

### ПОТЕНЦИАЛЫ – ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ, МАГНИТНЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ



Черкашин Юрий Семёнович,  
г. Москва

E-mail: cheryury@mtu-net.ru

*«Векторы  $E$  и  $H$  постепенно исчезают из современной записи физических законов: их вытесняют потенциалы  $A$  и  $j$ » Р. Фейнман.*

**Аннотация.** В статье найдены магнитные - векторные потенциалы типовых конфигураций электрических проводников с током, конфигурации их магнитных и электрических полей. Выделены их свойства вблизи и вдали от проводников, показано соподчинение полей потенциалов, электрических, магнитных и электромагнитных полей.

**Ключевые слова:** электродинамика, векторный потенциал.

Мы не будем касаться расчётов картины поля электрических зарядов, которая разработана достаточно подробно. Рассмотрим поля проводников с током.

Типовыми конфигурациями проводников с током являются: прямой отрезок провода, рамка, катушка, соленоид и тороид. Несмотря на простоту конфигураций, в литературе отсутствуют полные строгие решения картины полей во всей области пространства вокруг проводника. В известных решениях нет ответа, как выглядит потенциал вблизи проводника на расстояниях, сопоставимых с его размерами.

Толчком к настоящему исследованию послужило известное положение, что магнитное поле тороидальной катушки с током во внешнем объеме равно нулю, а электрическое присутствует, то есть не выполняются уравнения Максвелла.

Это потребовало определения векторного магнитного потенциала вне тороида. Вводя понятие вектора  $A$  мы накладывали ограничение (как пожелание), что: для постоянного поля  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  и для переменного поля

$\text{div} \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Однако, в уравнения для вычисления потенциала эти требования не заложены! При этом выяснилось, что принятое авторами многих книг по электродинамике допущение-предположение, что  $\text{div} \vec{A} = 0$  [1, с. 348.], [2, с. 627], [3, с. 221], [4, с. 277-279], [6, стр. 220] на практике не выполняется для многих простых конфигураций проводников!

Вероятно, в этой связи, вычисление значений электрического поля  $\mathbf{E}$  с помощью уравнений Максвелла [1, с. 380-381 и 2, с. 479] и через магнитный потенциал [1, ур-е 24-60; 2, ур-е 19.10] дают разные результаты.

Рассмотрим подробнее каждый случай.

## Отрезок прямого провода

Посмотрим вектор-потенциал отрезка тока во всех точках окружающего пространства.

Отметим вначале некоторую некорректность постановки этого вопроса. Токи всегда замкнуты и отрезков тока не бывает. Однако диполь Герца является хорошим приближением к отрезку проводника с током. С другой стороны, суммирование векторных потенциалов отрезков тока составляющих замкнутый проводник позволяет определить векторный потенциал проводника сложной формы.

Подобные решения проведены в [1, с. 341], [2, с. 649], [3, с. 207], [4, с. 263, 283].

Выберем цилиндрическую систему координат.

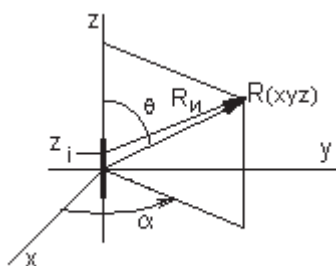


Рис.1 Цилиндрическая система координат

Вектор тока в этой системе имеет только одну проекцию вдоль оси  $Z$ .

Такую же составляющую будет иметь и вектор-потенциал  $\mathbf{A}$ : 
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} dV}{R_u}.$$

Элемент тока  $\vec{\delta} = d\vec{I} = Id\vec{l}$ .

Радиус-вектор интегрирования найдем, используя декартовы координаты.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad R_u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_i)^2}$$

Сам векторный потенциал будет:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\beta} \frac{Idz_i}{R_u} \quad A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{dz_i}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_i)^2}} \quad (1)$$

Перейдем к цилиндрическим координатам:  $x = R \cos \alpha$ ,  $y = R \sin \alpha$ ,  $z = z$

$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_i} \frac{dz_i}{\sqrt{R_0^2 + (z - z_i)^2}} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_i} \frac{dz_i}{R_0 \sqrt{1 + \frac{(z - z_i)^2}{R_0^2}}} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_i} \frac{-du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{-\mu I}{4\pi} \operatorname{arcsch} \frac{z - z_i}{R_0},$$

где  $x^2 + y^2 = R_0^2$  - расстояние точки наблюдения от оси провода;  
 $(z - z_i)/R_0 = u$ ,  $dz_i/R_0 = -du$ .

Известно что интеграл для провода бесконечной длины расходится, то есть векторный потенциал равен бесконечности [1, с. 349]. Мы определим векторный потенциал отрезка проводника длиной  $l$  (L).

Подставляем пределы.  $A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \left( \operatorname{arcsch} \frac{z + l/2}{R_0} - \operatorname{arcsch} \frac{z - l/2}{R_0} \right) \quad (2)$

Выразим размеры в относительных единицах - в длинах половины отрезка, например, высоту -  $z/(l/2) = \chi_z$ , расстояние до оси  $R_0/(l/2) = \chi_{R0}$ .

$$A_z = \frac{\mu I}{4\pi} \left( \operatorname{arcsch} \frac{2z/l + 1}{2R_0/l} - \operatorname{arcsch} \frac{2z/l - 1}{2R_0/l} \right) = \frac{\mu I}{4\pi} \left( \operatorname{arcsch} \frac{\chi_z + 1}{\chi_{R0}} - \operatorname{arcsch} \frac{\chi_z - 1}{\chi_{R0}} \right) \quad (3)$$

Получаем уравнения отличные как от  $A_z = \frac{li}{4\pi R}$  [1, с. 380], так и от

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln R_0 \quad [4, с. 283].$$

Составляющие того же потенциала записаны в сферических координатах

$$\dot{A}_R = \frac{\dot{C} \cos \theta e^{-jkR}}{R}, \quad \dot{A}_\theta = \frac{\dot{C} \sin \theta e^{-jkR}}{R}, \quad \dot{A}_\alpha = 0 \quad [1, с. 380]$$

Оператор дивергенции в сферических координатах:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}$$

Найдём дивергенцию вектора **A**, которая по принятым предположениям

должна быть равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\dot{C} \cos \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (\operatorname{Re}^{-jkR}) + \frac{\dot{C} e^{-jkR}}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) = \frac{\dot{C} \cos \theta e^{-jkR}}{R^2} [(1 - jkR) + 2] \neq 0$$

Фактически она не равна нулю.

Найдём дивергенцию вектора  $\vec{A}$ , найденного нами для отрезка провода.

Оператор дивергенции в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \text{производная } (Arshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

Получим: 
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\mu I}{4\pi R_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z+l/2}{R_0}\right)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{z-l/2}{R_0}\right)^2 + 1}} \right) \neq 0. \quad (4)$$

Тоже не равна нулю. Запишем её в принятых выше относительных величинах:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\mu I}{2\pi l} \left( \frac{1}{\sqrt{(2z/l+1)^2 + (2R_0/l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2z/l-1)^2 + (2R_0/l)^2}} \right) \quad (5)$$

При больших по сравнению с длиной отрезка  $l$  значениях  $z$  и/или  $R_0$ , дивергенция будет равна нулю, и только там можно будет доказать волновой характер решений уравнений поля.

При  $z=0$ , то есть на плоскости  $(x,y)$  дивергенция при любом  $R_0$  равна нулю.

Определим теперь индукцию поля  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ . Вектор  $\vec{A}$  имеет только одну  $Z$  составляющую, не зависящую от угла  $\alpha$ . Оператор ротора в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad \operatorname{rot}_r \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_z \vec{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right]$$

Применяя к (2) получим:

$$\operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu I}{4\pi} \left( \frac{\frac{z+l/2}{R_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{z+l/2}{R_0}\right)^2 + 1}} - \frac{\frac{z-l/2}{R_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{z-l/2}{R_0}\right)^2 + 1}} \right) \quad \text{Вынося и сокращая } R_0,$$

найдем: 
$$B_\alpha = \text{rot}_\alpha \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu I}{4\pi R_0} \left( \frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2 + R_0^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2 + R_0^2}} \right)$$

Или в относительных единицах:

$$B_\alpha = \text{rot}_\alpha \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu I}{4\pi R_0} \left( \frac{2z/l+1}{\sqrt{(2z/l+1)^2 + (2R_0/l)^2}} - \frac{2z/l-1}{\sqrt{(2z/l-1)^2 + (2R_0/l)^2}} \right) \quad (6)$$

$$B_\alpha = \text{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{\mu I}{2\pi R_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R_0}{l}\right)^2}} \quad (7)$$

При  $z=0$  (в плоскости XY) получается:

При малом по сравнению с длиной отрезка расстоянии  $R_0$  получаем выражение, совпадающее с индукцией, полученной с применением закона полного тока.

Электрическое поле найдем из  $\vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . Если статических зарядов нет и ток переменный, с учётом (3) получим:

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial i(t)}{\partial t} \left( \text{arcsch} \frac{\chi_z+1}{\chi_{R0}} - \text{arcsch} \frac{\chi_z-1}{\chi_{R0}} \right) \quad (8)$$

Вектор напряженности электрического поля направлен вдоль Z.

Уравнение потенциала (2) можно записать также в сферических координатах.

Например, 
$$A_R = \frac{\mu I \cos \theta}{4\pi} \left( \text{arcsch} \left( \text{ctg} \theta + \frac{1}{\chi_R \sin \theta} \right) - \text{arcsch} \left( \text{ctg} \theta - \frac{1}{\chi_R \sin \theta} \right) \right)$$

$$A_\theta = \frac{-\mu I \sin \theta}{4\pi} \left( \text{arcsch} \left( \text{ctg} \theta + \frac{1}{\chi_R \sin \theta} \right) - \text{arcsch} \left( \text{ctg} \theta - \frac{1}{\chi_R \sin \theta} \right) \right)$$

От угла альфа потенциал не зависит.



Рис. 2 График распределения потенциала вокруг отрезка провода с током при перемещении вдоль оси отрезка

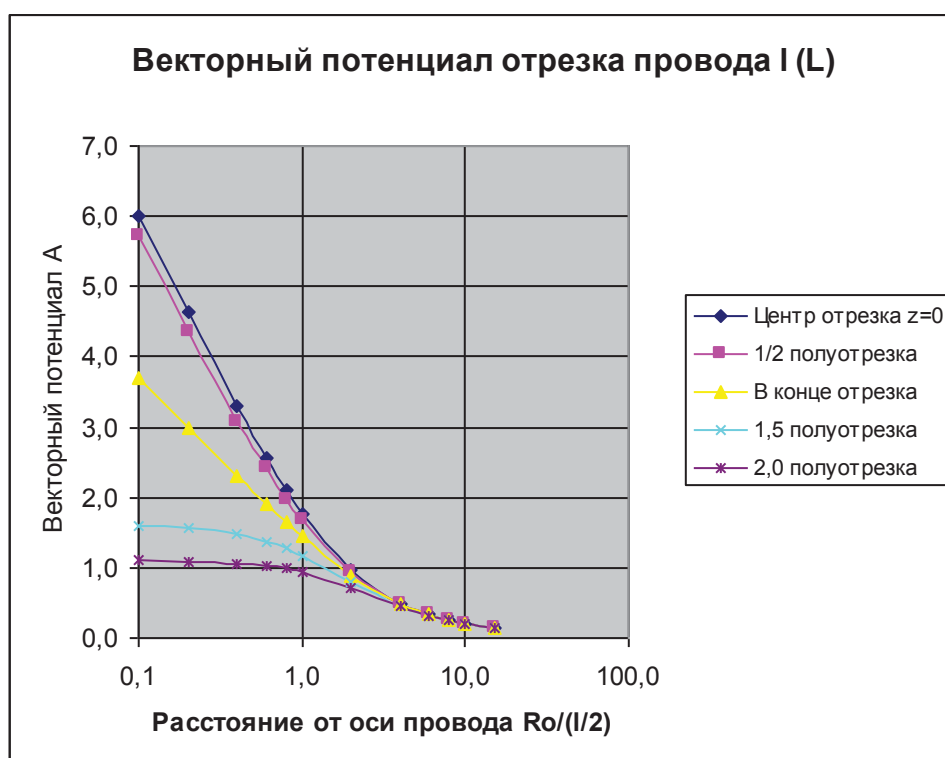


Рис. 3 График распределения потенциала вокруг отрезка провода с током при перемещении перпендикулярно отрезку

## Векторный потенциал кольцевого тока

Попытка найти векторный потенциал кольца сделана в [4, с. 287]. Потенциал найден только вдали от кольца методом аналогии с электростатическим потенциалом.

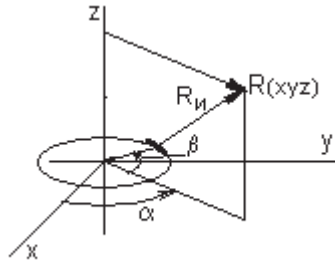


Рис. 4 Ортогональная система координат

Выберем ортогональную цилиндрическую систему координат. [Решать в координатах **XYZ** неудобно: решения каждой проекции имеет сложный вид и нахождение полного вектора оказывается трудным.]. Вектор тока в этой системе имеет только одну альфовую проекцию. Такую же составляющую должен иметь и вектор **A**. 
$$d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\beta} \frac{d\vec{I}}{R_u}$$
 Элемент интегрирования  $d\vec{I} = rd\beta\vec{\alpha}^0$ . Его проекции на

направления  $R^0$  и на  $\alpha^0$ :  $dl_R = rd\beta \sin \beta$ ,  $dl_\alpha = rd\beta \cos \beta$ .

Однако, радиус-вектор интегрирования привычнее найти, используя декартовы координаты. Его проекции:

$$R_{ix} = x - r \cos(\alpha + \beta), \quad R_{iy} = y - r \sin(\alpha + \beta), \quad R_{iz} = z.$$

$$R_u = \sqrt{x^2 - 2rx \cos(\alpha + \beta) + r^2 \cos^2(\alpha + \beta) + y^2 - 2ry \sin(\alpha + \beta) + r^2 \sin^2(\alpha + \beta) + z^2},$$

$$R_u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + r^2 - 2r(x \cos(\alpha + \beta) + y \sin(\alpha + \beta))}.$$

Вернёмся к цилиндрическим координатам:  $x = R \cos \alpha$ ,  $y = R \sin \alpha$ ,  $z = z$ .

$$R_u = \sqrt{R^2 + z^2 + r^2 - 2rR(\cos \alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta))}$$

$$= \sqrt{R^2 + z^2 + r^2 - 2rR \cos \beta}.$$

Получилась компактная запись. Выразим подкоренное выражение в относительных единицах - вынесем  $r$  за знак радикала.

$$R_u = r \sqrt{\frac{R^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} + 1 - 2 \frac{R}{r} \cos \beta} \quad , \quad \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\beta} \frac{I r d\beta \vec{\alpha}_0}{R_u} \quad . \quad dl_{\alpha} = r d\beta \cos \beta \quad .$$

$$A_{\alpha} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\beta} \frac{I \cdot r \cos \beta d\beta}{R_u} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 + 1 - 2 \frac{R}{r} \cos \beta}} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} \quad ,$$

где  $a = \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 + 1$  ,  $b = 2 \frac{R}{r}$  ;

Сначала преобразуем этот интеграл:

$$\begin{aligned} A_{\alpha} &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} = \frac{\mu I}{-b4\pi} \int_{\beta} \frac{ad\beta - b \cos \beta d\beta - ad\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} = \frac{-\mu I}{b4\pi} \int_{\beta} \frac{ad\beta - b \cos \beta d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} - \\ &- \frac{-\mu I}{4\pi} \frac{a}{b} \int \frac{d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{a}{b} \int \frac{d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} - \frac{\mu I}{4\pi b} \int \sqrt{a - b \cos \beta} d\beta \end{aligned}$$

Он свёлся к двум интегралам, напоминающим об эллиптической форме.

Далее воспользуемся тригонометрической формулой:

$$\cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad . \quad \text{Получим:}$$

$$A_{\alpha} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{a}{b} \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{a - b \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)}} - \frac{\mu I}{4\pi b} \int_0^{2\pi} \sqrt{a - b + 2b \sin^2 \frac{\beta}{2}} d\beta$$

Это эллиптические интегралы, однако, перед  $\sin^2 x$  стоит знак плюс.

Сделаем замену переменных:

$$\frac{\beta}{2} = \psi \pm \frac{\pi}{2} \quad , \quad \psi = \left( \frac{\beta}{2} \pm \frac{\pi}{2} \right) \quad , \quad d\beta = 2d\psi \quad , \quad \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \sin^2 \psi$$

Пределы  $\beta=0$ ,  $\psi=\pi/2$ ;  $\beta=2\pi$ ,  $\beta/2=\pi$ ;  $\psi=-\pi/2$ .  $\left\{ \cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} \pm \alpha \right) \right\}$

$$A_{\alpha} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{a - b \cos \beta}} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{a}{b} \int_{\psi} \frac{2d\psi}{\sqrt{a - b + 2b(1 - \sin^2 \psi)}} - \frac{\mu I}{4\pi} \frac{2}{b} \int_{\psi} \sqrt{a + b - 2b \sin^2 \psi} d\psi$$

Дальше вынесем из под корня (а+б) , получим:

$$A_{\alpha} = \frac{\mu I}{4\pi} \left( \frac{a}{b} \frac{2}{\sqrt{a+b}} \int_{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} - \frac{2\sqrt{a+b}}{b} \int_{\psi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi \right)$$

Имеем два стандартных эллиптических интеграла.



Обозначим:  $\frac{R}{r} = \chi_R$ ,  $\frac{z}{r} = \chi_z$ , тогда  $a = (\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2)$ ,  $b = 2\chi_R$ ,

и  $a + b = (\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2 + 2\chi_R) = ((\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2)$ ;  $k^2 = \frac{2b}{a+b} = \frac{4\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}$ ;

$$k = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} = 2\sqrt{\frac{\chi_R}{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}}; \quad \frac{2\sqrt{a+b}}{b} = \frac{\sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}}{\chi_R} = k_E;$$

$$\frac{2a}{b\sqrt{a+b}} = \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2)}{\chi_R \sqrt{(\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2 + 2\chi_R)}} = \frac{(\chi_R^2 + 1 + \chi_z^2)}{\chi_R \sqrt{(\chi_R + 1)^2 + \chi_z^2}} = k_K;$$

Окончательно имеем

$$A_\alpha = \frac{\mu I}{2\pi} \left( k_K \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} - k_E \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi \right) = \frac{\mu I}{2\pi} (k_K K - k_E E), \quad \text{где при}$$

принятых обозначениях  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = K$ , или  $K=F$ , и  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \cdot dx = E$ , то

есть полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Элемент тока  $dl$  имеет составляющую вдоль радиуса  $dl_R = rd\beta \sin \beta$ .  
Проекция вектор-потенциала на направление R.

$$A_R = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\beta} \frac{\sin \beta d\beta}{\sqrt{R^2/r^2 + z^2/r^2 + 1 - 2R/r \cos \beta}} = 0$$

Это интеграл табличный. Его значение при изменении  $\beta$  в пределах от 0 до  $2\pi$  равно 0. То есть вторая составляющая потенциала, как и предполагалось, равна 0.

На графиках представлены примеры распределения вектор-потенциала в пространстве в функции от относительных расстояний от центра кольца и от расстояния над плоскостью кольца.

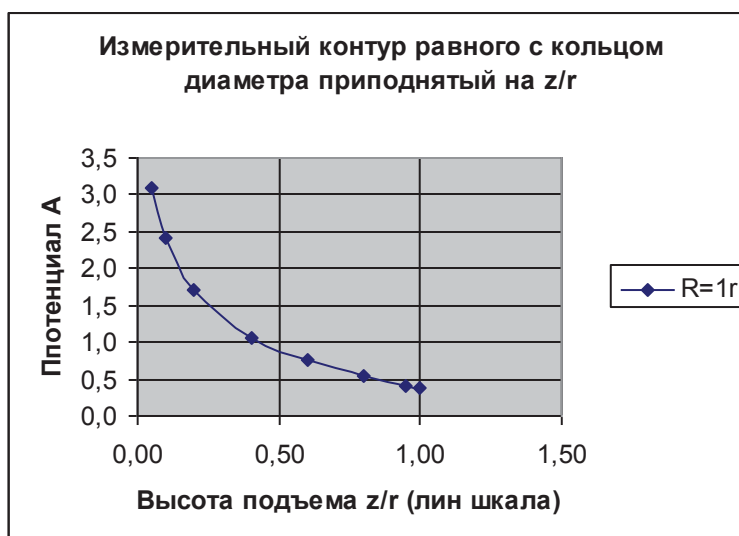
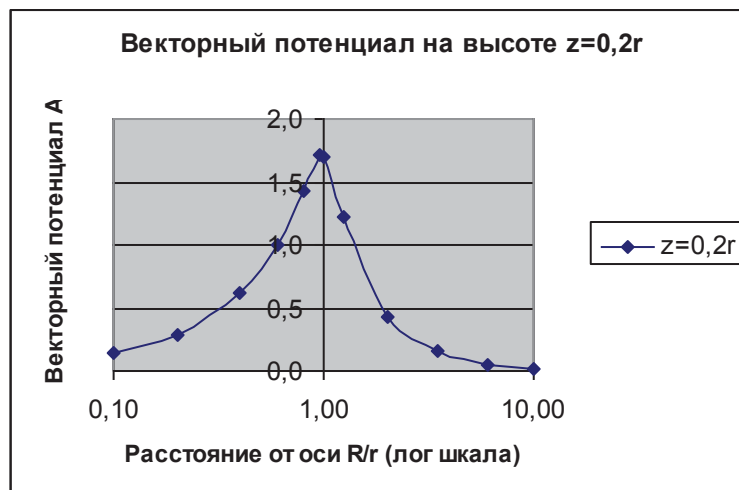
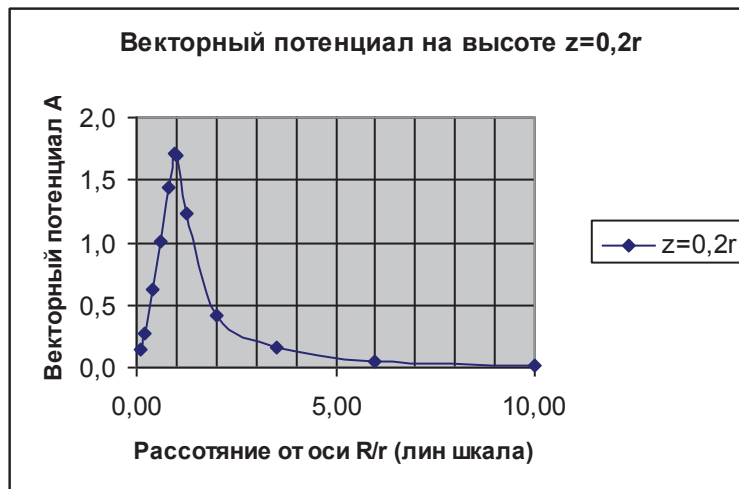


Рис. 5-7 Графики распределения векторного потенциала вокруг кольца с током

Полученные решения дают картину полей независящую от абсолютных геометрических размеров, а только от относительных. Это означает что, например, при токе 5 А поле будет одинаковым у кольца диаметром 10 см и кольца диаметром 1 м, если мы его будем измерять его на расстоянии 20 см и 2 м соответственно. Другими словами, имеет место одно решение для всех колец с током. (конечно имеется в виду, что размеры сечения кольца малы по сравнению с его радиусом)

Векторы электрического и магнитного полей через потенциалы  $\vec{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$   $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  . Если статических зарядов нет и ток переменный синусоидальный  $i = I_m \sin \omega t$  , то справедливо следующее:

$E(t) = \frac{\mu}{2\pi} (k_K K - k_E E) \omega I_m \cos \omega t$  ,  $U_{1m} = \oint \vec{E} d\vec{l} = \mu \cdot R \cdot (k_K K - k_E E) \cdot I_m \omega$  , с другой стороны, из электротехники известно  $U_{1m} = \omega M \cdot I_m$  . Для измерительного витка, расположенного над кольцом с током:  $M = \mu \cdot r \cdot (k_K K - k_E E)$  . Похожее решение приведено в [1, с. 359].

По справочнику: «Расчёт индуктивностей» [8, с. 186.] :  $M = \frac{\mu}{4\pi} r F$  .

Получается, что  $M = \frac{\mu}{4\pi} r F = \mu \cdot r \cdot (k_K K - k_E E)$  , то есть  $\frac{F}{4\pi} = (k_K K - k_E E)$  .

Коэффициент  $F = 4\pi (k_K K - k_E E)$  . Сравнение значений F, приведенных в таблице справочника и вычисленных по нашей формуле в широком диапазоне изменений размеров (более 10 раз) совпадает с точностью  $\pm 1\%$ .

## Векторный потенциал соленоида и тора

Сложенные друг на друга «в стопку» кольца образуют соленоид.

Поле соленоида будет равно интегралу от суммы потенциалов колец.

На этом пути возникают серьёзные математические трудности - требуется дифференцирование эллиптических интегралов.

Воспользуемся готовыми приближёнными решениями поля векторного

потенциала соленоида  $A = \frac{\mu_0 n I r^2}{2} \frac{1}{R_0^2}$ . Поле вектора магнитной индукции вне соленоида  $B = \text{rot} A = 0$ . *«Итак, магнитное поле вне очень длинного соленоида действительно равно нулю, хотя векторный потенциал нулю не равен»* [4, с. 285].

Очень длинный соленоид не совсем реальная конструкция. Такая же картина полей имеется вокруг вполне реальной тороидальной катушки. Вне катушки магнитное поле равно нулю, что легко проверяется применением закона полного тока. Однако электрическое поле не равно нулю, иначе в витках наружной (вторичной) обмотки отсутствовало бы напряжение  $u = \oint \vec{E} d\vec{l}$ .

Уравнения Максвелла  $\text{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$  здесь не выполняется, хотя выполняется

уравнение  $E = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$ .

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме оперируют с векторами полей в одной точке. А одного из векторов (например,  $B$ ) может в данной точке вообще не быть, или поле может оказаться полем от другого источника.

В тех конфигурациях, в тех областях пространства, где возникают условия для выполнения  $\text{div} \vec{A} = 0$ , уравнения поля  $A$ ,  $E$ ,  $B$ , приобретают вид волновых уравнений – уравнений распространения поля. Дифференциальные уравнения хороши для изучения полей излучения или полей в волноводах.

Хорошее практическое значение имеют Уравнения Максвелла в интегральной форме, но для их применения требуется симметрия расположения зарядов или токов, тогда они дают возможность определить параметры поля на линии. Только уравнения векторных потенциалов позволяют определить полную картину всех полей.

Потенциалы играют первичную роль. Потенциалы являются источниками электрического, магнитного и электромагнитного поля. С возникновением или исчезновением источника: заряда или тока в некоторой точке пространства от этой точки начинает распространяться изменение потенциала. Очевидно, что это

продвижение происходит со скоростью света. Поля ***E*** и ***H*** являются проявлением продвижения распространения потенциалов. Поля представляют собой компактную форму записи свойств потенциала возле точки наблюдения. *«Выражение «реальное поле» реального смысла не имеет»... «реальное поле – это математическая функция, которая используется нами, чтобы избежать представления о дальнодействии»* [5, с. 15]. В этой форме мысль выражена излишне формально. Когда мы говорим о распространении потенциала, невольно присутствует представление о запаздывающем дальнодействии, физически оно есть (жаль, что мы не знаем «тайных» нитей этих связей).

Из знания о структуре поля нельзя сделать вывод о структуре потенциала. Все его изменения заложены в источнике потенциала – зарядах и токах и никак не могут быть спрогнозированы по записи полей.

Самый верхний ранг (уровень) уравнений поля есть уравнения потенциалов. Уравнения поля следуют из них. Ниже идут уравнения цепей и так далее. Записанная Р. Фейнманом таблица формул [5, с. 149] должна иметь другой вид.

## Перечень формул Р.Фейнмана Уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

### И их решения

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(t - r_{12}/c)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} dV_2$$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \int \frac{\mu_0 \cdot j(t - r_{12}/c)}{4\pi \cdot r_{12}} dV_2$$

## Изменённый перечень формул Потенциалы электродинамики

$$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{\rho(t - r_{12}/c)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} dV_2$$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \int \frac{\mu_0 \cdot j(t - r_{12}/c)}{4\pi \cdot r_{12}} dV_2$$

### И их решения

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Обратим внимание, что если взять ротор от двух уравнений в середине таблицы, то должны получиться два основных уравнения Максвелла:  $\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

и  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ .

Берём ротор  $\vec{E}$  и применяя второе уравнение из пары  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  найдем:

$$\text{rot}\vec{E} = -\text{rotgrad}\phi - \text{rot} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0 - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{A} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Одно Уравнение Максвелла

получилось!

Теперь другое. Взяв ротор от второго уравнения в середине таблицы  $\text{rot}\vec{B} = \text{rotrot}\vec{A}$ , и воспользовавшись векторным соотношением  $\text{rotrot}\vec{A} = \text{graddiv}\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$  для случая вдали, где  $\text{div}\vec{A} = 0$ , будем иметь

$$\text{rot}\vec{B} = -\nabla^2\vec{A} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0\vec{j}, \quad [5, \text{с. 92}] \left[ \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon_0} = \mu_0 \right].$$

В формулу для вычисления  $\vec{A}$  не вошли токи смещения. Полностью уравнение Максвелла не получается.

## Литература:

1. К.А. Круг. Под ред. Основы электротехники. ГЭИ. 1952.
2. Л.А. Бессонов. Теоретические основы электротехники. Высшая школа. 1964.
3. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. Наука. 1966.
4. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 5. Мир. 1966.
5. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 6. Мир. 1966. (эпиграф: стр. 26)
6. Л.Д. Ландау и Е.М. Лившиц. Механика. Электродинамика. Наука. 1969.
7. Е.А. Губарев. Электродинамика ориентируемой точки. Новый центр. 2013.
8. П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин, Расчет индуктивностей, Энергия, 1970.