}G(0;\mathfrak{x}) - G(0;\mathfrak{x})\frac{\partial}{\partial n}f\right)ds + \sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}{}' f(\mathfrak{g}), \tag{5,3}$$

wobei

$$\sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}{}' f(\mathfrak{g}) = \sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}} f(\mathfrak{g}) - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{C}} f(\mathfrak{g}) \tag{5,4}$$

gesetzt wurde. Wir erhalten daher als Übertragung der Eulerschen Summenformel (vgl. [2])

Satz 1: *Ist $f(\mathfrak{x})$ in dem von einer stetig differenzierbaren Randkurve $\mathfrak{C}$ begrenzten regulären Gebiet $\mathfrak{G}$ zweimal stetig differenzierbar, so wird*

$$\sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}{}' f(\mathfrak{g}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\mathfrak{G}} f(\mathfrak{x})\, dF - \int_{\mathfrak{G}} G(0;\mathfrak{x})\Delta f\, dF - \int_{\mathfrak{C}} \left(f \frac{\partial}{\partial n} G(0;\mathfrak{x}) - G(0;\mathfrak{x}) \frac{\partial}{\partial n} f \right) ds.$$

Setzen wir

$$G^{(k)}(0;\mathfrak{x}) = \int_{\mathfrak{F}} G(0;\mathfrak{x}-\mathfrak{y}) G^{(k-1)}(0;\mathfrak{y})\, dF;\quad G^{(1)}(0;\mathfrak{x}) = G(0;\mathfrak{x}), \tag{5,5}$$

so wird [6] für $k = 2, 3, \ldots$

$$\Delta G^{(k)}(0;\mathfrak{x}) = -G^{(k-1)}(0;\mathfrak{x}), \tag{5,6}$$

und wir erhalten unter der Voraussetzung geeignet hoher Differenzierbarkeit von $f(\mathfrak{x})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{G}} G^{(k)}(0;\mathfrak{x}) \Delta^k f\, dF &= -\int_{\mathfrak{G}} \left(\Delta G^{(k+1)}(0;\mathfrak{x})\right) \Delta^k f\, dF = \\ &= -\int_{\mathfrak{G}} G^{(k+1)}(0;\mathfrak{x}) \Delta^{(k+1)} f\, dF - \int_{\mathfrak{C}} \left[(\Delta^k f) \frac{\partial}{\partial n} G^{(k+1)} - G^{(k+1)} (\Delta^k f) \right] dF, \end{aligned} \tag{5,7}$$

so daß sich, ausgehend von Satz 1, unter Benutzung der letzten Umformung auch die erweiterten Formen der EULERschen Summenformel finden lassen.

Eine besondere Rolle spielt eine auch in einer Veränderlichen anscheinend noch nicht bemerkte Verallgemeinerung dieser Summenformel, die durch Benutzung der Grundfunktionen $G(\lambda;\mathfrak{x})$ möglich wird. Bilden wir nämlich analog zu (5,2)

$$\int_{\mathfrak{G}_\varrho} \left(f \Delta G(\lambda;\mathfrak{x}) - G(\lambda;\mathfrak{x}) \Delta f \right) dF = \int_{\mathfrak{C}_\varrho} f \left(\frac{\partial}{\partial n} G(\lambda;\mathfrak{x}) - G(\lambda;\mathfrak{x}) \frac{\partial}{\partial n} f \right) ds, \tag{5,8}$$

so erhalten wir durch den Grenzübergang $\varrho \to 0$ unter Beachtung der Differentialgleichung

$$\Delta G(\lambda;\mathfrak{x}) + \lambda G(\lambda;\mathfrak{x}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2} \varphi(\mathfrak{h},\mathfrak{x}) \tag{5,9}$$

in der üblichen Weise

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}{}' f(\mathfrak{g}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2} \int_{\mathfrak{G}} f(\mathfrak{x}) \varphi(\mathfrak{h},\mathfrak{x})\, dF \\ &- \int_{\mathfrak{G}} G(\lambda;\mathfrak{x})\, (\Delta f + \lambda f)\, dF - \int_{\mathfrak{C}} \left(f \frac{\partial}{\partial n} G(\lambda;\mathfrak{x}) - G(\lambda;\mathfrak{x}) \frac{\partial}{\partial n} f \right) ds. \end{aligned} \tag{5,10}$$

Wichtig an dieser Formel ist, daß es durch Benutzung des Differentialoperators $\Delta + \lambda$ möglich ist, die Summenformel den Eigenschaften der Funktion f anzupassen. Beim Beweis einiger Identitäten der analytischen Geometrie der Zahlen wird davon wesentlich Gebrauch gemacht werden.

§ 6. Die Funktionalgleichung der Epsteinschen Zetafunktion

Wir wollen die Summenformel zunächst auf die Funktion

$$\zeta(s;\Omega) = \sum_{|\mathfrak{g}|>0} \frac{1}{|\mathfrak{g}|^s} = \lim_{R\to\infty} \sum_{R \geqq |\mathfrak{g}|>0} \frac{1}{|\mathfrak{g}|^s} \tag{6,1}$$

anwenden, wobei wir s komplex und $\mathrm{Re}(s) > 2$ annehmen. Diese Funktion stellt bekanntlich einen Spezialfall der Epsteinschen Zetafunktion dar [10].

Nach Satz 1 ist, wenn ds' das Linienelement bezeichnet,

$$\sum_{|\mathfrak{g}|\leq R}{}' 1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\pi R^2 - \int\limits_{|\mathfrak{x}|=R} \frac{\partial}{\partial n} G(0;\mathfrak{x})\,ds'. \tag{6,2}$$

Für ein geeignet großes, festes c und $R > c$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\pi(R-c)^2 < \sum_{|\mathfrak{g}|\leq R}{}' 1 < \frac{1}{\sqrt{g}}\pi(R+c)^2, \tag{6,3}$$

so daß für $R \to \infty$

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|=R} \frac{\partial}{\partial n} G(0;\mathfrak{x})\,ds' = O(R) \tag{6,4}$$

ist. Aus der für $R \neq |\mathfrak{g}|$ gültigen Beziehung

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|=R} \frac{\partial}{\partial n} G(0;\mathfrak{x})\,ds' = R\frac{d}{dR}\frac{1}{R}\int\limits_{|\mathfrak{x}|=R} G(0;\mathfrak{x})\,ds' \tag{6,5}$$

erhalten wir in ganz grober Abschätzung durch Integration

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|=R} G(0;\mathfrak{x})\,ds' = O(R^2). \tag{6,6}$$

Wenden wir Satz 1 mit $f(\mathfrak{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{x}|^s}$ an, so wird

$$\begin{aligned}\sum_{\varrho\leq|\mathfrak{g}|\leq R}{}' \frac{1}{|\mathfrak{g}|^s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int\limits_{\varrho\leq|\mathfrak{x}|\leq R} \frac{1}{|\mathfrak{x}|^s}\,dF - s^2 \int\limits_{\varrho\leq|\mathfrak{x}|\leq R} \frac{1}{|\mathfrak{x}|^{s+2}} G(0;\mathfrak{x})\,dF \\ - \int\limits_{|\mathfrak{x}|=R} \left(\frac{1}{R^s}\frac{\partial}{\partial n}G + s\frac{1}{R^{s+1}}G\right)ds' - \int\limits_{|\mathfrak{x}|=\varrho} \left(\frac{1}{\varrho^s}\frac{\partial}{\partial n}G - s\frac{1}{\varrho^{s+1}}G\right)ds,\end{aligned} \tag{6,7}$$

wobei $\varrho > 0$ so gewählt sei, daß der Kreis $|\mathfrak{x}| \leq \varrho$ außer $\mathfrak{x} = 0$ keinen Gitterpunkt enthält. Nach (3,2) ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{|\mathfrak{x}|=\varrho} G\,ds' &= -\varrho\lg\varrho + \frac{\pi}{2\sqrt{g}}\varrho^3 + 2\pi\varrho a_0 \\ \int\limits_{|\mathfrak{x}|=\varrho} \frac{\partial}{\partial n} G\,ds' &= 1 - \frac{\pi}{\sqrt{g}}\varrho^2,\end{aligned} \tag{6,8}$$

so daß wir mit (6,4) und (6,6) für $\mathrm{Re}(s) > 2$ den Grenzübergang $R \to \infty$

durchführen können,

$$\zeta(s;\Omega)=\sum_{0<|\mathfrak{g}|}\frac{1}{|\mathfrak{g}|^s}=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{s-2}\varrho^{s+2}-s^2\int\limits_{\varrho\le|\mathfrak{x}|}\frac{1}{|\mathfrak{x}|^{s+2}}G(0;\mathfrak{x})dF$$
$$(6,9)\qquad -\varrho^{-s}(1+s\lg\varrho+2\pi s a_0)+\frac{\pi}{\sqrt{g}}\varrho^{s-2}\left(1+\frac{s}{2}\right)$$

erhalten, und somit die Reihe (6,9) eine für $\mathrm{Re}(s)>2$ regulär analytische Funktion von s darstellt.

Nach Lemma 4 ist für $\lambda>0$ und $R>\lambda$

$$\int\limits_{R-\lambda\le|\mathfrak{x}|\le R+\lambda}G(0;\mathfrak{x})dF=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\mathfrak{h}^2>0}\frac{1}{\mathfrak{h}^2}\int\limits_{R-\lambda\le|\mathfrak{x}|\le R+\lambda}\frac{1}{\sqrt{g}}\overline{\varphi(\mathfrak{h};\mathfrak{x})}dF$$
$$(6,10)\qquad =\frac{1}{2\pi\sqrt{g}}\sum_{\mathfrak{h}^2>0}\frac{1}{\mathfrak{h}^2}\int\limits_{R-\lambda}^{R+\lambda}r\,J_0(2\pi r|\mathfrak{h}|)dr.$$

Da $G(0;\mathfrak{x})$ nur logarithmische Singularitäten besitzt, ist

$$(6,11)\qquad \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{R-\lambda\le|\mathfrak{x}|\le R+\lambda}G(0;\mathfrak{x})dF=\int\limits_{|\mathfrak{x}|=R}G(0;\mathfrak{x})ds'.$$

Aus der bekannten Abschätzung

$$(6,12)\qquad |J_0(x)|\le\frac{c}{\sqrt{x}}$$

folgt

$$(6,13)\qquad \left|\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{R-\lambda}^{R+\lambda}r\,J_0(2\pi r|\mathfrak{h}|\,dr\right|\le\frac{c}{2\lambda}\frac{1}{1\sqrt{2\pi|\mathfrak{h}|}}\int\limits_{R-\lambda}^{R+\lambda}\sqrt{r}\,dr,$$

so daß wir bei festem R für $\lambda<\lambda_0$ mit geeignetem C'

$$(6,14)\qquad \left|\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{R-\lambda}^{R+\lambda}r\,J_0(2\pi r|\mathfrak{h}|)dr\right|\le\frac{C'}{\sqrt{|\mathfrak{h}|}}$$

erhalten. Damit folgt

$$(6,15)\qquad \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2\pi\sqrt{g}}\sum_{\mathfrak{h}^2>0}\frac{1}{\mathfrak{h}^2}\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{R-\lambda}^{R+\lambda}r\,J_0(2\pi r\,|\mathfrak{h}|)dr$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{g}}\sum_{\mathfrak{h}^2>0}\frac{R}{\mathfrak{h}^2}J_0(2\pi R\,|\mathfrak{h}|),$$

und wir finden mit (6,11)

Lemma 9: Es ist

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|=R}G(0;\mathfrak{x})\,ds'=\frac{R}{2\pi\sqrt{g}}\sum_{\mathfrak{h}^2>0}\frac{1}{\mathfrak{h}^2}J_0(2\pi R|\mathfrak{h}|).$$

Unter Benutzung von (6, 12) folgt damit

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|=R} G(0;\mathfrak{x})\,ds' = O\left(\sqrt{R}\right). \tag{6,16}$$

Es konvergiert daher das Integral

$$\int\limits_{\varrho\leq|\mathfrak{x}|} \frac{1}{|\mathfrak{x}|^{s+1}} G(0;\mathfrak{x})\,dF = \int\limits_{\varrho}^{\infty} \frac{1}{r^{s+2}}\Big(\int\limits_{|\mathfrak{x}|=r} G(0;\mathfrak{x})\,ds'\Big)dr \tag{6,17}$$

für alle s mit $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_0 > -\frac{1}{2}$ gleichmäßig, so daß $\zeta(s,\Omega)$ mit Hilfe der Darstellung (6, 9) in die Halbebene $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ fortgesetzt werden kann und dort außer einem Pol für $s = 2$ keine Singularitäten in endlichen Punkten besitzt.

Nach (6, 8) konvergiert das Integral

$$\int\limits_{\varrho}^{1} \frac{1}{r^{s+2}}\Big(\int\limits_{|\mathfrak{x}|=r} G(0;\mathfrak{x})\,ds'\Big)dr \tag{6,18}$$

für $\varrho \to 0$ gleichmäßig, wenn $\mathrm{Re}(s) \leq \sigma_1' < 0$ ist, und wir erhalten

Lemma 10: Für $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 0$ *ist*

$$\zeta(s,\Omega) = -s^2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{r^{s+2}}\Big(\int\limits_{|\mathfrak{x}|=r} G(0;\mathfrak{x})\,ds'\Big)dr.$$

Da $|J_0(x)| \leq 1$ für alle x gilt, können wir wegen (6, 12) ein $c > 0$ so finden, daß für alle $x \geq 0$

$$|J_0(x)| \leq c\,x^{-1/4} \tag{6,19}$$

ist. Setzen wir dann

$$\Phi_N(R) = \frac{R}{2\pi\sqrt{g}} \sum_{0<\mathfrak{h}^2\leq N} \frac{1}{\mathfrak{h}^2} J_0(2\pi R|\mathfrak{h}|), \tag{6,20}$$

so erhalten wir

Lemma 11: Es gibt eine Konstante $c > 0$ *so, daß für* $0 \leq R \leq 1$ *und alle* N

$$|\Phi_N(R)| \leq C R^{3/4}$$

und für $R \geq 1$ *und alle* N

$$|\Phi_N(R)| \leq C R^{1/2}$$

ist, während in jedem endlichen Intervall $0 < A \leq R \leq B < \infty$ *im Sinne gleichmäßiger Konvergenz*

$$\lim_{N\to\infty} \Phi_N(R) = \int\limits_{|\mathfrak{x}|=R} G(0;\mathfrak{x})\,ds$$

gilt.

Damit erhalten wir nach dem bekannten Vorgang von Lebesgue

Lemma 12: Für alle s *mit* $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < -\frac{1}{4}$ *ist*

$$\zeta(s,\Omega) = -\lim_{N\to\infty} s^2 \int_0^\infty \frac{1}{r^{s+2}} \Phi_N(r)\,dr = -s^2 \int_0^\infty \frac{1}{r^{s+2}} \Big(\int_{|\mathfrak{x}|=r} G(0;\mathfrak{x})\,ds \Big) dr.$$

Unter Benutzung der für $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 0$ gültigen Formel [9]

$$(6,21)\qquad \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{r^{s+1}} J_0(2\pi r|\mathfrak{h}|)\,dr &= (2\pi|\mathfrak{h}|)^s \int_0^\infty \frac{J_0(x)}{x^{s+1}}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}(\pi|\mathfrak{h}|)^s \frac{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \end{aligned}$$

erhalten wir daher für $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < -\frac{1}{4}$

$$(6,22)\qquad \begin{aligned} \zeta(s;\Omega) &= -\frac{s^2}{4}\,\pi^{s-1} \frac{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathfrak{h}^2>0} \frac{1}{|\mathfrak{h}|^{2-s}} \\ &= \pi^{s-1} \frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathfrak{h}^2>0} \frac{1}{|\mathfrak{h}|^{2-s}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber

Satz 2: *Die für* $\mathrm{Re}(s) > 2$ *durch*

$$\zeta(s;\Omega) = \sum_{|\mathfrak{g}|>0} \frac{1}{|\mathfrak{g}|^s}$$

definierte Funktion läßt sich als meromorphe Funktion mit dem Pol

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\,\frac{1}{s-2}$$

in die ganze Ebene fortsetzen und genügt der Funktionalgleichung

$$\zeta(s;\Omega) = \pi^{s-1} \frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{g}}\,\zeta(2-s;\Omega^{-1}).$$

Zunächst ist nämlich $\zeta(s;\Omega)$ bis auf den genannten Pol für $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ regulär analytisch. Nach (6,22) gilt für $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < -\frac{1}{4}$ die Funktionalgleichung, die wir zur Fortsetzung der Funktion $\zeta(s;\Omega)$ ins Gebiet $\mathrm{Re}(s) < -\frac{1}{2}$ benutzen. Da wir denselben Prozeß mit $\zeta(s,\Omega^{-1})$ durchführen können und die Funktionalgleichung zumindest auf einem Stück der reellen Achse gilt, besteht sie überall.

Es gilt (6,9) auch für $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ und wir finden daher

$$(6,23)\qquad \zeta(0;\Omega) = -1 \quad\text{und}\quad \zeta'(0;\Omega) = 2\pi a_0(\Omega).$$

Setzen wir nun noch $s = 2 + t$, so wird nach Satz 2

$$\zeta(2+t;\Omega) = \frac{-2\pi}{\sqrt{g}}\pi^t \frac{\Gamma\left(1-\frac{t}{2}\right)}{t\,\Gamma\left(1+\frac{t}{2}\right)}\zeta(-t;\Omega^{-1}). \tag{6,24}$$

In der Umgebung des Punktes $t = 0$ ist

$$\zeta(-t;\Omega^{-1}) = -1 - 2\pi a_0(\Omega^{-1})t + \cdots$$

$$\pi^t \frac{\Gamma\left(1-\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{t}{2}\right)} = 1 + (\lg\pi - \Gamma'(1))t + \cdots, \tag{6,25}$$

so daß wir, da $-\Gamma'(1)$ gleich der Eulerschen Konstanten C ist, aus (6,24)

$$\zeta(2+t;\Omega) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{t} + \left(2\pi a_0(\Omega^{-1}) + \lg\pi + C\right) + \cdots\right) \tag{6,26}$$

erhalten. Damit finden wir unter Benutzung von Lemma 8 die Kroneckersche Grenzformel

Lemma 13:

$$\lim_{s\to 2}\left(\zeta(s;\Omega) - \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}(\lg\pi + C + 2\pi a_0(\Omega) - \lg\sqrt{g}).$$

Bezeichnen wir die rechte Seite dieser Formel zur Abkürzung mit A, so ist nach (6,9)

$$A = \lim_{s\to 2}\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{\varrho^{-s+2}-1}{s-2} + \frac{2\pi}{\sqrt{g}} - \varrho^{-2}(1+\lg\varrho + 4\pi a_0)\,4\int\limits_{\varrho\le|\mathfrak{x}|} G(0;\mathfrak{x})\frac{dF}{|\mathfrak{x}|^4} \tag{6,27}$$

oder

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}(1-\lg\varrho) - \varrho^{-2}(1+2\lg\varrho+4\pi a_0) - 4\int\limits_{\varrho\le|\mathfrak{x}|}\frac{1}{|\mathfrak{x}|^4}G(0;\mathfrak{x})\,dF. \tag{6,28}$$

Nach der Summenformel ist aber wegen (6,4) und (6,16)

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{0<|\mathfrak{g}|\le N}{}' \frac{1}{|\mathfrak{g}|^2} - \frac{1}{\sqrt{g}}\int\limits_{\varrho}\frac{1}{|\mathfrak{x}|^2}dF\right)\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} - \varrho(1+2\lg\varrho+4\pi a_0) - 4\int\limits_{\varrho\le|\mathfrak{x}|}\frac{1}{|\mathfrak{x}|^4}G(0;\mathfrak{x})\,dF.\end{aligned} \tag{6,29}$$

Mit (6,28) erhalten wir damit

Lemma 13a:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{0<|\mathfrak{g}|\le N}{}' \frac{1}{|\mathfrak{g}|^2} - \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\lg N\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}(\lg\pi + C + 2\pi a_0(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2) - \lg\sqrt{g}).$$

§ 7. Die Hardy-Landausche Identität

Als weitere Anwendung betrachten wir eine Identität, die für quadratische Gitter, d.h. $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{e}_i$, zuerst von Hardy bewiesen wurde [5]. Wir untersuchen dazu die Reihe

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{0\le|\mathfrak{g}|\le N}{}' \frac{J_1(2\pi R|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|}. \tag{7,1}$$

Zunächst bemerken wir, daß mit den BESSEL-Funktionen $J_1(x)$ und $J_2(x)$

$$\Delta \frac{J_1(2\pi R|\mathfrak{x}|)}{|\mathfrak{x}|} + 4\pi^2 R^2 \frac{J_1(2\pi R|\mathfrak{x}|)}{|\mathfrak{x}|} = 4\pi R \frac{J_2(2\pi R|\mathfrak{x}|)}{\mathfrak{x}^2} \tag{7,2}$$

ist und wenden dann die Summenformel (5,10) mit $\lambda = 4\pi^2 R^2$ an. So erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{0\le|\mathfrak{g}|\le N} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|} &= \frac{1}{\sqrt[4]{g}} \sum_{\lambda=4\pi^2\mathfrak{h}^2} \int\limits_{|\mathfrak{x}|\le N} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}|\mathfrak{x}|)}{|\mathfrak{x}|} \varphi(\mathfrak{h},\mathfrak{x})\,dF \\ &\quad - 4\pi R \int\limits_{|\mathfrak{x}|\le N} G(\lambda;\mathfrak{x}) \frac{J_2(\sqrt{\lambda}|\mathfrak{x}|)}{|\mathfrak{x}|^2}\,dF \\ &\quad - \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} \left(\frac{J_1(\sqrt{\lambda}|\mathfrak{x}|)}{|\mathfrak{x}|} \frac{\partial}{\partial n} G(\lambda;\mathfrak{x}) - G(\lambda;\mathfrak{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}|\mathfrak{x}|)}{|\mathfrak{x}|} \right) ds. \end{aligned} \tag{7,3}$$

Nach Lemma 4 ist[1])

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} G(\lambda;\mathfrak{x})\,ds &= \int\limits_{\mathfrak{x}=N} G(0;\mathfrak{x})\,ds + \frac{\lambda}{\sqrt[4]{g}} \sum_{0<|\mathfrak{h}|}{}^{*} \int\limits_{|\mathfrak{x}|=0} \frac{\varphi(\mathfrak{h},\mathfrak{x})\,ds}{4\pi^2\mathfrak{h}^2(4\pi^2\mathfrak{h}^2-\lambda)} - \frac{2\pi N}{\sqrt{g}\,\lambda}. \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt[4]{g}} \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda=4\pi^2\mathfrak{h}^2} \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} \varphi(\mathfrak{h},\mathfrak{x})\,ds. \end{aligned} \tag{7,4}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} G(\lambda;\mathfrak{x})\,ds &= -\frac{2\pi N}{\sqrt{g}\,\lambda} + \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} G(0;\mathfrak{x})\,ds + \frac{2\pi N}{\sqrt{g}} \sum_{0<|\mathfrak{h}|}{}^{*} \frac{J_0(2\pi N|\mathfrak{h}|)}{4\pi^2\mathfrak{h}^2(4\pi^2\mathfrak{h}^2-\lambda)} \\ &\quad - \frac{2\pi N}{\sqrt{g}\,\lambda} \sum_{\lambda=4\pi^2\mathfrak{h}^2} J_0(2\pi N|\mathfrak{h}|). \end{aligned} \tag{7,5}$$

Da auch die durch formales Differenzieren entstehende Reihe

$$-\sum_{0<|\mathfrak{h}|}{}^{*} \frac{J_1(2\pi N|\mathfrak{h}|)}{2\pi|\mathfrak{h}|(4\pi^2\mathfrak{h}^2-\lambda)} \tag{7,6}$$

absolut und gleichmäßig konvergiert, erhalten wir aus (7,5)

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} \frac{\partial}{\partial n} G(\lambda;\mathfrak{x})\,ds &= \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} \frac{\partial}{\partial n} G(0;\mathfrak{x})\,ds - \frac{N}{\sqrt{g}} \sum_{0<|\mathfrak{h}|}{}^{*} \frac{J_1(2\pi N|\mathfrak{h}|)}{|\mathfrak{h}|(4\pi^2\mathfrak{h}^2-\lambda)} \\ &\quad + \frac{N}{\sqrt{g}} \frac{4\pi^2}{\lambda} \sum_{\lambda=4\pi^2\mathfrak{h}^2} J_1(2\pi N|\mathfrak{h}|). \end{aligned} \tag{7,7}$$

---

[1]) Durch das Symbol Σ^* drücken wir hier aus, daß bei der Summation die $\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2$ entsprechenden Glieder auszulassen sind.

Unter Benutzung von

$$(7,8) \qquad J_1(x) = O(x^{-\frac{1}{2}})$$

folgt damit nach (6,4) und (6,16) für alle $\lambda \neq 0$

$$(7,9) \qquad \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} \frac{\partial}{\partial n} G(\lambda; \mathfrak{x}) ds = \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} \frac{\partial}{\partial n} G(0; \mathfrak{x}) ds + O(\sqrt{N}) = O(N)$$

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} G(\lambda; \mathfrak{x}) ds = -\frac{2\pi N}{\sqrt{g}\,\lambda} + \int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} G(0; \mathfrak{x}) ds + O(\sqrt{N}) = -\frac{2\pi N}{\sqrt{g}\,\lambda} + O(\sqrt{N}).$$

Mit Lemma 9 finden wir weiterhin aus (7,5)

Lemma 14: Es ist

$$\int\limits_{|\mathfrak{x}|=N} G(\lambda; \mathfrak{x}) ds = \frac{2\pi N}{\sqrt{g}} \sum_{|\mathfrak{h}| \leq 0}^{*} \frac{J_0(2\pi N|\mathfrak{h}|)}{4\pi^2 \mathfrak{h}^2 - \lambda}.$$

Wegen (7,9) konvergiert die Summe (7,3) für $N \to \infty$, und wir erhalten nach Ausrechnung der ersten Summe

$$(7,10) \qquad \sum_{0 \leq |\mathfrak{g}|} \frac{J_1(\sqrt{\lambda}|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \Big(\sum_{\lambda = 4\pi^2\mathfrak{h}^2} 1\Big) \int\limits_0^\infty J_1(\sqrt{\lambda}\, r) J_0(\sqrt{\lambda}\, r) dr$$
$$- 2\sqrt{\lambda} \int\limits_0^\infty \frac{J_2(\sqrt{\lambda} r)}{r^2} \Big(\int\limits_{|\mathfrak{x}|=r} G(\lambda; \mathfrak{x}) ds\Big) dr.$$

Nach dem Vorgang von Lemma 10 gilt auch hier

$$(7,11) \qquad \begin{aligned} & 2\sqrt{\lambda} \int\limits_0^\infty \frac{J_2(\sqrt{\lambda} r)}{r^2} \Big(\int\limits_{|\mathfrak{x}|=r} G(\lambda; \mathfrak{x}) ds\Big) \\ &= \lim_{M \to \infty} \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sum_{0 \leq |\mathfrak{h}| \leq M}^{*} \frac{2\sqrt{\lambda}}{4\pi^2\mathfrak{h}^2 - \lambda} \int\limits_0^\infty \frac{J_2(\sqrt{\lambda} r)}{r} J_0(2\pi r |\mathfrak{h}|) dr, \end{aligned}$$

wobei wegen (7,2)

$$(7,12) \qquad \frac{2\sqrt{\lambda}}{4\pi^2\mathfrak{h}^2 - \lambda} \int\limits_0^\infty J_2(\sqrt{\lambda} r) J_0(2\pi r |\mathfrak{h}|) \frac{dr}{r} = \int\limits_0^\infty J_1(\sqrt{\lambda}\, r) J_0(2\pi |\mathfrak{h}|\, r) dr$$

ist. Nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Bessel-Funktionen ist aber für reelle positive a und b [9]

$$(7,13) \qquad \int\limits_0^\infty J_1(ar) J_0(br) dr = \begin{cases} \frac{1}{a} & b < a \\ \frac{1}{2a} & b = a \\ 0 & b > 0 \end{cases}$$

und wir erhalten nach (7,10) — (7,12), wenn wir statt $\sqrt{\lambda}$ wieder $2\pi R$

schreiben

(7,14) $$\lim_{N=\infty} R \sum_{0\leq|\mathfrak{g}|\leq N} \frac{J_1(2\pi R|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{|\mathfrak{h}|\leq R}' 1.$$

Summieren wir hier auf der linken Seite über Ω^{-1} statt über Ω, so ergibt sich wegen

(7,15) $$J_1(x) = \frac{x}{2} + \cdots$$

Satz 3: *Es ist*

$$\sum_{|\mathfrak{g}|\leq R}' 1 = \frac{\pi}{\sqrt{g}} R^2 + R \sum_{|\mathfrak{h}|>0} \frac{J_1(2\pi R|\mathfrak{h}|)}{|\mathfrak{h}|}.$$

Literaturverzeichnis

[1] Mordell, L. J., Proc. Cambr. Phil. Soc., XXIV, 585–596 (1929).
—, Proc. Cambr. Phil. Soc., XXV, 412–420 (1929).
—, Journ. London Math. Soc., 4 (1929).
—, Proc. Royal Soc. A. 129, 262–276 (1929).
[2] Hardy, G. H., Divergent Series, S. 318ff.
[3] Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (1924) S. 58ff.
[4] Landau, E., Journ. reine u. angew. Math., 125, 64–182 (1903).
[5] Hardy, G. H., Quart. Journ., Oxf. Ser., 46, 263–283 (1915).
Landau, E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 2, S. 227ff.
[6] Courant-Hilbert, Methoden der Math. Physik, Bd. 1, S. 314ff., Bd. 2, S. 222ff.
[7] Watson, G. N., Theory of Bessel Functions (1914) S. 185.
[8] Watson, G. N., L. c., S. 80.
[9] Watson, G. N., L. c., S. 391 u. S. 406.
[10] Epstein, P. S., Math. Ann. 56, 615–644 (1903).
—, Math. Ann. 63, 205–216 (1907).

Eine Formel der analytischen Zahlentheorie

Von Claus Müller in Bonn

Gegenstand der vorliegenden Note ist die Untersuchung der Summe

(1) $$\sum_{0<n^2+m^2\leq R^2} \lg \sqrt{n^2+m^2} - \lg R \sum_{0<n^2+m^2\leq R^2} 1,$$

die sich mit Hilfe einer kürzlich entwickelten Summenformel behandeln läßt. Wir benutzen dazu die Bezeichnungsweise der vorstehenden Arbeit des Verf.

Es sei $G(0;\mathfrak{x})$ die Grundfunktion des durch $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{e}_i$ definierten quadratischen Gitters, die die Perioden 1 bezüglich beider Koordinatenrichtungen