ствие внеш. полей. М. р. обращает в нуль интеграл столкновения этого ур-ния, выражающего баланс между прямыми и обратными столкновениями. Во внеш. потенциальном поле имеет место **распределение Максвелла — Больцмана** (см. *Больцмана распределение*). М. р. — предельный случай *Бозе — Эйнштейна распределения* и *Ферми — Дирака распределения* в случае, когда можно пренебречь явлением квантового вырождения газа. М. р. подтверждено экспериментально О. Штерном (O. Stern) в 1920 в опытах с молекулярными пучками от источника, помещённого внутри вращающейся цилиндрич. поверхности, и позднее (1947) в опытах И. Эстермана (I. Estermann), О. Симпсона (O. Simpson) и Штерна по свободному падению молекул пучка под действием силы тяжести.

Лит.: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, ч. 1, 3 изд., М., 1976, § 22; Рамзей Н., Молекулярные пучки, пер. с англ., М., 1960; Сивухин Д. В., Общий курс физики, 2 изд., т. 2 — Термодинамика и молекулярная физика, М., 1979, § 72—74; Хир К., Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы, пер. с англ., М., 1976, гл. 1. *Д. Н. Зубарев.*

МАКСВЕЛЛА СООТНОШЕНИЯ — соотношения между производными термодинамич. ф-ций:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V=-\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T,$$

где P — давление, T — абс. темп-ра, V — объём, S — *энтропия*. М. с. можно получить из *второго начала термодинамики*. Напр., из термодинамич. равенства $dU = TdS - PdV$, где U — внутр. энергия, следует первое М. с. как условие того, что dU есть полный дифференциал. Остальные М. с. следуют из того, что энтальпия H, энергия Гельмгольца F и энергия Гиббса G являются *характеристическими функциями* или *термодинамическими потенциалами* в переменных S, P; V, T; P, T. Иногда М. с. наз. **соотношениями взаимности**.

Лит.: Стенли Г., Фазовые переходы и критические явления, пер. с англ., М., 1973, гл. 2; Новиков И. И., Термодинамика, М., 1984, § 2, 8. *Д. Н. Зубарев.*

МАКСВЕЛЛА ТЕНЗОР НАТЯЖЕНИЙ — пространственная часть тензора энергии-импульса эл.-магн. поля:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta+H_\alpha H_\beta-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2+H^2)\right],\qquad(1)$$

где E_α, E_β и H_α, H_β — компоненты электрич. $\boldsymbol{E}$ и магн. $\boldsymbol{H}$ полей в вакууме, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. М. т. н. введён Дж. К. Максвеллом в 1861. Следуя М. Фарадею (M. Faraday), Максвелл считал причиной электрич. и магн. явлений упругие деформации гипотетич. среды — *эфира*. Характерной особенностью сил упругости является возможность сведения их к натяжениям (напряжениям), возникающим в деформиров. средах. Если f_α — компонент силы, действующий на единицу объёма упругой среды, то суммарный α-компонент силы, действующий на нек-рый объём V, сводится к интегралу сил натяжений по поверхности этого объёма:

$$\int f_\alpha\, dV=\oint \sigma_{\alpha\beta}ds_\beta\ ,\qquad(2)$$

где ds_β — компоненты элемента поверхности $d\boldsymbol{s}$, направленного по внеш. нормали к поверхности. Т. о., $\sigma_{\alpha\beta}$ представляет собой α-й компонент силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярный β-й оси. Если известны поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ вне нек-рого тела, находящегося в вакууме, то М. т. н. позволяет найти силу, действующую на тело. Так, напр., учитывая, что у поверхности проводника напряжённость поля $\boldsymbol{E}$ имеет только нормальную составляющую, из (1) легко найти, что на единицу поверхности проводника действует сила «отрицательного» давления (давление направлено наружу от проводника) $E^2/8\pi$. Аналогично на единицу поверхности сверхпроводника, помещённого в магн. поле, действует сила «положительного» давления, равная $H^2/8\pi$. Различие в знаке силы связано с тем, что у поверхности сверхпроводника, выталкивающего магн. поле, напряжённость поля $\boldsymbol{H}$ имеет только тангенциальную составляющую. М. т. н. позволяет определять величину *давления света*. Напр., пусть плоская монохроматич. световая волна падает по нормали на поверхность диэлектрика и поглощается им. Т. к. вблизи поверхности диэлектрика поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ имеют только тангенциальные составляющие, то, согласно (1), давление световой волны на диэлектрик равно плотности энергии эл.-магнитного поля $(E^2 + H^2)/8\pi$.

Выражение (2) справедливо только в том случае, если компоненты тензора натяжений связаны с плотностью объёмных сил дифференц. соотношением

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=f_\alpha\ .\qquad(3)$$

Используя *Максвелла уравнения*, из (3) получаем след. выражение для объёмной силы:

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{jH}]+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{EH}],\qquad(4)$$

где ρ — плотность электрич. заряда, $\boldsymbol{j}$ — плотность электрич. тока. Соотношение (4) связывает плотность объёмной силы со скоростью изменения механич. импульса (*Лоренца силой*) и со скоростью изменения импульса эл.-магн. поля.

В случае материальной среды Максвелл предполагал, что тензор натяжений имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha D_\beta+H_\alpha B_\beta-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{ED}+\boldsymbol{HB})\right],\qquad(5)$$

где D_β, B_β — компоненты электрич. и магн. индукции. Тензор (5) в общем случае несимметричен. Система объёмных сил может быть заменена эквивалентной системой натяжений только тогда, когда тензор натяжений симметричен (в противном случае момент объёмных сил будет отличаться от момента сил натяжений).

В макроскопич. электродинамике существуют разл. конкурирующие выражения для тензора энергии-импульса эл.-магн. поля в среде. Основные из них: симметричный тензор Абрагама и несимметричный тензор Минковского, пространственной частью к-рого является выражение (5). Тензор натяжений, получающийся из (5) симметризацией по индексам α и β, был введён Г. Р. Герцем (H. R. Hertz) и представляет собой симметричную часть тензора энергии-импульса Абрагама в системе покоя материальной среды как целого. Существование различных допустимых выражений для тензора энергии-импульса и соответственно для тензора натяжений эл.-магн. поля в среде (в т. ч. и несимметричных) вызвано двумя обстоятельствами. Первое связано с тем, что два тензора натяжений $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$ определяют одну и ту же наблюдаемую объёмную силу f_α, если $\partial\tau_{\alpha\beta}/\partial x_\beta = 0$, а т. к. система натяжений рассматривается как нек-рое вспомогат. построение, то тензоры $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\sigma'_{\alpha\beta}$ эквивалентны. Второе обстоятельство заключается в том, что тензор натяжений эл.-магн. поля в среде представляет собой только часть полного тензора натяжений $\sigma^{\text{полн}}_{\alpha\beta} = \sigma^{\text{поля}}_{\alpha\beta} + \sigma^{\text{вещества}}_{\alpha\beta}$. Разделение полного тензора натяжений на «полевую» и «вещественную» части может осуществляться разл. способами, каждый из к-рых обладает своими преимуществами.

В случае изотропной среды с диэлектрич. проницаемостью ε и магн. проницаемостью μ М. т. н. (5) симметричен и имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)\right]. \quad (6)$$

Если поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ стационарны, то из соотношений (6) и (3) следует выражение для плотности объёмной силы:

$$\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{f}_0 = \rho \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{jH}\right] - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad}\varepsilon - \frac{1}{8\pi} H^2 \operatorname{grad}\mu. \quad (7)$$

В М. т. н. (6) и соответственно в выражении для плотности объёмной силы (7) не учтена зависимость ε и μ от плотности среды, ответственная за возникновение магнито- и электрострикционных явлений — упругих деформаций, вызываемых в материальных средах эл.-магн. полями.

Если поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ нестационарны, то из (6) и (3) следует, вместо (7), соотношение

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{EH}\right]. \quad (8)$$

Казалось бы, в рассматриваемом случае изотропной среды не возникает никаких затруднений. М. т. н. симметричен, нет разногласий в том, как он выглядит, и как будто бы однозначно интерпретируется соотношение (8), аналогичное соотношению (4) для случая вакуума: второе слагаемое в (8) естественно считать скоростью изменения плотности импульса эл.-магн. поля в среде, равной, следовательно,

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}} = \varepsilon\mu\left[\boldsymbol{EH}\right]/4\pi c$$

(такой считал плотность импульса в среде Г. Минковский, H. Minkowski, 1908). Однако, согласно М. Абрагаму (M. Abraham, 1909), плотность импульса эл.-магн. поля в среде $\boldsymbol{g}^{\mathrm{A}} = [\boldsymbol{EH}]/4\pi c$. Приняв для плотности импульса в среде выражение Абрагама, можно переписать соотношение (8) в виде

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \boldsymbol{f}^{\mathrm{A}} + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{EH}\right]. \quad (9)$$

Теперь последнее слагаемое в (9) описывает скорость изменения плотности импульса эл.-магн. поля в среде, а величина

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{A}} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{EH}\right] \quad (10)$$

представляет собой т. н. силу Абрагама. В 1975—77 предприняты попытки непосредств. измерения этой крайне малой силы. Объёмная сила, соответствующая силе Абрагама (10), была обнаружена в эксперименте канад. физиков (Walker G. B., Lahoz D., Walker G., «Can. J. Phys.», 1975, v. 53, p. 2577). Её существование свидетельствует в пользу выбора симметричного тензора энергии-импульса эл.-магн. поля в среде (и соответствующего симметричного М. т. н.) в форме Абрагама.

Лит.: Тамм И. Е., Основы теории электричества, 10 изд., М., 1989; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, 2 изд., М., 1982; Гинзбург В. Л., Теоретическая физика и астрофизика, 3 изд., М., 1987.

Ю. П. Степановский.

МА́КСВЕЛЛА УРАВНЕ́НИЯ

Содержание:

1. Краткая история 33
2. Каноническая форма 33
3. Максвелла уравнения в интегральной форме . . 33
4. Общая характеристика Максвелла уравнений . . 34
5. Максвелла уравнения для комплексных амплитуд . . 34
6. Алгебраические Максвелла уравнения 34
7. Материальные уравнения 35
8. Граничные условия 36
9. Двойственная симметрия Максвелла уравнений . . 36
10. Максвелла уравнения в четырёхмерном представлении 37
11. Лоренц-инвариантность Максвелла уравнений . . 37
12. Лагранжиан для электромагнитного поля 38
13. Единственность решений Максвелла уравнений . . 38
14. Классификация приближений Максвелла уравнений 38
15. Максвелла уравнения в различных системах единиц 39

Максвелла уравнения — ур-ния, к-рым подчиняется (в пределах применимости классической макроскопич. электродинамики, см. *Электродинамика* классическая), *электромагнитное поле* в вакууме и сплошных средах.

1. Краткая история

Установлению М. у. предшествовал ряд открытий законов взаимодействий заряженных, намагниченных и токонесущих тел (в частности, законов Кулона, Био — Савара, Ампера). В 1831 М. Фарадей (M. Faraday) открыл закон эл.-магн. индукции и примерно в то же время ввёл понятие электрич. и магн. полей как самостоят. физ. субстанций. Опираясь на фарадеевское представление о поле и введя ток смещения, равнозначный по своему магн. действию обычному электрич. току, Дж. К. Максвелл (J. C. Maxwell, 1864) сформулировал систему ур-ний, названную впоследствии ур-ниями Максвелла. М. у. функционально связывают электрич. и магн. поля с зарядами и токами и охватывают собой все известные закономерности макроэлектромагнетизма. Впервые о М. у. было доложено на заседании Лондонского Королевского общества 27 окт. 1864. Первоначально Максвелл прибегал к вспомогат. механич. моделям «эфира», но уже в «Трактате об электричестве и магнетизме» (1873) эл.-магн. поле рассматривалось как самостоят. физ. объект. Физ. основа М. у. — принцип близкодействия, утверждающий, что передача эл.-магн. возмущений от точки к точке происходит с конечной скоростью (в вакууме со скоростью света c). Он противопоставлялся ньютоновскому принципу дальнодействия, сводящемуся к мгновенной передаче воздействий на любое расстояние ($c \to \infty$). Матем. аппаратом теории Максвелла послужил векторный анализ, представленный в инвариантной форме через *кватернионы* Гамильтона. Сам Максвелл считал, что его заслуга состоит лишь в матем. оформлении идей Фарадея.

2. Каноническая форма

Канонич. форма записи, принятая ныне, принадлежит Г. Герцу (H. Hertz) и О. Хевисайду (O. Heaviside) и основана на использовании не кватернионных, а *векторных полей*: *напряжённости электрического поля* $\boldsymbol{E}$, *напряжённости магнитного поля* $\boldsymbol{H}$, векторов *электрической индукции* $\boldsymbol{D}$ и *магнитной индукции* $\boldsymbol{B}$. М. у. связывают их между собой, с *плотностью электрического заряда* ρ и *плотностью электрического тока* $\boldsymbol{j}$, к-рые рассматриваются как источники:

$$\left[\nabla \boldsymbol{H}\right] = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\left[\nabla \boldsymbol{E}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \boldsymbol{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \boldsymbol{D} = 4\pi\rho. \quad (4)$$

Здесь использована *Гаусса система единиц* (о записи М. у. в др. системах см. в разделе 15). Входящие в (1) — (4) величины $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{j}$ являются истинными, или полярными, векторами (а величина ρ — истинным скаляром), поля $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ — псевдовекторами, или *аксиальными векторами*. Все эти величины предполагаются непрерывными (вместе со всеми производными) ф-циями времени t и координат $\boldsymbol{r}$ ($r_\alpha \equiv x_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$). Следовательно, в ур-ниях (1) — (4) не учитывается ни дискретная структура электрич. зарядов и токов, ни квантовый характер самих полей. Учёт дискретности истинных источников может быть произведён даже в доквантовом (классич.) приближении с помощью *Лоренца — Максвелла уравнений*.

3. Максвелла уравнения в интегральной форме

Используя *Гаусса — Остроградского формулу* и *Стокса формулу*, ур-ниям (1) — (4) можно придать форму интегральных: