Об инерционных свойствах электромагнитной массы

А.Ю.Дроздов

Jan 30, 2020

1 Постановка задачи

Пусть частица с заданным распределением объёмной плотности электрического заряда $\rho\left(r\right)$ приобретает ускорение $\overrightarrow{a}$. Найти силу, действующую на распределённый в объёме электрический заряд этой частицы со стороны электрического поля самоиндукции.

Для решения этой задачи выразим электрическое поле исходя из выражения потенциалов Лиенара Вихерта [1], как известно, дифференцированием скалярного потенциала ЛВ по координатам точки наблюдения $\overrightarrow{E_1} = -\nabla\varphi$ и дифференцированием векторного потенциала по времени $\overrightarrow{E_2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}$, где $\varphi = \frac{q}{R^*}$ и $\overrightarrow{A} = \frac{\overrightarrow{v}}{c}\frac{q}{R^*}$ где $R^* = \left(R - \frac{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{R}}{c}\right)$ - радиус Лиенара Вихерта.

Назовём первую компоненту $\overrightarrow{E_1}$ электрического поля градиентным полем, а вторую компоненту $\overrightarrow{E_1}$ электрическим полем индукции или самоиндукции

Опуская громоздкие промежуточные выкладки [2], для градиента по координатам наблюдения скалярного потенциала ЛВ можно привести

$$\nabla\varphi = \nabla\frac{dq}{R^*} = -\frac{dq}{{R^*}^2}\left\{\frac{\overrightarrow{R}}{R^*}\left(1 + \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{R}}{c^2} - \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}}{c^2}\right) - \frac{\overrightarrow{v}}{c}\right\}$$

А для производной по времени наблюдения векторного потенциала

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{dq\overrightarrow{v}}{cR^*} = \frac{dq}{{R^*}^2}\left\{\frac{\overrightarrow{a}R}{c^2} - \frac{\overrightarrow{v}}{c}\left(\frac{R}{R^*}\left(-1 - \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{R}}{c^2} + \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}}{c^2}\right) + 1\right)\right\}$$

Суммарное электрическое поле

$$d\vec{E} = \frac{dq}{{R^*}^3}\left(\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}\right)\left(1 + \frac{\vec{R}\vec{a}}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right) - \vec{a}\frac{R^*R}{c^2}\right)$$

Градиентное электрическое поле

$$\overrightarrow{E}_1 = \frac{dq}{{R^*}^2}\left\{\frac{\overrightarrow{R}}{R^*}\left(1 + \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{R}}{c^2} - \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}}{c^2}\right) - \frac{\overrightarrow{v}}{c}\right\}$$

Электрическое поле самоиндукции

$$\overrightarrow{E}_2 = \frac{dq}{{R^*}^2}\left\{\frac{\overrightarrow{v}}{c}\left(\frac{R}{R^*}\left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{R}}{c^2} - 1\right) + 1\right) - \frac{\overrightarrow{a}R}{c^2}\right\}$$

В системе СИ перед этим выражением появляется множитель $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = \frac{c^2}{10^7}$

Направляя в сферической системе координат вектор ускорения вдоль оси z запишем

$R^{*} = R - \frac{v}{c}\left(z_a - z_q\right) = R - \frac{v}{c}\left(r_a \cos\left(\theta_a\right) - r_q \cos\left(\theta_q\right)\right)$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{R} = a\left(z_a - z_q\right) = a\left(r_a \cos\left(\theta_a\right) - r_q \cos\left(\theta_q\right)\right)$$

Где следуя Тамму [3], индексом q обозначены координаты заряда, а индексом a обозначены координаты точки наблюдения, находим поле в точке наблюдения путём интегрирования по объёму зарядов - источников

$$\overrightarrow{E}_a = \int\limits_{V_q} \left(\frac{d\overrightarrow{E}_1}{dq} + \frac{\overrightarrow{E}_2}{dq} \right) \rho\left(r_q\right) dV_q$$

Действующая на заряд со стороны электрических полей (градиентного и самоиндукции) инерционная сила равна интегралу по от проекции поля на ось z по тому же объёму того же заряда, но который теперь уже можно навать пробным

$F_z = \int\limits_{r_a} \int\limits_{\varphi_a} \int\limits_{\theta_a} E_z \rho\left(r_a\right) {r_a}^2 \sin\left(\theta_a\right)\ d\theta_a d\varphi_a dr_a$

Из приведенных формул видно, что сила инерции электромагнитной массы зависит от вида функции распределения плотности заряда в пространстве, а также от скорости и ускорения заряда.

2 Приближение малых скоростей без учёта запаздывания

В приближении малых скоростей ${}^{v}/_{c} \ll 1$ и малых ускорений $ar_0 \ll c^2$ и при игнорировании запаздывания

Градиентное электрическое поле (z компонента)

$$E_1 = \int\limits_{r_q} \int\limits_{\varphi_q} \int\limits_{\theta_q} \left\{ \frac{z_a - z_q}{R_0} \left(1 + \frac{a\left(z_a - z_q\right)}{c^2} \right) \right\} \frac{\rho\left(r_q\right) {r_q}^2 \sin\left(\theta_q\right)}{{R_0}^2} d\theta_q d\varphi_q dr_q$$

Электрическое поле самоиндукции (z компонента)

$$E_2 = \int\limits_{r_q} \int\limits_{\varphi_q} \int\limits_{\theta_q} \left\{ -\frac{a_z R_0}{c^2} \right\} \frac{\rho\left(r_q\right) {r_q}^2 \sin\left(\theta_q\right)}{{R_0}^2}\ d\theta_q d\varphi_q dr_q$$

где R_0 расстояние от точки источника заряда к точке наблюдения без учёта запаздывания.

Откуда

$F_1 = \frac{\overrightarrow{a}}{c^2} \int\limits_{V_a} \int\limits_{V_q} \left(z_a - z_q\right)^2 \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0^3}\ dV_q dV_a$

$F_2 = -\frac{\overrightarrow{a}}{c^2} \int\limits_{V_a} \int\limits_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0}\ dV_q dV_a$

Сопоставляя с законами Ньютона для электромагнитной массы получаем выражение

$m_1 = -\frac{1}{c^2} \int\limits_{V_a} \int\limits_{V_q} \left(r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q) \right)^2 \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0^3} \; dV_q dV_a$

$m_2 = \frac{1}{c^2} \int\limits_{V_a} \int\limits_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0} \; dV_q dV_a$

(в системе сгс) и соответственно

$m_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V_a} \int\limits_{V_q} \left(r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q) \right)^2 \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0^3} \; dV_q dV_a$

$m_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V_a} \int\limits_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0} \; dV_q dV_a$ в системе СИ

Рассчитаем теперь электромагнитную массу равномерно заряженной сферы радиуса r_0

Поскольку расстояние между координатами заряда и точки наблюдения $R_0 = |\overrightarrow{r_q} - \overrightarrow{r_a}|$ находится в знаменателе, то в сферической системе координат можно применить разложение по сферическим гармоникам следующего вида [4] если $(r_q < r_a)$ то

$\frac{1}{|\overrightarrow{r_q} - \overrightarrow{r_a}|} = \frac{1}{r_a} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_q}{r_a} \right)^l P_l \cos(\gamma)$

и если $(r_a < r_q)$ то

$\frac{1}{|\overrightarrow{r_q} - \overrightarrow{r_a}|} = \frac{1}{r_q} \sum\limits_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_a}{r_q} \right)^l P_l \cos(\gamma)$

В данной формуле $P_l \cos(\gamma)$ это полиномы Лежандра аргумент которых γ есть угол между векторами r_q и r_a. Применяя формулу, известную как теорему сложения

$P_l \cos(\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum\limits_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\theta_a, \varphi_a) \; Y_{l,m}(\theta_q, \varphi_q)$

получаем способ аналитического вычисления интеграла инертной электромагнитной массы.

Пусть заряд представляет собой сферу, равномерно заряженную по всему объёму тогда плотность заряда составит $\rho(r) = \frac{e}{4/3 \pi {r_0}^3}$

Производя вычисления для интеграла электромагнитной массы получено значение

$m_2 = \frac{1}{c^2} \frac{6}{5} \frac{e^2}{r_0}$ (сгс) и $m_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6}{5} \frac{e^2}{r_0}$ (СИ)

Пусть заряд представляет собой сферическую поверхность с равномерным поверхностным распределением заряда по поверхности сферы, равным $\sigma = \frac{e}{4\pi {r_0}^2}$) тогда для вычисления инертной электромагнитной массы потребуется формула $m = \frac{1}{c^2} \int\limits_{S_a} \int\limits_{S_q} \frac{\sigma(r_q)\sigma(r_a)}{R} \; dS_q dS_a$

Вычисления по которой дают следующий результат

$m_2 = \frac{1}{c^2} \frac{e^2}{r_0}$ (сгс) и $m_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^2}{r_0}$ (СИ)

Тамм [3] для собственной электрической энергии заряженного шара радиуса a находит $W = \frac{e^2}{2a}$ если заряд распределён на поверхности шара и $W = \frac{3e^2}{5a}$ если заряд распределён по всему объёму шара. Появление коэффициента $\frac{1}{2}$ в формуле энергии системы зарядов Тамм объясняет тем, что "в сумму энергия каждой пары зарядов входит дважды, так, например, в ней встретится как член $e_1 e_1 / R_{12}$ так и равный ему член $e_2 e_1 / R_{21}$".

Однако в задаче, рассмотренной в самом начале данной работы при нахождении силы, действующей на распределённый в объёме электрический заряд этой частицы со стороны электрического поля самоиндукции, подобные рассуждения неприменимы. Поскольку хотя и каждая пара зарядов de_1 и de_2 при совместном поступательном движении создаёт две одинаковые как по виду формулы, так и по значинию силы самоиндукции, они обе должны быть включены в общую электромагнитную инерцию, поскольку одна из них - это сила самоиндукции действующая на заряд de_1 со стороны поля заряда de_2 , а вторая это сила самоиндукции действующая на заряд de_2 со стороны поля заряда de_1.

Таким образом потенциальная энергия электростатического поля модели электрона в виде полой сферы $U_0 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r_0}$ (сгс) при том что инертная масса электрона этой модели равна $m = \frac{1}{c^2}\frac{e^2}{r_0}$ (сгс).

В любой другой модели потенциальная энергия электростатического поля заряженной частицы равна $U_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{V_a}\int\limits_{V_q}\frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0}\,dV_q dV_a$ (сгс) тогда как инертная масса $m = \frac{1}{c^2}\int\limits_{V_a}\int\limits_{V_q}\frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R_0}\,dV_q dV_a$ (сгс).

Русская википедия в статье "Классический радиус электрона"на момент написания данной работы даёт следующее определение:

Классический радиус электрона равен радиусу полой сферы, на которой равномерно распределён заряд, если этот заряд равен заряду электрона, а потенциальная энергия электростатического поля U_0 полностью эквивалентна половине массы электрона (без учета квантовых эффектов):

$U_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{e^2}{r_0} = \dfrac{1}{2}m_0c^2.$

Возникает закономерный вопрос: а чему соответствует вторая половина массы электрона?

Таким образом соотношение потенциальной энергией электростатического поля и энергией массы покоя электрона, приведенное в русской википедии подтверждается, но вопрос чему соответствует вторая половина энергии массы покоя электрона остаётся открытым.

3 Рассчёт Мисюченко через индуктивность

В работе [5] приводится способ вычисления инертной электромагнитной массы электрона исходя из коэффициента самоиндукции сферы и производной тока сферы по времени. Результат вычислений электромагнитной массы электрона авторы приводят следующий $m = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{e^2}{r_0}$ (СИ) то есть в два раза меньший, чем полученный в данной работе.

Анализ показывает, что приведенная авторами формула коэффициента самоиндукции сферы $L = \frac{\mu_0 r_0}{2\pi}$ (СИ) в 2 раза занижена. Автором данной работы было произведено вычисление коэффициента самоиндукции сферической поверхности с равномерно распределённым поверхностным зарядом. Получена формула $L = \frac{\mu_0 r_0}{\pi}$ (СИ) .

Далее авторы работы [5] пишут, "Отметим тот важный факт, что выведенная из закона самоиндукции масса полностью совпадает с Эйнштейновской массой $m = \frac{U}{c^2}$, если под полной энергией электрона U понимать собственную энергию его электрического поля."

Однако с учётом исправленного значения коэффициента самоиндукции сферы данное утверждение становится неверным.

4 Учёт запаздывания

Чтобы учесть запаздывание следует решить систему уравнений

$s = v\,(t - t') + \frac{a}{2}(t - t')^2$ и $R = c\,(t - t')$

Учитывая, что по теореме косинусов

$R^2 = {R_0}^2 + s^2 - 2R_0 s \cos(\alpha) = {R_0}^2 + s^2 - 2R_0 s \frac{z_{q'} - z_{a'}}{R_0}$

уравнение для вычисления запаздывающего момента принимает вид

$c^2\,(t - t')^2 = {R_0}^2 + s^2 + 2s\,(z_{a'} - z_{q'})$

5 Приближение малых скоростей с учётом запаздывания

Решение этой системы имеет весьма сложный вид, но если мы исследуем вопрос какова будет инертная масса покоя, то при решении этой системы мы можем положить $v = 0$. В этом случае для нахождения запаздывания нужно будет решить уравнение

$-\frac{1}{4}\,a^2 dt^4 + c^2 dt^2 - a\,dt^2(z_a - z_q) - R_0^2 = 0$

где $(t - t') = dt$

Это уравнение имеет 4 решения, но физически приемлемый смысл при положительном ускорении имеет решение

$dt = \frac{\sqrt{2\,c^2 - 2\,a\,dz - 2\,\sqrt{-R_0^2 a^2 + c^4 - 2\,a c^2\,dz + a^2\,dz^2}}}{a}$

где $dz = z_{a'} - z_{q'}$

В приближении малых скоростей ${}^{v}/_{c} \ll 1$ но при учете запаздывания

$$\overrightarrow{E} = \int\limits_{r_q}\int\limits_{\varphi_q}\int\limits_{\theta_q} \left\{-\frac{\overrightarrow{a}\,R}{c^2}\right\} \frac{\rho\,(r_q)\,{r_q}^2 \sin(\theta_q)}{{R^*}^2}\; d\theta_q d\varphi_q dr_q$$

Откуда

$$F_z = -\frac{\overrightarrow{a}}{c^2}\int\limits_{V_a}\int\limits_{V_q} \frac{\rho\,(r_q)\,\rho\,(r_a)}{R}\; dV_q dV_a$$

где $R = c\frac{\sqrt{2\,c^2 - 2\,a\,dz - 2\,\sqrt{-R_0^2 a^2 + c^4 - 2\,a c^2\,dz + a^2\,dz^2}}}{a}$

a	VEGAS RESULT	
0	1.20057324 +- 0.00117095	
0.0001	1.20057145 +- 0.00117094	
0.001	1.20057159 +- 0.00117101	
0.01	1.20056853 +- 0.00117642	
0.1	1.19887814 +- 0.00117946	
0.2	1.19315830 +- 0.00116342	
0.3	1.18205714 +- 0.00116337	
0.4	1.15008831 +- 0.00112842	
0.5	1.09737467 +- 0.00108701	
0.6	1.03839069 +- 0.00101328	
0.7	0.98022447 +- 0.00101643	
0.8	0.92625001 +- 0.00104227	
0.9	0.87671199 +- 0.00105610	
1.0	0.83227193 +- 0.00107483	
2.0	0.56319872 +- 0.00103720	
5.0	0.32020001 +- 0.00083749	
10.0	0.20964075 +- 0.00070045	
100.0	0.05666584 +- 0.00038991	
1000.0	0.00130377 +- 0.00006038	
1250.0	0.00081384 +- 0.00003357	
1500.0	0.00000082 +- 0.00000028	
1750.0	0.00000017 +- 0.00000006	
2000.0	0.00000010 +- 0.00000005	9.51624e-08 +- 4.99632e-08
2100.0	0.00000001 +- 0.00000000	9.04571e-09 +- 3.96347e-09

6 Результат численного интегрирования. Зависимость электромагнитной инертной массы от ускорения

Пусть заряд представляет собой сферу, равномерно заряженную по всему объёму. Для численного интегрирования была использована программа Cuba-4.2, интегратор VEGAS. Значения радиуса сферы и ее заряда заданы равными единице $r_0 = 1.0$ и $q = 1.0$. Численное интегрирование этим итегратором для формулы не учитывающей запаздывание дает результат $1.20057324 + -0.00117095$ что вполне соответствует аналитическому решению $m = \frac{1}{c^2}\frac{6}{5}\frac{e^2}{r_0}$ (сгс) и $m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{6}{5}\frac{e^2}{r_0}$ (СИ)

При интегрировании с учётом запаздывания скорость света была установлена равной $c = 1.0$.

Результаты интегрирования при различных ускорениях сведены в таблицу.

Электромагнитная масса уменьшается с ускорением. При достижении определённого предела электромагнитная масса практически исчезает. Эта закономерность выявляется при учёте запаздывания. Физически это означает что при достижении колосальных ускорений частица ускользает от действия своего поля.

7 Приближение малых ускорений с учётом запаздывания

В приближении малых ускорений $ar_0 \ll c^2$ при учете запаздывания

$$\overrightarrow{E} = \int\limits_{V_q} \left\{ \frac{\overrightarrow{v}}{c} \left(\frac{R}{R^*} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) + 1 \right) - \frac{\overrightarrow{a} R}{c^2} \right\} \frac{\rho\left(r_q\right)}{{R^*}^2} \, dV_q$$

Откуда

$F_z = \int\limits_{V_a} \int\limits_{V_q} \left\{ \frac{\overrightarrow{v}}{c} \left(\frac{R}{R^*} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) + 1 \right) - \frac{\overrightarrow{a} R}{c^2} \right\} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{{R^*}^2} \, dV_q dV_a$

Запаздывающий момент рассчитывается с помощью выражения

$dt = \frac{dzv - \sqrt{R_0^2 c^2 - \left(R_0^2 - dz^2\right) v^2}}{c^2 - v^2}$

Следовательно

$R = c\frac{v(r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q)) - \sqrt{R_0^2 c^2 - \left(R_0^2 - (r_a \cos(\theta_a) - r_q \cos(\theta_q))^2\right) v^2}}{c^2 - v^2}$

и радиус Лиенара-Вихерта

$R^* = R - \frac{v}{c} \left(r_a \cos\left(\theta_a\right) - r_q \cos\left(\theta_q\right)\right)$

8 Расчёт инертной электромагнитной массы протона и нейтрона

Представляет интерес расчёт инертной электромагнитной массы протона и нейтрона на основании предложенных в данной работе формул.

Плотности распределения заряда для протона

$\rho_p = \frac{e^{\left(-\frac{r_q^2}{r_0^2}\right)}}{\pi^{\frac{3}{2}} r_0^3}$, где $r_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle r_p \right\rangle_{rms}$ и $\left\langle r_p \right\rangle_{rms} = 0.8 \ fm$

и для нейтрона

$\rho_n = \frac{2 \left\langle r_n^2 \right\rangle r_q^2 \left(\frac{2\, r_q^2}{r_1^2} - 5 \right) e^{\left(-\frac{r_q^2}{r_1^2}\right)}}{15\, \pi^{\frac{3}{2}} r_1^7}$, где $\left\langle r_n^2 \right\rangle = -\ 0.113 \ fm^2$ и $r_1 = 0.71 \sqrt{\frac{2}{5}} \ fm$

были взяты из работы [6].

Аналитический результат расчёта интеграла $\int\limits_{V_a} \int\limits_{V_q} \frac{\rho(r_q)\rho(r_a)}{R} \, dV_q dV_a$ с помощью разложения по сферическим функциям для протона составил $\frac{1.875\,\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ что равно 1.49603355150537

Для контроля этот же интеграл был взят численно с помощью функции integrate.quad математического пакета scipy

(1.4960348943817992, 0.0026474827067254846)

Кроме того для численного интегрирования была опробована программа Cuba-4.2 двумя методами

VEGAS RESULT: 1.49695439 +- 0.00345851 p = 0.006

SUAVE RESULT: 1.49424975 +- 0.00149158 p = 1.000

Коэффициент преобразования полученного результата в сиситему СИ $k = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^2}{10^{-15}}$, при умножении на который вычисленная электромагнитная инертная масса протона составила $3.84027312853036 \times 10^{-30}$ кг что в 4.21573319817234 раза больше массы электрона.

Аналитический результат расчёта того же интеграла для нейтрона

$$\frac{\left(4.48918680252563\times10^{-28}\right)\sqrt{5}\sqrt{2}\left(1824320471\sqrt{10}\sqrt{5}+14369256122481640385175552\sqrt{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

что соответствует 0.0162757880193542

Результат численного интегрирования в программе Cuba-4.2

VEGAS RESULT: 0.00183803 +- 0.00000179 p = 0.000

SUAVE RESULT: 0.00183606 +- 0.00000183 p = 1.000

В системе СИ электромагнитная инертная масса нейтрона $4.17794582972344\times 10^{-32}$ кг что составляет 0.0458641985739987 от массы электрона.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д. Ливщиц Е.М. Теория поля. М. 1973*

[2] *Re: Как запаздывающий Лиенар-Вихерт становится "незапаздывающим". Визуализация*
`http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/yabb2/YaBB.pl?num=1528093569/330#330`

[3] *И.Е.Тамм. Основы теории электричества. М. 1957*

[4] *З.Флюгге Задачи по квантовой механике т.2 М. "Мир"1974. стр. 296*

[5] *В. Ганкин, Ю. Ганкин, О. Куприянова, И. Мисюченко. История электромагнитной массы*

[6] S. Haddad and S. Suleiman *NEUTRON CHARGE DISTRIBUTION AND CHARGE DENSITY DISTRIBUTIONS IN LEAD ISOTOPES ACTA PHYSICA POLONICA B, Vol. 30 (1999) No 1*
`http://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=30&page=119`