§ 40. Энергия нулевых колебаний, эффект Казимира, нуль-заряд и другие игры с бесконечностями.

Если число обращается в бесконечность, это не означает, что им можно пренебречь.
Роберт Сербер [1]

Как мы увидим в этом параграфе, Роберт Сербер, один из активнейших участников Манхеттенского проекта, был слишком строг по отношению к людям, слишком вольно обращающимся с бесконечностями. Пренебрежение бесконечностями не раз приводило к интересным и важным результатам, например, к открытию позитронов Дираком, хотя представление Дирака о заполняющем вакуум бесконечном количестве электронов с отрицательной энергией долго вызывало, в лучшем случае, насмешки.

Посмеяться всегда было над чем. Так, Галилей смеялся над Кеплером, открывшим, что планеты движутся по эллипсам, ведь окружности – это так красиво и хорошо! Галилею была смешна идея Кеплера о том, что океанские приливы связаны с воздействием Луны на Землю. Конечно же, это тоже было очень смешно! (Сам-то Галилей придумал куда более «физичное» объяснение приливов и отливов: Земля регулярно, два раза в сутки, чуть уменьшает, а потом на столько же увеличивает скорость своего вращения, а вода океанов при этом то набегает, то отходит от берегов.) Лейбниц и Гюйгенс смеялись над тем, как эти умники-англичане (Ньютон, Гук, Галлей, де Врен) смогли додуматься до полнейшей нелепости, будто бы Солнце может действовать на планеты на расстоянии с помощью какой-то мистической силы тяготения.

………………………………………………………………………………………..

Бесконечности – это нечто, более сложное, чем, например, числа 2, 1 и 0, а вот что об этих числах писал Бертран Рассел в своей книге «Введение в математическую философию»[1] [3] : *«Потребовалось много веков, чтобы открыть, что пара фазанов и пара дней являются примером числа* 2 *... И открытие того, что* 1 *является числом, было трудным. А* 0 *является совсем недавним изобретением: ни греки, ни римляне не имели такой цифры.»* Если верить В. И. Арнольду [5], японцы до недавнего времени считали фазанов и зайцев разными числительными, «съедобными» и «несъедобными», и поэтому зайцев не ели, в ущерб процветанию экономики Японии. Много веков на решение экономической проблемы с несъедобностью зайцев японцам не понадобилось, был принят закон, по которому «заяц», в математическом отношении, был приравнен к «птице», теперь зайцев едят.

---

[1] В 1918 году у Б. Рассела вдруг появилось много свободного времени [4]. Как борец за мир Рассел был заключен на 6 месяцев в Брикстонскую тюрьму, где он и написал книгу [3].

Проблемы с бесконечностями так просто, принятием нужного закона, не решишь. А проблемы возникают разные. Учет энергии нулевых колебаний электромагнитного поля в вакууме приводит, согласно рассчетам Хендрика Казимира [6], к возникновению силы притяжения между идеально проводящими нейтральными пластинами, при этом сила пропорциональна бесконечной сумме

$$1^3+2^3+3^3+4^3.... \qquad (1)$$

В одномерном случае возникает аналогичная сила между двумя нейтральными «идеально проводящими» точечными «телами», пропорциональная бесконечной сумме

$$1\ +2\ \ +3\ \ +4+.... \qquad (2)$$

……………………………………………………………………………………

Эффект Казимира. Вспомним теперь еще двух знаменитых участников Манхеттенского проекта Станислав Улама и Ричарда Фейнмана. С. Улам вспоминал о времени, проведенном в Лос-Аламосе [17]: *«Однажды я в шутку заметил Фейнману: «Когда-нибудь люди обнаружат, что один кубический сантиметр вакуума в действительности стоит 10000 долларов – ведь именно такому количеству энергии он эквивалентен». Он тут же согласился и добавил: «Верно, но это, безусловно, должен быть* ***чистый*** *вакуум!»* Улам и Фейнман обсуждали энергию нулевых колебаний электромагнитного поля в вакууме. В чистом вакууме эта энергия бесконечна,

$$E=2\sum\frac{1}{2}\hbar\omega=\hbar c\sum_{i,k,l=0}^{\infty}\sqrt{k_{x,i}^2+k_{y,k}^2+k_{z,l}^2}. \qquad (19)$$

Мы считаем, что наш «мир» представляет собой «ящик Ферми» [18], то-есть куб с идеально отражающими электромагнитное излучение стенками, с ребром $L\to\infty$ и объемом $V=L^3$. Каждый из волновых векторов принимает значения $k=\pm\frac{\pi}{L}n, n=1,2,3...$, множитель 2 в формуле (19) перед первой суммой учитывает то, что у электромагнитных колебаний есть два состояния поляризации. Переходя от суммирования к интегрированию, получим из (19)

$$\frac{E}{V}=\hbar c\int\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}\,\frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3}=\frac{\hbar c}{16\pi^2}\,k_0^4=\frac{\hbar}{16\pi^2c^3}\,\omega_0^4, \qquad (20)$$

где ω_0 – частота обрезания, определяемая соотношением $\hbar\omega_0=mc^2$, где m – масса электрона (это естественная частота обрезания, при больших частотах в вакууме началось бы рождение электронно-позитронных пар). Таким образом, плотность энергии нулевых колебаний, о которой говорили Улам и Фейнман, равна

$$\frac{E}{V}=\frac{1}{16\pi^2}\frac{m^4c^5}{\hbar^4}=\frac{1}{16\pi^2}mc^2/\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3. \qquad (21)$$

Конечно, плотность энергии нулевых колебаний в чистом вакууме гигантская, она равна $0{,}9\cdot 10^{22}$ Дж/м^3, или 2,5 млрд кВт-ч/см^3. Фейнман был прав, эта плотность энергии очень сильно зависит от чистоты вакуума. Для сравнения, энергия нулевых колебаний в воде при 3^0С равна всего лишь 12 Дж/м^3, так как должна быть обрезана на длине волны $2\cdot 10^{-5}$ см, при которой вода становится непрозрачной.

В 1948 году Хендрик Антон Казимир [19] вычислил силу притяжения между двумя идеально отражающими электромагнитное излучение пластинами, помещенными в «ящик Ферми». Сила, действующая на единицу площади пластин, оказалась равной

$$\frac{F}{S}=-\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{a^4}. \qquad (22)$$

Эта сила говорит о том, что бесконечная энергия нулевых колебаний между пластинами уменьшается на величину ΔE,

$$\frac{\Delta E}{S}=-\frac{\pi^2}{720}\frac{\hbar c}{a^4}. \qquad (23)$$

В 1997 году сила Казимира между двумя пластинами была измерена с 5-процентной точностью при расстояниях между пластинами от 0,6 до 6 микрон [20].

Прежде чем обсудить эффект Казимира подробнее, рассмотрим более простой одномерный случай. Будем считать, что вся наша «вселенная» расположена отрезке длиной $L\to\infty$ и электромагнитное поле (в одномерном случае это просто скалярное поле) обращается в нуль на концах этого отрезка. Тогда волновые векторы волн, заполняющих нашу «вселенную», равны $k=\pm\frac{\pi}{L}n, n=1,2,3...$. Сумма энергий всех нулевых колебаний в нашей вселенной определяется формулой, аналогичной (19), и равна

$$E_0(L)=\sum_{\omega}\frac{1}{2}\hbar\omega=\hbar c\frac{1}{2}\sum_{k}|\,k\,|\;=\hbar c\frac{\pi}{L}(1+2+3+4+...). \qquad (24)$$

Поместим теперь в нашу вселенную на расстоянии *a* две точки, в которых поле обращается в нуль, и вычислим энергию нулевых колебаний между этими точками,

$$E_0(a)=\hbar c\frac{\pi}{a}(1+2+3+4+...). \qquad (25)$$

Обе энергии, естественно, бесконечны. Вычтем теперь из последнего выражения энергию нулевых колебаний всей вселенной, приходящуюся на длину *a*.

$$\Delta E = E_0(a) - \frac{a}{L}E(L). \qquad (26)$$

Второе слагаемое в (26), ввиду того, что $L \to \infty$, можно заменить интегралом, как в формуле (20),

$$\Delta E = \hbar c \frac{\pi}{a}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n - \int_0^{\infty} x dx\right), \qquad (27)$$

при этом формула (20) так же лишена смысла, как и предыдущие формулы (от одной бесконечности вычитается другая бесконечность!). Но выход из положения подсказывается физическим смыслом того, что мы делаем, и ... формулой Эйлера-Маклорена (9). Что и было сделано Казимиром для более сложного трехмерного случая.

Смысл слов, написанных Казимиром в его статье статье (почти дословно цитируем его слова) [19]: *Чтобы получить конечное число из (27), необходимо умножить выражение под знаком суммы и подынтегральное выражение на некоторую функцию* $F(n), (F(x))$ *, которая равна единице для* $n \ll n_0, x \ll x_0$ *, но стремится к нулю достаточно быстро при* $n \to \infty, x \to \infty.$ *Физический смысл этого очевиден: для очень коротких волн, соответствующих* $n > n_0, x > x_0$ *(рентгеновские лучи и так далее) наши пластины вряд ли будут представлять препятствие для волн, вообще положение пластин не будет оказывать влияния на эти волны.*

Таким образом, выражение разность $\sum_{n=0}^{\infty} n - \int_0^{\infty} x dx$, согласно Казимиру, нужно заменить на выражение $\sum_{n=0}^{\infty} nF(n) - \int_0^{\infty} xF(x)dx,$ которое, согласно формуле Эйлера-Маклорена, равно

$$\sum_{n=0}^{\infty} nF(n) - \int_0^{\infty} xF(x)dx = -\frac{B_2}{2!}F(0) = -\frac{1}{12}. \qquad (28)$$

Окончательно получаем выражения для ΔE и силы Казимира для одномерного случая,

$$\Delta E = -\frac{\pi}{24}\frac{\hbar c}{a}, \quad F = -\frac{\pi}{24}\frac{\hbar c}{a}. \qquad (29)$$