16. Квантовая структура и энергия классических полей.

Люди полагают, что простейшее выражение, повидимому, и должно быть истинным, но надо сознаться, что мы так и не знаем, как же на самом деле распределена энергия в электромагнитном поле.

Р.Фейнман, [95].

Гравитационную энергию, вообще говоря, нельзя локализовать.

П.А.М.Дирак, [96].

Обычно фотоны (или гравитоны) получаются при квантовании классических полей, но естественнее поступить наоборот и, исходя из представлений о фотонах (или гравитонах), разобраться в том, что же такое классическое поле с точки зрения квантовой теории. Классическое электромагнитное поле создается классическими токами. Допустим, в вакууме, в котором не было свободных фотонов, возникли на некоторое время и затем исчезли классические токи. При этом вакуум заполнится фотонами, которые мы и будем воспринимать как классическое поле. Квантовомеханический вектор состояния, соответствующий классическому электромагнитному полю, обладает специфическими статистическими свойствами. Важную роль при описании этих свойств играет распределение Пуассона [97]. Распределение Пуассона появляется тогда, когда случайные события удовлетворяют следующим условиям (классический пример распределения Пуассона — это статистическое описание гибели прусских офицеров от удара копытом лошади [98]):

1. Статистическая независимость событий (испустит, или нет, классический ток фотон, не связано с тем, испустит,или нет, в данный момент другой классический ток другой фотон; ударит, или нет, лошадь копытом прусского офицера, не связано с тем, ударит, или нет, в данный момент другая лошадь другого прусского офицера).
2. Вероятность того, что событие произойдет за бесконечно малый промежуток времени, пропорциональна этому промежутку времени.
3. Вероятность того, что за бесконечно малый промежуток времени произойдет два события, равна нулю.

Тогда вероятность того, что за какое-то время T произойдет n событий,

$$P_n = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!}, \tag{140}$$

где $\bar{n}$ — среднее число событий за время T. Оказывается, что вероятность того, что классические токи породят n фотонов, описывается распределением Пуассона (это доказывается в квантовой электродинамике), т.е. соответствующий квантовомеханический вектор состояния имеет вид

$$|\psi\rangle = A_0|0\rangle + A_1|1\rangle + A_2|2\rangle + \dots \tag{141}$$

где

$$|A_n|^2 = P_n, \tag{142}$$

$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ — векторы вакуумного состояния, 1-фотонного, 2-фотонного и т.д. состояний (мы рассматриваем фотоны с определенными импульсами и поляризацией). Введем комплексное число α, такое, что

$$|\alpha|^2 = \bar{n}. \tag{143}$$

Тогда (141) можно записать следующим образом

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}(|0\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{1!}}|1\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}|2\rangle + \dots). \tag{144}$$

Определим операторы рождения и уничтожения a^+ и a,

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}|n\rangle, \tag{145}$$

$$aa^+ - a^+a = 1. \tag{146}$$

(Мы не доказали, что в (144) относительные фазы векторов $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \ldots$ таковы, что выполняются соотношения (145), это доказывается в квантовой электродинамике.) Вектор состояния $|\psi\rangle$ обладает замечательным свойством, он является собственным вектором оператора уничтожения с собственным значением α,

$$a|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle. \tag{147}$$

Состояние $|\psi\rangle$ называется когерентным состоянием и соответствует классическому электромагнитному полю [97]. Среднее число фотонов в этом состоянии, согласно (143) и (147),

$$\bar{n} = \langle\psi|a^+a|\psi\rangle. \tag{148}$$

Рассмотрим теперь квантованное поле, соответствующее произвольному безмассовому полю со спиральностью λ [67,99],

$$\Phi(x) = \int v_\lambda(\vec{p})(a_\lambda(\vec{p})e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t} + a^+_{-\lambda}(\vec{p})e^{-i\vec{p}\vec{x}+i\varepsilon t})d^3p, \tag{149}$$

$$a_\lambda(\vec{p})a^+_{\lambda'}(\vec{p}\,') - a^+_{\lambda'}(\vec{p}\,')a_\lambda(\vec{p}) = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{150}$$

Будем считать, что квантовомеханический вектор состояния рассматриваемого безмассового поля представляет собой когерентное состояние каждого оператора уничтожения,

$$a_\lambda(\vec{p})|\Psi\rangle = \alpha_\lambda(\vec{p})|\Psi\rangle. \tag{151}$$

Число частиц в интервале d^3p определяется теперь формулой

$$dn = |\alpha_\lambda(\vec{p})|^2 d^3p = \langle\Psi|a^+_\lambda(\vec{p})a_\lambda(\vec{p})|\Psi\rangle d^3p. \tag{152}$$

Под классическим полем будем понимать среднее значение

$$\psi(x) = \langle\Psi|\Phi(x)|\Psi\rangle. \tag{153}$$

Ясно, что классическое поле $\psi(x)$ удовлетворяет такому же уравнению (116), какому удовлетворяет волновая функция классического безмассового поля. Кроме того, видно, что классическое поле разлагается не только по положительным, но и по отрицательным частотам. Согласно (149), (151) и (153),

$$\psi(\vec{x},t) = \int v_\lambda(\vec{p})(\alpha_\lambda(\vec{p})e^{i\vec{p}\vec{x}-i\varepsilon t} + \alpha^+_{-\lambda}(\vec{p})e^{-i\vec{p}\vec{x}+i\varepsilon t})d^3p, \tag{154}$$

Вычисляя интеграл

$$I_N = \int \psi^+(\vec{x},t)G_N(\vec{x}-\vec{y})\psi(\vec{y},t)d^3x d^3y, \tag{155}$$

где

$$G_N(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{\varepsilon^{2(s_1+s_2)-N}}d^3p, \tag{156}$$

найдем, что

$$I_N = \int \varepsilon^{n-1}(|\alpha_\lambda(\vec{p})|^2 + |\alpha_{-\lambda}(\vec{p})|^2)d^3p. \tag{157}$$

Т.о., интеграл I_N представляет собой при $N=1$ — полное число квантов, образующих поле, при $N=2$ — среднюю энергию квантов, при $N=3$ — среднее значение квадрата энергии и т.д.. Формально выражение для энергии любого классического поля (т.е. когерентного состояния квантованного поля) $\varepsilon = I_2$, где I_2 определяется формулой (155), совпадает со средней энергией кванта соответствующего поля (135). Различаются эти случаи интерпретацией компонент у волновой функции ψ. В первом случае — это компоненты соответствующих классических полей, содержащие как положительные, так и отрицательные частоты, а также положительные и отрицательные спиральности, во втором же случае это компоненты положительно частотных волновых функций соответствующих квантов с определенной (положительной или отрицательной) спиральностью.

Согласно (156), функция G_2 обращается в дельта-функцию, а плотность энергии становится локальной, если $s_1 + s_2 = 1$. Это случай электромагнитного поля и поля нотофов. Во всех остальных случаях классических полей со спином отличным от нуля, плотность энергии билокальна.