Юрию Петровичу Степановскому о выводе потенциалов Лиенара Вихерта в лекциях Фейнмана

А.Ю.Дроздов

9 ноября 2024 г.

1 Постановка задачи

Добрый день Юрий Петрович

Вы пишете: пожалуйста, разберитесь сами с Ферми и Фейнманом, а потом мне расскажете.

Хорошо,

2 Предыстория: проблема 4/3

началось все с того, что я начал разбирать решение задачу номер 689 из Батыгина Топтыгина (издание 1962 года)

Найти силу $\vec{F}$, с которой заряженная симметричная частица действует сама на себя (сила самодействия) при ускоренном поступательном движении с малой скоростью $v << c$. Запаздывание и лоренцево сокращение не учитывать. Указание. Вычислить равнодействующую сил, приложенных к малым элементам de заряда частицы, воспользовавшись лиенар-вихертовым выражением напряжённости поля (XII. 25)

Под этим выражением Батыгин Топтыгин приводят выражение

$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = e\frac{\left(1-\beta^2\right)\left(\vec{n}-\vec{v}/c\right)}{\left(1-\vec{n}\cdot\vec{v}/c\right)^3 R^2} + e\frac{\vec{n}\times\left[\left(\vec{n}-\vec{v}/c\right)\times\vec{a}\right]}{c^2\left(1-\vec{n}\cdot\vec{v}/c\right)^3 R}$

$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ $\beta = \frac{v}{c}$

на странице 433 Батыгин Топтыгин интегрируют

$d\vec{F} = -de_2 d\vec{E} = \frac{de_1 de_2}{c^2 r}\left[\vec{a} - \vec{r}/r\left(\vec{r}/r\cdot\vec{a}\right)\right]$

и приводят результат

$m = \frac{1}{c^2}\frac{4}{3}\int\frac{de_1\, de_2}{r}$ (сгс)

то что электродинамический подход решения задачи об электромагнитной массе, основанный на применении потенциалов Лиенара-Вихерта приводит к противоречию, побудило меня обратиться к выводу потенциалов Лиенара-Вихерта

3 Критика вывода Фейнмана потенциалов Лиенара Вихерта со стороны Меандра

надеюсь, параграф 5 главы 21 Фейнмана [1] у Вас есть.

Здесь я считаю нужным привести критику этого параграфа данную Меандром (Сергей Анатольевич Цикра из Донецка) [2]

Фейнман: Толщина каждого ΔV_i ω_i, а объем ωa^2. Поэтому каждый элемент объема, накладывающийся на распределение заряда, содержит в себе заряд $\omega a^2\rho$, где ρ - плотность заряда внутри кубика (мы считаем ее однородной).

Цикра: Это верно, когда речь идет о РЕАЛЬНОМ распределении заряда, а не о видимом с запаздыванием. Для запаздывающих слоев такой же остается только площадь поперечного сечения a^2, но видимая ширина слоев и плотность изменяются (обратно пропорционально, в результате чего количество заряда в каждом слое не изменяется).

Фейнман: Когда расстояние от заряда до точки (1) велико, то можно все r_i в знаменателях положить равным некоторому среднему значению, скажем, взятому с с учетом запаздывания положению r' центра кубика.

Цикра: Это тоже пропущу без принципиальных возражений, хотя более правильным было бы учитывать запаздывающие расстояния до центра каждого слоя. Математически в этом нет никакой проблемы, если известен закон преобразования реального расстояния в запаздывающее, который подразумевается для запаздывающего расстояния до центра всего кубика.

Фейнман: Сумма (21.30) превращается в

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho\omega a^2}{r'}$$

ΔV_N - тот последний элемент ΔV_i, который еще накладывается на распределение зарядов (см.фиг.21.7,д) Сумма тем самым равна

$$N\frac{\rho\omega a^2}{r'}=\frac{\rho a^3}{r'}\left(\frac{N\omega}{a}\right)$$

.

Цикра: Это тоже принимаю, с ОБЯЗАТЕЛЬНЫМ замечанием, что дробь в скобках тождественно равна =1. Число слоев N исходно определялось из длины и толщины слоя ω (или наоборот - толщина слоя из длины a и количества слоев N), поэтому в ЭТИХ скобках ПРИНЦИПИАЛЬНО не может получиться ничего кроме 1.

Фейнман: Но ρa^3 - просто общий заряд, а $N\omega$ - длина b, показанная на фиг.21.7,д. Получается

$$\varphi\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}\left(\frac{b}{a}\right)$$

. (21.31)

Цикра: НЕТ, НЕ ПОЛУЧАЕТСЯ ! Во-первых, потому что $N\omega$ это реальная длина грани кубика, а видимо-запаздывающая длина b получится с видимо-запаздывающей шириной слоев (при одинаковом их количестве)

$N\omega'=b$.

Если же кто-то настаивает на одинаковой ширине слоев (например измеряемой по неподвижным маркерам), то должно быть ДРУГОЕ их количество N', с тем же соотношением

$N'\omega=b$.

Во-вторых, применение этой видимо-запаздывающей длины b ТРЕБУЕТ вернуться назад и применить во всем предыдущем суммо-интегрировании и видимо-запаздывающую ширину слоев и видимо-запаздывающую плотность, то есть выражения

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\rho'\omega' a^2}{r'}$$

,

$$N\frac{\rho'\omega' a^2}{r'}=\frac{\rho' a^3}{r'}\left(\frac{N\omega'}{a}\right)$$

.

Именно теперь выражение в скобках равно коэффициенту пропорциональности (b/a) преобразования реального объема куба в видимо-запаздывающий объем, который будучи помноженным на видимо-запаздывающую плотность (определяемую в обратной пропорции), дает реальную величину заряда, в итоге получается вот ЭТО, без каких-то лиенар-вихертоватостей:

$$\varphi\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}$$

. (21.31')

Это доказывает, что в "выводе"Фейнманом выражения потенциалов Лиенара-Вихерта содержится показанная мной ошибка (в самом конце), и еще раз подтверждает, что знаменитый знаменатель в выражении потенциалов Лиенара-Вихерта не имеет физического смысла (в рамках теорий, использующих принцип независимости скорости возмущения (света) от движения источника).

Цикра: Для того, чтобы покончить с разбором полетов творческой мысли Фейнмана, обращу внимание и на последующий его вираж:

Фейнман: Наконец, поскольку "размер"а заряда не вошел в окончательный итог,то тот результат получится, если результат стянется до любых размеров, вплоть до точки.

Цикра: Фейнман здесь еще раз мягко говоря слукавил, потому что размер "a"ДОЛЖЕН БЫЛ войти в окончательный итог - в неявном виде при интегрировании плотности ρ в общую величину заряда (а в случае применения видимого размера b интегрировать нужно было видимую плотность ρ'). Фокусы с плотностью Фейнман мог показывать ТОЛЬКО с распределенным зарядом, а на точечный заряд они НИКАК не влияют, потому что у него НЕТ размеров, объема и плотности - НЕЧЕМУ преобразовываться, кроме запаздывающего расстояния.

4 Критика вывода Фейнмана потенциалов Лиенара Вихерта со стороны Ерохина [3]

Тем не менее, в связи с решением Льенара-Вихерта, приведенным у Фейнмана, возникает несколько вопросов. Во-первых, в этом решении потенциал движущегося заряда меняется за счет $\frac{\rho}{r'}\int dV$, то есть, по сути, за счет изменения эффективного заряда для данного угла α : $q_{eff}(\alpha) \ = q_0/(1 - v \cdot cos\alpha/c)$, где α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$. При этом должно бы обеспечиваться сохранение заряда, однако он не сохраняется. Причина этому на первый взгляд проста и понятна, и после преобразования потенциалов Льенара-Вихерта в классические потенциалы заряд сохраняться будет. Но при внимательном рассмотрении окажется, что не все так гладко. Во-вторых, интегрирование по объему никак и ничем не связано со временем, но в решении Льенара-Вихерта интегрирование растягивается во времени на период Δt, за который заряд успевает пройти расстояние $v\Delta t$, в результате чего и изменяется потенциал. Как выразился Фейнман, поправочный коэффициент $(1 \ - \ \vec{v}\vec{r}/c)^{-1}$ появился потому, что "в то время, как наш интеграл проносится над зарядом, сам заряд движется". Звучит это почти убедительно, но ведь интегрировали-то мы по объему, а не по времени. И как долго должен наш интеграл проноситься над зарядом? Почему именно столько? Интегрирование по объему "растянуто"во времени в соответствии с отношением v/c. Почему именно так? Ни физически, ни математически эти действия ничем не оправданы, но иначе необходимый результат не получился бы.

Очевидно, что "мгновенное"интегрирование приведет к обычному статическому потенциалу $\phi_0 \ = \ q/4\pi\epsilon_0 r'$. Понятие "мгновенная скорость "скорость в точке"– условно; чтобы описать движение и эффекты, с ним связанные, необходимо брать некоторую разность координат и промежуток времени - сколь угодно малые, но всегда конечные, не нулевые. И чтобы получить потенциалы движущегося заряда, необходимо проследить его состояние в течение некоторого промежутка времени. В выводе Льенара-Вихерта так и делается, но никакого обоснования этим действиям не предлагается. Ошибка здесь гораздо глубже, чем кажется на первый взгляд. Ниже электродинамика продемонстрирует нам, что мы вообще некорректно подходим к дифференцированию физических величин в подобных случаях. Далее: если уж элементы заряда «растягиваются» вдоль вектора скорости в $(1 \ - \ v/c)$ раз, то по какой причине утолщаются (растягиваются) сами нарезанные слои? Утверждение $N\omega \ = \ b$ ошибочно, между этими слоями образуются промежутки, т.е. попросту уменьшается плотность заряда. Заполнять промежутки (уменьшение плотности) зарядом нет никаких оснований, $N\omega \ = \ a$, и эффективный заряд не увеличивается. Во второй части в этот вопрос будет внесена полная ясность. И еще один момент: при интегрировании последовательность суммирования не должна влиять на результат, тогда как в данном случае интегрирование должно проводиться именно вдоль радиальной компоненты вектора скорости и никак не иначе, - в противном случае результат будет другим.

Подведем итоги: 1) Интегрирование по объему можно проводить в любом порядке, т.е. результат не должен зависеть от очередности суммирования, но в данном случае последовательность суммирования берется именно вдоль радиальной компоненты вектора скорости. Если суммирование проводить в обратном порядке, то результат будет иным: А при интегрировании «поперек» радиуса потенциал движущегося заряда будет равен статическому. 2) Интегрирование по объему никак не связано со временем. Почему же здесь интегрирование растянуто во времени, и почему именно на такой период времени? 3) Интегрирование по рис.4-2 вообще делается неправильно: если уж мы интегрируем по объему, но растягиваем этот процесс во времени, то у нас должна соответственно меняться плотность заряда, и конечный потенциал будет равен статическому. Несмотря на то, что вывод потенциалов Льенара-Вихерта не выглядят сколько-нибудь убедительным, результат представляется верным. Следующие из этих потенциалов решения, несмотря на свой приближенный характер, приводят в точности к тем же результатам, что и эмпирическая электродинамика Максвелла, с той только разницей, что кроме численных результатов дают также ясное представление о механизме описываемых явлений.

§ 1-4а. К ВЫВОДУ ПОТЕНЦИАЛОВ ЛЬЕНАРА-ВИХЕРТА.

По всей вероятности Фейнман приводит оригинальный вывод Льенара или Вихерта (они вывели свои уравнения в 1898 и 1900 г.г. независимо друг от друга). Вывод этих уравнений из уравнений Максвелла вообще не может внушать доверия, не только потому, что уравнения Максвелла, как и всякие эмпирические уравнения, приближенны, но и потому, что сами эти уравнения по логике должны следовать из уравнений потенциала и поля зарядов, и в обратном случае имеем, по сути, вывод причины из следствия.

Приведенный выше вывод уравнения потенциалов Льенара-Вихерта достаточно противоречивый, и прозрачностью не отличается. Необходимость интегрирования элементов заряда в определенном порядке и ничем не оправданное растягивание интегрирования по объему во времени не придают убедительности выводу уравнения потенциалов. Столь громоздкий вывод не нужен, все проще.

При движении заряда изменяется не эффективная плотность заряда, как в выводе Фейнмана, а «плотность» потенциала изменяется в $1/(1 - vr\ /)$ раз за счет сокращения эффективного радиуса в точке P, т.е. просто за счет эффекта Доплера (рис.4-3). Заряд следует брать точечным.

Рис.4-3. Интервал между сигналами от движущегося источника, в исходной системе равный dt, в системе отсчета неподвижного приемника изменяется за счет эффекта Доплера, и равен $dt\ (1 - vr\ /c)$. Соответственно и прирост радиуса в системе отсчета неподвижного приемника, изменяется:

Таким образом, Ниже, при рассмотрении векторного потенциала немного уточним сказанное, здесь еще не вполне все верно.

5 Что я об этом думаю

Прежде всего Фейнман исходит из уравнения,

$$\varphi(1,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}dV_2$$

которое в свою очередь является решением волнового уравнения Даламбера.

Прихожу к мнению что более правильно поступил Ландау введя дополнительное интегрирование по времени τ

Изначально если мы имеем дифференциальное уравнение (Даламбера) зависящее от четырёх переменных, то и его решение должно выглядеть как интеграл по всем четырем переменным. Так что Фейнман действительно был математически не строг когда пытался обойтись интегриванием по трем переменным

Кстати и Тамм пишет что его вывод решения уравнения Даламбера не отличается особой математической строгостью

Итак проведя синтез интегралов Ландау и Фейнмана я могу записать

$$\varphi(1,t) = \int\int\frac{\rho(2,\tau=t-r_{12}/c)}{r_{12}}\delta(\tau-(t-r_{12}/c))\,d\tau\,dV_2$$

Анализируя физический смысл этого уравнения можно понять что в формировании потенциала учавствует запаздывающее время экспозиции запаздывающего потенциала движущегося (да и покоящегося !) заряда

Далее я не хочу повторять выкладки ландау по отношению к точечному заряду, хочется разобрать случай поэкзотичнее

Пусть моё пространство одномерно и мой заряд представляет собой тонкую нить длины a. И мне хочется научиться вычислять потенциал в произвольной точке как вне заряда так и внутри его

$$\delta(F(\tau)) = \sum_i\frac{\delta(\tau-t_i)}{|\frac{\partial F}{\partial\tau}|_{\tau=t_i}}$$

where t_i are roots of equation $\delta(F(\tau)) = 0$

не объем заряда увеличился хоть и видимый, а время (запаздывающее) экспозиции запаздывающего потенциала движущегося заряда выросло по сравнению с временем экспозиции запаздывающего потенциала покоящегося заряда.

при этом ни обьем ни плотность заряда не поменялись.

Фейнмановское увеличение длины заряда суть увеличение запаздывающей экспозиции поэтому оно не нуждается в корректирующем уменьшении видимой плотности заряда

Плотность не видимая, а настоящая но только лишь взятая в запаздывающий момент времени.

Думаю, что и Фейнман бы не согласился с утверждением Меандра о том, что "видимая плотность"заряда более рыхлая чем настоящая плотность заряда. Почему я так думаю, потому что Фейнман пишет:

Появился поправочный множитель. Он появился потому что в то время как наш интеграл "проносится над зарядом сам заряд движется. Когда заряд движется к точке (1), его вклад в интеграл увеличивается в b/a раз.

То есть, поскольку вклад заряда в интеграл увеличивается благодаря его движению, "видимая плотность заряда"по мысли Фейнмана не уменьшается, а остаётся прежней.

Я со своей стороны тоже позволю себе не согласиться с предположением Меандра о уменьшении видимой плотности заряда.

То что увеличился видимый объём заряда не означает уменьшения видимой плотности заряда. Плотность заряда не изменяется и объём заряда не изменяется (мы пока не рассматриваем лоренцево сокращение). То что Фейнман пытался показать увеличением видимой длины заряда на мой взгляд связано с спрессовываением поля перед зарядом: не плотность заряда уменьшается вследствие его движения, а плотность поля скалярного потенциала увеличивается перед зарядом (и уменьшается за ним)

6 Как интеграл "проносится над зарядом"

Фейнман: Когда расстояние от заряда до точки (1) велико, то можно все r_i в знаменателях положить равным некоторому среднему значению, скажем, взятому с с учетом запаздывания положению r' центра кубика. Сумма (21.30) превращается в

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\rho \omega a^2}{r'}$$

ΔV_N - тот последний элемент ΔV_i, который еще накладывается на распределение зарядов (см.фиг.21.7,д) Сумма тем самым равна

$$N \frac{\rho \omega a^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'} \left(\frac{N \omega}{a} \right)$$

.

Мне все же интересно появится ли значимая поправка к интегралу, если всё же не ограничиваться случаем, "Когда расстояние от заряда до точки (1) велико". Интерес этот связан с тем, что в задаче о вычисления силы самодействия заряда на самого себя традиционно используются потенциалы ЛВ, но ведь в этой задаче нельзя сказать, что расстояние от заряда то точки наблюдения велико. Здесь точка наблюдения находится внутри самого заряда.

Поэтому я перепишу сумму в следующем виде

$$\sum_{i=-M}^{M} \frac{\rho \omega' a^2}{r'_i(t'_i)} = \rho a^2 \sum_{i=-M}^{M} \frac{\omega'(t'_i)}{r'_i(t'_i)} = \frac{q}{a} \sum_{i=-M}^{M} \frac{\omega'(t'_i)}{r'_i(t'_i)}$$

где $N = 2M + 1$, таким образом $i = 0$ соответствует центральной части заряда.

По началу я хотел позаимствовать у Меандра формулу взаимосвязи видимой ширины полоски заряда ω' с действительной шириной этой полоски ω

$$\omega' = \omega \frac{b}{a}$$

Но потом понял, что видимая ширина полоски в том случае если заряд движется с ускорением (а именно этот случай важен в связи с решением задачи о самодействии заряда самого на себя) видимая ширина полоски будет зависеть от скорости заряда в запаздывающий момент, ведь заряд-то ускоряется.

Фейнман: А чему же равно b? Это длина куба зарядов, увеличенное на расстояние, пройденное зарядом от $t_1 = (t - r_1/c)$ до $t_N = (t - r_N/c)$. Это расстояние пройденное зарядом за время

$$\Delta t = t_N - t_1 = \frac{r_1 - r_N}{c} = \frac{b}{c}$$

.

А поскольку скорость заряда равна v, то пройденное расстояние равно $v\Delta t = vb/c$. Но длина b - само это расстояние плюс a:

$$b = a + \frac{v}{c}b$$

.

Отсюда

$$b = \frac{a}{1-(v/c)}$$

.

Чуть перефразирую Фейнмана: А чему же равно ω'? Это длина полоски в кубе зарядов, увеличенная на расстояние, пройденное зарядом от $t_i = (t - r_i/c)$ до $t_{i+1} = (t - r_{i+1}/c)$. Это расстояние пройденное зарядом за время

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{c} = \frac{\omega'}{c}$$

.

А поскольку скорость заряда равна v, то пройденное расстояние равно $v\Delta t = v\omega'/c$. Но длина ω' - само это расстояние плюс ω:

$$\omega' = \omega + \frac{v}{c}\omega'$$

.

Отсюда

$$\omega' = \frac{\omega}{1-(v/c)}$$

.

Отмечу здесь, что под скоростью заряда необходимо подразумевать скорость полоски в запаздывающий момент времени

Поэтому

$$\frac{q}{a}\sum_{i=-M}^{M}\frac{\omega'(t'_i)}{r'_i(t'_i)} = \frac{q}{a}\sum_{i=-M}^{M}\frac{1}{r'_i(t'_i)}\frac{\omega}{1-(v'_i(t'_i)/c)}$$

Далее запаздывающее расстояние от точки наблюдения к i-той части заряда

$r'_i\left(t'_i\right) = x_a - x_i\left(t'_i\right) = x_a - \left(x_q\left(t'_i\right) + i\omega\right) = r_q\left(t'_i\right) - i\omega = c\left(t - t'_i\right)$

здесь $x_q\left(t'_i\right)$ коондината центральной части заряда в момент t'_i.

Теперь сумму

$$\frac{q}{a}\sum_{i=-M}^{M}\frac{\omega}{r'_q(t'_i) - i\omega}\frac{1}{1-(v'_i(t'_i)/c)}$$

можно переписать в виде интеграла, который собственно и "проносится над зарядом"

$$\frac{q}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{1-(v'_q(t'(l))/c)}\frac{dl}{r'_q(t'(l)) - l}$$

При написании этой формулы я неявно подразумевал, что в процессе ускорения заряд не деформируется, поэтому скорость полоски в запаздывающий момент времени $v'_i(t'_i)$ равна скорости заряда в тот же самый запаздывающий момент $v'_q(t'(l))$.

В приближении Фейнмана, когда расстояние между зарядом наблюдателем велико по сравнению с размерами заряда

$$\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{1-(v'_q(t'(l))/c)}\frac{dl}{r'_q(t'(l)) - l} = \frac{1}{1-(v'_q(t')/c)}\frac{a}{r'_q(t')}$$

и тогда получается формула Лиенара Вихерта, но я хочу посмотреть изменится ли формула, если расстояние от заряда к наблюдателю сравнимо с размерами самого заряда, что собственно и происходит при решении задачи о самодействии поля ускоряемого заряда на самого себя.

Поэтому мне потребуется решить уравнение

$$r_q'(t'(l)) - l = ct - ct'(l)$$

относительно $t'(l)$. А именно мне нужно найти зависимость запаздывающего момента от линейной координаты части заряда l над которой "проносится"в запаздывающий момент t_i' интеграл. l равно нулю в центре заряда и изменяется от $-a/2$ до $a/2$

$$x_a - x_q\left(t'(l)\right) - l = ct - ct'(l)$$

здесь $x_q\left(t'(l)\right)$ это координата центра заряда в запаздывающий момент $t'(l)$, зависящий от точки заряда, над которой проносится интеграл.

$$ct_i' - x_q\left(t'(l)\right) = ct - x_a + l$$

раскрываю зависимость координаты центра заряда от времени, задавая начальные координату и скорость центра заряда в момент 0 и его ускорение

$$ct'(l) - x_q(0) - v_q t'(l) - a_q t'(l)^2/2 = ct - x_a + l$$

$$ct'(l) - v_q t'(l) - a_q t'(l)^2/2 = ct - \{x_a - (x_q(0) + l)\}$$

Пусть скорость заряда в момент ноль v_q равна нулю. Пусть также в момент ноль центр заряда $x_q(0)$ будет совмещён с началом координат.

$$ct'(l) - a_q t'(l)^2/2 = ct - \{x_a - l\}$$

составляем квадратное уравнение

$$a_q {t'}^2/2 - ct' + ct - \{x_a - l\} = 0$$

решение

$$t' = \frac{c - \sqrt{-2\,a_q ct + c^2 - 2\,a_q l + 2\,a_q x_a}}{a_q}$$

подставляя полученное решение в интегранд, имеем

$$\frac{2}{\left(\frac{\left(c-\sqrt{-2\,a_q ct+c^2-2\,a_q l+2\,a_q x_a}\right)^2}{a_q} + 2\,l - 2\,x_a\right)\left(\frac{c-\sqrt{-2\,a_q ct+c^2-2\,a_q l+2\,a_q x_a}}{c} - 1\right)}$$

это выражение можно упростить

$$-\frac{a_q}{2\,a_q ct - c^2 + 2\,a_q l - 2\,a_q x_a - \sqrt{-2\,a_q ct + c^2 - 2\,a_q l + 2\,a_q x_a}(a_q t - c)}$$

неопределённый интеграл имеет вид

$$-\log\left(a_q t - c + \sqrt{-2\,a_q ct + c^2 - 2\,a_q l + 2\,a_q x_a}\right)$$

$$\frac{q}{a}\log\left(\frac{a_q t - c + \sqrt{-2\,a_q ct + a a_q + c^2 + 2\,a_q x_a}}{a_q t - c + \sqrt{-2\,a_q ct - a a_q + c^2 + 2\,a_q x_a}}\right)$$

7 Моя попытка вывести потенциал Лиенара Вихерта

Изоповерхность запаздывающего момента t' есть геометрическое место точек в которых электрический потенциал обусловлен положением заряда в момент t'.

Для покоящегося заряда густота изолиний запаздывающего момента

$R' = c(t - t')$

$$\Delta R' = c(t'_0 - t'_1)$$

собственно густота изолиний

$$\frac{\Delta t'}{\Delta R'} = \frac{1}{c}$$

но какой в этом физический смысл?

поскольку электрический заряд как известно является источником потока электрического смещения $\vec{D}$ мы можем посчитать поток электрического смещения через сегмент телесного угла $d\Omega$

плотность потока электрического смещения через сферическую поверхность радиуса R равна $\frac{q}{4\pi R^2}$

Выражаем в сферической системе координат сегмент телесного угла $d\Omega = d\theta d\phi$

площадь сегмента на сферической поверхности радиуса R равна $dS = R^2 d\phi d\theta$

поток $\vec{D}$ через телесный угол $d\Omega$ равен

$$P_{\vec{D}} = \frac{q}{4\pi R^2} R^2 cos\theta d\phi d\theta = \frac{q}{4\pi} cos\theta d\phi d\theta = \frac{q d\Omega}{4\pi}$$

плотность потока $\vec{D}$ равна

$$p_{\vec{D}} = \frac{q}{4\pi}$$

Давайте здесь воспользуемся гидродинамической аналогией: если имеется плотность потока электрического смещения через некоторую поверхность то умножая ее на $dSdt$ получим выражение для "массы"прошедшей через элемент поверхности dS за время dt потока элетрического смещения

Возможно применительно к потоку электрического смещения такая гидродинамическая аналогия покажется кому-то смешной и совершенно неприменимой, но я могу показать что такая аналогия имеет вполне определенный с точки зрения современной науки физический смысл

Механистическая гидродинамическая аналогия заключается в том что заряд каждую единицу времени как бы испускает электрическое смещение, которое распространяется во всех направлениях со скоростью света, независимо от скорости самого заряда. Покоящийся заряд делает то же самое: потенциал покоящегося заряда запаздывает в той же мере как и потенциал движущегося заряда.

Вообразив, что поток электрического смещения это поток некоторой условной сжимаемой "жидкости "газа "или иной "среды истекаемой из заряда можно вычислить "массу "обьем "или иную меру "количества "этой "среды "электрического смещения находящегося в обьеме пространства, ограниченном изоповерхностями того или иного запаздывающего момента и сектором телесного угла ограниченным линиями перпендикулярными изоповерхностям запаздывающего момента

Вычислим теперь "количество среды "электрического смещения для покоящегося заряда в обьеме пространства, ограниченном изоповерхностями запаздывающих моментов t'_1 и t'_2 в секторе телесного угла $d\Omega$.

$$m_{\vec{D}} = \int\limits_{t'_1}^{t'_2} \frac{q}{4\pi} d\Omega dt'$$

обьем пространства, ограниченный изоповерхностями запаздывающих моментов t'_1 и t'_2 в секторе телесного угла $d\Omega$.

$$V_{\vec{D}} = \int\limits_{R'_1}^{R'_2} {R'}^2 d\Omega dR'$$

$$dR' = cdt'$$

$$V_{\vec{D}} = \int\limits_{t'_2}^{t'_1} {R'}^2 d\Omega c dt'$$

"плотность"потока электрического смещения в случае покоящегося заряда

$$\rho_{\vec{D}} = \frac{q}{4\pi {R'}^2 c} = \frac{q}{4\pi {R'}^2}\frac{\Delta t'}{\Delta R'} = E\frac{\Delta t'}{\Delta R'}$$

пропорциональна электрическому полю.

Теперь интересен вопрос как вычислить плотность потока электрического смещения для движущегося заряда

Расчёт объёма пространства между изоповерхностями запаздывающего момента.

При вычислении обьема между изоповерхностями запаздывающего момента возникает вопрос: из какой запаздываюшей координаты проводить телесный угол, внутри которого вычислять искомый обьем? При исследовании этого вопроса становится ясно, что использование прямого телесного угла приведет к ошибкам, независимо от того из какой точки этот телесный угол, проводить, ибо заряд находится в движении.

Решение заключается в том, чтобы ограничить телесный угол искривленными поверхностями такими, чтобы поверхность телесного обьема была нормальна изоповерхности текущего запаздывающего момента

Для построения оных прибегнем к следующим соображениям

Отметим на изоповерхности запаздывающего момента $t' = 0$ в сферической системе отсчета, связанной с запаздывающей координатой некую точку с координатами (θ, ϕ).

При изменении запаздывающего момента на малую величину запаздывания координата смещается на величину vdt'

На ту же величину смещается центр сферической системы координат, связанный уже с новой запаздывающей координатой.

Радиус изоповерхности изменяется от $c(t - t'_0)$ до $c(t - (t'_0 + dt'))$

Отметим на смещенной вместе с запаздывающей координатой сферической системе координат точку с теми же координатами (θ, ϕ)

При последовательном изменении запаздывающего момента от $t' = 0$ до $t' = t$ точка с координатами θ, ϕ на сферической изоповерхности запаздывающего момента опишет некоторую кривую, нормальную изоповерхностям запаздывающего момента

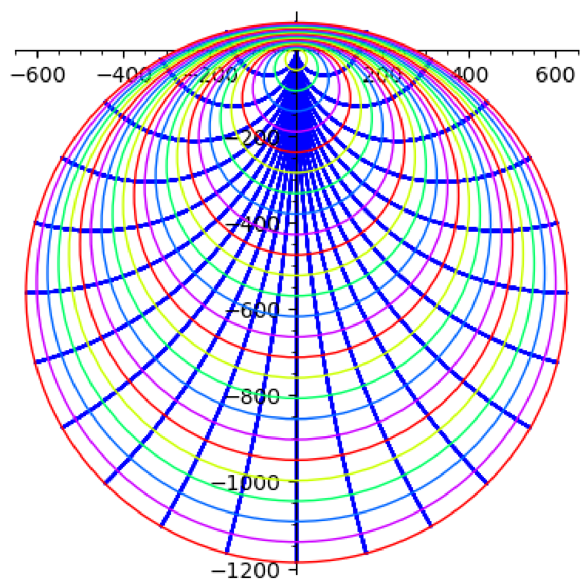

Рис. 1
field of directions of propagation of electric potential
τ_1=625 v=0.9

Алгоритм построения кривой, нормальной изоповерхностям запаздывающего момента реализован по ссылке

https://nbviewer.org/github/daju1/articles/blob/master/sagemath/electric_field_density/field_of_directions_of_propagation_of_electric_potential.ipynb

Что интересно предел якобиана криволинейной системы координат, составленного как определитель матрицы производных декартовых координат x_2 и z_2 по криволинейным координатам τ_2 и θ_1

$J = \frac{dx_2}{d\tau_2}\frac{dz_2}{d\theta_1} - \frac{dx_2}{d\theta_1}\frac{dz_2}{d\tau_2}$
при устремлении разности текущего момента и запаздывающего момента в точке наблюдения
$\tau_2 = t - t_{zap_2}$
к разности текущего момента и момента начала движения заряда
$\tau_1 = t - t_{zap_1}$
Имеет интересный вид, отдалённо напоминающий формулу Лиенара Вихерта
$J_0 = c\tau_1 vcos(\theta_1) - c^2\tau_1 + r_0 vcos(\theta_1) - cr_0$

8 Как разделить переменные для H моды в диэлектрическом цилиндре с неизотропной проницаемостью ?

Пусть у нас есть следующие поля в зависимости от времени

$$\vec{E} = \vec{E}\,e^{-i\,\omega\,t}$$

$$\vec{H} = \vec{H}\,e^{-i\,\omega\,t}$$

Исходя из уравнений Максвелла

$$rot\,\vec{E} = \mu\,\frac{i\,\omega}{c}\,\vec{H}$$

Let's we have $\vec{D} = \epsilon_{\alpha\,\beta}\vec{E}$
Пусть наш тензор диэлектрической проницаемости диагонален, поэтому

$$D_z = \epsilon_{z,z}E_z$$

$$D_\rho = \epsilon_{\rho,\rho}E_\rho$$

$$D_\phi = \epsilon_{\phi,\phi}E_\phi$$

$$rot\,\vec{H} = -\frac{i\,\omega}{c}\epsilon_{\alpha\,\beta}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$rot\,\vec{H} = -\frac{i\,\omega}{c}\epsilon_{\alpha\,\beta}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$$

в компонентах

$$rot\,H_z = -\frac{i\,\omega}{c}\epsilon_{z\,z}E_z + \frac{4\pi}{c}\sigma E_z$$

$$rot\,H_\rho = -\frac{i\,\omega}{c}\epsilon_{\rho,\rho}E_\rho + \frac{4\pi}{c}\sigma E_\rho$$

$$rot\,H_\phi = -\frac{i\,\omega}{c}\epsilon_{\phi\,\phi}E_\phi + \frac{4\pi}{c}\sigma E_\phi$$

или резюмируя

$$rot\,\vec{H} = -\frac{i\,\omega}{c}\vec{D} + \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$$

Сейчас:

$$rot\,rot\,\vec{E} = \mu\,\frac{i\,\omega}{c}rot\,\vec{H}$$

$$rot\,rot\,\vec{E} = \mu\,\frac{i\,\omega}{c}\left(-\frac{i\,\omega}{c}\epsilon_{\alpha\,\beta}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}\right)$$

$$rot\,rot\,\vec{E} = \mu\,\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\alpha\,\beta}\vec{E} + \mu\,\frac{4\pi\,i\,\omega}{c^2}\sigma\vec{E}$$

$$rot\,rot\,\vec{E} = \mu\,\frac{\omega^2}{c^2}\left(\epsilon_{\alpha\,\beta} + 4\pi\,i\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}$$

в компонентах

$$rot\,rot\,E_z = \mu\,\frac{\omega^2}{c^2}\left(\epsilon_{z,z} + 4\pi\,i\frac{\sigma}{\omega}\right)E_z$$

$$rot\,rot\,E_\rho = \mu\,\frac{\omega^2}{c^2}\left(\epsilon_{\rho,\rho} + 4\pi\,i\frac{\sigma}{\omega}\right)E_\rho$$

$$rot\,rot\,E_\phi = \mu\,\frac{\omega^2}{c^2}\left(\epsilon_{\phi,\phi} + 4\pi\,i\frac{\sigma}{\omega}\right)E_\phi$$

Используя приведенное выше уравнение для $rot\,rot\,E_z$, мы можем написать для E моды:

$$\frac{\epsilon_{z,z}\mu\omega^2 E_z\left(\rho,\phi,z\right)}{c^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial\rho}E_z\left(\rho,\phi,z\right)}{\rho} + \frac{\frac{\partial^2}{(\partial\phi)^2}E_z\left(\rho,\phi,z\right)}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{(\partial\rho)^2}E_z\left(\rho,\phi,z\right) + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2}E_z\left(\rho,\phi,z\right) = 0$$

$$\frac{\epsilon_{z,z}\mu\omega^2 E_z}{c^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial\rho}E_z}{\rho} + \frac{\frac{\partial^2}{(\partial\phi)^2}E_z}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{(\partial\rho)^2}E_z + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2}E_z = 0$$

предполагая

$$E_z(\phi) = sin(m\,\varphi + \psi_m)$$

и

$$E_z(z) = e^{i\,k\,z}$$

или

$$E_z(z) = cos\,(k\,z)$$

или

$$E_z(z) = sin\,(k\,z)$$

приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\epsilon_{z,z}\mu\omega^2 E_z}{c^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial\rho}E_z}{\rho} - \frac{m^2\,E_z}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}E_z - k^2\,E_z = 0$$

полагая

$$\kappa^2 = \frac{\mu\,\epsilon_{z,z}\,\omega^2}{c^2} - k^2$$

получим уравнение типа Бесселя

$$\frac{\partial^2}{(\partial\rho)^2}E_z + \frac{\frac{\partial}{\partial\rho}E_z}{\rho} + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)\,E_z = 0$$

Но можем ли мы сделать то же самое для H моды? Давайте начнем:

$$rot\,rot\,\vec{H} = -\frac{i\,\omega}{c}rot\,\vec{D} + \frac{4\pi}{c}\sigma rot\,\vec{E}$$

$$rotD_\rho = -\frac{\epsilon_{\phi,\phi}\rho\frac{\partial}{\partial z}E_\phi\left(\rho,\phi,z\right) - \epsilon_{z,z}\frac{\partial}{\partial\phi}E_z\left(\rho,\phi,z\right)}{\rho}$$

$$rotD_\phi = \epsilon_{\rho,\rho}\frac{\partial}{\partial z}E_\rho\left(\rho,\phi,z\right) - \epsilon_{z,z}\frac{\partial}{\partial\rho}E_z\left(\rho,\phi,z\right)$$

$$rotD_z = \frac{\epsilon_{\phi,\phi}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}E_\phi\left(\rho,\phi,z\right) + \epsilon_{\phi,\phi}E_\phi\left(\rho,\phi,z\right) - \epsilon_{\rho,\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}E_\rho\left(\rho,\phi,z\right)}{\rho}$$

$$rotD_z = \frac{\epsilon_{\phi,\phi}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}E_\phi\left(\rho,\phi,z\right) + \epsilon_{\phi,\phi}E_\phi\left(\rho,\phi,z\right) - \epsilon_{\rho,\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}E_\rho\left(\rho,\phi,z\right)}{\rho}$$

И вот проблема: как заменить $rotD_z$ with $\vec{H}$, используя уравнение Максвелла

$$rot\,\vec{E} = \mu\,\frac{i\,\omega}{c}\,\vec{H}$$

Есть идеи
С уважением, Алексей

Список литературы

[1] *Фейнмановские лекции по физике т.6. Электродинамика М. 1966, стр. 158*

[2] *Re: Интервал запаздывания и запаздывающее время.*
http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1607492586/164#164

[3] *Владимир Ерохин. Конструктивная электродинамика.Механизм электромагнитных взаимодействий Ч.1. Магнитное поле в нерелятивистском приближении. Физическая сущность магнитного поля*