

Об инерционных свойствах электромагнитной массы

А.Ю.Дроздов

Jan 30, 2020

1 Постановка задачи

Пусть частица с заданным распределением объёмной плотности электрического заряда $\rho(r)$ приобретает ускорение \vec{a} . Найти силу, действующую на распределённый в объёме электрический заряд этой частицы со стороны электрического поля самоиндукции.

Для решения этой задачи электрическое поле самоиндукции $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ выразим исходя из выражения векторного потенциала Лиенара-Вихерта [1] $\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c} \frac{q}{R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}}$ дифференцирование которого приводит к выражению [2]

$$\vec{E} = \frac{dq}{R^{*2}} \left\{ \frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{R}{R^*} \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{c^2} - 1 \right) + 1 \right) - \frac{\vec{a} R}{c^2} \right\}$$

В системе СИ перед этим выражением появляется множитель $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = \frac{c^2}{10^7}$

Направляя в сферической системе координат вектор ускорения вдоль оси z запишем

$$R^* = R - \frac{v}{c} (z_a - z_q) = R - \frac{v}{c} (r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q))$$

$$\vec{a} \cdot \vec{R} = a (z_a - z_q) = a (r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q))$$

Где следуя Тамму [3], индексом q обозначены координаты заряда, а индексом a обозначены координаты точки наблюдения

$$\vec{E} = \int_{V_q} \left\{ \frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{R}{R^*} \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{c^2} - 1 \right) + 1 \right) - \frac{\vec{a} R}{c^2} \right\} \frac{\rho(r_q)}{R^{*2}} dV_q$$

Действующая на заряд со стороны электрического поля самоиндукции инерционная сила равна

$$\vec{F}_z = \int_{r_a} \int_{\varphi_a} \int_{\theta_a} \vec{E}_z \rho(r_a) r_a^2 \sin(\theta_a) d\theta_a d\varphi_a dr_a$$

Из приведенных формул видно, что сила инерции электромагнитной массы зависит от вида функции распределения плотности заряда в пространстве, а также от скорости и ускорения заряда.

2 Приближение малых скоростей без учёта запаздывания

В приближении малых скоростей $v/c \ll 1$ и малых ускорений $ar_0 \ll c^2$ и при игнорировании запаздывания

$$\vec{E} = \int_{r_q} \int_{\varphi_q} \int_{\theta_q} \left\{ -\frac{\vec{a} R_0}{c^2} \right\} \frac{\rho(r_q) r_q^2 \sin(\theta_q)}{R_0^2} d\theta_q d\varphi_q dr_q$$

где R_0 расстояние от точки источника заряда к точке наблюдения без учёта запаздывания.

Откуда $F_z = -\frac{\vec{a}}{c^2} \int_{V_a} \int_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0} dV_q dV_a$ Сопоставляя с законами Ньюто-

на для электромагнитной массы получаем выражение $m = \frac{1}{c^2} \int_{V_a} \int_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0} dV_q dV_a$

(в системе сгс) и соответственно $m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_a} \int_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0} dV_q dV_a$ в системе СИ

Рассчитаем теперь электромагнитную массу равномерно заряженной сферы радиуса r_0

Поскольку расстояние между координатами заряда и точки наблюдения $R_0 = |\vec{r}_q - \vec{r}_a|$ находится в знаменателе, то в сферической системе координат можно применить разложение по сферическим гармоникам следующего вида [4] если $(r_q < r_a)$ то

$$\frac{1}{|\vec{r}_q - \vec{r}_a|} = \frac{1}{r_a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_q}{r_a}\right)^l P_l \cos(\gamma)$$

и если $(r_a < r_q)$ то

$$\frac{1}{|\vec{r}_q - \vec{r}_a|} = \frac{1}{r_q} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_a}{r_q}\right)^l P_l \cos(\gamma)$$

В данной формуле $P_l \cos(\gamma)$ это полиномы Лежандра аргумент которых γ есть угол между векторами r_q и r_a . Применяя формулу, известную как теорему сложения

$$P_l \cos(\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta_a, \varphi_a) Y_{l,m}(\theta_q, \varphi_q)$$

получаем способ аналитического вычисления интеграла инертной электромагнитной массы.

Пусть заряд представляет собой сферу, равномерно заряженную по всему объёму тогда плотность заряда составит $\rho(r) = \frac{e}{4/3\pi r_0^3}$

Производя вычисления для интеграла электромагнитной массы получено значение

$$m = \frac{1}{c^2} \frac{6}{5} \frac{e^2}{r_0} \text{ (сгс) и } m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6}{5} \frac{e^2}{r_0} \text{ (СИ)}$$

Пусть заряд представляет собой сферическую поверхность с равномерным поверхностным распределением заряда по поверхности сферы, равным $\sigma = \frac{e}{4\pi r_0^2}$ тогда для вычисления инертной электромагнитной массы требуется формула

$$m = \frac{1}{c^2} \int_{S_a} \int_{S_q} \frac{\sigma(r_q)\sigma(r_a)}{R} dS_q dS_a$$

Вычисления по которой дают следующий результат

$$m = \frac{1}{c^2} \frac{e^2}{r_0} \text{ (сгс) и } m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^2}{r_0} \text{ (СИ)}$$

В работе [5] приводится способ вычисления инертной электромагнитной массы электрона исходя из коэффициента самоиндукции сферы и производной тока сферы по времени. Результат вычислений электромагнитной массы электрона авторы приводят следующий $m = \frac{\mu_0}{8\pi} \frac{e^2}{r_0}$ (СИ) то есть в два раза меньший, чем полученный в данной работе.

Анализ показывает, что приведенная авторами формула коэффициента самоиндукции сферы $L = \frac{\mu_0 r_0}{2\pi}$ (СИ) в 2 раза занижена. Автором данной

работы было произведено вычисление коэффициента самоиндукции сферической поверхности с равномерно распределённым поверхностным зарядом. Получена формула $L = \frac{\mu_0 r_0}{\pi}$ (СИ) .

Далее авторы работы [5] пишут, "Отметим тот важный факт, что выведенная из закона самоиндукции масса полностью совпадает с Эйнштейновской массой $m = \frac{U}{c^2}$, если под полной энергией электрона U понимать собственную энергию его электрического поля."

Однако с учётом исправленного значения коэффициента самоиндукции сферы данное утверждение становится неверным.

Русская википедия в статье "Классический радиус электрона" на момент написания данной работы даёт следующее определение:

Классический радиус электрона равен радиусу полый сферы, на которой равномерно распределён заряд, если этот заряд равен заряду электрона, а потенциальная энергия электростатического поля U_0 полностью эквивалентна половине массы электрона (без учета квантовых эффектов):

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_0} = \frac{1}{2} m_0 c^2.$$

Возникает закономерный вопрос: а чему соответствует вторая половина массы электрона?

Тамм [3] для собственной электрической энергии заряженного шара радиуса a находит $W = \frac{e^2}{2a}$ если заряд распределён на поверхности шара и $W = \frac{3e^2}{5a}$ если заряд распределён по всему объёму шара. Появление коэффициента $\frac{1}{2}$ в формуле энергии системы зарядов Тамм объясняет тем, что "в сумму энергия каждой пары зарядов входит дважды, так, например, в ней встретится как член $e_1 e_1 / R_{12}$ так и равный ему член $e_2 e_1 / R_{21}$ ".

Однако в задаче, рассмотренной в самом начале данной работы при нахождении силы, действующей на распределённый в объёме электрический заряд этой частицы со стороны электрического поля самоиндукции, подобные рассуждения неприменимы. Поскольку хотя и каждая пара зарядов de_1 и de_2 при совместном поступательном движении создаёт две одинаковые как по виду формулы, так и по значению силы самоиндукции, они обе должны быть включены в общую электромагнитную инерцию, поскольку одна из них - это сила самоиндукции действующая на заряд de_1 со стороны поля заряда de_2 , а вторая это сила самоиндукции действующая на заряд de_2 со стороны поля заряда de_1 .

Таким образом потенциальная энергия электростатического поля модели электрона в виде полый сферы $U_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r_0}$ (сгс) при том что инертная масса электрона этой модели равна $m = \frac{1}{c^2} \frac{e^2}{r_0}$ (сгс).

В любой другой модели потенциальная энергия электростатического поля заряженной частицы равна $U_0 = \frac{1}{2} \int_{V_a} \int_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0} dV_q dV_a$ (сгс) тогда как инертная масса $m = \frac{1}{c^2} \int_{V_a} \int_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0} dV_q dV_a$ (сгс).

Таким образом соотношение потенциальной энергией электростатического поля и энергией массы покоя электрона, приведенное в русской ви-

кипедии подтверждается, но вопрос чему соответствует вторая половина энергии массы покоя электрона остаётся открытым.

3 Учёт запаздывания

Чтобы учесть запаздывание следует решить систему уравнений

$$s = v(t - t') + \frac{a}{2}(t - t')^2 \text{ и } R = c(t - t')$$

Учитывая, что по теореме косинусов

$$R^2 = R_0^2 + s^2 - 2R_0s \cos(\alpha) = R_0^2 + s^2 - 2R_0s \frac{z_{q'} - z_{a'}}{R_0}$$

уравнение для вычисления запаздывающего момента принимает вид

$$c^2(t - t')^2 = R_0^2 + s^2 + 2s(z_{a'} - z_{q'})$$

4 Приближение малых скоростей с учётом запаздывания

Решение этой системы имеет весьма сложный вид, но если мы исследуем вопрос какова будет инертная масса покоя, то при решении этой системы мы можем положить $v = 0$. В этом случае для нахождения запаздывания нужно будет решить уравнение

$$-\frac{1}{4}a^2dt^4 + c^2dt^2 - a dt^2(z_a - z_q) - R_0^2 = 0$$

где $(t - t') = dt$

Это уравнение имеет 4 решения, но физически приемлемый смысл при положительном ускорении имеет решение

$$dt = \frac{\sqrt{2c^2 - 2adz - 2\sqrt{-R_0^2a^2 + c^4 - 2ac^2dz + a^2dz^2}}}{a}$$

где $dz = z_{a'} - z_{q'}$

В приближении малых скоростей $v/c \ll 1$ но при учете запаздывания

$$\vec{E} = \int_{r_q} \int_{\varphi_q} \int_{\theta_q} \left\{ -\frac{\vec{a}R}{c^2} \right\} \frac{\rho(r_q) r_q^2 \sin(\theta_q)}{R^{*2}} d\theta_q d\varphi_q dr_q$$

Откуда

$$F_z = -\frac{\vec{a}}{c^2} \int_{V_a} \int_{V_q} \frac{\rho(r_q) \rho(r_a)}{R} dV_q dV_a$$

где $R = c \frac{\sqrt{2c^2 - 2adz - 2\sqrt{-R_0^2a^2 + c^4 - 2ac^2dz + a^2dz^2}}}{a}$

5 Результат численного интегрирования. Зависимость электромагнитной инертной массы от ускорения

Пусть заряд представляет собой сферу, равномерно заряженную по всему объёму. Для численного интегрирования была использована программа

a	VEGAS RESULT		
0	1.20057324	+ -	0.00117095
0.0001	1.20057145	+ -	0.00117094
0.001	1.20057159	+ -	0.00117101
0.01	1.20056853	+ -	0.00117642
0.1	1.19887814	+ -	0.00117946
0.2	1.19315830	+ -	0.00116342
0.3	1.18205714	+ -	0.00116337
0.4	1.15008831	+ -	0.00112842
0.5	1.09737467	+ -	0.00108701
0.6	1.03839069	+ -	0.00101328
0.7	0.98022447	+ -	0.00101643
0.8	0.92625001	+ -	0.00104227
0.9	0.87671199	+ -	0.00105610
1.0	0.83227193	+ -	0.00107483
2.0	0.56319872	+ -	0.00103720
5.0	0.32020001	+ -	0.00083749
10.0	0.20964075	+ -	0.00070045
100.0	0.05666584	+ -	0.00038991
1000.0	0.00130377	+ -	0.00006038
1250.0	0.00081384	+ -	0.00003357
1500.0	0.00000082	+ -	0.00000028
1750.0	0.00000017	+ -	0.00000006
2000.0	0.00000010	+ -	0.00000005
2100.0	0.00000001	+ -	0.00000000
			9.51624e-08 + - 4.99632e-08
			9.04571e-09 + - 3.96347e-09

Cuba-4.2, интегратор VEGAS. Значения радиуса сферы и ее заряда заданы равными единице $r_0 = 1.0$ и $q = 1.0$. Численное интегрирование этим интегратором для формулы не учитывающей запаздывание дает результат $1.20057324 + -0.00117095$ что вполне соответствует аналитическому решению $m = \frac{1}{c^2} \frac{6}{5} \frac{e^2}{r_0}$ (сгс) и $m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6}{5} \frac{e^2}{r_0}$ (СИ)

При интегрировании с учётом запаздывания скорость света была установлена равной $c = 1.0$.

Результаты интегрирования при различных ускорениях сведены в таблицу.

Электромагнитная масса уменьшается с ускорением. При достижении определённого предела электромагнитная масса практически исчезает. Эта закономерность выявляется при учёте запаздывания. Физически это означает что при достижении колоссальных ускорений частица ускользает от действия своего поля.

6 Приближение малых ускорений с учётом запаздывания

В приближении малых ускорений $ar_0 \ll c^2$ при учете запаздывания

$$\vec{E} = \int_{V_q} \left\{ \frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{R}{R^*} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) + 1 \right) - \frac{\vec{a} R}{c^2} \right\} \frac{\rho(r_q)}{R^{*2}} dV_q$$

Откуда

$$F_z = \int_{V_a} \int_{V_q} \left\{ \frac{\vec{v}}{c} \left(\frac{R}{R^*} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) + 1 \right) - \frac{\vec{a} R}{c^2} \right\} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R^{*2}} dV_q dV_a$$

Запаздывающий момент рассчитывается с помощью выражения

$$dt = \frac{dzv - \sqrt{R_0^2 c^2 - (R_0^2 - dz^2)v^2}}{c^2 - v^2}$$

Следовательно

$$R = c \frac{v(r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q)) - \sqrt{R_0^2 c^2 - (R_0^2 - (r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q))^2)v^2}}{c^2 - v^2}$$

и радиус Лиенара-Вихерта

$$R^* = R - \frac{v}{c} (r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q))$$

7 Расчёт инертной электромагнитной массы протона и нейтрона

Представляет интерес расчёт инертной электромагнитной массы протона и нейтрона на основании предложенных в данной работе формул.

Плотности распределения заряда для протона

$$\rho_p = \frac{e}{\pi^{\frac{3}{2}} r_0^3} \left(-\frac{r_q^2}{r_0^2} \right), \text{ где } r_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle r_p \rangle_{rms} \text{ и } \langle r_p \rangle_{rms} = 0.8 \text{ fm}$$

и для нейтрона

$$\rho_n = \frac{2 \langle r_n^2 \rangle r_q^2 \left(\frac{2 r_q^2}{r_1^2} - 5 \right) e \left(-\frac{r_q^2}{r_1^2} \right)}{15 \pi^{\frac{3}{2}} r_1^7}, \text{ где } \langle r_n^2 \rangle = -0.113 \text{ fm}^2 \text{ и } r_1 = 0.71 \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ fm}$$

были взяты из работы [6].

Аналитический результат расчёта интеграла $\int_{V_a} \int_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R} dV_q dV_a$ с по-

мощью разложения по сферическим функциям для протона составил $\frac{1.875\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ что равно 1.49603355150537

Для контроля этот же интеграл был взят численно с помощью функции integrate.quad математического пакета scipy

(1.4960348943817992, 0.0026474827067254846)

Кроме того для численного интегрирования была опробована программа Cuba-4.2 двумя методами

VEGAS RESULT: 1.49695439 +- 0.00345851 p = 0.006

SUAVE RESULT: 1.49424975 +- 0.00149158 p = 1.000

Коэффициент преобразования полученного результата в систему СИ
 $k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^2}{10^{-15}}$, при умножении на который вычисленная электромагнитная инертная масса протона составила $3.84027312853036 \times 10^{-30}$ кг что в 4.21573319817234 раза больше массы электрона.

Аналитический результат расчёта того же интеграла для нейтрона

$$\frac{(4.48918680252563 \times 10^{-28}) \sqrt{5} \sqrt{2} (1824320471 \sqrt{10} \sqrt{5} + 14369256122481640385175552 \sqrt{2})}{\sqrt{\pi}}$$
 что соответствует 0.0162757880193542

Результат численного интегрирования в программе Cuba-4.2

VEGAS RESULT: 0.00183803 +- 0.00000179 p = 0.000

SUAVE RESULT: 0.00183606 +- 0.00000183 p = 1.000

В системе СИ электромагнитная инертная масса нейтрона $4.17794582972344 \times 10^{-32}$ кг что составляет 0.0458641985739987 от массы электрона.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д. Лившиц Е.М. Теория поля. М. 1973
- [2] Ре: Как запаздывающий Лиенар-Вихерт становится "незапаздывающим". Визуализация
<http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1528093569/330#330>
- [3] И.Е.Тамм. Основы теории электричества. М. 1957
- [4] З.Флюгге Задачи по квантовой механике т.2 М. "Мир"1974. стр. 296
- [5] В. Ганкин, Ю. Ганкин, О. Курпьянова, И. Мисюченко. История электромагнитной массы
- [6] S. Haddad and S. Suleiman NEUTRON CHARGE DISTRIBUTION AND CHARGE DENSITY DISTRIBUTIONS IN LEAD ISOTOPEs ACTA PHYSICA POLONICA B, Vol. 30 (1999) No 1
<http://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=30&page=119>