28

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЭЛЕКТРОНА[1]

Представление Уленбека и Гаудсмита о вращающемся электроне применено по методу Томаса с помощью специальной теории относительности для установления уравнений движения в заданном электромагнитном поле. Электрон трактуется при этом просто как некоторая точка, с которой связан шестивектор („тензор моментов"), определяющий ее магнитные свойства. Таким путем удается дать более строгое обоснование и дополнить предложенное Томасом объяснение причины аномального эффекта Зеемана. В заключение определяется электромагнитное поле, создаваемое „вращающимся" электроном, и высказывается предположение, что структура атомных ядер обусловливается главным образом магнитостатическими взаимодействиями между электронами и протонами.

Введение. Недавно Уленбек и Гаудсмит [1] с большим успехом применили предложенное Комптоном представление о вращающемся квантовом электроне к вопросу о мультиплетной структуре спектральных термов в оптической и рентгеновской области. Они исходили при этом из того обстоятельства, что в координатной системе S', в которой вращающийся вокруг ядра электрон покоится, действует дополнительное магнитное поле

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{c}[\mathbf{vE}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость поступательного движения электрона по отношению к координатной системе S, неподвижно связанной с ядром, а $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, вызванного ядром, по отношению к этой же системе координат.

Если приписать теперь электрону собственный магнитный момент $\mathbf{m}'$, то магнитному полю (1) должна отвечать добавочная магнитная энергия

$$U' = -\mathbf{m}'\mathbf{H}' = \mathbf{m}'\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{E}\right]. \qquad (1a)$$

Уленбек и Гаудсмит показали, что структура оптических и рентгеновских спектров может быть объяснена непосредственно, если приписать азимутальному квантовому числу (k), в соответствии с гипотезой Ланде, значения $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ и т. д. и, кроме того, к результирующей „релятивистской поправке" для энергии термов добавить среднее значение дополнительной магнитной энергии (1a) в предположении, что $\mathbf{m}'$ равно половине боровского магнетона, а отношение магнитного момента $\mathbf{m}'$ к соответствующему механическому моменту количества движения имеет

---

[1] Работа написана в апреле 1926 г. Опубликована под названием „Die Elektrodynamik des rotierenden Elektrons" в „Zeitschrift für Physik" (37, 243, 1926). (*Прим. ред.*).

то же значение $\frac{e}{2cm_0}$, что и при орбитальном движении ($e<0$ — заряд электрона, m_0 — его масса, c — скорость света). Иными словами, момент количества движения для „собственного вращения" при этом также должен быть положен равным половине обычного боровского элементарного значения $\frac{h}{2\pi}$.

Представление о вращающемся электроне позволяет, далее, дать полное объяснение аномального эффекта Зеемана (при этом, например, становится понятным эффект Пашена—Бака для водородных линий), если заменить „атомный остов" прежней схемы Зоммерфельда—Ланде собственным вращением электрона. При этом, сохраняя прежнее значение $\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}$ для момента количества движения электрона, следует, однако, приписать его магнитному моменту удвоенное значение $\mathbf{m}=2\mathbf{m}'$, которое равно, таким образом, целому магнетону Бора. Отношение обоих моментов — магнитного и механического — должно, таким образом, быть принято равным

$$\varkappa=\frac{e}{cm_0} \tag{2}$$

в противоречии с прежним предположением, которое казалось необходимым для объяснения мультиплетной структуры.

§ 1. Теория Томаса. Томас [2] попытался разрешить это противоречие на основе следующих релятивистских соображений.[1]

Рассмотрим электрон в два следующие друг за другом момента времени $t'=t$ и $t''=t+dt$. Пусть S' и S'' — соответствующие „системы покоя", которые получаются из координатной системы S с помощью преобразования Лоренца б е з у ч е т а в р а щ е н и я. Легко видеть, что система S'' может быть получена непосредственно из системы S' посредством бесконечно малого преобразования Лоренца, которое отвечает бесконечно малой относительной скорости $d\mathbf{v}=\dot{\mathbf{v}}dt$ ($\dot{\mathbf{v}}$ — ускорение) и, вместе с тем, б е с к о н е ч н о м а л о м у п о в о р о т у координатных осей, величина и направление которого определяются (приближенно) вектором

$$d\mathbf{w}=\frac{1}{2c^2}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}]\,dt. \tag{3}$$

Изменение момента количества движения электрона $\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}$ во времени, согласно Томасу, должно определяться не обычным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}\right)=[\mathbf{m}\mathbf{H}'], \tag{4}$$

а уравнением

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}\right)=[\mathbf{m}\mathbf{H}], \tag{4а}$$

где

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}\right)-\left[\frac{dw}{dt}\cdot\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}\right] \tag{4б}$$

---

[1] Рукопись этой работы Томаса была любезно предоставлена мне д-ром В. Паули в конце февраля, что и побудило меня предпринять настоящую работу.

— скорость изменения вектора $\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}$ по отношению к системе координат, которая при трансляционном ускорении $\dot{\mathbf{v}}$ и скорости поворота $\frac{d\mathbf{w}}{dt}$ за время dt преобразуется из S' в S''.

Подставляя вместо $\varkappa$ значение (2) и принимая во внимание, что $\frac{m_0}{e}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{E}$ (в первом приближении), получаем, согласно (1):

$$\left[\frac{d\mathbf{w}}{dt}\cdot\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}\right] = +\frac{1}{2}\left[\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{E}\right]\mathbf{m}\right] = \frac{1}{2}[\mathbf{mH}']$$

и, следовательно, согласно (4а) и (4б):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}\right) = \frac{1}{2}[\mathbf{mH}']. \tag{5}$$

Мы получим уравнение обычного вида (4), если вместо истинного магнитного момента $\mathbf{m}$ введем кажущийся момент $\mathbf{m}' = \frac{1}{2}\mathbf{m}$ и, следовательно, заменим $\varkappa$ на $\varkappa' = \frac{\varkappa}{2}$; при этом уравнение (5) перейдет в

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{m}'}{\varkappa'}\right) = [\mathbf{m}'\mathbf{H}'], \tag{5а}$$

в согласии с формулой (4).

Мы видим, таким образом, что изменение момента количества движения электрона во времени с точки зрения обычной теории отвечает вращательной силе, момент которой $\mathbf{f}' = [\mathbf{m}'\mathbf{H}']$ равен половине истинного вращательного момента $\mathbf{f} = [\mathbf{mH}]$. Соответственно, при рассмотрении изменения энергии, обусловленного наличием этого вращательного момента, следует ввести „кажущуюся“ магнитную энергию $U' = -\frac{1}{2}(\mathbf{mH}') = -(\mathbf{m}'\mathbf{H}')$.

Заметим, что изложенные результаты относятся к тому случаю, когда истинное магнитное поле отсутствует, т. е. когда напряженность магнитного поля в „координатной системе ядра“ S равна нулю. Если поле $\mathbf{H}$ отлично от нуля, то уравнение (5) надо заменить следующим, более общим уравнением:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}\right) = \frac{1}{2}[\mathbf{mH}'] + [\mathbf{mH}], \tag{6}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{m}'}{\varkappa'}\right) = [\mathbf{m}'\mathbf{H}'] + 2[\mathbf{m}'\mathbf{H}].$$

Полная магнитная энергия равна при этом

$$U = -\frac{1}{2}(\mathbf{mH}') = (\mathbf{mH}). \tag{6а}$$

Против теории Томаса, изложенной выше, могут быть, однако, выдвинуты веские возражения.

Во-первых, согласно этой теории, момент количества движения и магнитный момент электрона рассматриваются как инвариантные величины, что в действительности неверно, так как трехмерные векторы при преобразовании Лоренца должны определенным образом изменяться.

Во-вторых, эта теория относится исключительно к „вращательному движению" электрона. Отсюда должно было бы следовать, что для поступательного движения также и в случае $H = 0$ мы имеем дело не с половинным, а с полным магнитным моментом, согласно обычному выражению для силы $(\mathbf{m}\,\mathrm{grad})\mathbf{H}'$. В теории Томаса нет также доказательства того, что при отсутствии внешнего магнитного поля скорости прецессии „оси электрона" и плоскости орбиты одинаковы, так что результирующий момент количества движения остается постоянным по величине и направлению.

В дальнейшем мы установим точные уравнения движения „вращающегося" электрона путем последовательного четырехмерного преобразования (в духе специальной теории относительности, как и у Томаса) обычных трехмерных уравнений. При этом полностью разрешается противоречие между объяснениями мультиплетной структуры термов и эффекта Зеемана, отмеченное во Введении.

В результате оказывается, что уравнение Томаса (5) определяет не истинное, а лишь усредненное вековое изменение магнитного момента, т. е. что оно справедливо только тогда, когда $\frac{d}{dt}\mathbf{m}$ и $\mathbf{H}'$ заменены соответствующими средними значениями.[1]

§ 2. Тензор моментов. С самого начала мы откажемся от какого-либо рассмотрения структуры электрона и будем трактовать его просто как некоторую точку, свойства которой могут быть охарактеризованы определенными скалярными, векторными и тензорными величинами.

Что касается магнитных свойств электрона, то для их полной характеристики задание трехмерного вектора магнитного момента $\mathbf{m}$ принципиально недостаточно, так как трехмерный вектор должен рассматриваться только как пространственная часть (проекция) четырехмерного вектора (четырехвектора) или антисимметричного тензора (шестивектора).

Как известно, напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ представляет собой пространственную часть тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$, временна́я часть которого определяет напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ согласно схеме

$$\begin{pmatrix} F_{23} & F_{31} & F_{12} & F_{14} & F_{24} & F_{34} \\ H_1 & H_2 & H_3 & -iE_1 & -iE_2 & -iE_3 \end{pmatrix}. \tag{I}$$

В соответствии с этим магнитный момент электрона $\mathbf{m}$ мы определим как пространственную часть антисимметричного тензора $\mu_{\alpha\beta} = -\mu_{\beta\alpha}$ согласно схеме

$$\begin{pmatrix} \mu_{23} & \mu_{31} & \mu_{12} & \mu_{14} & \mu_{24} & \mu_{34} \\ m_1 & m_1 & m_3 & +ip_1 & +ip_2 & +ip_3 \end{pmatrix}, \tag{II}$$

где p_1, p_2, p_3 — пространственные компоненты трехмерного вектора $\mathbf{p}$, который аналогичен электрическому моменту диполя.[2]

Этот вектор мы определим из условия, согласно которому он должен обращаться в нуль ($\mathbf{p}' = 0$) в той системе координат S', где электрон покоится в данный момент времени. Тогда для любой координат-

[1] Примечание при корректуре. Из письменного сообщения д-ра В. Паули, полученного мною после окончания этой работы, я узнал, что Томас независимо от меня развил теорию такого же типа, как и изложенная ниже.

[2] Эта аналогия станет более ясной в дальнейшем.

ной системы S, по отношению к которой электрон обладает скоростью поступательного движения $\mathbf{v}$, по известным формулам преобразования для величин (II) и (I) получаем:

$$\mathbf{p}=\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{m}\right].^{1} \tag{7}$$

Этот результат[2] может быть также получен независимо от приведенных выше формул. Пусть x_α — координаты электрона и время, умноженное на $ic\,(ict=x_4)$, определенные по отношению к системе S. Построим из $\mu_{\alpha\beta}$ и $\dot{x}_\alpha=\frac{dx_\alpha}{d\tau}$, где $d\tau=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ — собственное время электрона, четырехмерный вектор $\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta$ (здесь и в дальнейшем во всех случаях, когда один и тот же индекс встречается дважды, мы будем опускать знак суммирования). В „системе покоя" S' компоненты этого вектора $\mu'_{\alpha\beta}\dot{x}'_\beta$ должны обращаться в нуль, так как $\dot{x}'_1=\dot{x}'_2=\dot{x}'_3=0$ и, по нашему предположению, $\mu'_{14}=\mu'_{24}=\mu'_{34}=0$. Отсюда следует, однако, что для любой другой системы координат S должны выполняться условия

$$\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta=0, \tag{7a}$$

выражающие условия равенства упомянутого вектора нулю. Подставляя для $\mu_{\alpha\beta}$ и $\dot{x}_\beta$ соответствующие трехмерные выражения, получаем при $\alpha=1,\ 2,\ 3$ пространственные компоненты вектора

$$\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{m}\right]-\mathbf{p}\right\},$$

тогда как при $\alpha=4$

$$\mu_{4\beta}\dot{x}_\beta=-\frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\mathbf{v}\mathbf{p}).$$

Из условия равенства нулю первого выражения, т. е. из формулы (7), непосредственно следует равенство нулю второго выражения. С помощью компонент тензора $\mu_{\alpha\beta}=-\mu_{\beta\alpha}$, как известно, могут быть построены следующие две инвариантные скалярные величины

$$m^2-p^2=\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}$$

и

$$(\mathbf{m}\mathbf{p})=i\,(\mu_{23}\mu_{14}+\mu_{31}\mu_{24}+\mu_{12}\mu_{34}).$$

При этом, в связи с выражением (7) (т. е. в силу равенства $\mathbf{p}'=0$):

$$(\mathbf{m}\mathbf{p})=m'p'=0$$

и

$$m^2-p^2=m^2-\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{m}\right]^2=m'^2. \tag{8}$$

---

[1] Описание магнитного и электрического момента электрона с помощью четырехмерного тензора, а также соотношение (7) остаются справедливыми и в квантовой теории. (*Прим. ред.*).

[2] Как заметил В. Паули.

Последнее уравнение определяет зависимость магнитного момента электрона от скорости его поступательного движения $\mathbf{v}$. Оно может быть переписано в форме

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}},$$

где $v_\perp$ — компонента $\mathbf{v}$, перпендикулярная к $\mathbf{m}$, а $m' = \mu$ — значение магнитного момента в „системе покоя".

§ 3. Изменение тензора моментов во времени. Мы введем в рассмотрение четырехмерные величины, соответствующие магнитной энергии — $(\mathbf{mH}) = -m_\alpha H_\alpha$ и магнитному моменту вращения $[\mathbf{mH}]$, т. е. вектору или антисимметричному тензору с компонентами $m_\alpha H_\beta - m_\beta H_\alpha$. Четырехмерное „обобщение" энергии, очевидно, представляет собой скаляр

$$U = -\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -(\mathbf{mH}) - (\mathbf{pE}). \tag{9}$$

Соответствующее „обобщение" для момента вращения дается, как легко видеть, антисимметричным четырехмерным тензором (шестивектором)

$$f_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma} \tag{10}$$

с пространственной частью

$$(f_{23}, f_{31}, f_{12}) = [\mathbf{mH}] + [\mathbf{pE}] \tag{10а}$$

и временно́й частью

$$-i(f_{14}, f_{24}, f_{34}) = -[\mathbf{mE}] + [\mathbf{pH}]. \tag{10б}$$

Момент количества движения электрона мы определим как пространственную часть тензора

$$\frac{1}{\varkappa}\mu_{\alpha\beta},$$

где $\varkappa = \frac{e}{cm_0}$.

Простейшее четырехмерное „обобщение" дифференциального уравнения (4), определяющего изменение $\mu_{\alpha\beta}$ во времени, будет в таком случае иметь вид

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} = f_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

т. е.

$$\frac{\dot{\mathbf{m}}}{\varkappa} = [\mathbf{mH}] + [\mathbf{pE}] \tag{11а}$$

и

$$\frac{\dot{\mathbf{p}}}{\varkappa} = [\mathbf{pH}] - [\mathbf{mE}], \tag{11б}$$

где точка обозначает дифференцирование по собственному времени.

Уравнения (11а) и (11б) могли бы удовлетворяться одновременно лишь в том случае, если бы векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$ a priori были независимыми друг от друга. В действительности между ними должно существовать соотношение (7), с которым уравнения (11а) и (11б) несовместимы. Однако легко преобразовать уравнение (11) так, чтобы условие (7а) оказалось выполненным. С этой целью мы введем в рассмотрение некоторый четырехмерный вектор a_α и построим инвариантный скаляр

$$-\mu_{\alpha\beta}a_\alpha\dot{x}_\beta=-\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}(a_\alpha\dot{x}_\beta-a_\beta\dot{x}_\alpha), \tag{12}$$

который, согласно (7а), тождественно равен нулю. Этот скаляр мы добавим к „энергии" U, т. е. заменим последнюю на

$$U'=-\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}(F_{\alpha\beta}+a_\alpha\dot{x}_\beta-a_\beta\dot{x}_\alpha)=-\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta}. \tag{12a}$$

Соответственно, тензор $f_{\alpha\beta}$ мы заменим на

$$f'_{\alpha\beta}=\mu_{\alpha\gamma}F'_{\beta\gamma}-\mu_{\beta\gamma}F'_{\alpha\gamma}, \tag{12б}$$

т. е.

$$f'_{\alpha\beta}=f_{\alpha\beta}+a_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma}-\dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}), \tag{12в}$$

а „уравнение движения" (11) заменим уравнением

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa}=f'_{\alpha\beta} \tag{13}$$

или, подробнее:

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa}=\mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma}-\mu_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}+a_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma}-\dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}). \tag{13a}$$

Определим теперь вектор a_α таким образом, чтобы это уравнение оказалось в согласии с соотношением (7а). Из (13а) при учете (7а) и тождества

$$\dot{x}_\alpha\dot{x}_\alpha=-c^2$$

следует.

$$\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa}\dot{x}_\beta=-\frac{1}{\varkappa}\mu_{\alpha\beta}\ddot{x}_\beta=\mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta-a_\gamma\mu_{\alpha\gamma}\dot{x}_\beta\dot{x}_\beta=\mu_{\alpha\gamma}(F_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta+a_\gamma c^2)$$

или

$$\mu_{\alpha\gamma}\left(\frac{\ddot{x}_\gamma}{\varkappa}+F_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta+a_\gamma c^2\right)=0.$$

Таким образом,

$$a_\gamma=\frac{1}{c\varkappa^2}(\varkappa F_{\gamma\beta}\dot{x}_\beta-\ddot{x}_\gamma). \tag{14}$$

Независимо от этого выражения для a_γ, принимая во внимание (7а), получаем из (13а):

$$\frac{1}{\varkappa}\mu_{\alpha\beta}\dot{\mu}_{\alpha\beta}=\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma}-\mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}=2\mu_{\alpha\beta}\mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma}=0$$

(в силу антисимметричного характера $F_{\beta\gamma}$), т. е.

$$\frac{d}{d\tau}\mu^2_{\alpha\beta}=0,$$

или

$$\frac{1}{2}\mu^2_{\alpha\beta}=m^2-p^2=\mu^2=\text{const}. \tag{15}$$

Эта формула показывает, что магнитный момент электрона (для рассматриваемой „системы покоя") действительно может быть квантованным; если бы его значение не оставалось постоянным, то о его квантовании не могло бы быть и речи.

Уравнения движения немагнитного электрона, как известно, имеют вид

$$m_0 \ddot{x}_\alpha = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta,$$

или, при $\frac{e}{m_0 c} = \varkappa$,

$$\ddot{x}_\alpha = \varkappa F_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta. \tag{15а}$$

Если пренебречь силой, вызванной наличием магнитного момента, по сравнению с силой Лорентца $e\left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{H}\right]\right)$, соответствующей четырехвектору $\frac{e}{c} F_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta$, то, согласно (14) и (15а), получаем:

$$a_\gamma \approx 0. \tag{15б}$$

В этом приближении, т. е. пренебрегая возмущением поступательного движения электрона, обусловленным магнитными силами, можно, таким образом, определить его „вращательное движение“, т. е. изменение вектора $\mathbf{m}$ во времени с помощью простых уравнений (11) или (11а).

Полагая в (11а), согласно (7), $\mathbf{p} = \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{m}\right]$, получаем:

$$\frac{\dot{\mathbf{m}}}{\varkappa} \approx [\mathbf{mH}] + \left[\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{m}\right]\mathbf{E}\right]. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда электрон движется вокруг ядра в слабом внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$. Тогда — в еще более грубом приближении $\left(\text{опуская члены, квадратичные относительно } \frac{1}{c}\right)$ — можно положить

$$\mathbf{E} \approx \frac{m_0}{e} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{16а}$$

Второй член правой части уравнения (16) принимает при этом вид

$$\frac{m_0}{ec}\left[[\mathbf{vm}]\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right].$$

Вычислим среднее значение этого выражения для невозмущенного движения.

Имеем (для невозмущенного движения!):

$$\overline{\frac{d}{dt}[[\mathbf{vm}]\mathbf{v}]} = \overline{\left[[\mathbf{vm}]\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]} + \overline{\left[\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{m}\right]\mathbf{v}\right]} = 0.$$

Далее, справедливо следующее тождество:

$$\left[[\mathbf{vm}]\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] + \left[\left[\mathbf{m}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]\mathbf{v}\right] + \left[\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{v}\right]\mathbf{m}\right] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\left[[\mathbf{vm}]\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{m}\overline{\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{v}\right]}\right],$$

или, согласно (16а) и (1):

$$\overline{\left[\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{m}\right]\mathbf{E}\right]} \approx \frac{1}{2c}\,[\mathbf{m}\,\overline{[\mathbf{E}\mathbf{v}]}] = \frac{1}{2}\,[\mathbf{m}\overline{\mathbf{H}'}]. \tag{16б}$$

Вековое изменение вектора $\mathbf{m}$ определяется, следовательно, — в принятом выше приближении — уравнением

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\overline{d\mathbf{m}}}{dt} \approx [\mathbf{m}\mathbf{H}] + \frac{1}{2}\,[\mathbf{m}\overline{\mathbf{H}'}]. \tag{17}$$

Последнее представляет собой исправленное уравнение Томаса (6).

§ 4. Вывод уравнений движения из принципа Гамильтона. Осуществим теперь более строгий вывод дифференциального уравнения (13) для „вращательного движения" электрона на основе принципа Гамильтона; при этом одновременно будут получены также и более точные дифференциальные уравнения для поступательного движения.

Положим, как обычно:

$$\delta \int L\,d\tau = 0 \tag{18}$$

при дополнительных условиях

$$\dot{x}_\alpha^2 = -c^2, \tag{18а}$$

$$\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta = 0. \tag{18б}$$

Функцию Лагранжа запишем при этом в виде

$$L = \frac{e}{c}\,\varphi_\alpha \dot{x}_\alpha + T^* + \frac{1}{2}\,\mu_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \tag{19}$$

где T^* — „кинетическая энергия" вращательного движения.

Эту энергию, в соответствии с обычной трехмерной механикой, мы будем рассматривать как функцию „угловой скорости"; последнюю характеризуем антисимметричным тензором $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$. При этом, по определению:

$$\delta T^* = \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\,\delta\omega_{\alpha\beta}. \tag{19а}$$

Для нахождения вариации $\mu_{\alpha\beta}$ рассмотрим прежде всего соответствующую операцию обычной механики. Работа, производимая магнитной силой $[\mathbf{m}\mathbf{H}]$ при виртуальном бесконечно малом повороте $\delta\mathbf{w}$, равна скалярному произведению $(\delta\mathbf{w}\,[\mathbf{m}\mathbf{H}])$. С другой стороны, она должна равняться уменьшению магнитной энергии — $\delta\,(-\mathbf{m}\mathbf{H}) = -(\delta\mathbf{m}\cdot\mathbf{H})$. Таким образом $(\delta\mathbf{m}\cdot\mathbf{H}) = (\delta\mathbf{w}\,[\mathbf{m}\mathbf{H}])$, или $(\delta\mathbf{m}\cdot\mathbf{H}) = ([\delta\mathbf{w}\cdot\mathbf{m}]\,\mathbf{H})$ и, следовательно:

$$\delta\mathbf{m} = [\delta\mathbf{w}\cdot\mathbf{m}].$$

Соответствующая четырехмерная вариационная формула должна получаться таким же путем, каким формула (10) получается из трехмерного выражения для вращающего момента $[\mathbf{m}\mathbf{H}]$. Если ввести четырехмерный антисимметричный „тензор вращения" $\delta\Omega_{\alpha\beta}$, пространственная часть которого равна вектору $\delta\mathbf{w}$, то

$$\delta\mu_{\alpha\beta} = \delta\Omega_{\alpha\gamma}\cdot\mu_{\beta\gamma} - \delta\Omega_{\beta\gamma}\cdot\mu_{\alpha\gamma}. \tag{19б}$$

Величины $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ (так же, как и $\delta\mathbf{w}$) не являются, разумеется, точными дифференциалами, т. е. „угловых координат“ $\Omega_{\alpha\beta}$, соответствующих координатам x_α, не существует (неголономная система). Несмотря на это, наряду с соотношениями

$$\delta\dot{x}_\alpha = \frac{d}{d\tau}\delta x_\alpha \tag{20}$$

должны, очевидно, иметь место и соответствующие перестановочные соотношения для $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ и $d\Omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}d\tau$, т. е.

$$\delta\omega_{\alpha\beta} = \frac{d}{d\tau}\delta\Omega_{\alpha\beta}. \tag{20a}$$

С помощью приведенных выше формул и соотношений

$$\delta\varphi_\alpha = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\gamma}\delta x_\gamma; \qquad \dot{\varphi}_\alpha = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\gamma}\dot{x}_\gamma;$$

$$\delta F_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\delta x_\gamma; \quad \dot{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\dot{x}_\gamma$$

получаем:

$$\delta L = \frac{e}{c}\cdot\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\gamma}\dot{x}_\alpha\delta x_\gamma - \frac{e}{c}\cdot\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\gamma}\dot{x}_\gamma\delta x_\alpha + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c}\varphi_\alpha\delta x_\alpha\right) -$$

$$-\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\delta\Omega_{\alpha\beta} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\delta\Omega_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}\delta x_\gamma +$$

$$+\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\left(\delta\Omega_{\alpha\gamma}\mu_{\beta\gamma} - \delta\Omega_{\beta\gamma}\mu_{\alpha\gamma}\right),$$

или, так как $\dfrac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_\beta} - \dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\alpha} = F_{\beta\alpha}$:

$$\delta L = \left(\frac{e}{c}F_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta + \frac{1}{2}\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\right)\delta x_\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{\dot{\mu}_{\alpha\beta}}{\varkappa} + \mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma}\right)\delta\Omega_{\alpha\beta} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c}\varphi_\alpha\delta x_\alpha + \frac{\mu_{\alpha\beta}}{2\varkappa}\delta\Omega_{\alpha\beta}\right).$$

Точно так же, вводя неопределенные множители Лагранжа λ и a_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), получаем из (18а) и (18б):

$$\lambda\dot{x}_\alpha\delta\dot{x}_\alpha = -\delta x_\alpha\frac{d}{d\tau}(\lambda\dot{x}_\alpha) + \frac{d}{d\tau}(\lambda\dot{x}_\alpha\delta x_\alpha) = 0$$

и

$$a_\alpha\delta(\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta) = \frac{1}{2}(a_\alpha\delta\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta - a_\beta\delta\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha) = \frac{d}{d\tau}(a_\alpha\mu_{\alpha\beta}\delta x_\beta) - \delta x_\alpha\frac{d}{d\tau}(\mu_{\beta\alpha}a_\beta) +$$

$$+\frac{1}{2}(a_\alpha\dot{x}_\beta - a_\beta\dot{x}_\alpha)(\delta\Omega_{\alpha\gamma}\mu_{\beta\gamma} - \delta\Omega_{\beta\gamma}\mu_{\alpha\gamma}) = 0$$

или, поскольку $\dot{x}_\beta\mu_{\beta\gamma} = \dot{x}_\alpha\mu_{\alpha\gamma} = 0$:

$$a_\alpha\delta(\mu_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta) = \frac{d}{d\tau}(a_\alpha\mu_{\alpha\beta}\delta x_\beta) - \delta x_\alpha\frac{d}{d\tau}(\mu_{\beta\alpha}a_\beta) +$$

$$+\frac{1}{2}\delta\Omega_{\alpha\beta}a_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}) = 0.$$

Таким образом, при обычном предположении о том, что вариации δx_α, $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль на пределах интеграла (18), из (18), (18а) и (18б) следует (в результате сложения записанных выше выражений и приравнивания нулю коэффициентов при δx_α и $\delta\Omega_{\alpha\beta}$)

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda\dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha}a_\beta) = \frac{e}{c}F_{\alpha\beta}\dot{x}_\beta + \frac{1}{2}\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \tag{21}$$

и

$$\frac{1}{\varkappa}\dot{\mu}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma} + a_\gamma(\dot{x}_\alpha\mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta\mu_{\alpha\gamma}).$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (13а), первое представляет собой обобщение обычного уравнения движения (15а) для немагнитного электрона.

Соответственно, полагаем

$$\lambda = m_0 + \lambda', \tag{21а}$$

где λ' — добавочный член, зависящий от магнитного момента электрона. Осуществив дифференцирование в левой части (21), получаем, согласно (15а):

$$\lambda'\ddot{x}_\alpha + \dot{\lambda}'\dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha}\dot{a}_\beta + \dot{\mu}_{\beta\alpha}a_\beta = \varkappa m_0 c^2 a_\alpha + \frac{1}{2}\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}.$$

Умножая на $\dot{x}_\alpha$ и используя соотношения $\dot{x}_\alpha^2 = -c^2$, $\dot{x}_\alpha\ddot{x}_\alpha = 0$ и $a_\alpha\dot{x}_\alpha = 0$, находим:

$$-c^2\dot{\lambda}' + \dot{\mu}_{\beta\alpha}a_\beta\dot{x}_\alpha = \frac{1}{2}\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\alpha = \frac{1}{2}\mu_{\beta\gamma}\frac{dF_{\beta\gamma}}{d\tau}$$

или

$$-c^2\dot{\lambda}' = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2}\dot{\mu}_{\alpha\beta}(F_{\alpha\beta} + a_\alpha\dot{x}_\beta - a_\beta\dot{x}_\alpha).$$

Из (12а), (12б) и (13), в связи с антисимметричным характером тензора $\mu_{\alpha\beta}$, получаем:

$$\frac{1}{2}\dot{\mu}_{\alpha\beta}(F_{\alpha\beta} + a_\alpha\dot{x}_\beta - a_\beta\dot{x}_\alpha) = \frac{1}{2}\dot{\mu}_{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta} = \frac{\varkappa}{2}(\mu_{\alpha\gamma}F'_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}F'_{\alpha\gamma})F'_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{\varkappa}{2}(\mu_{\alpha\beta}F'_{\gamma\beta}F'_{\alpha\gamma} - \mu_{\beta\alpha}F'_{\gamma\alpha}F'_{\gamma\beta}) = \varkappa\mu_{\alpha\beta}F'_{\alpha\gamma}F'_{\beta\gamma} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda' = -\frac{1}{2c^2}\mu_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{21б}$$

Приращение массы m_0 равно, таким образом, „относительной магнитной энергии“ электрона (по отношению к ядру и другим частицам, создающим поле $F_{\alpha\beta}$), деленной на квадрат скорости света.

Выражение $\mu_{\beta\alpha}a_\alpha$ в формуле (21) можно рассматривать как α-компоненту дополнительного импульса, который соответствует абсолютной энергии электрона, т. е. кинетической энергии его вращения.

Подставляя (21а) в (21) и принимая во внимание (15а), получаем:

$$\frac{d}{d\tau}(\lambda'\dot{x}_\alpha + \mu_{\beta\alpha}a_\alpha) = c^2 m_0\varkappa a_\alpha + \frac{1}{2}\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}. \tag{22}$$

Это уравнение можно использовать для приближенного определения a_α. Действительно, пренебрегая левой частью (22) (так как $c^2 m_0 \varkappa = ec$), имеем:

$$a_\alpha = -\frac{1}{2ec}\mu_{\beta\gamma}\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}. \tag{22a}$$

§ 5. Поступательное движение „вращающегося" электрона в атоме. Из уравнения (21) следует

$$x_\alpha \frac{d}{d\tau}(\lambda \dot{x}_\beta + \mu_{\gamma\beta}a_\gamma) - x_\beta \frac{d}{d\tau}(\lambda \dot{x}_\alpha + \mu_{\gamma\alpha}a_\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_{\rho\sigma}\left(x_\alpha \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha}\right),$$

или

$$\frac{d}{d\tau}\{\lambda(x_\alpha \dot{x}_\beta - x_\beta \dot{x}_\alpha) + a_\gamma(x_\alpha \mu_{\gamma\beta} - x_\beta \mu_{\gamma\alpha})\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_{\rho\sigma}\left(x_\alpha \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\beta} - x_\beta \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha}\right) - a_\gamma(\dot{x}_\alpha \mu_{\beta\gamma} - \dot{x}_\beta \mu_{\alpha\gamma}). \tag{23}$$

Это уравнение можно рассматривать как обобщение условия „компланарности", т. е. обычных формул для скорости изменения обыкновенного момента импульса для поступательного движения $m_0\left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right]$. При этом момент импульса заменяется антисимметричным тензором

$$I_{\alpha\beta} = \lambda(x_\alpha \dot{x}_\beta - x_\beta \dot{x}_\alpha) + a_\gamma(x_\alpha \mu_{\gamma\beta} - x_\beta \mu_{\gamma\alpha}), \tag{23a}$$

пространственная часть которого в первом приближении совпадает с $m_0[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}]$. Следует, далее, отметить, что второй член правой части уравнения (23) равен взятому с обратным знаком соответствующему добавочному члену формулы (13а) для скорости изменения момента импульса при вращательном движении. Полагая

$$\frac{\mu_{\alpha\beta}}{\varkappa} = i_{\alpha\beta},$$

получаем для суммы обоих моментов, согласно (13а) и (23):

$$\frac{d}{d\tau}(i_{\alpha\beta} + I_{\alpha\beta}) = \mu_{\alpha\gamma}F_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma}F_{\alpha\gamma} + x_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - x_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\beta}, \tag{23б}$$

где U — „относительная энергия",

$$U = -\frac{1}{2}\mu_{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}.$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда электрон движется в радиально-симметричном электрическом поле $\mathbf{E} = \Psi(r)\mathbf{r}$ при отсутствии (внешнего) магнитного поля. В этом случае имеем:

$$U = -(\mathbf{pE}) = -\Psi(\mathbf{pr})$$

и, следовательно, при $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

$$x_\beta \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - x_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\beta} = \Psi(x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha) = E_\alpha p_\beta - E_\beta p_\alpha.$$

Результирующий вращающий момент, соответствующий пространственной части тензора в правой части уравнения (23б), равен, таким образом, нулю ($[\mathbf{pE}]+[\mathbf{Ep}]=0$).

Отсюда следует, что результирующий момент количества движения электрона в рассматриваемом случае должен оставаться постоянным по величине и направлению.

Как мы видели выше [уравнение (15)], тензор $\mu_{\alpha\beta}$, а следовательно, также и $i_{\alpha\beta}$ — постоянны во времени. В первом приближении (опуская члены, квадратичные относительно $\frac{1}{c}$) можно, следовательно, считать, что значение момента импульса для вращательного движения $\mathbf{i}=\frac{\mathbf{m}}{\varkappa}$ остается постоянным во времени. Обозначим момент импульса для поступательного движения (т. е. пространственную часть тензора $I_{\alpha\beta}$) через $\mathbf{J}$; в силу условия $\mathbf{i}+\mathbf{J}=\text{const}$, величина $\mathbf{J}$ также остается постоянной, и оба вектора $\mathbf{i}$ и $\mathbf{J}$ прецессируют относительно своей равнодействующей с одной и той же угловой скоростью. Этот результат является очень существенным для атомной механики, так как иначе момент количества движения атома не мог бы быть квантованным.

Вводя вместо моментов импульса $\mathbf{i}$ и $\mathbf{J}$ соответствующие магнитные моменты $\mathbf{m}=\varkappa\mathbf{i}$ и $\mathbf{M}=\frac{\varkappa}{2}\mathbf{J}$, мы видим, что вектор $\mathbf{m}+\mathbf{M}=$ $=\frac{\varkappa}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{J})+\frac{\varkappa}{2}\mathbf{i}$ не является постоянным. По величине он, правда, остается постоянным; его направление, однако, должно процессировать относительно оси атома с упомянутой выше угловой скоростью.[1] Эта угловая скорость не может быть определена простым образом; однако, как показывает формула (17), ее среднее значение совпадает с обычной ларморовской скоростью процессии электронной орбиты во внешнем магнитном поле $\overline{\mathbf{H}}'$.

§ 6. Электромагнитное поле „вращающегося" электрона. Рассматривая электрон как точечный заряд и не учитывая его магнитного момента, можно охарактеризовать его электромагнитное поле формулами

$$\varphi_\beta=\frac{k}{2\pi i}\oint\frac{dx'_\alpha}{S^2}=\frac{k}{2\pi i}\oint\frac{\left(\frac{dx'_\alpha}{d\tau'}\right)}{S^2}d\tau' \tag{24}$$

для компонент четырехмерного потенциала. Интегрирование производится при этом по замкнутой кривой в комплексной τ'-плоскости (τ'-собственное время электрона; $S^2=\sum(x'_\alpha-x_\alpha)^2$ — его четырехмерное расстояние от точки наблюдения x_α; $k=2e$).[2]

Если эта кривая обладает только одним полюсом подынтегральной величины, а именно полюсом, соответствующим вещественному корню уравнения $R-c(t-t')=0$:

$$\left[R^2=\sum_1^3(x'_\alpha-x_\alpha)^2\right],$$

---

[1] Так, что не происходит векового изменения $\mathbf{m}+\mathbf{M}$.
[2] Ср. мою работу [3].

то посредством вычисления вычетов получаем известные формулы Лиенарда-Вихерта для запаздывающих потенциалов движущегося точечного заряда

$$\varphi_\alpha = k\left\{\frac{dx'_k}{d\tau'}\frac{1}{\dfrac{d(S^2)}{d\tau'}}\right\}_{t'=t-\frac{r}{c}}. \tag{24a}$$

Мы попытаемся теперь совершенно аналогичным образом определить добавочное электромагнитное поле, обусловленное „вращением“ электрона, т. е. его магнитным моментом.

Соответствующая часть четырехмерного потенциала Ψ_α, очевидно, может быть представлена тензором моментов $\mu'_{\alpha\beta}$ и четырехмерным вектором $(x'_\alpha - x_\alpha)$ [путем интегрирования в комплексной области, как и в случае соотношений (24)].

Так как, далее, Ψ_α должно быть линейной векторной функцией $\mu'_{\alpha\beta}$, мы приходим к следующему выражению:

$$\Psi_\alpha = \frac{Q}{2\pi i}\oint \mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta) f(S)\, d\tau', \tag{25}$$

где Q — коэффициент пропорциональности, а $f(S)$ — пока еще неизвестная функция S. Для определения этой функции подставим выражение (25) в дифференциальное уравнение

$$\sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\partial^2\Psi_\alpha}{\partial x_\gamma^2} = 0.$$

При этом получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma} f(x_\beta - x'_\beta)\mu'_{\alpha\beta} = \mu'_{\alpha\gamma} f + \mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta)\frac{\partial f}{\partial x_\gamma},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\gamma^2} f(x_\beta - x'_\beta)\mu'_{\alpha\beta} = 2\mu'_{\alpha\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_\gamma} + \mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta)\frac{\partial^2 f}{\partial x_\gamma^2};$$

далее:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\gamma} = \frac{df}{dS}\cdot\frac{x_\gamma - x'_\gamma}{S};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\gamma^2} = \frac{d^2 f}{dS^2}\cdot\frac{(x_\gamma - x'_\gamma)^2}{S^2} + \frac{df}{dS}\cdot\frac{S^2 - (x_\gamma - x'_\gamma)^2}{S^3}$$

и, следовательно:

$$\sum_{\gamma=1}^{4}\frac{\partial^2\Psi_\alpha}{\partial x_\gamma^2} = \frac{Q}{2\pi i}\oint \mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta)\left\{\frac{d^2 f}{dS^2} + \frac{5}{S}\cdot\frac{df}{dS}\right\} d\tau' = 0,$$

т. е.

$$\frac{d^2 f}{dS^2} + \frac{5}{S}\cdot\frac{df}{dS} = 0.$$

Таким образом, $f = \frac{1}{S^4}$ и, согласно (25):

$$\Psi_\alpha = \frac{Q}{2\pi i}\oint\frac{\mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta)}{S^4}\, d\tau'. \tag{25a}$$

Дополнительное условие

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,$$

как легко видеть, выполняется в силу замкнутости пути интегрирования.

Для определения коэффициента Q мы рассмотрим простейший случай покоящегося электрона с постоянным по величине и направлению моментом $\mathbf{m}(\mathbf{p}'=0)$. В этом случае, заменяя замкнутый путь интегрирования мнимой осью времени:[1]

$$\Psi_\alpha = +\frac{Q}{2\pi i}\mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta)\int\limits_{t'=t-i\infty}^{t'=t+i\infty} \frac{dt'}{[R^2 - c^2(t'-t)^2]^2} =$$

$$= -\frac{Q}{2\pi c}\mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x'_4 - x_4)}{\left[R^2 + (x'_4 - x_4)^2\right]^2},$$

т. е.

$$\Psi_\alpha = -\frac{Q\mu'_{\alpha\beta}(x_\beta - x'_\beta)}{4cR^3}.$$

Предполагая, что вектор $\mathbf{R}$ направлен от электрона в точку наблюдения $(R_\alpha = x_\alpha - x'_\alpha)$, и принимая во внимание, что φ_1, φ_2, φ_3 — компоненты вектор-потенциала $\mathbf{A}$, имеем:

$$\mathbf{A} = \frac{Q}{4c}\cdot\frac{[\mathbf{Rm}]}{R^3}$$

и $\varphi_4 = i\varphi = 0$.

Приведенная выше формула для $\mathbf{A}$ совпадает с обычным выражением для вектор-потенциала элементарного тока с моментом $\mathbf{m}$, если положить

$$Q = -4c. \tag{25б}$$

В общем случае произвольным образом движущегося электрона интеграл (25а) может быть найден посредством вычисления вычетов. Мы предполагаем при этом, что речь идет об определении запаздывающих потенциалов, т. е. о вычете относительно вещественного полюса

$$R_0 - c(t - t'_0) = 0.$$

Вводя в качестве независимой переменной обычное (комплексное) время t' вместо собственного времени τ' $\left(\text{причем } d\tau' = dt'\sqrt{1 - \frac{(v')^2}{c^2}}\right)$, получаем:

$$S^4 = [R^2 - c^2(t-t')^2]^2 = [R + c(t-t')]^2[R - c(t-t')]^2$$

и, следовательно, при $t' \to t'_0$

$$R - c(t-t') = \left\{\frac{d}{dt'}[R - c(t-t')]\right\}(t' - t'_0) = c\left(1 - \frac{v'_R}{c}\right)(t' - t'_0),$$

[1] См. [3]. стр. 523.

т. е

$$S^4 = c^2[R + c(t - t')]^2 \left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)^2 (t' - t_0')^2,$$

где v_R' — проекция скорости электрона в момент $t' = t_0'$ на направление $\mathbf{R}_0$.

Итак, согласно (25а):

$$\Psi_\alpha = \frac{Q}{c^2\left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_\alpha(t')}{(t' - t_0')^2} dt',$$

где

$$F_\alpha(t') = \frac{\mu_{\alpha\beta}'(x_\beta - x_\beta')\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{[R + c(t - t')]^2}.$$

Поскольку функция $F(t')$ при $t' = t_0'$ остается отличной от нуля, то, как известно:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_\alpha(t')\,dt'}{(t' - t_0')^2} = \left\{\frac{d}{dt'} F_\alpha(t')\right\}_{t'=t_0'}.$$

Следовательно, согласно (25б):

$$\Psi_\alpha = -\frac{4}{c\left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)^2} \left\{\frac{d}{dt'} \cdot \frac{\mu_{\alpha\beta}'(x_\beta - x_\beta')\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{[R + c(t - t')]^2}\right\}_{t'=t_0'}.$$

Дифференцируя и принимая во внимание условия $\mu_{\alpha\beta}' \frac{dx_\beta'}{dt'} = 0$ и $c(t - t_0') = R_0$, получаем:

$$\Psi_\alpha = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_R'}{c}\right)^2} \left\{\frac{x_\beta - x_\beta'}{cR^2} \cdot \frac{d}{dt'} \mu_{\beta\alpha}^* + \left(1 + \frac{v_R'}{c}\right) \frac{(x_\beta - x_\beta')\mu_{\beta\alpha}^*}{R^3}\right\} \tag{26}$$

индекс нуль здесь опущен и для краткости положено

$$\mu_{\beta\alpha}^* = \mu_{\beta\alpha}' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{26а}$$

В случае покоящегося электрона, обладающего переменными во времени компонентами тензора момента $\mu_{\beta\alpha}$ соотношение (26) в силу условия $\mu_{\beta 4} = ip_\beta = 0$ сводится к

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{R}]}{cR^2} + \frac{[\mathbf{m}\mathbf{R}]}{R^3}; \\ \varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Следует отметить, что значение магнитного момента $|\mathbf{m}|$, согласно (15), должно при этом оставаться постоянным.[1] Приведенная выше формула (27)

[1] Если бы тензор моментов не подчинялся условию $\mu_{\alpha\beta}x_\beta' = 0$, то к приведенному выше выражению для $\mathbf{A}$ нужно было бы добавить следующие два члена:

$$\frac{\dot{\mathbf{p}}}{cR} + \frac{\mathbf{p}}{R^2},$$

может рассматриваться как „нулевое приближение“ для случая не слишком быстро движущегося электрона. На вычислении напряженностей электрического и магнитного поля, которое может быть проведено без труда по обычным формулам $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, мы останавливаться здесь не будем.

В заключение отметим следующее.

Если приписать электронам магнитный момент, равный по величине магнетону Бора, то их магнитные взаимодействия, которые, как известно, обратно пропорциональны четвертой степени расстояния, на расстояниях, меньших 10^{-11} см, должны превышать электрические (кулоновские) силы отталкивания. Эти магнитные взаимодействия могут сказаться уже на величине коэффициентов экранирования для внутренних электронов тяжелых атомов. В атомных ядрах[1] они должны быть в миллионы раз больше, чем электростатические силы. Если приписать протонам момент количества движения такой же величины, как и электронам, и соответственно примерно в 2000 раз меньший магнитный момент, то их магнитное взаимодействие друг с другом и с электронами также превысит электростатическое взаимодействие. Таким образом, представляется возможным утверждать, что структура атомного ядра практически не зависит от электрических зарядов электронов и протонов и должна определяться, в основном, их магнитостатическими взаимодействиями (в соответствии с обычными квантовыми условиями). Например, оказывается, что электрон и протон могли бы оставаться в статическом равновесии на расстоянии $5\cdot10^{-13}$ см друг от друга. Это равновесие было бы, однако, неустойчивым в отношении ориентации магнитных осей обеих частиц. Предполагая, что электрон вращается вокруг ядра, кроме обычной одноквантовой орбиты радиуса $0.55\cdot10^{-8}$ см, мы получаем еще вторую одноквантовую орбиту радиуса $3\cdot10^{-14}$ см, обусловленную магнитным притяжением, причем электрическое притяжение играет в этом случае роль слабого возмущения. Упомянутая величина очень близка к размерам простейших ядер. Здесь нельзя, однако, умолчать о трудности, связанной с тем, что благодаря большой скорости движения масса электрона примерно в тысячу раз превышает свое обычное значение; частично это компенсируется уменьшением потенциальной энергии взаимодействия. Этот вопрос я надеюсь обсудить в дальнейшем более подробно.

В заключение мне хочется выразить свою глубокую благодарность д-ру В. Паули за побуждение к этой работе и многие ценные советы. Я сердечно благодарен за ценные указания проф. П. Ланжевену и моему другу проф. Ю. А. Круткову (который, кроме того, просмотрел рукопись этой работы).

Литература

1. G. Ulenbeck and S. Goudsmit, Nature, **117**, 264, 1926.
2. L. H. Thomas, Nature, **117**, 514, 1926.
3. J. Frenkel, Zs. f. Phys., **32**, 518, 1925.

и мы получили бы:

$$\varphi = \frac{(\mathbf{R}\dot{\mathbf{p}})}{cR^2} + \frac{(\mathbf{pR})}{R^3}.$$

[1] В момент написания статьи не было известно, что наряду с протонами в состав ядра входят нейтроны, а не электроны. Рассмотрение магнитного взаимодействия между протоном и электроном не имеет непосредственного отношения к вопросу о структуре ядра. *(Прим. ред.)*.