

## **О волновой механике световых квантов и соотношениях неопределенности в квантовой электродинамике.**

**Ю.П. Степановский**

*... в квантовых джунглях, к которым мы сейчас приближаемся, квант действия очень велик. Это грубый мир, в нем нет места нежностям. Если вы попыгаете здесь погладить котенка, то он или ничего не почувствует, или вы сломаете ему шею первым же квантом вашей ласки...*

*По дороге через квантовые джунгли путешественники встретили множество других интересных животных, например, квантовых комаров, положение которых в воздухе вообще почти невозможно было определить из-за их крохотной массы...*

Георгий Гамов, «Приключения мистера Томпкинса» [1]

В 1930 году Ландау и Пайерлс попытались построить волновую механику световых квантов [2]. Однако, им не удалось написать волновое уравнение для светового кванта в координатном представлении. Не достигли они успеха и в поисках удовлетворительного выражения для плотности вероятности нахождения светового кванта в определенной точке пространства. «Правильного выражения для плотности вероятности найти пока не удалось», – писали они в своей статье. (Оказалось, что положение световых квантов в пространстве определить еще труднее, чем положение «квантовых комаров» Гамова.) В 1931 году во второй их совместной работе Ландау и Пайерлс рассмотрели проблему измерения напряженностей электрического и магнитного полей в квантовой теории [3] и выступили с радикальным заявлением, резко раскритикованным Бором: «... в квантовомеханической области напряженности полей вообще не являются измеримыми величинами» (согласно Ландау и Пайерлсу, напряженности поля нельзя измерить примерно по тем же причинам, по которым в квантовом мире нельзя «погладить котенка»). В настоящей статье обсуждаются идеи, высказанные (или недосказанные) в работах Ландау и Пайерлса и некоторые вопросы, связанные с развитием этих идей.

**1. Письмо Зельдовича.** Лет 30 назад, примерно в 1980 году, уже после выхода третьего издания «Квантовой электродинамики» [4], Александр Ильич Ахиезер (1911 – 2000) получил письмо от Якова Борисовича Зельдовича (1914 – 1987). *«Дорогой Шура! – писал Яков Борисович, – я несколько раз прочёл в вашей с Володиёй<sup>1</sup> книге раздел 2.5, но так ничего и не понял. Я был бы очень рад, если бы ты разъяснил мне, что вы там написали ...».*

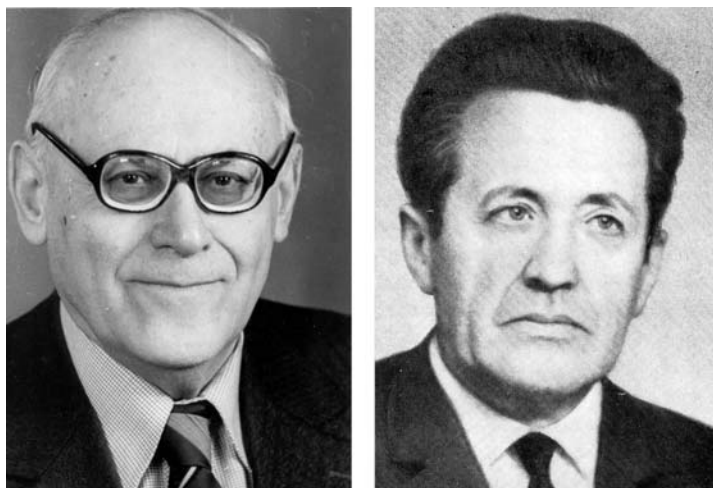


Рис. 1 Александр Ильич Ахиезер и Владимир Борисович Берестецкий

В разделе 2.5 частично пересказывалась работа Ландау и Пайерлса 1930 года [2], и обосновывалось утверждение, что *«понятие плотности вероятности нахождения фотона в определенной точке пространства не имеет смысла»*. Это утверждение и показалось Я. Б. Зельдовичу странным и непонятным.

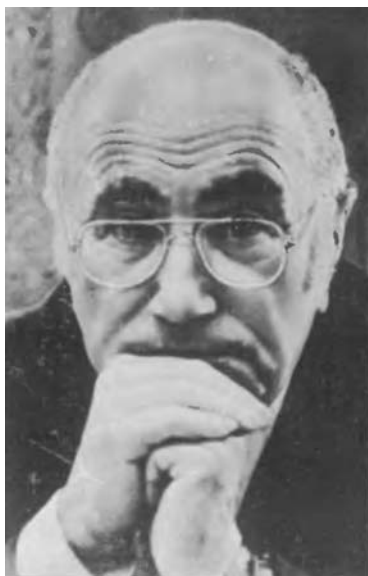


Рис. 2 Яков Борисович Зельдович

Получив письмо, Александр Ильич оказался в затруднительном положении. Дело в том, что раздел 2.5, как и вся глава о фотонах, была написана В. Б. Берестецким (1913 – 1977), и добавить что-нибудь к уже написанному Александр Ильич не мог. И он поступил следующим образом. По просьбе

---

<sup>1</sup> Владимиром Борисовичем Берестецким.

Александра Ильича был написан «формуляр» в несколько страниц<sup>2</sup> о некоторых новых, не изложенных в злополучном разделе 2.5, затруднениях с локализацией фотона в релятивистской квантовой механике. Этот «формуляр» Александр Ильич отправил вместе со своим письмом «дорогому Яше», написав, что «формуляр» составлен одним из его молодых сотрудников, таким-то и таким-то<sup>3</sup>. Как потом рассказывал Александр Ильич, Я. Б. Зельдович был рад узнать, что степень непонимания вопросов, связанных с локализацией фотонов, сильно возросла по сравнению с 1930 годом.

**2. Квантовая электродинамика как «непонятная» и «абсурдная» теория.** В 1983 году Ричард Фейнман прочитал курс лекций о квантовой электродинамике неспециалистам-гуманитариям [5]. *«То, о чем я собираюсь вам рассказывать», – говорил Фейнман, – «студенты-физики изучают на третьем или четвертом курсе – и вы думаете, что я собираюсь это объяснить так, чтобы вы все поняли? Нет, вы не сможете этого понять. Зачем же я буду докучать вам всем этим? Зачем вам сидеть и слушать все это, если вы все равно ничего не поймете? Моя задача – убедить вас не отворачиваться из-за того, что вы этого не понимаете. Дело в том, что мои студенты-физики тоже этого не понимают. Потому что я сам этого не понимаю. Никто не понимает.»* Фейнман объяснил своим слушателям, что не это важно, понимают ли люди теорию, нравится ли она им, или нет, это неважно.

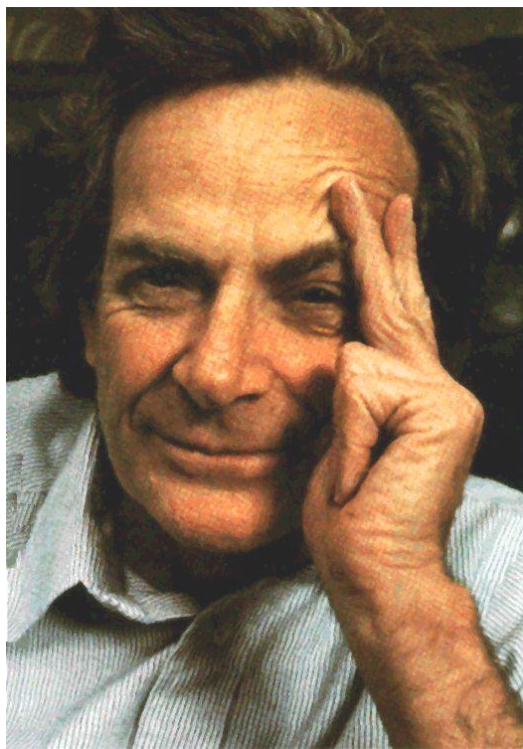


Рис. 3 Ричард Фейнман

---

<sup>2</sup> См. Приложения 2.1-2.4.

<sup>3</sup> Должен признаться, что этим «молодым сотрудником» был я, Ю. П. Степановский, автор настоящей статьи.

*«Важно другое – дает ли теория предсказания, которые согласуются с экспериментом. Тут не имеет значения, хороша ли теория с философской точки зрения, легка ли для понимания, безупречна ли с точки зрения здравого смысла. Квантовая электродинамика дает совершенно абсурдное с точки зрения здравого смысла описание Природы. И оно полностью соответствует эксперименту... Я с удовольствием предвкушаю рассказ об этой абсурдности, потому что она, по-моему, восхитительна» [5].*

У слова «абсурдный» много синонимов: нелепый, глупый; смехотворный, вздорный и др. Чаще всего новые взгляды считаются «вздорными» и «абсурдными» только из-за привычных привязанностей к старым взглядам, которые потом сами оказываются «смехотворными». Так, Галилей считал вздорным утверждение Кеплера о том, что планеты движутся по эллипсам, ведь окружности – это так красиво и хорошо! Галилей высмеял идею Кеплера о том, что океанские приливы связаны с воздействием Луны на Землю. Конечно же, это было очень смешно! Лейбниц и Гюйгенс смеялись над тем, как эти умники-англичане (Ньютон, Гук, Галлей, де Врен) смогли додуматься до полной нелепости, будто бы Солнце может действовать на планеты на расстоянии с помощью какой-то мифической силы тяготения. Хорошо известна печальная история с князем Б. Б. Голицыным [6], который в 1892 году не только приписал излучению черного тела температуру, но и позволил себе не согласиться с мнением Г. А. Столетова, считавшего (и вполне справедливо!), что температура электромагнитных волн – это полный вздор. И таким примерам нет числа. Один из сравнительно недавних печальных примеров – это история с аспирантом Калтеха Джорджем Цвейгом (родившемся в 1937 году в Москве), независимо от Гелл-Манна выдвинувшим идею о кварках (названных им «тузами»). Идея Цвейга была признана настолько вздорной, лженаучной и шарлатанской, что он не смог найти работу как физик и стал нейробиологом. (Известно, что впоследствии Фейнман и другие физики доминировали Цвейга, вместе с Гелл-Манном, на Нобелевскую премию за предсказание существования кварков [7].)

Мы увидим (раздел 10, теорема Вайнберга-Виттена), что в настоящее время утверждение о том, что *«понятие плотности вероятности нахождения фотона в определенной точке пространства не имеет смысла»*, не более «странно» или «непонятно», чем утверждение о том, что планеты движутся не по окружностям.

**3. «Кризис теории квант» в начале 30-х годов.** Прежде чем говорить о работе Ландау и Пайерлса 1930 года, стоит вспомнить, в каком состоянии была квантовая электродинамика в то время. В своей статье «Новый кризис теории квант» Матвей Петрович Бронштейн (1906-1938) писал [8]:

*«У многих, наблюдающих развитие квантовой теории, давно сложилось представление о непрерывном кризисе теоретической физики.*

*Есть много оснований говорить о том, что и в настоящее время (1929-1930) квантовая теория вновь вступила в очередную полосу кризиса. Всего лишь пять лет прошло с тех пор, как Гейзенберг в своей «матричной механике» нашел, как казалось, золотой ключ, открывающий все двери, и вслед*

за ним Шрёдингер, развивая смелые идеи Де-Бройля, устранил противоречие между волновыми и корпускулярными представлениями и тем самым разрушил высокую стену, отделявшую учение о материи от учения о свете.



Рис. 4 Вернер Гейзенберг и Нильс Бор

Четыре года непрерывного бурного развития, четыре года триумфов, и вот над квантовой теорией снова сгущаются тучи. Весною 1930 года в Копенгагене у Нильса Бора собрался совет, на котором присутствовали виднейшие знатоки теории квант, в том числе и такие столпы ее, как Паули и Гейзенберг. Совет заседал в шутливо-торжественной обстановке, и в руках у Паули был рог, в который он трубил каждый раз, когда хотел отметить в разбиравшихся теоретических построениях непонятное место или новую трудность.



Рис. 5 Вольфганг Паули и Поль Дирак

К сожалению, ему приходилось трубить в свой рог слишком часто. Положение было признано безнадежным, что и было отмечено в шуточной резолюции, в которой все присутствующие зарекались впредь заниматься квантовой

теорией (Паули якобы решил впредь заниматься математикой, Гейзенберг – музыкой, и только осторожный Бор заявил, что еще подумает) ...



Рис. 6 Эрвин Шредингер

*Еще неизвестно, кто сумеет рассеять нависшие над квантовой механикой тучи. Чувство растерянности, охватившее большинство физиков-теоретиков при виде неразрешенных и кажущихся неразрешимыми трудностей, является характерной чертой переживаемого теорией кризиса».*<sup>4</sup>



Рис. 7 Матвей Петрович Бронштейн

Самой серьезной трудностью оказались трудности с бесконечностями. Точечный электрон обладал бесконечной собственной массой еще в классической теории электрона. Эта же серьезная проблема осталась и в квантовой электродинамике. Но, кроме этой бесконечности, появились и другие. Например, впервые отмеченная Борном, Гейзенбергом и Иорданом [12],

---

<sup>4</sup> О вкладе самого М. П. Бронштейна в разрешение «кризиса в теории квант» можно прочитать в книге [9], в статье Г. Горелика [10] и в его докладе [11] на семинаре, посвященном 100-летию со дня рождения М. П. Бронштейна.



проблема бесконечной энергии нулевых колебаний квантованного поля<sup>5</sup>. Трудности с бесконечностями все еще до конца не преодолены и остаются с нами и по сей день. Однако, отношение к бесконечностям сегодня совсем иное, чем в 1930 году. Если тогда все считали, что теория никуда не годится и должна быть заменена новой, более совершенной, радикально другой теорией, то со временем стало ясно, что теория более-менее хороша и только нужно научиться с ней (и с бесконечностями) обращаться. Понимание этого привело к «новейшему развитию квантовой электродинамики» [14], олицетворением которого были Синьитиро Томонага (1906-1979), Джулиан Швингер (1918-1994), Ричард Фейнман (1918-1888) (Нобелевская премия по физике, 1965) и Фримен Дайсон (род. 1923) [15]. *«Когда в конце 1940-х годов случилась революция, она была совершена в основном молодыми физиками. Несмотря на возраст, эти ученые сыграли консервативную роль, отказавшись от поисков радикальных решений, которыми занимались их предшественники.»* [16]

«Новейшее развитие квантовой электродинамики» сразу же, в 1953 году, по еще горячим следам классических работ «революционеров-консерваторов», было отражено в монографии [17], написанной двумя учениками Л. Д. Ландау – А. И. Ахиезером и В. Б. Берестецким, выразившими благодарность Л. Д. Ландау за обсуждение вопросов, изложенных в книге. «Квантовая электродинамика» Ахиезера и Берестецкого сразу же получила мировое признание и была *«бесспорно, лучшим и наиболее полным изложением данного предмета во всей мировой литературе»* [18].

В 1930 году и еще долго в последующие годы бесконечности просто игнорировали: оставляли то, что было конечным и имело какой-то смысл, а бесконечности отбрасывали. Правда, находились педантичные поборники математической строгости, которые заявляли: *«Если число обращается в бесконечность, это не означает, что им можно пренебречь»* [19] или *«Не следует говорить, что нечто равно нулю только потому, что оно равно бесконечности!»* [16]. Но мало кто обращал внимание на этих буквоедов и формалистов.

Другая серьезная трудность была связана с теорией Дирака. В 1928 году П. А. М. Дирак (1904-1988) открыл релятивистское волновое уравнение, описывающее электрон. Уравнение Дирака обладало убийственным недостатком: оно имело решения с отрицательными энергиями. Эти решения не поддавались никакой разумной интерпретации. Все нормальные электроны с положительными энергиями должны были со временем переходить в состояния с отрицательными энергиями. В 1930 году Дирак предложил считать, что все состояния с отрицательными энергиями заняты, и, в силу принципа

---

<sup>5</sup> Вот небольшой отрывок из воспоминаний С. Улама: *«Однажды я в шутку заметил Фейнману: «Когда-нибудь люди обнаружат, что один кубический сантиметр вакуума в действительности стоит 10000 долларов – ведь именно такому количеству энергии он эквивалентен». Он тут же согласился и добавил: «Верно, но это, безусловно, должен быть чистый вакуум!»* [13]» Улам и Фейнман обсуждали энергию нулевых колебаний электромагнитного поля. Если эту бесконечную энергию «обрезать» на частоте, определяемой соотношением  $\hbar\omega = mc^2$ , где  $m$  – масса электрона, то получим энергию, равную  $2 \cdot 10^{22}$  Дж/м<sup>3</sup>, или 5 млрд кВт-ч/см<sup>3</sup>. Для сравнения, энергия нулевых колебаний в воде при 3<sup>0</sup>С равна всего лишь 400 Дж/м<sup>3</sup>, так как должна быть обрезана на длине волны  $2 \cdot 10^{-5}$  см, при которой вода становится непрозрачной.

Паули, электроны с положительными энергиями не могут перейти в состояния, энергия которых отрицательна. Но некоторые состояния могут быть незаняты и эти «дырки» будут восприниматься как положительные заряды, которые Дирак отождествил с протонами (больше было не с чем).

Над теорией дырок Дирака насмехались и издевались. В 1931 году Л. Д. Ландау послал телеграмму из Бристоля Нильсу Бору в Копенгаген с отзывом о теории дырок, состоявшим из одного единственного немецкого слова «*QUATSCH!*», означавшего «ВЗДОР!», «ЧУШЬ!», «ЕРУНДА!» [20]. Сам же Нильс Бор предложил новый способ Ловли Живого Слона с помощью теории Дирака [21]. Нужно в том месте, куда слон приходит на водопой, поставить плакат с изложением теории дырок Дирака. Когда слон прочтет плакат, он будет настолько ошеломлен, что совершенно остолебенеет и будет несколько минут стоять неподвижно. За это время охотники смогут опутать его ноги толстыми веревками.



Рис. 8 Альберт Эйнштейн и Нильс Бор

В 1933 году Дирак участвовал в 1-ой Всесоюзной конференции по атомному ядру, проходившей в Ленинградском Физико-техническом институте. После доклада Дирака «Теория позитрона» с критическими замечаниями выступил В. А. Фок, который, в частности, сказал [22]: *«В основе теории позитронов лежит предположение о существовании неопределенного и бесконечного числа электронов с отрицательной кинетической энергией, причем ни бесконечно большой заряд, ни бесконечно большая масса этих электронов ничем себя не проявляют ...Я должен признаться, что мною овладевает необычайное смущение, когда я пытаюсь осмыслить это основное положение теории, и я думаю, что я не одинок в этом чувстве. Предположение о существовании бесконечных заряда и массы, притом ведущих себя так, как если бы их не было вовсе, ... заставляют себя спросить,*



*что, собственно, разумеется в данном случае под словом «существование». Очевидно, этому термину приписывается здесь смысл, отличный от общеупотребительного».*

Критика была справедливой. В настоящее время теория дырок Дирака достойна упоминания только как своеобразный курьез. Тем не менее эта теория позволила Дираку предсказать античастицы, открытие которых было одним из важнейших открытий в физике XX века. В 1931 году Дирак отождествил свои незанятые состояния с отрицательной энергией («дырки») с позитронами, открытыми экспериментально в 1932 году К. Д. Андерсоном (1905-1991) (Нобелевская премия по физике, 1936). Теория дырок Дирака давала возможность рассчитывать вероятности образования и аннигиляции электронно-позитронных пар, вероятности рассеяния фотонов на электронах, электронов на электронах, позитронов на электронах. Теория представляла собой вполне определенную схему для количественного описания всех наблюдаемых явлений. Противоречий с экспериментом не возникало, так как еще не существовали экспериментальные методы, позволяющие проверить более тонкие черты теории, такие, например, как воздействие электромагнитного поля на вакуум (поляризация вакуума).

В развитии квантовой электродинамики в 30-е годы участвовали лучшие представители теоретической мысли: Бор, Паули, Гейзенберг, Дирак, Иордан, Ферми, Ландау, Пайерлс, Клейн, Фок, Фирц, Оппенгеймер, Розенфельд, Вайскопф, Вентцель и др. Однако никто не считал теорию удовлетворительной. Как вспоминал Г. Вентцель: *«Принципиальные трудности теории тяжелым грузом лежали на нашей совести»* [23]. *«Единственная существенная вещь, от которой мы предлагаем отказаться, – это квантовая электродинамика... мы можем отказаться от нее без сожаления. Большинство физиков будет только радо увидеть кончину этой чрезвычайно сложной теории»*, – писал П. А. М. Дирак в 1936 году [24].

**4. Заграничная командировка Ландау. Ландау в Цюрихе.** В сентябре 1929 года Л. Д. Ландау отправился в заграничную командировку, из которой он вернулся в марте 1931 года. До апреля 1930 года командировка оплачивалась Народным комиссариатом просвещения, а затем до марта 1931 года международным Рокфеллеровским фондом, созданным Дж. Рокфеллером-старшим в мае 1913 года для «содействия процветанию человечества во всем мире». В мае 1925 года стипендию Рокфеллеровского фонда получил Я. И. Френкель (1894-1952), в августе 1927 года – В. А. Фок (1898-1974), в декабре 1928 года – К. Д. Синельников (1901-1966), в январе 1929 года – Г. А. Гамов (1904-1968). Обычно физикам стипендию давали на год, но К. Д. Синельникову ее дали на два года. Получали стипендию и другие физики и математики, среди математиков – П. С. Александров, А. С. Безикович, Н. Н. Лузин [25].



**Рис. 9 Л. Д. Ландау в 1929 г.**

Маршрут командировки Ландау был таким: Ленинград – Берлин – Лейпциг – Копенгаген – Лейден – Цюрих – Кембридж – Цюрих – Копенгаген – Ленинград [25]. Ландау познакомился с Нильсом Бором (1885-1962), Полем Дираком (1902-1984), Вернером Гейзенбергом (1901-1976), Вольфгангом Паули (1900-1958), Паулем Эренфестом (1880-1933). В Кембридже Ландау встретился со своим другом Георгием Гамовым<sup>6</sup>. Гамов вспоминал [28]: *«В конце лета 1930 года в Кембридж прибыл мой давний друг Дау, и мы отправились в продолжительную поездку по Англии и Шотландии, чтобы познакомиться с достопримечательностями, такими, как старинные парки и музеи. Поехали мы, разумеется, на моем крохотном мотоцикле<sup>7</sup> – я за рулем, Дау на заднем сидении.»*

---

<sup>6</sup> Внимательный читатель должен был удивиться, увидев ссылку [1], датированную 1971 годом, на «Приключения мистера Томпкинса» Георгия Гамова. Нельзя было и подумать об издании «Приключений мистера Томпкинса» в Советском Союзе в то время. О Гамове можно было говорить только как о *«предавшем свой дом»*, *«продавшемся за доллары»*, *«самоликвидировавшемся»*. Мало кто знал, что Гамов с 1932 по 1938 год был членом-корреспондентом АН СССР. Но молодой теоретик из Дубны Л. И. Пономарев (ныне член-корреспондент РАН) совершил «идеологическую диверсию»: в качестве двенадцатой главы своей книги он привел два больших отрывка (13 страниц) из книги Гамова. Книга Пономарева переведена на 16 языков, она издается и сейчас [26], но отрывки из книги Гамова были включены только в первое издание. Прекрасная книга Л. И. Пономарева и так превосходна, но с отрывками из Гамова это был настоящий шедевр! Впервые книга Г. Гамова была издана в России только в 1993 году [27] как 85-ый выпуск серии «Квант», после чего серия «Квант» прекратила свое существование.

<sup>7</sup> Мотоцикл Гамова – отдельный персонаж в истории физики. На нем ездили не только сам Гамов, Лев Ландау, Кирилл Синельников, Эдвард Теллер. В книге [29] Гамов (в стихах) рассказывает, как он учил ездить на своем мотоцикле Нильса Бора. Бор был в Кембридже, в гостях у Резерфорда. Сбежал с банкета в свою честь, сел на мотоцикл Гамова и поехал. Но забыл узнать, как же остановиться. Наводя ужас на кембриджских собак и кошек, Бор мчался на мотоцикле, за ним бежал Гамов, за Гамовым бежал, поносящий Гамова, на чем свет стоит, сэр Эрнест Резерфорд. Мотоцикл к счастью заглох. Но со временем Бор освоил искусство езды на мотоцикле. В книге [30] приведена фотография Бора, гордо едущего на мотоцикле Гамова, с женой Маргарет на заднем сидении.



Рис. 10 Г. А. Гамов в 1930 г.



Рис. 11 Три Гамова

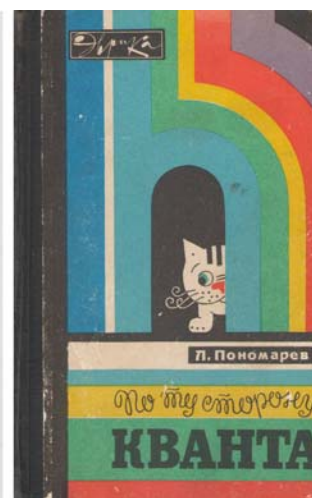
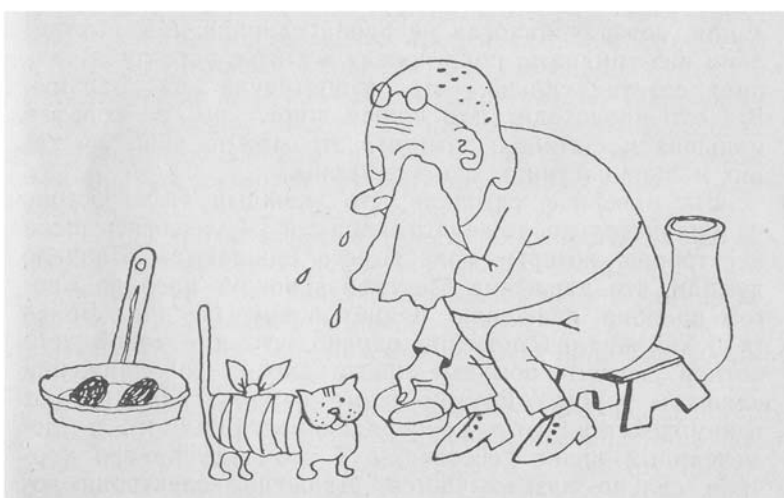


Рис. 12 Первое издание книги Л. Пономарева и рисунок, показывающий, как опасно гладить котенка в квантовом мире



**Рис. 13 Нильс Бор с женой Маргарет на мотоцикле Гамова**

В Берлине Ландау не только увидел живых классиков – Альберта Эйнштейна (1879-1955), Эрвина Шрёдингера (1887-1961), Макса фон Лауэ (1879-1960), Вальтера Нернста (1864-1941) – но и познакомился и подружился с Юрием Борисовичем Румером (1901-1985), замечательным физиком с тяжелой судьбой<sup>8</sup>.



**Рис. 14 Юрий Борисович Румер в Берлине**

---

<sup>8</sup> 28 апреля 1938 года, в один день с Ландау и в день своего рождения, Ю. Б. Румер был арестован и брошен в ту же камеру, что и Ландау. Обвиненный в «пособничестве врагу народа Ландау», Ю. Б. Румер провел в заключении десять лет, три года пробыл в ссылке в Енисейске и два с половиной года был безработным в Новосибирске. [32]

Ю. Б. Румер был свидетелем, как на семинаре в Берлинском университете Ландау вышел к доске и попытался объяснить что-то очень важное Эйнштейну и другим нобелевским лауреатам. Эйнштейна заинтересовал «молодой мальчик с чубом черных волос» и он обратился «к Шрёдингеру и, указывая на Ландау, спросил: *«Was ist das?»* – не кто это такой, а что это такое» [31]. Много лет спустя Ю. Б. Румер вспоминал: «Я часто ездил к Ландау в Харьков. Меня вообще поразило этот человек, конечно, тем, что он уже тогда был крупнее всех советских физиков вместе взятых. Но никто из них не отдавал себе в этом отчета. [32]»



From "Faust in Copenhagen"

Рис. 15

Эренфест: «Вы знаете, Паули, Вы нравитесь мне гораздо меньше, чем Ваши работы!»

Паули: «А Вы мне наоборот!»

В Цюрих, к «самому» Паули, Ландау приехал, сначала ненадолго, в конце 1929 года. Тогда же он познакомился с ассистентом Паули Рудольфом Пайерлсом<sup>9</sup> (1907-1995). Через несколько недель Ландау пришлось уехать, так как у Швейцарии не было дипломатических отношений с Советским Союзом. «Ландау считал, что такое положение дел льстит ему: Ленина они не боялись, а его боятся. [34]» В следующем году Ландау появился в Цюрихе на более продолжительный срок.

**5. Вольфганг Эрнст<sup>10</sup> Паули и Карл Густав Юнг.** Трудно было выбрать более неудачное время для приезда к Паули, чем 1930 и 1931 годы [35]. В 1927 году покончила собой мать Паули, к которой Паули был очень привязан, писательница Берта Камилла Паули. В 1928 году отец Паули, Вольфганг Йозеф Паули, известный ученый, физик и биохимик, снова женился. У Паули младшего появилась, как он сам выражался, «злая мачеха». В 1929 году женился сам Паули, на юной танцовщице Кэт Деппнер, которая вскоре от него

<sup>9</sup> Вот отрывок из шуточного юбилейного очерка «К 50-летию Пайерлса» [33]: «Некоторое время он работал ассистентом Паули. Паули, очевидно, был им очень доволен, потому что впоследствии с любовью вспоминал, что *«Der Peierls hat immer Qautsch gerechnet»* (этот Пайерлс всегда вычислял какую-нибудь ерунду).»

<sup>10</sup> Среднее имя «Эрнст» Паули получил от своего крестного отца, знаменитого Эрнста Маха [35].

сбежала<sup>11</sup>. Паули стал сильно пить. Обеспокоенный отец посоветовал Паули обратиться за психиатрической помощью к Карлу Густаву Юнгу (1875-1961).



Рис. 16 Вольфганг Паули в 1929 г.

Паули прошел пятимесячный курс психоанализа у одной из молодых учениц Юнга. Сам Юнг проанализировал 400 снов Паули<sup>12</sup> (всего Паули описал Юнгу 1300 своих снов) и привел сны Паули (не называя его имени) с их анализом в

<sup>11</sup> Нелегко быть женой гениального физика, и не всякая женщина способна на такой подвиг. Вот слова из воспоминаний Лауры Ферми о ее муже Энрико, вывешенные на видном месте в центре имени Этторе Майорана в Эриче (Сицилия): «С нетерпением ждешь его. Представляешь, как он придет, скажет: «Дорогая! Я не могу жить без тебя!» И вот он приходит, злой, мрачный. Хватает кусок старой газеты и весь вечер, не говоря ни слова, что-то пишет, пишет, пишет... Нет ничего хуже, чем быть женой великого ученого!» А вот какую вину взял на себя Ричард Фейнман, разводясь со своей второй женой Мери Лу [7]: жестокое обращение с женой: все время думает, за завтраком думает, за обедом думает, за рулем думает, даже ночью, лежа в постели, думает, а кроме того, играет на трубе и на барабанах.

<sup>12</sup> Описания снов, как правило, короткие, а их анализ довольно обстоятельный. Вот пример сна Паули, и отрывок из его анализа [36]. Сон 17: Сновидящий идет по длинной тропе и находит на пути голубой цветок. Анализ сна: ...Идти по длинной тропе означает странствовать по дорогам, которые, в частности, не ведут никуда; это означает поиск перемен и их преемственность. Сновидящий находит голубой цветок, бесцельно цветущий у дороги, случайное дитя природы, пробуждающее теплые воспоминания о более романтическом и лирическом времени, юношеской поре, когда все развивалось, когда научное видение мира еще не разрушилось миром опыта, или, скорее, когда разрушение только начинается и на прошлое кинут лишь мимолетный взгляд... Но были и очень продолжительные и странные сны. Вот, например, отрывок из сна 59, «Великого видения»: Вертикальный и горизонтальный круги, имеющие общий центр. Это часы мира. Их, держит черная птица. Вертикальный круг - это синий диск с белой каймой, разделенный на  $4 \times 8 = 32$  части. По диску вращается стрелка. Горизонтальный круг состоит из четырех цветов. На нем стоят четыре маленьких человека с маятниками и окаймляют кольцо, некогда бывшее темным, а сейчас золотое (прежде несомое детьми) ... Из анализа: Это замечательное видение произвело глубокое и длительное впечатление на сновидящего, впечатление «самой возвышенной гармонии», как он сам его понял.



книге [36]. Знакомство Паули и Юнга перешло в дружбу, дружба привела к взаимному научному обогащению: Юнг и психоаналитики стали говорить и писать о волнах, квантах и принципе неопределенности, цитировать Бора, Гейзенберга и, конечно, чаще всего, самого Паули. Паули же, в свою очередь, внес значительный вклад в психологию. Он написал серьезную статью «Влияние архетипических представлений на формирование естественнонаучных представлений у Кеплера». (Перевод этой статьи был напечатан в сборнике статей Паули [37] «с некоторыми сокращениями», что означало, что одна треть статьи была напечатана, а две трети были опущены.) Статья Паули и статья Юнга «Синхронистичность: акаузальный объединяющий принцип» [38] были объединены в их совместной книге [39]. Это был не первый случай плодотворного влияния физика на Карла Густава Юнга. В письме к биографу Эйнштейна Карлу Зелигу Юнг рассказал, что еще в 1911 году он познакомился в Цюрихе с Альбертом Эйнштейном, и они часто вместе обедали у Юнга дома [40]. Во время разговоров с Эйнштейном о специальной теории относительности и о свойствах времени у Юнга и зародились мысли о связи относительности времени и психических явлений. И не случайно эти мысли привели к идее синхронистичности именно тогда, когда у Юнга появился новый пациент Вольфганг Паули.

В марте 1950 года в Принстоне А. Пайс присутствовал на лекции Паули о Кеплере. *«Единственное, что я помню об этом событии, – пишет Пайс, – это присутствие там Эйнштейна, который заснул под аккомпанемент слов Паули. [35]»*

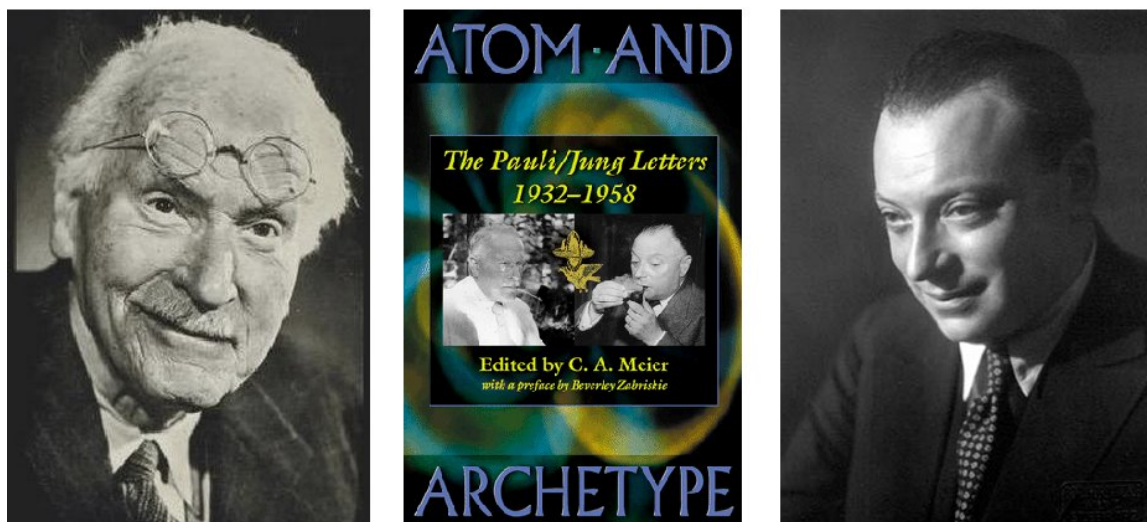


Рис. 17 Карл Густав Юнг и Вольфганг Эрнст Паули

## 6. Лев Ландау и Рудольф Пайерлс о своих совместных работах 1930 и 1931 годов.

*Лев Ландау, 1931: «Моя научная работа развивалась за этот период в нескольких различных направлениях. Существенное место в ней занимала ... проблема объединения в одно целое двух наиболее общих современных теорий: принципа относительности и теории квант. Эта проблема привела к грандиозным затруднениям, сделавшим ее точное разрешение лишь вопросом*

весьма отдаленного будущего. Моя первая работа (совместно с Р. Пайерлсом), посвященная этой проблеме, показала, что часть этих затруднений, так называемая энергия излучения, может быть устранена путем введения волновой механики световых квантов, и такая механика, не давая возможности проникнуть за все фундаментальные затруднения, все же дает возможность наиболее простого анализа различных физических проблем... В дальнейшем я принял участие в состоявшейся в апреле 1930 года в Копенгагене<sup>13</sup> теоретической конференции, посвященной указанным проблемам. Эта конференция привела к более четкой постановке проблем и этим сыграла фундаментальную роль в дальнейшем развитии нашей науки. Наконец, в последнее время Пайерлсу и мне удалось достигнуть дальнейших результатов в этой области. Нам удалось



**Рис. 18 Теоретическая конференция 1930 г. в Копенгагене. В первом ряду (слева направо):**

**О. Клейн, Н. Бор, В. Гейзенберг, В. Паули, Г. Гамов, Л. Ландау, Г. Крамерс**

**(Р. Пайерлс – во втором ряду, между В. Гейзенбергом и В. Паули)**

---

<sup>13</sup> В Копенгагене Ландау познакомился с Кристианом Мёллером (1904-1980), вскоре прославившимся работой [41] (55 страниц текста!), в которой он в рамках квантовой электродинамики рассчитал сечение релятивистского рассеяния электрона на электроны, с тех пор называемого «мёллеровским рассеянием». Мёллер никогда не скрывал того, что именно Ландау рассказал ему, как решить эту задачу. Некоторые подробности о Мёллере и Ландау рассказал Ю. Б. Румер: «Знаменитая работа Мёллера о взаимодействии релятивистских электронов возникла следующим образом. Мёллер с Ландау что-то говорили, Ландау ему рассказывал свое мнение, как эту задачу нужно делать, и что должно примерно получиться. И Мёллер её сделал, послал в журнал, и как полагается честным людям, в конце поблагодарил Ландау за помощь и советы. Ландау сказал: «Вы не полагаете, что это по меньшей мере работа двоих, что же вы ее один публикуете. Я же вам всё от начала до конца сказал». Мёллер говорит: «Ах, знаете, Дау, я жениться хочу, а отец невесты не даст согласия, если я не буду доцентом университета». «Ах так, ну пожалуйста. Я Вам еще могу работу написать». Это не со слухов – Мёллер мне сам все рассказывал.»

на основании анализа возможных экспериментов показать, что основные физические принципы волновой механики, делающие возможным ее применение, не выполнены – при наличии предельной скорости распространения. Этим заранее обрекаются на неудачу все попытки непосредственного обобщения волново-механических методов на случай релятивистской теории квант, попытки, за последнее время ставшие весьма частыми в мировой литературе. С другой стороны, установленные нами неравенства, представляющие собой дальнейшее обобщение знаменитого принципа неопределенности Гейзенберга, дают возможность понять основные положения и характер еще неизвестной нам полной теории вопроса... Кроме указанных проблем я занимался также целым рядом более частных задач. Сюда относится работа о происхождении диамагнетизма металлов<sup>14</sup>, где я показал, что волновая механика, вопреки широко распространенному мнению, приводит к величине диамагнетизма и у свободных электронов... [41]».



Рис. 19 Рудольф Пайерлс и Лев Ландау в 1938 г.

**Рудольф Пайерлс, 1985:** «Ландау приехал в Цюрих, только что закончив работу по диамагнетизму металлов. Работая над этой проблемой, легко было ошибиться до тех пор, пока Бор не показал, что в классической физике магнитное поле не создает намагниченности в системе движущихся зарядов. Из-за существования множества уже опубликованных неправильных решений многие физики побаивались браться за эту проблему, считая ее слишком запутанной. Когда Ландау получил очень простое решение в квантовой механике, к нему отнеслись с большим подозрением. Но Паули сразу понял, в чем дело. Он разработал теорию парамагнетизма, обусловленного спинами электронов, и поэтому его очень заинтересовала работа Ландау. Он знал о

<sup>14</sup> Примечательно, что свою бесспорно лучшую (за время заграничной командировки) работу о диамагнетизме металлов [43] Ландау отнес к разряду «частных задач», хотя благодаря именно этой работе имя 22-летнего Ландау впервые и навсегда вошло в науку («уровни Ландау», «диамагнетизм Ландау»).

работе Бора и понимал, как правильно рассматривать эту проблему, и на него работа Ландау произвела большое впечатление.

Предметом, который в то время вызывал самые жаркие ссоры, была квантовая электродинамика. Ландау и я сделали попытку достичь нового понимания проблемы, изучая поведение квантов света, или фотонов, в пространстве, и написали волновое уравнение для фотонов методом, аналогичным выводу уравнения Шрёдингера для электронов. Затруднением было то, что число фотонов постоянно менялось, так как электроны и другие заряды могут испускать или поглощать фотоны. Поэтому требовалось сформулировать не одно волновое уравнение, а целую систему уравнений – одно, описывающее бесфотонное состояние, другое – состояние с одним фотоном, следующее – с двумя фотонами и так далее. Однако это не дало нового понимания проблемы и уравнения оказались очень громоздкими и неудобными для работы. Я понял причину этого только некоторое время спустя: в то время как в принципе можно наблюдать положение электрона с неограниченной точностью, такое экспериментальное наблюдение фотонов невозможно. Наблюдение положения фотонов противоречило бы общим принципам, а поэтому описание, основанное на этом, физически бессмысленно.

В следующем году Ландау появился в Цюрихе на более долгий срок. В наших беседах мы снова и снова возвращались к обсуждению нерешенных проблем квантовой теории поля, наиболее ярким проявлением которых была бесконечная собственная энергия электрона. Мы пришли к выводу, что соотношения неопределенности, выписанные Гейзенбергом для нерелятивистской квантовой механики, нуждаются в обобщении на релятивистскую область. Другими словами, не каждое измерение, не противоречащее этим соотношениям, может быть фактически выполнено. В частности, измерение импульса частицы требует некоторого времени: чем больше затрачивается времени на такое измерение, тем выше его точность. Далее, при измерении интенсивности электрического и магнитного полей существуют ограничения точности измерения этих двух величин в одной и той же области пространства в одно и то же время, что соответствует принципу неопределенности Гейзенберга, но даже одна из этих величин сама по себе не может быть измерена с неограниченной точностью. Если дело обстояло так, необходимо было изменить математическую форму теории для того, чтобы учесть эти ограничения. Когда Нильсу Бору стало известно об этих идеях, он яро воспротивился им. Он был убежден, что в принципе можно измерить электромагнитные поля с точностью, предсказанной теорией, то есть в пределах, допускаемых принципом неопределенности. Когда Ландау и я ранней весной 1931 года оказались в Копенгагене, по этой теме проходили горячие дискуссии. Позже Бор и Розенфельд начали анализ измерений поля, этот анализ в конце концов вылился в две монументальные работы, ставшие классическими. У меня до сих пор есть сомнения. Анализ, проведенный в этих работах, несомненно правильный, но процесс измерения, помимо всего прочего, предполагает плотное заполнение компенсирующими друг друга положительными и отрицательными зарядами маленькой области

пространства, в которой поле должно быть измерено. Спорным является то, можно ли это назвать измерением поля. С другой стороны, наша идея того, что учет ограничений может привести к лучшей теории, так и не материализовалась. В этом смысле наша работа не дала конструктивного вклада в развитие этой теории. [34]»

**7. Дискуссия Ландау-Пайерлс – Бор-Розенфельд.** Первая [2] и вторая [3] работы Ландау и Пайерлса были восприняты по-разному. Первая работа, по существу, не содержала новых результатов. Волновое уравнение, которое Ландау и Пайерлс предложили для описания светового кванта (слова «фотон» они еще не употребляли) имело следующий удручающий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{F} &= -\sqrt{\Delta} \vec{F}, \\ \operatorname{div} \vec{F} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\vec{F}$  – комплексное векторное поле. Корень из лапласиана, под которым Ландау и Пайерлс понимали некоторый нелокальный оператор, в действительности, легко можно было извлечь,

положив  $\sqrt{\Delta} = \pm i \operatorname{rot}$ , но Ландау и Пайерлс этого не сделали, так как они, как огня, боялись отрицательных энергий, которые при этом неизбежно бы возникли. Ландау и Пайерлс безуспешно попытались выразить через  $\vec{F}$  плотность вероятности нахождения фотона в определенной точке пространства. (*«Правильного выражения для плотности вероятности найти пока не удалось»*, – писали они). В 1933 году Паули прокомментировал это следующим образом [44]: *«Дело не в том, что Ландау и Пайерлс не смогли найти правильного выражения для этой плотности, но в том, что правильного выражения для нее не существует»*. Остальные содержащиеся в статье *«результаты тождественны с полученными Гейзенбергом и Паули»*, – писали Ландау и Пайерлс в аннотации к статье. Действительно, две фундаментальные работы [45,46] Гейзенберга и Паули практически исчерпывали предмет (в той степени, насколько это было возможно в то время). Работа [2] не была сколько-либо серьезным вкладом в квантовую электродинамику, но, именно поэтому, в самом Ландау эта работа оставила глубокий след. *«Ввиду краткости жизни мы не можем позволить себе роскошь заниматься вопросами, не обещающими новых результатов»*, – так много лет спустя формулировал Лев Давидович свой жизненный принцип [47], возникший, согласно устным легендам, в результате не слишком успешной совместной работы [2] с Рудольфом Пайерлсом<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> Не обязательно руководствоваться таким принципом. Так, например, Альберт Сент-Дьордьи (1893-1986) (Нобелевская премия по физиологии и медицине, 1937) так охарактеризовал свой подход к научной работе [48]: *«Что касается меня лично, то я люблю только фундаментальные проблемы и могу охарактеризовать свою собственную исследовательскую деятельность следующим образом: когда я обосновался в Вудс-Холе и начал заниматься рыбной ловлей, я всегда использовал самый большой крючок. Я вовсе не был убежден, что*

Во второй работе [3] Ландау и Пайерлс обратились к фундаментальному вопросу квантовой теории – проблеме измерений. Они были убеждены в «полной несостоятельности» релятивистской квантовой теории и, как им казалось, имели достаточно оснований, чтобы убедить в этом других. В Цюрихе Ландау удалось добиться взаимопонимания с Паули только в вопросе о диамагнетизме металлов. *«По другим же вопросам возникали споры. Это привело к памяtnому замечанию Паули, которым закончился день горячих дебатов, когда Ландау спросил Паули, считает ли он, что все рассказанное им вздор: «О, далеко не так! Все, что вы рассказывали, так запутано, что никто бы не осмелился сказать, что это вздор!» [34]»*

Потеряв надежду убедить в своей правоте Паули, Ландау и Пайерлс отправились в Копенгаген к Нильсу Бору. О том, что было дальше, рассказывает Леон Розенфельд (1904-1974): *«Я приехал в Институт в последний день февраля 1931 года, для годичного пребывания там, и первым, кого я увидел, был Гамов. Я спросил его о новостях, и он ответил на своем*



**Рис. 20 «Все, что вы рассказывали, так запутано, что никто бы не осмелился сказать, что это вздор!» (рисунок Гамова)**

*образном языке, показав мне искусный рисунок карандашом, который он только что сделал. На рисунке был изображен Ландау, крепко привязанный к стулу и с заткнутым ртом, а Бор, стоявший перед ним с поднятым указательным пальцем, говорил: «Bitte, bitte, Landau, muss ich nur ein Wort sagen!» («Погодите, погодите, Ландау, дайте мне хоть слово сказать!») Я узнал, что сюда за несколько дней до моего приезда прибыли Ландау и Пайерлс со своей новой работой, которую они хотели показать Бору, «но, – добавил Гамов, – он, кажется, не согласен, и такая вот дискуссия идет все время!». Пайерлс уехал днем раньше, как сказал Гамов, «в состоянии полного изнеможения». Ландау остался еще на несколько недель, и у меня была возможность убедиться, что изображенное Гамовым на рисунке положение*



дел было приукрашено лишь в пределах, обычно признаваемых художественным вымыслом.» [49]»



**Рис. 21 «Погодите, погодите, Ландау, дайте мне хоть слово сказать!» (рисунок Гамова)**

Вопрос об измеримости электромагнитного поля в квантовой теории впервые был рассмотрен В. Гейзенбергом в 1930 году в его книге [50]. Гейзенберг показал, что, например, компонента электрического поля  $E_x$  и компонента магнитного поля  $H_y$ , усредненные по одной и той же небольшой части пространства, не могут быть одновременно измерены и написал соответствующее соотношение неопределенности

$$\Delta E_x \Delta H_y \geq \frac{\hbar c}{V^{4/3}}, \quad (2)$$

где  $V$  – элемент объема, по которому производится усреднение поля. Согласно общей схеме квантовой теории, уже установившейся к 1930 году, других соотношений неопределенности для компонент поля нет (кроме, конечно, аналогичных, получаемых заменой индексов  $x$  и  $y$  на другие индексы). Однако Ландау и Пайерлс заявили, что, в действительности, никакая компонента электрического или магнитного поля не может быть вообще измерена с произвольной точностью. Они утверждали, что при измерении любой компоненты электрического (а также магнитного) поля всегда будет наблюдаться неопределенность

$$\Delta E > \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}, \quad (3)$$

где  $\Delta t$  – время измерения напряженности поля. Нильс Бор категорически не согласился с Ландау и Пайерлсом. Ландау и Пайерлс «заварили такую кашу,

что Бор и Розенфельд расхлебывали ее несколько месяцев. [33]» «Расхлебывание каши» продолжалось два года. В итоге в 1933 году появилась «монументальная»<sup>16</sup> работа Бора и Розенфельда [52], в которой Бор и Розенфельд, как они считали, доказали несостоятельность доводов Ландау и Пайерлса. В 1950 году Бор и Розенфельд, в связи с «новейшим развитием квантовой электродинамики», напечатали еще одну статью [53], посвященную измеримости поля и заряда в квантовой электродинамике (на этот раз они даже не сочли нужным сослаться на Ландау и Пайерлса).

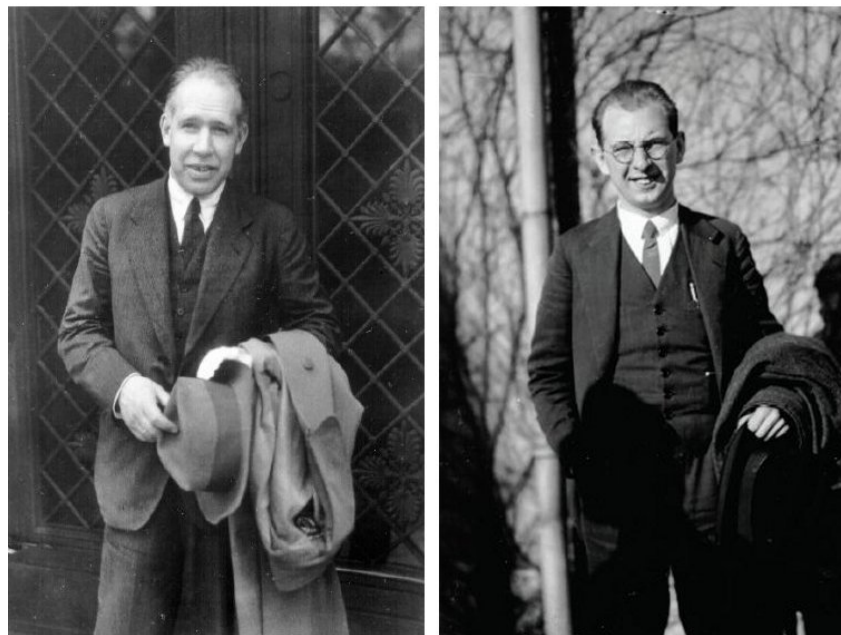


Рис. 22 Нильс Бор и Леон Розенфельд

Ландау и его ученики [54] тем не менее продолжали оставаться уверенными в том, что соотношение (3) должно выполняться. Пайерлс тоже не был до конца уверен в правоте Бора и Розенфельда. (Нильс Бор умел бороться и одерживать победы. Хорошо известны его героические баталии с Альбертом Эйнштейном [55], в которых он всегда выходил победителем. В. А. Фок даже сочинил стихи о Боре-«победителе» [56]:

*Ликуй же, Бор! Ты победил,  
Ты физиков всех с толку сбил.  
Хвала тебе! Ты слово рек –  
И одуревший человек  
Уж полон верою в него,  
Не понимая ничего.*

<sup>16</sup> В оригинале статья Бора и Розенфельда занимала 63 страницы и мало кто мог решиться ее прочитать. В 1926 году Стивен Ликок писал [51]: «Современный деловой человек очень занят. А если не занят, то устал. У него не столько свободного времени, чтобы он мог позволить себе читать целых пять страниц печатного текста только для того, чтобы узнать, например, когда Греция достигла расцвета, а когда пришла в упадок.» А у кого есть время читать целых 63 страницы для того только, чтобы узнать, что электрическое или магнитное поля можно измерить?

Леон Розенфельд был тоже борцом. Убежденный марксист<sup>17</sup>, он, с марксистских позиций, мужественно защищал от нападок копенгагенскую интерпретацию квантовой механики. Бор и Розенфельд составили удачную команду для борьбы с Ландау и Пайерлсом.)

В работе 1931 года Ландау и Пайерлс подняли вопрос о том, какие ограничения на процесс измерения в квантовой механике, в дополнение к соотношениям неопределенностей Гейзенберга, накладывает теория относительности. Они рассмотрели частицу, локализованную в малом объеме, и процесс измерения ее импульса. Если после измерения частица переходит в состояние с определенным импульсом, то она при этом мгновенно делокализуется и «размазывается» по всему пространству, что, как считали Ландау и Пайерлс, противоречит теории относительности<sup>18</sup>. Поэтому, согласно Ландау и Пайерлсу, нельзя измерить импульс мгновенно, и если процесс измерения занимает время  $\Delta t$ , то должно выполняться дополнительное «релятивистское» соотношение неопределенности

$$\Delta p \Delta t \geq \frac{\hbar}{c} . \quad (4)$$

Соотношение (4) следует из соотношения неопределенностей Гейзенберга  $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ , если принять, что  $\Delta x \leq c \Delta t$ . При измерении импульса заряженного тела с зарядом  $e$  возникает новая трудность: при измерении его импульса тело начнет излучать энергию, неконтролируемым образом теряя при этом импульс, и возникнет дополнительная неточность в измерении импульса, описываемая соотношением

$$\Delta p \Delta t \geq \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}} . \quad (5)$$

Для электрона, из-за малости постоянной тонкой структуры, соотношение (5) слабее, чем (4), но при использовании макроскопических пробных тел для измерения электрического и магнитного полей, необходимо использовать (5). Далее Ландау и Пайерлс рассмотрели процесс измерения электрического поля с помощью наблюдения за ускорением заряженного пробного тела. Если импульс тела до измерения известен, длительность процесса измерения равна  $\Delta t$ , и неопределенность в измерении конечного импульса равна  $\Delta p$ , то ясно, что

<sup>17</sup> Современная исследовательница «малой» войны между Бором-Розенфельдом и Ландау-Пайерлсом, сотрудница Института Бора в Копенгагене, А. С. Якобсен приводит в своей статье [57] начало письма Паули к Розенфельду от 28 сентября 1954 года: "*Дорогой (√Троцкий×Бор = Розенфельд)!*".

<sup>18</sup> При этом частица «выбивается» не только из области пространства, в которой она была локализована, из атома, например, но и из «гильбертова пространства», в котором ее волновая функция была нормирована («котенку ломают шею»).

$$e\Delta E\Delta t > \Delta p. \quad (6)$$

При перемножении (5) и (6) получается соотношение (3), так не понравившееся Нильсу Бору.

Конечно, Ландау и Пайерлс затронули очень важные вопросы о связи квантовой нелокальности и релятивистской причинности. Сегодня, когда подробное обсуждение нелокальных квантовых корреляций и квантовой телепортации вошло в учебники [58,59], эти вопросы выглядят совсем по другому. По иному воспринимается сейчас и проблема измеримости электромагнитного поля. Нобелевский лауреат по физике 1979 года Абдус Салам (1926-1996) вспоминал [60], что когда ему было 9 лет, его школьный учитель в родном городе Салама Джангмагхияне (Пакистан) показывал ученикам магнит и объяснял, что есть такая фундаментальная сила – «магнитная», потом учитель рассказывал, что есть еще «электрическая сила», но ее «можно найти» только в столице провинции Пенджаб, Лахоре. Существуют еще «ядерные силы», добавлял учитель, но они «есть только в Европе». Учитель Салама ошибался: «электрическую силу» (так же, как и «магнитную») нельзя найти даже в Лахоре, поскольку ее вообще нет в природе, так как в природе нет «классических» полей, а есть только «квантовые» поля. Задача о том, как «проквантовать» «классическое» поле – этот первый исторический этап построения «квантовой теории поля» – уже давно сменилась другой задачей: поле – изначально «квантовое», и задача заключается в том, как и при каких условиях из «квантового» поля возникает нечто, что можно, в каком-то смысле, интерпретировать как «классическое» поле. Квантовая реальность намного богаче классической: из квантов света – фотонов – можно получить и «черное» излучение, и «сжатый» свет и «когерентные» состояния света, максимально близкие к тому, что мы называем «классическими» электромагнитными волнами, но никогда мы не получим чисто «классического» электромагнитного поля. В «когерентных» состояниях распределение числа фотонов в колебаниях разного типа вблизи средних значений  $\bar{N}$  описывается распределением Пуассона

$$p(N) = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} . \quad (7)$$

Л. Розенфельд в своей статье [49], посвященной 70-летию Н. Бора, писал: «С помощью очень изящных выкладок на основе новых методов квантовой электродинамики несколько лет тому назад было установлено, что распределение фотонов подчиняется закону Пуассона. В те дни<sup>19</sup>, однако, люди не были до такой степени «учеными». Судя по удивлению, которое вызывала формула (7) у тех, кто ее видел, Бор и, вне сомнения, Паули, моему, были единственными, кто знал, что это свойство является

<sup>19</sup> Имеются в виду 30-е годы.

неотъемлемой частью идеи о фотоне.» Розенфельд в этой фразе имел в виду работы 1951-1953 гг. В. Тирринга, Р. Глаубера, Х. Умэдзавы, Дж. Швингера и др., в которых были введены и исследовались когерентные состояния. (В 2005 году Рой Глаубер (род. 1925) за «его вклад в квантовую теорию оптической когерентности» был удостоен Нобелевской премии по физике.) Конечно, все эти «квантовые» особенности того, что принято называть «классическим» электромагнитным полем, необходимо учитывать, обсуждая проблему, поднятую Ландау и Пайерлсом.

Заключение Ландау и Пайерлса о «полной несостоятельности» квантовой электродинамики было явно преждевременным. Нильс Бор рыцарски бросился защищать квантовую электродинамику. К делу были подключены практически все сотрудники Института Бора [61]: кроме Леона Розенфельда, Феликс Блох (1905-1983), Эдвард Теллер (1908-2003), Хендрик Казимир (1909-2000) и другие<sup>20</sup>. В конце концов Бор одержал победу, квантовая электродинамика была спасена. Как истинный рыцарь Бор был снисходителен к побежденным [10]<sup>21</sup>: *«Надеюсь, некоторым утешением для Ландау и Пайерлса будет то, что глупости, которые они совершили в этом отношении, не хуже тех, в которых повинны все мы, включая Гейзенберга и Паули, по этому противоречивому вопросу.»*

**8. Герман Вейль, Этторе Майорана и Матвей Бронштейн, волновые уравнения нейтрино, световых и гравитационных квантов.** В 1928 году Г. Вейль внес важный вклад в только что появившуюся теорию электрона Дирака: на странице 171 своей книги [65] он ввел новое представление матриц Дирака. В представлении Вейля становилось очевидным, что 4-компонентная волновая функция электрона, введенная Дираком [66], преобразуется по приводимому представлению собственной группы Лоренца, то есть разбивается на две 2-компонентные функции (спиноры)  $\psi_\lambda$ ,  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ , которые преобразуются независимо друг от друга при переходе в другую систему отсчета. В пределе, когда масса электрона устремляется к нулю, уравнения Дирака расщепляются и каждый из спиноров удовлетворяет одному из следующих релятивистски инвариантных уравнений Вейля, описывающих нейтрино (будем считать, что скорость света  $c = 1$ ):

---

<sup>20</sup> Неизвестно, подсчитывал ли кто-нибудь количество человеко-часов, затраченных Бором и его сотрудниками на решение проблемы, но проблема была не менее увлекательной и захватывающей, чем известная задача о «взвешивании монет»: с помощью трех взвешиваний определить, какая из двенадцати монет фальшивая и определить, легче она, или тяжелее нормальных монет. *«Говорят, что задача о «взвешивании монет» стоила 10 000 человеко-часов непродуктивно потраченного времени математиков, занятых оборонной работой во время войны. Было даже сделано предложение сбросить эту задачу над Германией.»* [62] Несомненна польза от математических задач, которая, согласно Ю. И. Манину, заключается в том, что *«они отвлекают внимание умных людей от более опасных занятий»* [63].

<sup>21</sup> Г. Е. Горелик нашел эти строки в одном из писем Бора, опубликованном в 9 томе собраний сочинений Бора. В статье [10] рассказывается о работах Ландау и Пайерлса 1931 года, Бора и Розенфельда 1933 года, о примечательном вкладе М. П. Бронштейна [64] в разрешение проблемы, поднятой Ландау и Пайерлсом, и о связи этой проблемы с исследованиями М. П. Бронштейна по квантованию гравитационного поля.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{S} \right) \right] \psi_{\lambda} = 0, \quad (8)$$

где  $\vec{S}$  - спиновые матрицы спина  $\frac{1}{2}$ . Уравнения (8) представляют собой релятивистски инвариантные уравнения только при  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ . Если же потребовать релятивистской инвариантности этих уравнений в общем случае, когда волновая функция  $\psi_{\lambda}$  преобразуется по представлению  $(s_1, s_2)$  собственной группы Лоренца, то выяснится, что, во-первых, релятивистская инвариантность возможна только при условии  $\lambda = s_1 - s_2$  (теорема Вайнберга [67]), и, во-вторых, в дополнение к уравнениям (8) появятся некоторые новые уравнения [68-70].

В неопубликованной рукописи Э.Майораны (1906-1938), написанной между 1928 и 1932 гг. и хранящейся в доме Галилея в Пизе [71], обычные уравнения Максвелла были представлены в виде (8), который проясняет родство уравнений Максвелла с уравнениями Вейля. Э. Майорана исходил из представления спиновых матриц спина 1 в виде

$$(S_i)_{kl} = -i\epsilon_{ikl}.$$

Тогда, если взять в качестве  $\psi_i = E_i \pm iH_i$ , то уравнения (8) превратятся в уравнения

$$i \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = \pm \text{rot} \vec{\psi} \quad (9)$$

и вместе с дополнительными условиями  $\text{div} \vec{\psi} = 0$ , о которых мы только что говорили, дадут

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_i &= -\epsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} E_l, & \frac{\partial}{\partial x_i} H_i &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} E_i &= \epsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} H_l, & \frac{\partial}{\partial x_i} E_i &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения Максвелла записывались в виде (9) и раньше. Такую запись использовал Г. Бейтмен в книге [72], вышедшей в 1915 году, ссылаясь на работу Л. Зильберштейна 1907 года. Однако Э. Майорана первым увидел в уравнении (9) волновое уравнение для фотона и понял, что гамильтониан фотона  $H = \pm \text{rot} = \pm (\vec{S} \vec{p})$  (знаки + и – соответствуют правому и левому фотонам).



В работе 1936 года «Квантование гравитационных волн» [73] М. П. Бронштейн представил уравнения слабых гравитационных волн в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} H_{ij} &= -\varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} E_{lj}, & \frac{\partial}{\partial x_i} H_{ij} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} E_{ij} &= \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} H_{lj}, & \frac{\partial}{\partial x_i} E_{ij} &= 0,\end{aligned}\quad (11)$$

где  $E_{ij}$  и  $H_{ij}$  – симметричные и бесследные тензоры, связанные с тензором кривизны  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  следующим образом:

$$E_{ij} = R_{4j4i} = \frac{1}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} R_{klmn}, \quad H_{ij} = \frac{i}{2} \varepsilon_{imn} R_{4jmn} = \frac{i}{2} \varepsilon_{imn} R_{mn4j}.$$

Эти уравнения не случайно очень похожи на уравнения Максвелла (10). Они тоже могут быть получены из уравнений (8) и соответствуют спиральностям  $\lambda = \pm 2$ .

Мы рассмотрели два представляющих для нас интерес результата двух выдающихся физиков Этторе Майораны и Матвея Петровича Бронштейна. В 2006 году отмечалось 100-летие со дня их рождения, и вот уже приближается 70-летие со дня их гибели: Э. Майорана погиб вследствие несовершенства человеческой природы – исчез 27 марта 1938 года, оставив записку, что кончает собой, а М. П. Бронштейн оказался одной из многочисленных жертв сталинских репрессий и был расстрелян 18 февраля 1938 года. Вот несколько литературных ссылок, касающихся жизни и вклада в науку Э. Майораны и М. П. Бронштейна [9-11, 74-77]

**9. Расширенная малая группа Лоренца и уравнения безмассовых полей. Теорема Вайнберга-Виттена.** Одна из самых фундаментальных работ в теоретической физике – это работа Е. Вигнера 1939 года [78]. В этой классической работе, посвященной глубокому анализу неоднородной группы Лоренца и ее представлений, Е. Вигнер (1902-1995, Нобелевская премия по физике, 1963) ввел одно элементарное, но полезное понятие, понятие «малой группы Лоренца». Малая группа Лоренца – это преобразование Лоренца, не изменяющее 4-импульса частицы. Впоследствии оказалось полезным ввести понятие «расширенной малой группы Лоренца» [69,79]: *преобразований Лоренца, не изменяющих 4-импульс безмассовой частицы или подвергающих его масштабному преобразованию*. Рассмотрим произвольное преобразование Лоренца, бесконечно мало отличающееся от единичного,

$$x'_\mu = (\delta_{\mu\nu} + \Delta\omega_{\mu\nu})x_\nu, \quad \Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}. \quad (12)$$

При этом произвольная волновая функция преобразуется следующим образом:

$$\psi'(x') = (1 + \frac{i}{2} S_{\mu\nu} \Delta \omega_{\mu\nu}) \psi(x(x')), \quad (13)$$

где  $S_{\mu\nu}$  – инфинитезимальные операторы группы Лоренца. Рассмотрим волновую функцию безмассовой частицы

$$\psi(x) = u(p) e^{ipx} \quad (14)$$

и потребуем, чтобы величина  $u(p)$  однозначно (с точностью до численного множителя) определялась 4-импульсом  $p$ . Поскольку мы рассматриваем безмассовую частицу, то масштабные преобразования 4-импульса также сопровождаются умножением  $u(p)$  на численный множитель. Мы убедимся сейчас, что наше требование, которое можно символически изобразить так:

$$p \rightarrow u(p), \quad (15)$$

эквивалентно волновым уравнениям безмассовых полей.

Рассмотрим преобразование Лоренца

$$L_{\mu\nu}(\Delta, p) = \delta_{\mu\nu} + \Delta_\mu p_\nu - \Delta_\nu p_\mu, \quad (16)$$

где  $\Delta$  – произвольный бесконечно малый 4-вектор. Очевидно, это преобразование принадлежит расширенной малой группе Лоренца, так как

$$p'_\mu = L_{\mu\nu}(\Delta, p) p_\nu = (1 - (\Delta p)) p_\mu. \quad (17)$$

Преобразующаяся при таком преобразовании Лоренца волновая функция  $u(p)$  должна остаться сама собой, то есть может приобрести какой-то численный множитель. Таким образом, мы получаем,

$$u(p) \rightarrow u'(p') = (1 + i S_{\mu\nu} \Delta_\mu p_\nu) u(p). \quad (18)$$

Из нашего требования следует, что

$$u(p) \rightarrow u'(p') = (1 - \eta(\Delta p)) u(p), \quad (19)$$

где  $\eta$  – численный коэффициент (мы разложили наш численный множитель в ряд по  $\Delta$  и учли, что, кроме  $\Delta$  и  $p$ , никаких других 4-векторов в нашем распоряжении нет). Сравнение (18) и (19) дает

$$(i S_{\mu\nu} + \eta \delta_{\mu\nu}) p_\nu u(p) = 0. \quad (20)$$

Если волновая функция  $u(p)$  преобразуется по представлению  $(s_1, s_2)$  собственной группы Лоренца, то после небольшого исследования уравнения (20) [69], найдем, что  $\eta = s_1 + s_2$ . Таким образом, мы получили следующие уравнения безмассового поля:

$$(iS_{\mu\nu} + (s_1 + s_2)\delta_{\mu\nu})p_\nu u(p) = 0. \quad (21)$$

Переходя к координатному представлению

$$\psi(x) = \int u(p) e^{ipx} \delta(p^2) d^4 p, \quad (22)$$

получим уравнения безмассового поля в виде

$$(iS_{\mu\nu} + (s_1 + s_2)\delta_{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi(x) = 0. \quad (23)$$

Уравнения (23) представляют собой частные случаи волновых уравнений нейтрино, фотонов, гравитонов (в случае слабых гравитационных полей), нотофов, безмассового предела бесконечно-компонентных уравнений Дирака и др. [69].

А теперь о том, почему не существует плотности вероятности нахождения фотона в определенной точке пространства, которую тщетно пытались найти Ландау и Пайерлс в 1930 году в работе [2]. В 1980 году С. Вейнберг и Э. Виттен [80] доказали теорему о связи спиральности безмассового поля  $\lambda = s_1 - s_2$  и существованием сохраняющихся тензорных плотностей:

*Сохраняющийся тензор  $T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$  может быть построен только для безмассового поля со спиральностью, по модулю не большей, чем  $\frac{n}{2}$ , ( $|\lambda| \leq \frac{n}{2}$ ).*

Так, сохраняющийся 4-вектор тока существует только, если  $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$ , а сохраняющийся тензор энергии-импульса существует только, если  $|\lambda| \leq 1$ . Доказывается эта теорема очень просто. Рассмотрим матричный элемент

$$\langle \vec{p}', \lambda | T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} | \vec{p}, \lambda \rangle.$$

Выберем систему отсчета так, чтобы  $\vec{p}' = -\vec{p}$  и  $\vec{p} = (0, 0, p)$ . Повернем систему координат на угол  $\theta$  вокруг оси  $z$  (по или против часовой стрелки, в зависимости от знака спиральности). Тогда

$$\begin{aligned} \langle -\vec{p}', -iJ_z\theta T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} e^{iJ_z\theta} | \vec{p}, \lambda \rangle &= e^{2i|\lambda|\theta} \langle -\vec{p}, \lambda | T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} | \vec{p}, \lambda \rangle \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{2|\lambda|} \langle -\vec{p}, \lambda | T_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} | \vec{p}, \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Величина  $T_{\mu_1\mu_2...\mu_n}$  преобразуется, как тензор. Поэтому для любой отличной от нуля компоненты тензора,  $T_{xxx...yuy...000}$ , где число индексов  $x$  равно  $k$  и число индексов  $y$  равно  $l$ ,  $k + l \leq n$ , мы получим

$$e^{-iJ_z\theta} T_{xxx...yuy...000} e^{iJ_z\theta} = (\cos\theta)^{k+l} T_{xxx...yuy...000} + \dots \quad (25)$$

(Все компоненты  $T_{zzz...} = 0$ , поскольку мы рассматриваем сохраняющийся тензор, то есть такой, для которого  $T_{\dots\mu\dots}(p' - p)_\mu = 0$ ). Сравнение (24) и (25) приводит к соотношению

$$2 \mid \lambda \mid = k + l \leq n.$$

Таким образом, теорема доказана.

Поскольку *плотность вероятности нахождения фотона в определенной точке пространства* должна быть временной компонентой сохраняющегося 4-вектора, а спиральность фотонов  $\lambda = \pm 1$ , то, согласно доказанной теореме, *плотность вероятности не существует*. Доказанная теорема говорит также о том, что *локальная плотность энергии-импульса* для безмассовых полей *существует* только для спиральностей  $\lambda = 0, \pm 1/2, \pm 1$ .

**10. Волновая функция фотона.** Фотон может находиться в двух состояниях в правом ( $R$ ) и левом ( $L$ ), или их суперпозиции. Таким образом волновая функция фотона имеет шесть комплексных компонент. Обозначим соответствующие волновые функции, как  $\vec{\psi}_R$  и  $\vec{\psi}_L$ . Эти функции удовлетворяют уравнениям (23)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\psi}_R}{\partial t} &= \text{rot} \vec{\psi}_R, \quad \text{div} \vec{\psi}_R = 0, \\ \frac{\partial \vec{\psi}_L}{\partial t} &= -\text{rot} \vec{\psi}_L, \quad \text{div} \vec{\psi}_L = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Положим  $\vec{\psi}_R = \vec{E}_R + i\vec{H}_R$ ,  $\vec{\psi}_L = \vec{E}_L - i\vec{H}_L$ , и введем новые комплексные  $\vec{\mathbf{E}}$  и  $\vec{\mathbf{H}}$ ,

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{E}_R + \vec{E}_L + i(\vec{H}_R - \vec{H}_L), \quad \vec{\mathbf{H}} = \vec{H}_R + \vec{H}_L - i(\vec{E}_R - \vec{E}_L). \quad (27)$$

Комплексные поля  $\vec{\mathbf{E}}$  и  $\vec{\mathbf{H}}$  удовлетворяют уравнениям Максвелла и могут быть объединены в комплексный тензор

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = -\mathbf{F}_{\nu\mu}, \quad \mathbf{F}_{ik} = \varepsilon_{ikl} \mathbf{H}_l, \quad \mathbf{F}_{i4} = -\mathbf{F}_{4i} = -i\mathbf{E}_i,$$

удовлетворяющий обоим парам уравнений Максвелла,

$$\partial_{\mu} \mathbf{F}_{\rho\sigma} + \partial_{\rho} \mathbf{F}_{\sigma\mu} + \partial_{\sigma} \mathbf{F}_{\mu\rho} = 0, \quad \partial_{\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (26)$$

Таким образом, мы можем, вместо шести векторных компонент  $\vec{\psi}_R$  и  $\vec{\psi}_L$ , описывать фотон комплексным антисимметричным тензором второго ранга и считать его волновой функцией фотона, что обычно и делается в квантовой электродинамике. Можно было бы не останавливаться на обсуждении этих элементарных вопросов, если бы не те трудности, которые они вызвали у Ландау и Пайерлса в 1930 году и если бы эти вопросы оживленно не обсуждались и в наши дни [81-83]. Так, например, авторы серьезной монографии по квантовой оптике согласны с тем, что «понятие волновой функции фотона может вводить в заблуждение и его следует использовать с большой осторожностью» [81, с. 28]. Тем не менее, они справедливо считают, в согласии с [82,83,120], что есть достаточно оснований полагать, что волновая функция фотона существует, и что описание фотона в этом смысле не отличается от описания безмассового нейтрино, или ультрарелятивистского электрона. Этот взгляд на волновую функцию фотона подробно излагается в последнем издании монографии А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого [84].

**11. «Скучно стало в физике без Ландау ... »** В 1959 году, в Киеве, на международной Рочестерской конференции по физике высоких энергий Л. Д. Ландау выступил с программным заявлением, которое он повторил год спустя в статье [46], посвященной памяти Вольфганга Паули. При этом Л. Д. Ландау вспомнил свою работу [3] с Р. Пайерлсом.

*«Почти 30 лет назад Пайерлс и я указали, что согласно релятивистской квантовой теории нельзя измерить никакие величины, характеризующие взаимодействующие частицы, и единственными измеримыми величинами являются импульсы и поляризации свободно движущихся частиц. Поэтому, если мы не хотим пользоваться ненаблюдаемыми величинами, мы должны вводить в теорию в качестве фундаментальных величин только амплитуды рассеяния.*

*Операторы  $\psi$ , содержащие ненаблюдаемую информацию, должны исчезнуть из теории; и поскольку гамильтониан можно построить только из операторов  $\psi$ , мы с необходимостью приходим к выводу, что гамильтонов метод для сильных взаимодействий изжил себя и должен быть похоронен, конечно, со всеми почестями, которые он заслужил.»*

Друг Ландау Элевтер Луарсабович Андроникашвили (1910-1989) описал одно из своих многочисленных посещений уже тяжело больного Ландау, чудом выжившего после фатальной автомобильной катастрофы [85].

*«Каждые полторы или две минуты он жаловался на то, что у него болит нога.*

*– Голова не болит? – спросил я.*

*– Нет, голова не болит, нога болит.*

*– Послушай, ты же Ландау, а не футболист, тебе нужна голова, нога пусть себе болит. Черт с ней.*

– Нет, нога очень болит, – снова стал жаловаться Дау, явно раздражаясь, что я говорю про голову, а не про ногу.

– Хочешь я тебе скажу приятную вещь?

– Какую?

– Твоя киевская речь, помнишь, я отговаривал тебя выступить с ней, теперь называется «Киевским предвидением Ландау».

– Какая киевская речь? – спросил он меня в изумлении.

– Как какая? – удивился теперь я, – та самая, в которой ты предлагал похоронить гамильтониан, и которая тогда всем так не понравилась.

Дау посмотрел на меня, как на сумасшедшего, и сказал с негодованием:

– И все ты врешь: я и в Киеве никогда не бывал. – И разговор вернулся к больной ноге.»



Рис. 23 Л. Д. Ландау после автокатастрофы

Э. Л. Андроникашвили вспоминал, как он и другие друзья и ученики Ландау навещали Ландау то в нейрохирургическом институте, то у Ландау дома, то в больнице Академии наук. *«Но он ничего этого не помнил. Да и описать этих посещений невозможно, так как все они были на одно лицо, не индивидуальны, в них не было ничего характерного для Ландау ... Так длилось 6 лет. И все эти годы каждый из нас думал о том, как скучно стало в физике без Ландау.»*



**Приложение 1. О безмассовых полях от первого лица.** 21 декабря 1960 года мой однокурсник Михаил Петрович Рекало<sup>22</sup> и я были зачислены младшими научными сотрудниками в теоретическую лабораторию ТЛ-1 ХФТИ, руководимую А. И. Ахиезером. В нашей жизни мало что изменилось: мы уже около года были дипломниками в институте, привыкли к семинарам А. И. Ахиезера по средам, библиотека института уже была нашим родным домом (в те годы, сейчас в это трудно поверить, в библиотеку нужно было приходить к 8 утра, чтобы занять место за каким-нибудь столом, позже мест уже не было).

К этому времени я уже хорошо понимал, что такое конечномерные представления собственной группы Лоренца, и какие (а, именно, представления  $(s_1, s_2)$ ) они бывают, а также что такое инфинитезимальные операторы группы (не зря же нас учили в университете всем этим вещам С. В. Пелетминский и Д. В. Волков в курсах квантовой электродинамики и теории элементарных частиц!)<sup>23</sup>. Еще дипломником я обнаружил в институтской библиотеке замечательную книгу Ю. Б. Румера<sup>24</sup> «Спинорный анализ» [86] и с увлечением прочитал ее «от корки до корки». Я знал, что в тензорной и спинорной алгебрах есть много важных величин, которые «преобразуясь, не преобразуются»: символы Кронекера, антисимметричные символы Леви-Чивита, матрицы Паули, матрицы Дирака, матрицы зарядового сопряжения – все эти величины, будучи преобразованными по всем своим тензорным и спинорным индексам,

---

<sup>22</sup> Увы, Михаил Петрович Рекало (1938-2004) уже успел умереть. Умер он в Сен-Клу, во Франции, будучи известным физиком, ведущим в мире специалистом по электродинамике адронов, автором и соавтором множества книг и бесчисленного количества статей. А лет 50 тому назад мы с ним, тогда еще просто Мишей, впервые увидели Л. Д. Ландау на встрече с научной интеллигенцией города Харькова, которая происходила на летней площадке Дома Учителя. Нас поразило то трепетное благоговение, которое испытывали к Ландау корифеи харьковской теоретической физики, такие, как А. И. Ахиезер, И. М. Лифшиц и другие. Чувствовалось, что приезд Ландау в Харьков для них – большой праздник. Мы с Мишей были студентами-старшекурсниками, у нас уже были свои кумиры, но это были Эйнштейн, Бор, Паули, Ферми, Дирак. До понимания того, что Ландау тоже один из этих великих, мы тогда еще не доросли. А лет 10 спустя мы с Мишей уже порознь, а не вместе, скучали на встрече с Андреем Тарковским в Харьковском университете. Миша был с какой-то юной особой, я тоже был не один. Я, как мне казалось, справедливо, считал, что рядом с привлекательной девушкой совершенно все равно, где скучать, на встрече ли с Андреем Тарковским, или на демонстрации фильмов Федерико Феллини или Ингмара Бергмана. Но Миша был другого мнения. Он мучался и страдал. *«Сил моих нет терпеть все это, – жаловался он мне, – я физику люблю, а они затаскали меня по всяким Тарковским!»* Действительно, каждый, кто знал М. П. Рекало, подтвердит, что он больше всего на свете любил науку физику и был ее верным рыцарем до конца своих дней. Я же благодарен судьбе, что мне посчастливилось учиться вместе с Мишей Рекало и дружить с ним в студенческие годы.

<sup>23</sup> Когда С. В. Пелетминский (род. 1931) и Д. В. Волков (1925-1996) читали нам лекции, они казались нам очень солидными людьми, хотя их суммарный возраст не превышал 60 лет!

<sup>24</sup> Вообще то, книги «врагов народа» полагалось уничтожать. Но не всегда «доходили руки». Со временем книг приходилось уничтожать так много, что была изобретена специальная машина для «перетирки» книг в порошок. И каждая уважающая себя библиотека должна была иметь такую машину. В конце 70-ых годов я случайно спас от уничтожения книгу И. М. Лифшица (1917-1982). В коридоре университетской библиотеки, ЦНБ, я встретил знакомую женщину-библиотекаря, которая несла пачку книг и сердито ворчала: *«Уезжают тут всякие, а ты трудись!»* Я увидел у нее в руках знакомую книгу: Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. «Электронная теория металлов», 1971 года издания. Женщина объяснила, что, вот, мол, Лифшиц уехал, несу книги «на перетирку». Я удивился: *«Как уехал? Внизу, на втором этаже, сейчас проходит конференция, он там выступает. Он, действительно, уехал, в Москву. Но в Москву, ведь, можно уезжать!»* – *«Правда? Очень хорошо. Понесу книги назад.»* М. Я. Азбель уехал в 1977 году, перед этим его долго не отпускали, но, видимо, в Харьков о его отъезде забыли сообщить, а М. И. Каганов уехал тогда, когда уже книги не «перетирали». Чудом уцелевшая книга «Электронная теория металлов» до сих пор есть в ЦНБ и все так же, как и много лет назад, популярна у студентов.

остаются самими собой (при преобразованиях группы вращений и собственной группы Лоренца). И возникла странная мысль: а нет ли таких волновых функций, которые «преобразуясь, не преобразуются». Взял волновую функцию фотона с определенным 4-импульсом и «повращал» вокруг 4-импульса (я уже знал, что такие «вращения» были названы Е. Вигнером «малой группой Лоренца»). Потребовал, чтобы при этом волновая функция осталась сама собой и получил ... уравнения Максвелла! (Было очевидно, что эта процедура применима без каких бы то ни было изменений к любому спину.) Я, конечно, удивился и рассказал об этом А. И. Ахиезеру. Он тоже удивился и рассказал об этом Л. Д. Ландау. Лев Давидович не удивился, сказал Александру Ильичу, что нельзя портить молодых людей, позволяя им заниматься всякой чепухой и добавил, что в теории релятивистских волновых уравнений вообще нечего делать после работ Гельфанда и Наймарка (он имел в виду книги [87,88] и большое количество журнальных публикаций, предшествующих этим книгам). Александр Ильич рассказал мне об этом разговоре, который его, конечно, огорчил. Л. Д. Ландау как раз в это время был захвачен революционной идеей отказаться вообще от волновых функций в физике сильных взаимодействий, оставив только амплитуды рассеяния. Жизнь показала, что делать этого не стоит. Что же касается релятивистских волновых уравнений, то мнение Л. Д. Ландау о том, что делать в этой области нечего, опровергается, например, появлением в 1964-1965 годах четырех важных для физики частиц работ С. Вайнберга [67,89-91], а также многими более поздними публикациями по этой тематике.

Получившиеся у меня уравнения

$$(iS_{\mu\nu} + S\delta_{\mu\nu})\frac{\partial}{\partial x_\nu}\psi(x) = 0, \quad (\text{П1})$$

где  $S_{\mu\nu}$  – инфинитезимальные операторы собственной группы Лоренца, описывали безмассовую частицу со спином  $S$ , волновая функция которой  $\psi(x)$  преобразовывалась по  $(2S+1)$ -компонентному представлению  $(0, S)$  или  $(S, 0)$ . При  $S=1/2$  получались уравнения Вейля для нейтрино, при  $S=1$  – уравнения Максвелла, при  $S=2$  – уравнения, совпавшие с уравнениями М. П. Бронштейна для слабых гравитационных волн. О фундаментальной работе М. П. Бронштейна<sup>25</sup> «Квантование гравитационных волн» я узнал из появившейся в это время в ЖЭТФ'е статьи Ю. Б. Румера [92].

А. И. Ахиезер, воспользовавшись приездом в Харьков В. Б. Берестецкого, попросил меня рассказать Владимиру Борисовичу обо всех этих вещах.

---

<sup>25</sup> С тех пор меня интересуют жизнь и работы М. П. Бронштейна. А еще раньше, прочитав книгу Лауры Ферми «Атомы у нас дома», вышедшую в 1958 году, я заинтересовался жизнью и работами Э. Майораны. Но никогда бы мне и в голову не пришло, что в 2001 году мне выпадет счастье рассказывать об Э. Майоране и М. П. Бронштейне в Италии, в Центре научной культуры имени Этторе Майораны в Эриче (Сицилия) [77]. Я крайне признателен А. А. Желтухину, благодаря которому это произошло.

Вердикт был таким: нужно печатать. Так появилась статья [68]<sup>26</sup>. Позднее я понял [69], что уравнение (П1) применимо, на самом деле, в случае любого (не обязательно конечномерного) представления собственной группы Лоренца  $(s_1, s_2)$ , если положить в (П1)  $S=s_1+s_2$ .

В 1963 году (частично под влиянием книги Ю. Б. Румера по 5-оптике<sup>27</sup> [93]) я увлекся шестимерными обобщениями уравнения Дирака и уравнений для высших спинов. В то время (в отличие от нынешнего) подобные занятия были крайне непопулярны, но А. И. Ахиезер не только не осудил мое увлечение, но даже взял на себя труд быть руководителем моей кандидатской диссертации, посвященной группе вращений шестимерного пространства и ее применениям (за что я был ему очень благодарен).

**Приложение 2.1 «Формуляр» для Зельдовича. Часть 1. Фотон с определенной спиральностью не может быть локализован в точке, потому что «ежа нельзя причесать».** Рассмотрим разложение Фурье волновой функции фотона с определенной спиральностью (для определенности право поляризованного), локализованного в момент времени  $t = 0$  в начале координат,

$$\vec{\psi}_0(\vec{x}, 0) = \int \vec{e}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{d^3k}{\omega}, \quad \omega = |\vec{k}|. \quad (\text{П2})$$

Условие того, что фотон право поляризован, имеет вид  $(\vec{S}\vec{k})e = \omega e$ , или  $i[\vec{k}\vec{e}] = \omega\vec{e}$ , где  $\vec{S}$  - оператор спина фотона. Очевидно, что  $(\vec{k}\vec{e}) = 0$ . Разложение Фурье волновой функции фотона, локализованного в точке  $\vec{a}$ , имеет вид  $(e^{i\vec{k}\vec{a}}$  «сдвигает» первоначальное состояние на вектор  $\vec{a}$  в координатном представлении)

$$\vec{\psi}_{\vec{a}}(\vec{x}, 0) = \int \vec{e}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} + i\vec{k}\vec{a}} \frac{d^3k}{\omega}. \quad (\text{П3})$$

Скалярное произведение волновых функций (П3) и (П2) должно давать дельта-функцию  $\delta(\vec{a})$

$$(\psi_0(\vec{x}, 0), \psi_{\vec{a}}(\vec{x}, 0)) = \int (\vec{e}^*(\vec{k}) \vec{e}(\vec{k})) e^{i\vec{k}\vec{a}} \frac{d^3k}{\omega^3} = \delta(\vec{a}), \quad (\text{П4})$$

<sup>26</sup> В статье было две ссылки на советских авторов и обе на «врагов народа» М. П. Бронштейна и Ю. Б. Румера.

<sup>27</sup> Когда после 10-летнего заключения ни в чем не повинного Ю. Б. Румера повезли по этапу в ссылку в Енисейск, его «вольная» жена повезла написанные в заключении работы Ю. Б. Румера по 5-оптике в Москву, к Ландау. «Можете представить, какое возмущение высказал Ландау по поводу этих работ, – рассказывал Юрий Борисович [94], – Он сказал: «Бедный Румочка с ума сошел, ну что же ему делать, конечно» и так далее.» Но все 9 работ были напечатаны, чтобы поддержать ссыльного и в качестве «профилактического» средства, чтобы «болезнь» не прогрессировала.

(в случае спина  $S$  величину  $\omega$  формуле (П4) нужно было бы взять в степени  $(2S+1)$  [95]), откуда следует условие

$$(\vec{e}^*(\vec{k})\vec{e}(\vec{k})) = \frac{\omega^3}{(2\pi)^3}, \quad (\text{П5})$$

которое не может быть выполнено, так как его выполнение означало бы существование непрерывного поля касательных векторов на сфере радиуса  $\omega$ , что невозможно (нельзя «причесать ежа, свернувшегося в клубок»).

**Приложение 2.2 «Формуляр» для Зельдовича. Часть 2.** Если фотон с определенной спиральностью локализован в конечном объеме, то нарушается причинность. Следуя Г. Хегерфельдту<sup>28</sup> [96], рассмотрим волновую функцию право поляризованного фотона, локализованного в нулевой момент времени в некотором конечном объеме  $V_0$ ,

$$\vec{\psi}_{V_0}(\vec{x}, 0) = \int \vec{e}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{d^3k}{\omega}, \quad \omega = |\vec{k}|. \quad (\text{П6})$$

Со временем объем, занятый фотоном, увеличивается, но причинность не позволяет границам объема «расползаться» со скоростью, большей скорости света, и объем будет оставаться конечным. Поэтому скалярное произведение волновых функций  $\psi_{V_0}(\vec{x}, t)$  и  $\psi_{V_0}(\vec{x}, 0)$ , подвергнутой сдвигу на  $\vec{a}$ , то есть  $e^{i\vec{k}\vec{a}}\psi_{V_0}(\vec{x}, 0)$ , должно обращаться в нуль, начиная с некоторых  $\vec{a}$ ,

$$(\psi_{V_0}(\vec{x}, t), e^{i\vec{k}\vec{a}}\psi_{V_0}(\vec{x}, 0)) = f(\vec{a}, t) = 0 \quad \text{при достаточно больших } \vec{a}.$$

В импульсном пространстве

$$f(\vec{a}, t) = \int (\vec{e}^*(\vec{k})\vec{e}(\vec{k})) e^{i\vec{k}\vec{a}} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^3} d^3k. \quad (\text{П7})$$

Из (П7) следует, что

<sup>28</sup> Позднее Г. Хегерфельдт опубликовал еще две статьи о связи локализации и причинности [97,98].

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\vec{a}, t) e^{-i\vec{k}\vec{a}} d^3a = (\vec{e}^*(\vec{k})\vec{e}(\vec{k})) \frac{e^{-i\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}t}}{\sqrt{(k_1^2+k_2^2+k_3^2)^3}} \cdot \quad (\text{П8})$$

Но фурье-образ функции  $f(\vec{a}, t)$ , обращающейся в нуль, начиная с некоторых  $\vec{a}$ , должен быть целой функцией  $\vec{k}$ , то есть функцией, аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением, быть может, бесконечно удаленных точек, и не может иметь вид (П8). Таким образом, локализуемость фотона в конечном объеме и релятивистская причинность несовместимы.

**Приложение 2.3 «Формуляр» для Зельдовича. Часть 3. Если фотон с определенной спиральностью локализован в конечном объеме, то причинность не нарушается.** Следуя Е. Вигнеру [99], рассмотрим величины

$$\rho = (\vec{\psi} * \vec{\psi}) = \vec{E}^2 + \vec{H}^2 \quad \text{и} \quad \vec{j} = -i[\vec{\psi} * \vec{\psi}] = 2[\vec{E}\vec{H}],$$

подчиняющиеся уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

и удовлетворяющие условию

$$\rho \geq |\vec{j}|.$$

(Мы положили компоненты волновой функции право поляризованного фотона  $\vec{\psi}$  равными  $\vec{\psi} = \vec{E} + i\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют обычным уравнениям Максвелла.) Окружим область, в которой локализован фотон в момент времени  $t = 0$ , двумя сферами. Пусть меньшая из этих сфер (радиуса  $R_1$ ) расширяется со скоростью света до радиуса  $R'_1 = R_1 + t$ , а вторая (радиуса  $R_2$ ) сжимается до радиуса  $R'_2 = R_2 - t$ , такого, что  $R'_2 > R'_1$ . Выражение

$$\int_{R_1}^{R'_1} (\rho - j_r) |_{t=R-R_1} dV + \int_{R'_1}^{R'_2} \rho(r, t) dV + \int_{R'_2}^{R_2} (\rho + j_r) |_{t=R_2-r} dV - \int_{R_1}^{R_2} \rho(r, 0) dV \quad (\text{П9})$$

представляет собой поток величины  $T_{0\mu} = (\vec{j}, \rho)$  по некоторой замкнутой гиперповерхности, и, следовательно, равно нулю, в силу теоремы Гаусса

$$\int T_{0\mu} d\sigma_\mu = \int \frac{\partial T_{0\mu}}{\partial x_\mu} d^4x = 0.$$

Но интеграл  $\int_{R_1}^{R_2} \rho(r,0) dV = 0$ , так как берется в момент времени  $t = 0$  и берется по области, где  $\rho = 0$ . Это означает, что сумма остальных трех интегралов также равна нулю. Но подынтегральные выражения в каждом из этих интегралов положительно определены, а, следовательно,

$$\rho(t) = 0 \quad r > R_1 + t, \quad (\text{П10})$$

то есть причинность не нарушается. Таким образом, мы приходим к двум взаимоисключающим заключениям: если фотон локализован в конечно объеме, то причинность нарушается и в то же время не нарушается. Противоречие снимается, если фотон нельзя локализовать в конечном объеме.

**Приложение 2.4 «Формуляр» для Зельдовича. Часть 4. Фотон с определенной спиральностью не может быть локализован в конечном объеме.** Пусть право поляризованный фотон локализован в момент времени  $t = 0$  в конечном объеме  $V_0$ , и описывается волновой функцией (П6). Тогда фурье-образ волновой функции фотона  $\vec{\psi}_{V_0}(\vec{x}, 0)$

$$\vec{e}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \vec{\psi}_{V_0}(\vec{x}, 0) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^3x$$

представляет собой целую функцию  $\vec{k}$ . С другой стороны, условия того, что фотон поляризован по правому кругу (представляющие собой волновое уравнение фотона в импульсном пространстве) имеют вид  $i[\vec{k}\vec{e}] = \omega\vec{e}$ , или

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} e_1(\vec{k}) = ik_2 e_3(\vec{k}) - ik_3 e_2(\vec{k}), \quad (\text{П11})$$

плюс соотношения, получаемые циклической перестановкой индексов из (П11). Ясно, что соотношение (П11) противоречит тому, что  $e_1(\vec{k})$ ,  $e_2(\vec{k})$  и  $e_3(\vec{k})$  – целые функции  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$ .

**Приложение 3. Теорема Брауэра, нелокализуемость фотона, внезапная сердечная смерть и бессонница у комаров. Теорема о неподвижной точке,**

доказанная в 1912 году голландским математиком Брауэром, утверждает: *всякое непрерывное отображение  $n$ -мерного элемента в себя имеет неподвижную точку* (под  $n$ -мерным элементом понимается любое множество, гомеоморфное<sup>29</sup>  $n$ -мерному шару  $D^n$ ) [100]. Теорема Брауэра вытекает из следующей вспомогательной теоремы: *не существует непрерывного отображения  $n$ -мерного элемента на его край, которое оставляло бы каждую точку края на месте* (это означает, что не существует непрерывного отображения  $n$ -мерного шара  $D^n$  на  $(n-1)$ -мерную сферу  $S^{n-1}$ ,  $D^n \rightarrow S^{n-1}$ , оставляющего точки сферы на месте [101]). Неподвижные точки имеют не только непрерывные отображения шара в шар, но и *всякое непрерывное отображение сферы  $S^n$  четной размерности в себя также имеет неподвижную точку* (если это отображение непрерывно связано с тождественным отображением). Из последнего утверждения легко выводится теорема Пуанкаре-Брауэра: *на сфере  $S^n$  четной размерности не существует непрерывного поля касательных векторов* [100]. Действительно, если бы существовало бесконечно мало отличающееся от тождественного отображение сферы  $S^n$  четной размерности в себя, не имеющее неподвижных точек, то оно бы и определяло искомое непрерывное поле касательных векторов. «Таким образом, у ежа, свернувшегося в клубок, все иглы не могут лежать гладко, а некоторые непременно будут торчать. Поэтому теорема Пуанкаре-Брауэра названа Гильбертом «теоремой о еже»» [100].

Выше мы выяснили, что нелокализуемость фотона тесно связана с «теоремой о еже»: невозможно написать волновую функцию фотона, локализованного в точке, потому что мы не можем «причесать ежа». Но эта трудность не является, если можно так выразиться, «смертельной»: реальные фотоны локализуются так, как им это нужно, несмотря на наши математические трудности.

Однако, эта же математическая теорема представляет собой ключ к пониманию того, как возникают нарушения сердечного ритма, смертельные в буквальном смысле этого слова [102,103]. Эти нарушения (обычно, это *фибрилляция желудочков сердца*) приводят к *внезапной сердечной смерти*, составляющей 15–20% всех ненасильственных случаев смерти среди жителей промышленно развитых стран [104]. Только в США от внезапной сердечной смерти умирает около 250 тысяч человек в год, и умирало бы в два раза больше, если бы не широкая распространенность и доступность дефибрилляторов и большое количество людей, умеющих с ними обращаться. При дефибрилляции на сотые доли секунды (и, если нужно, не один раз) в области сердца прикладывается напряжение в шесть-семь тысяч вольт, и электрический шок мощностью в несколько десятков киловатт выводит сердце из состояния фибрилляции.

<sup>29</sup> «Гомеоморфное» означает такое, которое получается из шара с помощью непрерывной деформации и находится с шаром во взаимно однозначном соответствии. Кстати, если перевести название пьесы Дж. Н. Г. Байрона «Преображенный калека» как «Гомеоморфный», то мы не слишком отойдем от английского оригинала “The Transformed Deformed”.





Рис. 24 Джордж Ральф Майнс, 1914 г.

В 1914 году 28-летний канадский физиолог Джордж Ральф Майнс исследовал фибрилляцию – бурные и беспорядочные подергивания сердца, приводящие к его остановке. Дж. Р. Майнс обнаружил, что довольно слабые короткие электрические импульсы могут драматически сказаться на деятельности сердца, а именно, вызвать фибрилляцию сердца, а затем и его остановку. (В различных областях желудочков нормально функционирующего сердца регистрируются потенциалы порядка 20-50 мВ, фибрилляцию могут вызвать электрические импульсы порядка 10 мВ.) Все зависит от того, в какой момент, то есть в какую фазу сердечного цикла, подается электрический импульс на сердце. Обычно относительно небольшие электрические импульсы несколько сдвигают сердечный цикл либо вперед, либо назад, и ничего катастрофического не происходит, но существует такой момент подачи импульса определенной интенсивности, когда сердце не понимает, в какую сторону ему нужно сдвинуть свой цикл. Тогда и начинается фибрилляция, приводящая к внезапной сердечной смерти. Дж. Р. Майнс написал и отослал в печать статью о своих исследованиях. Он писал в своей статье: *«При некоторых условиях очень короткий стимул может вызвать фибрилляцию... если его правильно сфазировать»*. В субботу, 7 ноября 1914 года Дж. Р. Майнс решил, что пора от опытов на сердцах кроликов перейти к опытам на человеческом сердце. Поскольку у него под рукой было только одно сердце – его собственное – он подал электрический импульс на свое сердце и выбрал момент подачи импульса так удачно (*правильно его сфазировал!*), что тут же скончался, не приходя в сознание. Трагическая смерть оборвала жизнь серьезного и глубокого ученого. Дж. Р. Майнса помнят до сих пор не только из-за обстоятельств его смерти, но и за его важный и яркий вклад в зарождающуюся электрофизиологию сердца [105].

Еще одно важное наблюдение было сделано Дж. К. Экклсом<sup>30</sup> и Г. Е. Хоффом в 1931 году. Стимулируя сердце собаки, они обнаружили, что кроме *слабой перестройки фазы*, когда сердечный цикл незначительно сдвигается вперед или назад, существует еще *сильная перестройка фазы*: если силу электрических импульсов увеличивать, то можно попасть в область, когда импульсы еще достаточно слабые, чтобы вызвать сколь либо серьезные физические нарушения в сердце, или существенно изменить сам сердечный цикл, но уже настолько сильные, что сердце забывает свою предысторию, и следующий сердечный цикл начинается через какой-то промежуток времени после подачи импульса, слабо зависящий от времени (фазы) подачи импульса.

Изучавший биологические 24-часовые ритмы, свойственные многим организмам, Артур Т. Уинфри, заинтересовавшись приведенными особенностями нарушений сердечного ритма, связал эти нарушения со следующей топологической теоремой: *не существует непрерывного отображения круга на окружность, оставляющего точки окружности на месте*. Обязательно найдется точка, которую будет некуда отобразить. Это и будет та *правильно сфазированная точка (точка уязвимости)*, которая ответственна за возникновение фибрилляции сердца [102,103]. Практически это бывает не точка, а целая *область уязвимости*, причем у здорового сердца она меньше, чем у сердца больного. Как мы сейчас увидим, эта точка (область) уязвимости не может не существовать. Речь будет идти не о *спонтанной, естественной* внезапной сердечной смерти, а об *искусственно вызываемой, экспериментальной* внезапной сердечной смерти (у лягушек, кошек, собак, кроликов, ежей<sup>31</sup>).

Будем считать, что сердечный цикл представляет собой строго периодический процесс с периодом  $T$ . (Конечно, реальное здоровое сердце обязательно реагирует на то, что происходит с организмом, и строгая периодичность – это некоторая идеализация). Вместо того, чтобы говорить о времени, будем говорить о фазе цикла  $\Phi = 2\pi \frac{t}{T}$ . Пусть в момент времени, соответствующий фазе  $\Phi$ , на сердце подается электрический импульс интенсивности  $I$ . Предполагается, что интенсивность  $I$  настолько мала, что в результате воздействия изменяется только момент времени, в который начинается следующий цикл. Время (в угловых переменных) от момента стимулирования  $\Phi$  до начала следующего цикла мы будем называть «латентностью» и обозначать буквой  $\chi$ . Ясно, что латентность  $\chi$  представляет собой функцию времени  $\Phi$  и интенсивности стимула  $I$ ,  $\chi = \chi(\Phi, I)$ . Очевидно, что  $\chi(\Phi, 0) = 2\pi - \Phi$  (предельный случай *слабой перестройки фазы*, когда

<sup>30</sup> В 1963 году Джон Кэрю Экклс (1903-1997) получил Нобелевскую премию по физиологии и медицине за работы по нейрофизиологии.

<sup>31</sup> Как-то проводился такой научный опыт: ежей не кормили и смотрели, что с ними будет. Может быть, при этом и узнали что-то важное и нужное, во всяком случае, хочется на это надеяться, но внешне это выглядело так: была составлена таблица из многих столбцов, первый столбец – Ёж №1, Ёж №2, Ёж №3 и т.д., второй, третий, четвертый столбец – какие-то экспериментальные данные, и последний столбец с названием «примечание», в котором против каждого ежа стояло – «издох», «издох», «издох»... Все это было напечатано в Трудах какой-то республиканской академии лет 50 тому назад.

вообще ничего не происходит, потому что никакого стимула нет). Примем допущение, что в предельном случае *сильной перестройки фазы* при некоторой интенсивности  $I_0$  латентность  $\chi$  вообще перестает зависеть от фазы  $\Phi$ :  $\chi(\Phi, I_0) = \chi_0$ .

Рассмотрим теперь окружность радиуса  $I_0$ , и пусть точки окружности соответствуют разным фазам сокращения сердца, а с точками круга, заключенными внутри окружности, свяжем две величины. С азимутальным углом  $\Phi$  свяжем время (в угловых переменных), отсчитываемое от начала сердечного цикла, а с расстоянием от окружности до ее центра – интенсивность стимула  $I$ , подаваемого на сердце. Причем будем считать, что на окружности  $I = 0$ , а в центре окружности  $I = I_0$ , где  $I_0$  – интенсивность, при которой наблюдается предельный случай *сильной перестройки фазы*. Латентности  $\chi(\Phi, I)$  мы будем отображать с помощью единичных векторов, азимутальные наклоны которых  $\theta(\Phi, I) = 2\pi - \chi(\Phi, I)$ .



**Рис. 25 Векторное поле латентностей,  
 $I^*$ ,  $\Phi^*$  - точка уязвимости**

Предположим, что в круге существует *непрерывное векторное поле латентностей*. Сопоставляя точке круга с каким-то вектором латентности точку окружности с таким же вектором латентности, мы *непрерывно отобразим круг на окружность*, что невозможно, согласно выше приведенной теореме. Следовательно, существует особая точка (точка уязвимости), которую мы отобразить не сможем. Этих точек может быть и не одна, но ни одна из этих точек не находится в центре окружности, в области *сильной перестройки фазы*.

Теорему о невозможности отображения круга на окружность легко связать с теоремой о невозможности причесать ежа. Пусть в круге существует непрерывное векторное поле, и векторы на краю круга ортогональны к окружности, ограничивающей круг, как в только что рассмотренном случае. Повернем каждый из векторов в круге и на окружности на 90 градусов (безразлично, по часовой стрелке, или против). Мы получим непрерывное векторное поле в круге с «причесанной» окружностью. Теперь возьмем два

таких круга, наложим их один на другой и склеим вдоль окружности. Деформируем далее эти два круга в сферу. Получим «причесанного ежа», что невозможно.

«Точки уязвимости» могут появиться при воздействии на любой периодический процесс, если ему присуща сильная перестройка фазы. Вот, например, какое «научное сотрудничество» удалось установить с одним зловредным и назойливым комаром, известным под именем *Culex pipiens quinquefasciatus* (*Комар пищащий пятиполосовый*). Обычно этот комар ненадолго просыпается на рассвете и на закате, остальное время он спит. Если комара держать в полной темноте, он продолжает просыпаться каждые 12 часов, но если его насильственно на час разбудить в его «время уязвимости», то на несколько недель у каждого пятого комара возникает бессонница, и они начинают просыпаться каждые 1-2 часа [103].

**Приложение 4. Рудольф и Евгения Пайерлсы. Жизнь под надзором МИ-5 и ФБР.** В середине 50-х годов дочь Пайерлсов Габи<sup>32</sup> «гостила у Дираков. Жена Дирака, желая развлечь гостя, спросила мужа, нет ли у него студентов, которых можно было бы пригласить потанцевать. «У меня был студент, но он умер», – ответил Дирак» [106]. Увы, умер уже не только студент Дирака, но и сам Дирак (в 1984 году, прожив 82 года). В 2002 году в возрасте 98 лет умерла жена Поля Дирака Маргит, сестра Юджина (Евгения) Вигнера (Юджин Вигнер умер в 1995 году, прожив 94 года.). В том же 2002 году в возрасте 93 лет умер старый друг Рудольфа Пайерлса Виктор Вайскопф. В 2005 году в возрасте 98 лет умер Ганс Бете, еще один старый друг Рудольфа Пайерлса. В 1987 году, когда в Оксфорде отмечали 80-летие Пайерлса, Бете, напомнив собравшимся, что они с Пайерлсом дружат уже 60 лет, сказал: «*Просить еще столько же – неблагоприятно, но еще десять было бы неплохо.*» [106] Десять лет не получилось, только восемь. Рудольф Пайерлс умер в 1995 году в Оксфорде, пережив своего друга Льва Ландау на 27 лет. [Напрашивается впечатление, что творческие личности, не попадающие в дорожные аварии, нарушая статистику и теорему о «причесывании ежа», живут долго. В подкрепление этого (конечно же, обманчивого) впечатления имена еще десяти «долгожителей» (в скобках указаны годы жизни и количество полных прожитых лет): Макс Борн (1882-1970, 87), Александр Ильич Ахиезер (1911 – 2000, 88), Макс Планк (1858-1947, 89), Хендрик Казимир (1909-2000, 90), Альберт Сент-Дьордьи (1893-1986, 93), Лайнус Полинг (1901-1994, 93), Джон Эклс (1903-1997, 94), Луи де Бройль (1892-1987, 94), Карл Фридрих фон Вейцзеккер (1912-2007, 94), Эдвард Теллер (1908-2003, 95).]

В 1968 году Рудольф Пайерлс за научные заслуги получил дворянство (был посвящен английской королевой в рыцари) и стал «сэром Пайерлсом», а его жена Евгения (1906-1986) стала «леди Пайерлс». В 1979 году сэр Рудольф Пайерлс «получил немалую сумму денег при забавных обстоятельствах, за то, что не умер. Вот как это произошло. Были слухи, что кроме трех советских

---

<sup>32</sup> У Рудольфа Пайерлса и его жены Евгении было три дочери, Габи, Джой, Кэтрин и сын Рональд.

*агентов, Берджеса, Маклина и Филби, которые скрывались в СССР, в Англии остался четвертый сообщник, который был ученым. Один лондонский журналист, думая, что Пайерлс давно умер, написал в книге о советской разведке, что именно он был этим сообщником. После выхода книги в свет адвокат Пайерлса и адвокат издателя легко сговорились насчет компенсации, которую издательство должно было выплатить Пайерлсу за клевету – немалое количество тысяч фунтов стерлингов. [106]»*

А через 20 лет, 29 мая 1999 года в журнале “The Spectator” появилась статья, написанная журналистом Н. Фарреллом, «Сэр Рудольф и леди – шпионы». В статье утверждалось, что из рассекреченных в 1994 году материалов проекта ВЕНОНА (кодového названия работ по раскрытию секретных шифров советской разведки) будто бы следует, что Рудольф Пайерлс – легендарный советский атомный шпион под кодовым названием ПЕРСЕЙ/ФОГЕЛЬ. Заодно журналист зачислил в шпионы и Евгению Пайерлс, причем Н. Фаррелл был далеко не одинок в своем желании опорочить Пайерлсов. Честь родителей пытались защитить дочери и сын Пайерлсов, с публичными заявлениями протеста выступили друзья и коллеги Пайерлса. «Я знал Руди Пайерлса с 1927 года, – сказал Ганс Бете, – быть шпионом – совершенно не в его характере. Жизнь Руди и Жени Пайерлсов была открытой книгой... Обвинения против них – полная бессмыслица. (The Independent, London, July 4, 1999)» Оживленное обсуждение сенсационных обвинений продолжалось до 21 мая 2004 года, когда служба безопасности британской контрразведки МИ-5 полностью сняла обвинения с Пайерлсов, разъяснив, что, действительно, в свое время, у нее были серьезные основания тщательно наблюдать за Рудольфом Пайерлсом, а именно: *тесные связи с атомным шпионом Клаусом Фуксом, русская жена и прокоммунистические научные связи* [107]. Поэтому за Пайерлсами тщательно следили, их телефонные разговоры прослушивались, почта перлюстрировалась. Но ничего порочащего обнаружено не было, и еще в 1953 году МИ-5 пришла к заключению о полной лояльности профессора Пайерлса и его жены.

Не обошли вниманием супругов Пайерлсов и спецслужбы США. ФБР сочло возможным поместить в Интернете [108] фотокопию досье «Рудольф и Евгения Пайерлсы, Часть 1». Не сообщается, существует ли «Часть 2», но в «Части 1», заканчивающейся 1966 годом, на 55 страницах, кроме обсуждения «связи с Клаусом Фуксом», описываются тщетные старания ФБР выявить «прокоммунистические симпатии» «объекта» (Рудольфа Пайерлса) и его жены, при этом много внимания уделено вопросу, была ли Евгения Пайерлс членом коммунистической партии Великобритании (или, хотя бы, Германии). Да и сам Пайерлс подозревался в том, что в студенческие годы состоял в коммунистической партии Швейцарии.



**Рис. 26 Лев Ландау, Евгения Канегиссер и Дмитрий Иваненко**

Но вернемся к 1930 году. В сентябре 1930 года 23-летний Рудольф Пайерлс приехал на съезд советских физиков в Одессу. И вскоре произошли события, время и место которых так и не смогло установить ФБР, несмотря на все старания. На пляже в Одессе Пайерлс познакомился с Евгенией Канегиссер<sup>33</sup> [109], молодым физиком, выпускницей Ленинградского университета, а 15 марта 1931 года они поженились в Ленинграде. 1 апреля 1931 года Яков Ильич Френкель писал жене из Миннеаполиса: «Я был потрясен известием о бракосочетании Пайерлса с Женей Канегиссер. Так вот почему он так охотно согласился приехать в Россию и так усердно изучал русский язык! [109]» Как запомнилось Пайерлсу, именно Я. И. Френкель познакомил его с Евгенией, и именно Я. И. Френкель организовал поездки Пайерлса в Харьков, Москву и Ленинград и пригласил Пайерлса на весну 1931 года для чтения лекций в Ленинградском Физико-техническом институте [109]. Вот почему Рудольф Пайерлс так неожиданно попрощался с Ландау и Бором и уехал из Копенгагена 27 февраля 1931 года. Ему было куда торопиться!



**Рис. 27 Лев Ландау, Нина Канегиссер, Виктор Амбарцумян, ?,  
Евгения Канегиссер, Матвей Бронштейн в 1929 г.**

<sup>33</sup> Евгения Канегиссер была двоюродной сестрой «террориста» Леонида Канегиссера, 22-летнего студента, поэта-романтика, который в 1918 году убил председателя Петроградской Чрезвычайной Комиссии М. С. Урицкого. Так Леонид Канегиссер отомстил чекистам за расстрел своего близкого друга.

Несколько слов о Евгении Николаевне, жене Рудольфа Пайерлса. «... своими успехами сэр Пайерлс был, хотя бы отчасти, обязан своей жене, – это ясно каждому, кому знакомы очарование ее личности, ее оптимизм и жизненная мудрость. [9]» «Женю обожали все, кто имел с ней дело, она была второй матерью, а позже второй бабушкой поколениям студентов ее мужа; умная, культурная, щедрая, она нигде не оставалась незамеченной или неслышанной (хотя отнюдь не стремилась к этому). [106]»



Рис. 28 Евгения Канегиссер и Рудольф Пайерлс в 1943 г.

Что касается ФБР, то оно так и не смогло выяснить, где же познакомились Рудольф и Евгения, правда, время их женитьбы ФБР установило с не очень большой ошибкой: 1933-1934 годы. О характере записей в досье ФБР «Рудольф и Евгения Пайерлсы» можно судить по такому примеру. Опрошенный в связи с делом Клауса Фукса доктор Эдвард Теллер сообщил «что не может припомнить, чтобы Пайерлс говорил с ним о политике, когда он видел Пайерлса в Англии в 1948 году. Он добавил, что вместе с другими гостями был приглашен в дом Пайерлсов на обед и что во время обеда он сидел рядом с Евгенией Пайерлс. Он констатировал, что во время обеда миссис Пайерлс подвергла его настоящей травле и назвала его (Теллера) поджигателем войны. [108]» Хотя Евгения Николаевна, как мы сейчас понимаем, была не совсем справедлива по отношению к Э. Теллеру [110], из ее поведения видно, что она разделяла взгляды своего мужа на проблемы войны и мира. Рудольф Пайерлс, после того как он внес очень большой вклад в атомные проекты Великобритании и США, стал активным «борцом за мир»<sup>34</sup>, как и многие

<sup>34</sup> «Бороться за мир» было не просто даже в Советском Союзе, а не только в США. «Академик М. А. Марков, знаменитый физик и философ, все послевоенные годы боролся за мир... Как-то Моисей Александрович вспомнил воззвание Эйнштейна. В нем говорилось, что ядерная война уничтожит цивилизацию. Наше правительство, помня указания Сталина, с этим не соглашалось, утверждая, что ядерная война покончит только с капитализмом. Однажды Марков и Топчиев полетели в Лондон на какую-то мирную конференцию ученых (видимо, в пятидесятые годы). Там им предложили подписаться под мирным возванием Эйнштейна. Марков обратился за разрешением к нашему послу Малику. Тот отказал. Все делегации подписали воззвание, кроме советской. [111]»



другие создатели атомной бомбы. И если следовать журналистской логике<sup>35</sup>, то из этого следует, что Пайерлс наверняка был атомным шпионом ПЕРСЕЕМ. Потому что, согласно воспоминаниям советских разведчиков [113], советская разведка была вынуждена расстаться со своим очень ценным агентом ПЕРСЕЕМ как раз потому, что он стал открыто *«бороться за мир»*.

Но и не будучи ПЕРСЕЕМ, Рудольф Пайерлс оказал советской разведке неоценимую услугу. Благодаря усилиям Рудольфа Пайерлса, немецкий коммунист Клаус Фукс (1911-1988), стал участником сначала британского, а затем и американского атомных проектов. Клаус Фукс, ставший своим человеком в семье Пайерлсов<sup>36</sup>, передал Советскому Союзу бесценнейшую информацию об атомной и водородной бомбе, что способствовало установлению ядерного равновесия в мире и уберегло мир от ядерной катастрофы!

В письме к А. Ф. Иоффе (1880-1960) из Лейдена от 9 июля 1933 года П. С. Эренфест (1880-1933) обсуждал проблему трудоустройства бежавших от нацистов немецких и австрийских физиков-евреев<sup>37</sup> М. Борна, Ф. Блоха, В. Гайтлера, Ф. Лондона, Р. Пайерлса, Г. Бете, В. Вайскопфа и многих других [117]. В частности, о Пайерлсе и его друзьях Бете и Вайскопфе Эренфест писал:

*«Р. Пайерлс – возможно, получение должности по конкурсу в Манчестере...*

*Г. Бете – может быть, тоже получение должности по конкурсу в Манчестере.*

*Если ничего не выйдет, то, кажется, его возьмет Паули.*

*В. Вайскопф – должен ехать к Паули, если это место не займет Бете.»*

Р. Пайерлс и Г. Бете оба получили должности в Манчестере. В. Вайскопф, который в это время работал в Харькове, уехал из Харькова в Цюрих, к Паули, где стал его ассистентом. Когда Вайскопф восторженно сообщил Пайерлсу: *«Я только что получил работу у Паули!»*, Пайерлс сказал: *«Если ты думаешь, что это подходящая работа, то ошибаешься. Ужасное дело быть ассистентом у Паули. [118]»* Просмотрев первые же расчеты, которые он поручил Вайскопфу, Паули заявил: *«Мне следовало взять Бете!»* Но на этом, к счастью сотрудничество Паули и Вайскопфа не закончилось. Много лет спустя

---

<sup>35</sup> Отличие журналистской логики от нормальной логики можно пояснить следующим образом. Вот высказывание, относящееся к нормальной логике [112]: *Если Петр Ильич Чайковский – писатель и если все писатели любят ловить рыбу, то Петр Ильич Чайковский также любит ловить рыбу.* У журналистов слово «если» исчезает, и считаются верными следующие высказывания: *Все писатели любят ловить рыбу, Петр Ильич Чайковский также любит ловить рыбу, следовательно, Петр Ильич Чайковский – писатель.*

<sup>36</sup> *«Фукс поселился у нас в доме. Это был человек, с которым приятно иметь дело. Он был вежлив и выдержан. И довольно молчалив, если вы не задавали ему вопросов, но будучи спрошенным, он давал полный и четкий ответ; за это качество Женя прозвала его «торговым автоматом».*» (из воспоминаний Р. Пайерса [114]). В Лос-Аламосе, где Фукс продолжал плодотворно работать вместе с Пайерлсом, он прославился не только своей молчаливостью, но и как лучшая «няня» (baby-sitter): он всегда охотно оставался с детьми своих сослуживцев, когда его об этом просили [115].

<sup>37</sup> Когда в 1986 году М. Шифман принес в редакцию «Науки и жизни» свой перевод отдельных глав воспоминаний Ричарда Фейнмана, ему поставили два условия: никаких упоминаний о Клаусе Фуксе (которого Фейнман упомянул два раза, назвав *«мой друг Фукс»*) и никаких намеков на то, что Фейнман – еврей [116]. Когда до Харькова дошли воспоминания Р. Фейнмана на английском языке, А. И. Ахиезер никак не мог поверить словам Фейнмана, что его не приняли в Колумбийский университет из-за того, что он – еврей. А. И. Ахиезер написал письмо Роберту Маршаку (1916-1992) в США с вопросом: *«Неужели это возможно?»* Роберт Маршак ответил А. И. Ахиезеру: *«У нас свободная страна, поэтому возможно всё!»*

В. Вайскопф писал: «Я любил работать с В. Паули. Мое восхищение им не имело границ. [118]»

С 1933 года Рудольф и Евгения Пайерлсы стали жить в Великобритании, а в 1940 году получили британское гражданство. И если бы Рудольф Пайерлс не познакомился в 1930 году на одесском пляже с Евгенией Канегиссер, он не уехал бы в феврале 1931 года так поспешно из Копенгагена, продолжил бы с Ландау исследования по квантовой электродинамике и мог бы, вместе с Ландау, уехать жить и работать в Харьков. Но скорее всего, остался бы в Цюрихе, а не оказался бы сначала в Манчестере, а потом в Бирмингеме, где у него появился молодой, вежливый и молчаливый, талантливый и трудолюбивый ассистент Клаус Фукс. Фукс не стал бы атомным шпионом и советский атомный проект не развивался бы так успешно. У Ричарда Фейнмана в Лос-Аламосе не появился бы его «друг Фукс», а у лос-аламоссских детей не было бы такого замечательного «беби-ситтера». Как тут не вспомнить Блеза Паскаля: «*Le nez de Cléopâtre: s'il eût été plus court, tout la face de la terre aurait changé*». (Если бы нос Клеопатры был покороче, лик земли был бы иным! [119]).

### Литература.

1. Пономарев Л. И. По ту сторону кванта. – Москва: «Молодая гвардия», 1971. – 304 с.
2. Landau L., Peierls R. Quantenelektrodynamik in Konfigurationraum // Zs. Phys. – 1930. – Bd. 62, Н. 3-4. – S. 188-198 (перевод: Ландау Л., Пайерлс Р. Квантовая электродинамика в конфигурационном пространстве // Ландау Л. Д. Собрание трудов, Т. 1. – Москва: Наука, 1969. – С. 32-46).
3. Landau L., Peierls R. Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie // Zs. Phys. – 1931. – Bd. 69, Н. 1. – S. 56-70 (перевод: Ландау Л., Пайерлс Р. Распространение принципа неопределенности на релятивистскую квантовую теорию // Там же – С. 56-70).
4. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика (3-е изд.). – Москва: Наука, 1969. – 624 с.
5. Фейнман Р. КЭД – странная теория света и вещества. – Москва: Наука, 1988. – 144 с.
6. Голицын Б. Б. Избранные труды, том I. – Москва: Изд. АН СССР, 1960. – 243 с.
7. Гриббин Дж., Гриббин М. Ричард Фейнман: жизнь в науке. – Москва Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 288 с.
8. Бронштейн М. П. Новый кризис теории квант // Научное слово. – 1931. – № 1. – с. 38-55.
9. Горелик Г. Е., Френкель В. Я. Матвей Петрович Бронштейн : 1906-1938. – Москва: Наука, 1990. – 272 с.
10. Горелик Г. Е. Матвей Бронштейн и квантовая гравитация. К 70-летию нерешенной проблемы // УФН. – 2005. – Т. 175, № 10. – С. 1094-1108.

11. Горелик Г. Е. Наука и жизнь на заре  $cGh$ -физики // Доклад на семинаре по квантовой гравитации и космологии, посвященном 100-летию М. П. Бронштейна, СПб, 30.11 - 2.12. 2006.
12. Born M., Heisenberg W., Jordan P. // Zur Quantenmechanik, II // Zs. Phys. – 1926. – Bd. 35, Н. 8-9. – S. 557-615.
13. Улам С. Приключения математика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 272 с.
14. Новейшее развитие квантовой электродинамики. Сборник статей. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1954. – 394 с.
15. Schweber S. S. QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga. – Prinston, New Jersey: Prinston University Press, 1994. – 732 p.
16. Вайнберг С. Квантовая теория полей, Т. 1. – Москва: Физматлит, 2003. – 838 с.
17. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. – Москва: Гостехтеориздат, 1953. – 428 с.
18. Гейликман Б. Т., Грибов В. Н., Иоффе Б. Л., Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б., Терентьев М. В., Тер-Мартirosян К. А., Федоров Г. Б. Памяти Владимира Борисовича Берестецкого // УФН. – 1977. – Т. 122, вып. 3. – С. 542-546.
19. Купер Л. Физика для всех, Т.2. – Москва: Мир, 1974. – 379 с.
20. Воспоминания о Ландау. – Москва: Наука, 1988. – 352 с.
21. Сапожников М. Г. Антимир – реальность? – Москва: Знание, 1983. – 176 с.
22. Атомное ядро. Сборник докладов 1-ой Всесоюзной ядерной конференции. – Москва Ленинград: Гостехтеориздат, 1934. – 227 с.
23. Вентцель Г. Квантовая теория полей (до 1947 года). – В кн.: Теоретическая физика 20 века. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. – С. 60-93.
24. Dirac P. A. M. Does Conservation of Energy hold in Atomic Processes? // Nature. – 1936. – V. 7. – P. 298-299. (Русский перевод: Дирак П. А. М. Собрание научных трудов, Т. II. – Москва: Физматлит, 2003. С. 637-639)
25. Френкель В. Я., Джозефсон П. Стипендиаты Рокфеллеровского фонда // УФН. – 1990. – Т. 160, вып. 11. – С. 103-134.
26. Пономарев Л. И. По ту сторону кванта. – Москва: Физматлит, 2005. – 416 с.
27. Георгий Гамов, Приключения мистера Томпкинса. – Москва: Бюро Квантум, 1993. – 115 с.
28. Гамов Г. А. Автобиография. – В кн. Физики о себе. – Ленинград: Наука, 1990. – С. 130-139.
29. Gamow G. Biography of Physics. – New York: Harper & Row, Publishers, 1961. – 338 p.
30. Gamow G. Thirty Years That Shook Physics: The Story of Quantum Theory. – New York: Anchor Books, 1966. – 240 p.
31. Румер Ю. Б. Ландау // Сетевой альманах «Еврейская старина». – 2003. – № 7. – (<http://berkovich-zametki.com/AStarina/Nomer7/Starina7.htm>).
32. Гинзбург И. Ф., Михайлов (Румер) М. Ю., Покровский В. Л. Юрий Борисович Румер // УФН. – 2001. – Т. 171, вып. 11. – С. 1132-1136.

33. Физики шутят. Сборник переводов. – Москва: Мир, 1966. – 168 с.
34. Пайерлс Р. Э. Мои воспоминания о Ландау. – В кн. [19], с.187-192.
35. Пайс А. Вольфганг Эрнст Паули. – В кн.: Пайс А. Гении науки. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – С. 267-330.
36. Юнг К.Г. Психология и алхимия. – Москва: «Рефл-бук», Киев: «Ваклер», 2003. – 592 с.
37. Паули В. Влияние архетипических представлений на формирование естественно-научных представлений у Кеплера // В кн.: Паули В. Физические очерки. – Москва: Наука, 1975. – с. 137-175.
38. Юнг К. Г. Синхронистичность: акаузальный объединяющий принцип // В кн.: Юнг К. Г. Синхронистичность. – Москва: «Рефл-бук», Киев: «Ваклер», 1997. – 320 с.
39. Pauli W., Jung C.G. Naturerklärung und Psyche (C.G. Jung: Synchronizität als ein Prinzip akausaler Zusammenhänge. // W. Pauli: Der Einfluss archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler.). – Zürich: Rascher-Verlag, 1952. – 194 S.
40. Gieser S. The Innermost Kernel: Depth Psychology and Quantum Physics. Wolfgang Pauli's Dialogue with C. G. Jung. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 378 p.
41. Møller, C. Zur Theorie des Durchgangs schneller Elektronen durch Materie // Ann. der Phys. – 1932. – V. 14. – S. 531-585.
42. Ландау Л. Д. Отчет о заграничной командировке. // [24], с. 130-131.
43. Landau L. Metallendiamagnetismus // Zs. Phys. – 1930. – Bd. 64, Н. 9-10. – S. 629-636 (перевод: Ландау Л. Диамагнетизм металлов // Ландау Л. Д. Собрание трудов, Т. 1. – Москва: Наука, 1969. – С. 47-55).
44. Паули В. Некоторые вопросы интерпретации квантовой теории // В кн.: Паули В. Труды по квантовой теории. Статьи 1928-1958. – Москва: Наука, 1977. – С. 182-193.
45. Гейзенберг В., Паули В. К квантовой динамике волновых полей // Там же, С. 30-88.
46. Гейзенберг В., Паули В. К квантовой теории волновых полей. II // Там же, С. 89-111.
47. Ландау Л. Д. Фундаментальные проблемы // В кн. [22], С. 285-289.
48. Пюльман А., Пюльман Б. От квантовой химии к квантовой биохимии // В кн.: Горизонты биохимии, Мцсква: Мир, 1964. – С. 420-442.
49. Розенфельд Л. Квантовая электродинамика // В кн.: Нильс Бор и развитие физики. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1958. – С. 96-128.
50. Гейзенберг В. Физические принципы квантовой теории. – Москва Ленинград: Гостехиздат, 1932. – 146 с.
51. Ликок С. Очерки обо всем. – В кн.: Юмористические рассказы. – Москва Ленинград: Госхудлитиздат, 1962. – С.223-243
52. Бор Н., Розенфельд Л. К вопросу об измеримости электромагнитного поля // В кн.: Бор Н. Избранные труды в двух томах, т. II. – Москва: Наука, 1971. – С. 120-162.

53. Бор Н., Розенфельд Л. Измерения поля и заряда в квантовой электродинамике // Там же, С. 434-444.
54. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. – Москва: Наука, 1980. – 704 с.
55. Бор Н. Дискуссии с Эйнштейном о проблемах теории познания в атомной физике // В кн.: Атомная физика и человеческое познание. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1961. – С. 51-94.
56. Александров А. Д. Владимир Александрович Фок // В кн.: Александров А. Д. Проблемы науки и позиция ученого. – Ленинград: Наука, 1988. – С. 489-496.
57. Jacobsen A. S. Léon Rosenfeld's Marxist defense of complementarity // Historical Studies in the Physical and Biological Sciences. – 2007. – V. 37, Supplement. – P. 3–34.
58. Вакарчук І. О. Квантова механіка. – Львів: Вид. ЛНУ, 2004. – 784 с.
59. Aharonov Y., Rohrlich D. Quantum Paradoxes. Quantum Theory for the Perplexed. – Weinheim: WILEY-VCH Verlag, 2005. – 289 p.
60. Салам А. Унификация сил. – В кн.: Фундаментальная структура материи. – Москва: Мир, 1984. – С. 173-203.
61. Мур Р. Нильс Бор – человек и ученый. – Москва: Мир, 1969. – 471 с.
62. Литлвуд Дж. Математическая смесь. – Москва: Физматлит, 1962. – 152 с.
63. Арнольд В. И. Что такое математика? – Москва: МЦНМО, 2002. – 104 с.
64. Бронштейн М. П. К вопросу о релятивистском обобщении принципа неопределенности // ДАН СССР. – 1934. Т. 1. – 388-390.
65. Weyl H. Gruppentheorie und Quantenmechanik. – Leipzig: S. Hirzel, 1928. – 288 S.
66. Dirac P. A. M. The quantum theory of the electron // Proc. Roy. Soc. London. – 1928. – V. A117. – P. 610-624.
67. Weinberg S. Feynman Rules for Any Spin. II. Massless Particles // Phys. Rev. – 1964. – V. 134B. – P. 882-896.
68. Степановский Ю.П. Малая группа Лоренца и уравнения свободных безмассовых полей с произвольными спинами // УФЖ. – 1964. – Т. IX, № 11. – С. 1165-1168.
69. Степановский Ю.П. О волновых уравнениях безмассовых полей // ТМФ. – 1981. – Т. 47, № 3. – С. 343-351.
70. Степановский Ю.П. От уравнений Максвелла до фазы Берри и сонолюминесценции: проблемы теории электромагнитного и других безмассовых полей // Электромагнитные явления. 1998. – Т. 1, № 2. – С.180-219.
71. Mignani R., Recami E., Baldo M. About a Dirac-like equation for the photon according to Ettore Majorana // Lett. al Nuovo Cim. – 1974. – V. 11, N.12 – P. 568-569.
72. Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. – Москва: Физматлит, 1958. – 180 с.
73. Бронштейн М. П. Квантование гравитационных волн // ЖЭТФ. – 1936. – Т. 6, вып. 3. – С. 195-236.

74. Шаша Л. Исчезновение Майораны // В кн.: Детектив и политика. Вып. 4. Москва: АПН, 1989. – С. 248-292.
75. Пенроуз Р. Тени разума: в поисках науки о сознании. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 688 с.
76. Заславский О. Б. Квантовая механика судьбы // Природа. – 2006. - № 11. – С. 55-63 (physics/0605001).
77. Stepanovsky Yu. P. Ettore Majorana and Matvei Bronstein (1906-1938): Men and Scientists. – In: P.G. Bergman, V. de Sabbata (eds). Advances in the Interplay Between Quantum and Gravity Physics. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – P. 435-458.
78. Wigner E. P. On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz group // Annals of Math. – 1939. – V. 40. – P. 149-204.
79. Kim Y. S., Wigner E. P. Covariant phase-space representation for localized light waves // Phys. Rev. – 1987. – V. A36. – P. 1293-1297.
80. Weinberg S., Witten E. Limits on massless particles // Phys. Lett. – 1980. – V. B 96. – P. 59-62.
81. Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. – Москва: Физматлит, 2003. – 512 с.
82. Bialynicki-Birula I. The Photon Wave Function // in: Coherence and Quantum Optics VII, Eds. Eberly J.H, Mandel L., Wolf E. – New York: Plenum, 1996. – P. 313-323.
83. Bialynicki-Birula I. Photon Wave Function // in: Progress in Optics, Vol. 36, Ed. Wolf E. – Amsterdam: Elsevier, 1996. – P. 245-290.
84. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика (4-е изд.). – Москва: Наука, 1981. – 432 с.
85. Андроникашвили Э. Л. Воспоминания о жидком гелии. – Тбилиси: Ганатлеба, 1980. – 328 с.
86. Румер Ю. Б. Спинорный анализ. – Москва Ленинград: ОНТИ, 1936. – 104 с.
87. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы Лоренца и их применения. – Москва: Физматлит, 1958. – 368 с.
88. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. – Москва: Физматлит, 1958. – 376 с.
89. Weinberg S. Feynman Rules for Any Spin // Phys. Rev. – 1964. – V. 133B. – P. 1318-1332.
90. Weinberg S. Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass // Phys. Rev. – 1964. – V. 135B. – P. 1049-1056.
91. Weinberg S. Photons and Gravitons in Perturbation Theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's Equations // Phys. Rev. – 1965. – V. 138B. – P. 988-1002.
92. Румер Ю. Б. Инвариантная формулировка теории гравитационного волнового поля // ЖЭТФ. – 1962. – Т.42, №2. – С. 577-583.
93. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. – Москва: Гостехтеориздат, 1956. – 152 с.

94. Румер Ю. Б. Рассказы Юрия Борисовича Румера // УФН. – 2001. – Т. 171, вып. 11. – С. 1137-1142.
95. Ньютон Т., Вигнер Е. Локализованные состояния элементарных систем // В кн.: Вигнер Е. Этюды о симметрии. – Москва: Мир, 1971. – С. 277-293.
96. Hegerfeldt G. C. Remark on causality and particle localization // Phys. Rev. – 1974. – V. D 10. – P. 3320-3321.
97. Ruijsenaars S. N. M., Hegerfeldt G. C. Remarks on causality, localization, and spreading of wave packets // Phys. Rev. – 1980. – V. D 22. – P. 377-384.
98. Hegerfeldt G. C. Violation of Causality in Relativistic Quantum Theory? // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 2395-2398.
99. Wigner E. P. Invariant Quantum Mechanical Equations of Motion // In: Theoretical Physics. – Vienna: International Atomic Energy Agency, 1963. – P. 59-82.
100. Александров П. С. Комбинаторная топология. – Москва-Ленинград: Гостехтеориздат, 1947. – 660 с.
101. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. – Москва: Мир, 1972. – 277 с.
102. Уинфри А.Т. Внезапная сердечная смерть: топологический аспект проблемы // В мире науки. – 1983. – №7. – С. 82-95.
103. Уинфри А. Т. Время по биологическим часам. – Москва: Мир, 1990. – 208 с.
104. Иванов Г. Г., Сыркин А. Л. Электрокардиография высокого разрешения. – Москва: Триада-Х, 2003. – 304 с.
105. DeSilva R. A. George Ralph Mines, Ventricular Fibrillation and the Discovery of the Vulnerable Period // Journal of the American College of Cardiology. – 1997. – V. 29, N. 6. – P. 1397-1402.
106. Абрагам А. Время вспять, или физик, физик, где ты был. – Москва: Наука, 1991. – 392 с.
107. <https://www.mi5.gov.uk/output/Page258.html>
108. [http://foia.fbi.gov/filelink.html?file=/peieris\\_rudolph\\_eugenia/peieris\\_rudolph\\_euge\\_part01.pdf](http://foia.fbi.gov/filelink.html?file=/peieris_rudolph_eugenia/peieris_rudolph_euge_part01.pdf)
109. Я. И. Френкель. Воспоминания, письма, документы. – Ленинград: Наука, 1986. – 493 с.
110. Горелик Г. Е. Параллели между перпендикулярами: Андрей Сахаров, Эдвард Теллер и Роберт Оппенгеймер // Знание – Сила. – 2001. – №9.
111. Фридкин В. М. Записки прикрепленного // Знамя. – 2005. - №6.
112. Тростников В. Н. Загадка Эйнштейна. – Москва: Знание, 1971. – 48 с.
113. Чиков В. М. Русские нелегалы в США. – Москва: Эксмо, 2003. – 446 с.
114. Пайерлс Р. Перелетная птица (воспоминания физика) // Природа. – 1993. - №12.
115. Knopp G. Top Spione. – München: Wilhelm Goldmann Verlag, 1997. – 464 S.
116. You Failed Your Math Test Comrade Einstein (edited by M. Shifman). – Singapore: World Scientific, 2005. – 268 p.
117. Эренфест – Иоффе. Научная переписка (1907-1933 гг.). – Ленинград: Наука, 1990. – 318 с.



118. Вайскопф В. Физика в двадцатом столетии. – Москва: Атомиздат, 1977. – 272 с.
119. Паскаль Блез, Мысли. – Москва: Издательство имени Сабашниковых, 1995. – 480 с.
120. Bialynicki-Birula I. Photon as a Quantum Particle // Acta Physica Polonica. – 2006. – V. 37B, N. 3. – P. 935-946.