Лекція 14

СОЛЕНОЇДАЛЬНІ ВЕКТОРНІ ПОЛЯ

1. *Визначення*

Векторне поле $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})$ називається соленоїдальним в об'ємі V, якщо його потік через будь яку замкнуту поверхню $S \subset V$ дорівнює нулю:

$$\oiint_S (\vec{F}_S(\vec{r}), d\vec{S}) = 0 \qquad \forall S \subset V$$

Зауваження. Дане визначення, як неважко побачити, легко переформулюється в наступне: Векторне поле $\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})$ соленоїдальне в об'ємі V, якщо інтеграл

$$\iint_{S_L} (\vec{F}_S(\vec{r}), d\vec{S})$$

по поверхні S_L, що спирається на даний контур L, не залежить від вибору самої поверхні S.

Дійсно, оскільки

$$\iint_{S_1^+} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) + \iint_{S_2^-} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) = \oiint_{S_1^+ \cup S_2^-} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) = 0$$

то

$$\iint_{S_1^+} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) = \iint_{S_1^+} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) + \underbrace{\left(\iint_{S_2^-} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) + \iint_{S_2^+} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) \right)}_{=0} = \iint_{S_2^+} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) + \underbrace{\left(\iint_{S_1^+} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) + \iint_{S_2^-} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}}) \right)}_{=0} = \iint_{S_2^+} (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}})$$

2. *Критерій соленоїдальності поля*

Про об'єм V, всередині якого розглядається поле, нічого поки сказано не було. Критерій, що формулюється нижче, вірний, якщо об'єм V є об'ємно зв'язаний, тобто, будь яка замкнута поверхня $S \subset V$ може бути неперервною деформацією стягнута в точку не виходячи з V (об'єм V не повинен мати порожнин всередині).

Т1. Для того, щоб $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})$ було соленоїдальним $\Leftrightarrow$ щоб $div\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}}) = 0$ в V.

Д.

1)Згідно з теоремою Гауса-Остроградського $\oiint_S (\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}}) = \iiint_V \underbrace{div\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})}_{=0} dV = 0$

2) Згідно з інваріантним визначенням дивергенції $div\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}_0) = \lim_{V_\varepsilon \to r_0} \dfrac{\oiint_S (\vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{S}})}{V_\varepsilon} = 0$

Т2. Для того, щоб $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})$ було соленоїдальним в V $\Leftrightarrow$ щоб поле було ротором деякого векторного поля $\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}})$

$$\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}}) = rot\,\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}})$$

Д.

1) Нехай

$$\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}}) = rot\,\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}})$$

Візьмемо довільний контур L і деяку поверхню S_L, що спирається на L. Тоді за теоремою Стокса маємо

$$\iint_{S_L}\left(\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}}\right) = \iint_{S_L}\left(rot\,\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}}\right) = \oint_L \vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{L}}$$

Остання рівність означає, що потік не залежить від вибору поверхні, а тому $\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})$ - соленоїдальне.

2) Нехай

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad div\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \quad \text{тобто} \quad P'_x + Q'_y + R'_z = 0$$

Покажемо, що $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = rot\,\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}})$, тобто існує

$$\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} U(x,y,z) \\ V(x,y,z) \\ W(x,y,z) \end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U & V & W \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} W'_y - V'_z \\ U'_z - W'_x \\ V'_x - U'_y \end{pmatrix}$$

Нам треба вказати хоча б один розв'язок. Шукатимемо $\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}})$ вважаючи $W = 0$. Тоді

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V'_z \\ U'_z \\ V'_x - U'_y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} V = -\int\limits_{z_0}^{z} P(x,y,z)dz + \psi(x,y) \\ U = \int\limits_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz + \varphi(x,y) \\ V'_x - U'_y = R \end{array}\right.$$

Підставимо V та U у третє співвідношення

$$R = V'_x - U'_y = \left(-\int\limits_{z_0}^{z} P(x,y,z)dz + \psi(x,y)\right)'_x - \left(\int\limits_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz + \varphi(x,y)\right)'_y$$

$$R = -\int\limits_{z_0}^{z} P'_x dz + \psi'_x(x,y) - \int\limits_{z_0}^{z} Q'_y dz - \varphi'_y(x,y)$$

Зауважимо, що

$$-\int\limits_{z_0}^{z}\left(P'_x + Q'_y\right)dz = \underbrace{-\int\limits_{z_0}^{z}\left(P'_x + Q'_y + R'_z\right)dz}_{=0} + \int\limits_{z_0}^{z} R'_z dz = R(x,y,z) - R(x,y,z_0)$$

Тоді одержимо:

$$\psi'_x(x,y) - \varphi'_y(x,y) = R(x,y,z_0)$$

Поклавши, наприклад, $\varphi(x,y) = 0$, одержимо $\psi(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} R(x,y,z_0)dx$

Остаточно:

$$\begin{cases} V = -\int\limits_{z_0}^{z} P(x,y,z)dz + \int\limits_{x_0}^{x} R(x,y,z_0)dx \\ U = \int\limits_{z_0}^{z} Q(x,y,z)dz \end{cases}$$

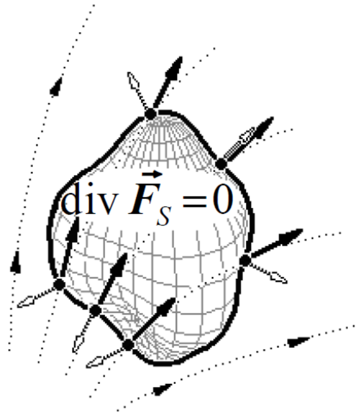
Отже $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = rot\,\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}}) \Rightarrow divrot\,\vec{\mathbf{G}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0$

Наслідок. Як визначення соленоїдального в об'ємі V векторного поля $\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})$ може бути прийнято будь-яку з наступних еквівалентних умов

- $\oiint\limits_S (\vec{F}_S(\vec{r}), d\vec{S}) = 0 \quad \forall S \subset V$
- $\iint\limits_{S_L} (\vec{F}_S(\vec{r}), d\vec{S}) = const \quad \forall S$
- $\operatorname{div} \vec{F}_S(\vec{r}) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{G}(\vec{r}) = 0}$$

- $\vec{F}_S(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{G}(\vec{r})$



3. ***Векторний потенціал***

Визначення. Векторне поле, $\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$, ротором якого є соленоїдальне поле $\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})$,

$$\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}}) = rot\,\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$$

називається векторним потенціалом.

Векторне поле визначається неоднозначно, а з точністю до градієнта скалярного поля

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) + grad\,\psi(\vec{\mathbf{r}}).$$

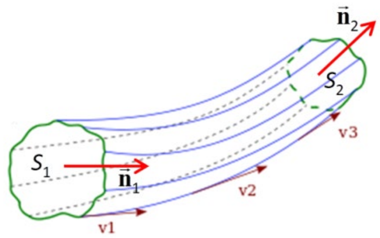
Дійсно якщо $\vec{\mathbf{A}}_1(\vec{\mathbf{r}})$ і $\vec{\mathbf{A}}_2(\vec{\mathbf{r}})$ два векторні потенціали, то

$$\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}}) = rot\,\vec{\mathbf{A}}_1(\vec{\mathbf{r}}) = rot\,\vec{\mathbf{A}}_2(\vec{\mathbf{r}}) \quad \Rightarrow$$
$$rot\left(\vec{\mathbf{A}}_1(\vec{\mathbf{r}}) - \vec{\mathbf{A}}_2(\vec{\mathbf{r}})\right) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\vec{\mathbf{A}}_1(\vec{\mathbf{r}}) - \vec{\mathbf{A}}_2(\vec{\mathbf{r}}) = grad\,\psi(\vec{\mathbf{r}})$$

Розглянемо ще одну властивість соленоїдальних полів.

Т. Потік соленоїдального поля $\vec{\mathbf{F}}_S(\vec{\mathbf{r}})$ через будь який переріз векторної трубки є постійним

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}}) = \iint\limits_{S_2} (\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}})$$



Д.

$$0 = \oiint\limits_S (\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}}) = -\iint\limits_{S_1} (\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}}) + \underbrace{\iint\limits_{S_{бiч}} (\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}})}_{=0} + \iint\limits_{S_2} (\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}), d\vec{\mathbf{S}}) \quad \Rightarrow$$

$$\iint_{S_1}\left(\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}),d\vec{\mathbf{S}}\right)=\iint_{S_2}\left(\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}),d\vec{\mathbf{S}}\right)=const$$

Звідси випливає, що векторні трубки (іноді говорять про векторні лінії) не можуть ні починатися, ні закінчуватися всередині поля, тобто, вони або замкнуті, або мають кінці на межі поля, або мають нескінченні гілки.

4. *Лапласове поле*

Визначення. Векторне поле $\vec{\mathbf{F}}_L(\vec{\mathbf{r}})$ називається лапласовим в об'ємі V, якщо воно одночасно є і потенціальним, і соленоїдальним в об'ємі V, тобто, якщо і $rot\,\vec{\mathbf{F}}_L(\vec{\mathbf{r}})=\vec{\mathbf{0}}$ (потенціальне) і $div\,\vec{\mathbf{F}}_L(\vec{\mathbf{r}})=0$ (соленоїдальне).

З ланцюжка еквівалентних умов (якщо об'єм V - об'ємно і поверхнево зв'язаний)

$$\left[\begin{array}{l}\oint_L\left(\vec{F}_L(\vec{r}),\,d\vec{L}\right)=0\\ \oiint\left(\vec{F}_L(\vec{r}),\,d\vec{S}\right)=0\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\mathrm{rot}\,\vec{F}_L(\vec{r})=\vec{0}\\ \mathrm{div}\,\vec{F}_L(\vec{r})=0\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}\vec{F}_L(\vec{r})=\mathrm{grad}\,f(\vec{r})\\ \vec{F}_L(\vec{r})=\mathrm{rot}\,\vec{G}(\vec{r})\end{array}\right.$$

випливає, що

$$div\,grad\,f(\vec{\mathbf{r}})=\Delta f(\vec{\mathbf{r}})=0$$

тобто лапласове поле є градієнтом так званої гармонійної функції (наприклад, гармонійною функцією є електростатичний потенціал у точках, де немає заряду)

Приклад. Показати, що векторне поле $\vec{\mathbf{F}}=yz\vec{\mathbf{i}}+xz\vec{\mathbf{j}}+xy\vec{\mathbf{k}}$ є лапласовим.

Розв'язання:

$$rot\,\vec{\mathbf{F}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz & xz & xy\end{vmatrix}=\vec{\mathbf{i}}\left(\frac{\partial xy}{\partial y}-\frac{\partial xz}{\partial z}\right)-\vec{\mathbf{j}}\left(\frac{\partial xy}{\partial x}-\frac{\partial yz}{\partial z}\right)+\vec{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial xz}{\partial x}-\frac{\partial yz}{\partial y}\right)=\vec{\mathbf{i}}(x-x)-\vec{\mathbf{j}}(y-y)+\vec{\mathbf{k}}(z-z)=\vec{\mathbf{0}}$$

$$div\,\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})=\frac{\partial yz}{\partial x}+\frac{\partial xz}{\partial y}+\frac{\partial xy}{\partial z}=0$$

Отже, векторне поле $\vec{\mathbf{F}}=yz\vec{\mathbf{i}}+xz\vec{\mathbf{j}}+xy\vec{\mathbf{k}}$ є лапласовим.

5. *Теорема розкладання. Відновлення векторного поля по ротору та дивергенції.*

Теорема розкладання Гельмгольца. Будь-яке векторне поле $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ допускає розкладання у суму потенціального та соленоїдального полів

$$\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}_P(\vec{r})+\vec{F}_S(\vec{r})$$

або

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})=-grad\,f(\vec{\mathbf{r}})+rot\,\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}})$$

У багатьох питаннях електродинаміки та гідродинаміки часто зустрічаються задачі про відновлення векторного поля $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ по заздалегідь заданим ротору та дивергенції.

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{F} = q \end{array}\right.$$

На відміну від скалярного поля q векторне поле $\vec{\mathbf{j}}$ не може бути зовсім довільним

$$\operatorname{div}\vec{j} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = 0$$

З ланцюжка еквівалентних умов

$$\left[\begin{array}{llll} \operatorname{div}\vec{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{j} = \operatorname{rot}\vec{G} & & & \\ \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{j} & \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{j} = \operatorname{rot}\vec{G} & \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{G} + \operatorname{grad} f & \\ \operatorname{div}\vec{F} = q & & & \Leftrightarrow \quad \operatorname{div}(\vec{G} + \operatorname{grad} f) = q \end{array}\right.$$

випливає, що задача зводиться до вирішення рівняння Пуассона

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = q - \operatorname{div}\vec{G} = p \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f = p$$