理解 PLONK（四）：算术约束与拷贝约束

回顾置换证明

上一节，我们讨论了如何让 Prover 证明两个长度为 N 的向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 满足一个实现约定（公开）的置换关系 $\sigma(\cdot)$，即

$$a_i = b_{\sigma(i)} \tag{1}$$

基本思路是向 Verifier 要一个随机数 β，把两个「原始向量」和他们的「位置向量」进行合体，产生出两个新的向量，记为 $\vec{a}'$ 与 $\vec{b}'$

$$a'_i = a_i + \beta \cdot i, \qquad b'_i = b_i + \beta \cdot \sigma(i) \tag{2}$$

第二步是再向 Verifier 要一个随机数 γ，通过连乘的方法来编码 $\vec{a}'$ 和 $\vec{b}'$ 的 Multiset，记为 A 和 B:

$$A = \prod(a'_i + \gamma), \qquad B = \prod(b'_i + \gamma) \tag{3}$$

第三步是让 Prover 证明 $A/B = 1$，即

$$\prod_i \frac{(a'_i + \gamma)}{(b'_i + \gamma)} = 1 \tag{4}$$

证明这个连乘，需要引入一个辅助向量 $\vec{z}$，记录每次乘法运算的中间结果:

$$z_0 = 1, \qquad z_{i+1} = z_i \cdot \frac{(a'_i + \gamma)}{(b'_i + \gamma)} \tag{5}$$

由于 $z_N = \prod \frac{a'_i + \gamma}{b'_i + \gamma} = 1$，而且 $\omega^N = 1$，因此我们可以用 $z(X)$ 来编码 $\vec{z}$，从而把置换证明转换成关于 $z(X), a(X)$ 的关系证明。

最后 Verifier 发送挑战数 ζ，得到 $z(\zeta), z(\omega \cdot \zeta), a(\zeta), b(\zeta)$ 然后检查它们之间的关系。

向量的拷贝约束

所谓拷贝约束 Copy Constraints，是说在一个向量中，我们希望能证明多个不同位置上的向量元素相等。我们先从一个简单例子开始:

$$\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \tag{6}$$

假设为了让 Prover 证明 $a_0 = a_2$，我们可以把 a_0 与 a_2 对调位置，这样形成一个「置换关系」，如果我们用 $(0, 1, 2, 3)$ 记录被置换向量的元素位置，那么我们把置换后的位置向量记为 σ ，而 $\vec{a}_\sigma$ 为表示按照 σ 置换后的向量

$$\sigma = (2, 1, 0, 3), \quad \vec{a}_\sigma = (a_2, a_1, a_0, a_3) \tag{7}$$

显然，只要 Prover 可以证明置换前后的两个向量相等，$\vec{a} = \vec{a}_\sigma$，那么我们就可以得出结论： $a_0 = a_2$。

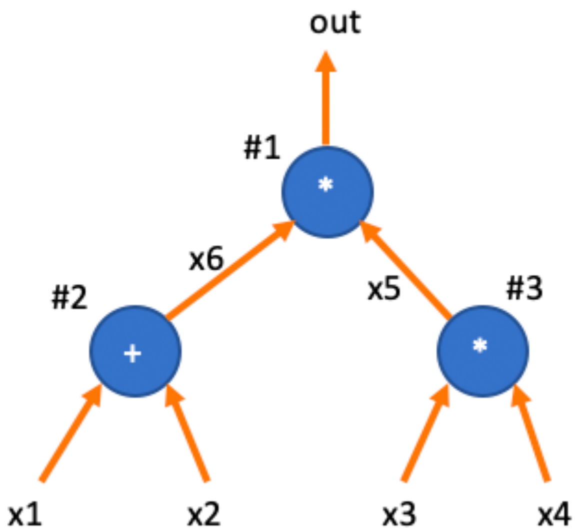
这个方法可以推广到证明一个向量中有多个元素相等。比如要证明 $\vec{a}$ 中的前三个元素都相等，我们只需要构造一个置换，即针对这三个元素的循环右移:

$$\sigma = (2, 0, 1, 3), \quad \vec{a}_\sigma = (a_2, a_0, a_1, a_3) \tag{8}$$

那么根据 $\vec{a} = \vec{a}_\sigma$ 容易得出 $a_0 = a_1 = a_2$。

多个向量间的拷贝约束

对于 Plonk 协议，拷贝约束需要横跨 W 表格的所有列，而协议要求 Prover 要针对每一列向量进行多项式编码。我们需要对置换证明进行扩展，从而支持横跨多个向量的元素等价。



回忆比如针对上面电路的 W 表格：

i	w_a	w_b	w_c
0	0	0	out
1	x_6	x_5	out
2	x_1	x_2	x_6
3	x_3	x_4	x_5

(9)

看上面的表格，我们要求 $w_{a,1}=w_{c,2}$， $w_{b,1}=w_{c,3}$ 且 $w_{c,0}=w_{c,1}$。

支持跨向量置换的直接方案是引入多个对应的置换向量，比如上表的三列向量用三个置换向量统一进行位置编码：

i	$id_{a,i}$	$id_{b,i}$	$id_{c,i}$
0	0	4	8
1	1	5	9
2	2	6	10
3	3	7	11

(10)

置换后的向量为 $\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c$：

i	$\sigma_{a,i}$	$\sigma_{b,i}$	$\sigma_{c,i}$
0	0	4	9
1	10	11	8
2	2	6	1
3	3	7	5

(11)

Prover 用一个随机数 β（Verifier 提供）来合并 $(\vec{w}_a,\vec{id}_a)$，$(\vec{w}_b,\vec{id}_b)$，$(\vec{w}_c,\vec{id}_c)$，还有置换后的向量：$(\vec{w}'_a,\sigma_a)$，$(\vec{w}'_b,\sigma_b)$，$(\vec{w}'_c,\sigma_c)$。然后再通过一个随机数 γ（Verifier 提供）和连乘来得到 W 和 W' 的 Multisets，f_i 与 g_i

$$
\begin{aligned}
f_i &= (w_{a,i}+\beta\cdot id_{a,i}+\gamma)(w_{b,i}+\beta\cdot id_{b,i}+\gamma)(w_{c,i}+\beta\cdot id_{c,i}+\gamma)\\
g_i &= (w'\_a,i+\beta\cdot\sigma\_a,i+\gamma)(w'\_b,i+\beta\cdot\sigma\_b,i+\gamma)(w'\_c,i+\beta\cdot\sigma\_c,i+\gamma)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

又因为拷贝约束要求置换后的向量与原始向量相等，因此 $w_a = w'_a$， $w_b = w'_b$， $w_c = w'_c$。

如果我们用多项式对 $\vec{w}_a, \vec{w}_b, \vec{w}_c, \vec{id}_a, \vec{id}_b, \vec{id}_c, \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ 编码，得到 $w_a(X), w_b(X), w_c(X), id_a(X), id_b(X), id_c(X), \sigma_a(X), \sigma_b(X), \sigma_c(X)$，于是 $f(X)$， $g(X)$ 满足下面的约束关系：

$$
\begin{aligned}
f(X) &= \Big(w_a(X) + \beta \cdot S_{id_a}(X) + \gamma\Big)\Big(w_b(X) + \beta \cdot S_{id_b}(X) + \gamma\Big)\Big(w_c(X) + \beta \cdot S_{id_c}(X) + \gamma\Big) \\
g(X) &= \Big(w_a(X) + \beta \cdot S_{\sigma_a}(X) + \gamma\Big)\Big(w_b(X) + \beta \cdot S_{\sigma_b}(X) + \gamma\Big)\Big(w_c(X) + \beta \cdot S_{\sigma_c}(X) + \gamma\Big)
\end{aligned} \tag{13}
$$

如果两个 Multiset 相等 $\{f_i\} = \{g_i\}$，那么下面的等式成立：

$$\prod_{X \in H} f(X) = \prod_{X \in H} g(X) \tag{14}$$

上面的等式稍加变形，可得

$$\prod_{X \in H} \frac{f(X)}{g(X)} = 1 \tag{15}$$

我们进一步构造一个辅助的**累加器**向量 $\vec{z}$，表示连乘计算的一系列中间过程

$$z_0 = 1, \qquad z_{i+1} = z_i \cdot \frac{f_i}{g_i} \tag{16}$$

其中 z_0 的初始值为 1，Prover 按照下表计算出 $\vec{z}$：

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
i & H_i & z_i \\
\hline
0 & \omega^0 = 1 & 1 \\
1 & \omega^1 & 1 \cdot \frac{f_0}{g_0} \\
2 & \omega^2 & \frac{f_0}{g_0} \cdot \frac{f_1}{g_1} \\
3 & \omega^3 & \frac{f_0 f_1}{g_0 g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} \\
\vdots & & \vdots \\
N-1 & \omega^{N-1} & \frac{f_0 f_1 \cdots f_{N-3}}{g_0 g_1 \cdots g_{N-3}} \cdot \frac{f_{N-2}}{g_{N-2}} \\
N & \omega^N = 1 & \frac{f_0 f_1 \cdots f_{N-1}}{g_0 g_1 \cdots g_{N-1}} = 1
\end{array} \tag{17}
$$

如果 $\vec{f}$ 能与 $\vec{g}$ 连乘等价的话，那么最后一行 z_N 正好等于 1，即

$$z_N = z_0 = 1 \tag{18}$$

而又因为 $\omega^N = \omega^1$ 。这恰好使我们可以把 $(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{N-1})$ 完整地编码在乘法子群 H 上。因此如果它满足下面两个多项式约束，我们就能根据数学归纳法得出 $z_N = 1$，这是我们最终想要的「拷贝约束」：

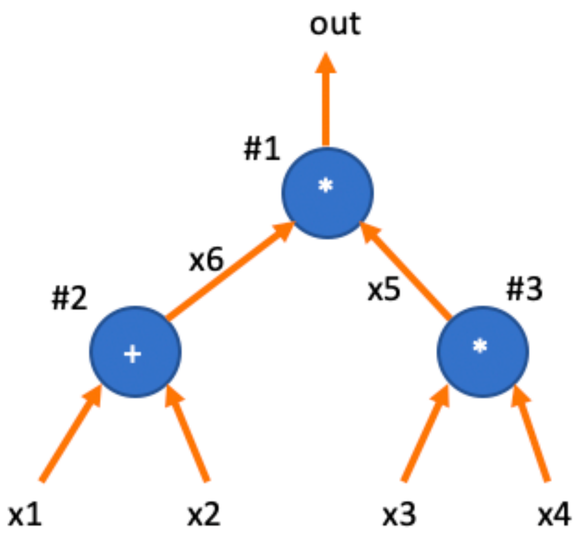
$$z(\omega) = 1 \tag{19}$$

$$z(\omega \cdot X) g(X) = z(X) f(X) \tag{20}$$

置换关系 σ

在构造拷贝约束前，置换关系 σ 需要提前公开共识。表格 W 含有所有算术门的输入输出，但是并没有描述门和门之间是否通过引线相连，而置换关系 σ 实际上正是补充描述了哪些算术门之间的连接关系。

因此，对于一个处于「空白态」的电路，通过 (Q, σ) 两个表格描述，其中 Q 由选择子向量构成，而 σ 则由「置换向量」构成。



下面是 Q 表格

i	q_L	q_R	q_M	q_C	q_O
0	0	0	0	99	1
1	0	0	1	0	1
2	1	1	0	0	1
3	0	0	1	0	1

(21)

下面是 S 表格，描述了哪些位置做了置换

i	$\sigma_{a,i}$	$\sigma_{b,i}$	$\sigma_{c,i}$
0	0	4	$[9]$
1	$\boxed{10}$	$\underline{11}$	$[8]$
2	2	6	$\boxed{1}$
3	3	7	$\underline{5}$

(22)

处理 Public Inputs

假如在上面给出的小电路中，要证明存在一个 Assignment，使得 out 的输入为一个特定的公开值，比如 $out = 99$。最简单的办法是使用 Q 表中的 q_C 列，并增加一行约束，使得 $q_L = q_R = q_M = 0$，因此满足下面等式

$$q_C(X) - q_O(X)w_c(X) = 0 \tag{23}$$

但这个方案的问题是：这些公开值输入输出值被固定成了常数，如果公开值变化，那么 $q_C(X)$ 多项式需要重新计算。如果整体上 W 表格的行数比较大，那么这个重新计算过程会带来很多的性能损失。

能否在表格中引入参数，以区分电路中的常数列？并且要求参数的变化并不影响其它电路的部分？这就需要再引入一个新的列，专门存放公开参数，记为 ϕ，因此，算术约束会变为：

$$q_L(X)w_a(X) + q_R(X)w_b(X) + q_M(X)w_a(X)w_b(X) - q_O(X)w_c(X) + q_C(X) + \phi(X) = 0 \tag{24}$$

我们还可以通过修改拷贝约束的方式引入公开参数。

> [!TODO]

位置向量的优化

我们上面在构造三个 σ 向量时，直接采用的自然数 $(0,1,2,\cdots)$，这样在协议开始前，Verifier 需要构造 3 个多项式 $S_{id_a}(X), S_{id_b}(X), S_{id_c}(X)$，并且在协议最后一步查询 Oracle，获得三个多项式在挑战点 $X=\zeta$ 处的取值 $(S_{id_a}(\zeta), S_{id_b}(\zeta), S_{id_c}(\zeta))$ 。

思考一下， σ 向量只需要用一些互不相等的值来标记置换即可，不一定要采用递增的自然数。如果我们采用 $H=(1,\omega,\omega^2,\cdots)$ 的话，那么多项式 $id_a(X)$ 会被大大简化：

$$
\begin{aligned}
\vec{id}_a &= (1,\omega,\omega^2,\omega^3) \\
\vec{id}_b &= (k_1,k_1\omega,k_1\omega^2,k_1\omega^3) \\
\vec{id}_c &= (k_2,k_2\omega,k_2\omega^2,k_2\omega^3)
\end{aligned} \tag{25}
$$

其中 k_i 为互相不等的二次非剩余。

$$
id_a(X)=X,\quad id_b(X)=k_1\cdot X,\quad id_a(X)=k_2\cdot X \tag{26}
$$

这样一来，这三个多项式被大大简化，它们在 $X=\zeta$ 处的计算轻而易举，可以直接由 Verifier 完成。

这个小优化手段最早由 Vitalik 提出。采用 k_1 和 k_2 是为了产生 $(1,\omega,\omega^2,\omega^3)$ 的陪集（Coset），并保证 Coset 之间没有任何交集。我们前面提到 $H=(1,\omega,\omega^2,\omega^3)$ 是 $\mathbb{F}$ 的乘法子群，如果 $H_1=k_1H$ 和 $H_2=k_2H$ 存在交集，那么 $H_1=H_2$。这个论断可以简单证明如下：如果它们存在交集，那么 $k_1\omega^i=k_2\omega^j$，于是 $k_1=k_2\cdot\omega^{j-i}$，又因为 $\omega^{j-i}\in H$，那么 $k_1\in H_2$，那么 $\forall i\in[N]. k_1\cdot\omega^i\in H_2$，那么 $H_1\subset H_2$，同理可得 $H_2\subset H_1$，于是 $H_1=H_2$。

如果 σ 的列数更多，那么我们需要选择多个 $k_1,k_2,k_3,...$ 且 $(k_i/k_j)^N\neq 1$ 来产生不相交的 Coset。一种最直接的办法是采用 $k_1,k_2,k_3,...=g^1,g^2,g^3,...$，其中 g 为乘法子群 T 的生成元， $|T|*2^\lambda=p-1$。

协议框架

预处理：Prover 和 Verifier 构造 $[q_L(X)]$， $[q_R(X)]$， $[q_O(X)]$， $[q_M(X)]$， $[q_C(X)]$， $[\sigma_a(X)]$， $[\sigma_b(X)]$， $[\sigma_c(X)]$

第一步：Prover 针对 W 表格的每一列，构造 $[w_a(X)]$， $[w_b(X)]$， $[w_c(X)]$， $\phi(X)$ 使得

$$
q_L(X)w_a(X)+q_R(X)w_b(X)+q_M(X)w_a(X)w_b(X)-q_O(X)w_c(X)+q_C(X)+\phi(X)=0 \tag{27}
$$

第二步： Verifier 发送随机数 β 与 γ；

第三步：Prover 构造 $[z(X)]$，使得

$$
\begin{aligned}
L_0(X)(z(X)-1)=0 \\
z(\omega\cdot X)g(X)-z(X)f(X)=0
\end{aligned} \tag{28}
$$

第四步：Verifier 发送随机挑战数 α；

第五步：Prover 计算 $h(X)$，并构造商多项式 $[t(X)]$

$$
\begin{aligned}
h(X) = {} & q_L(X)w_a(X)+q_R(X)w_b(X)+q_M(X)w_a(X)w_b(X)-q_O(X)w_c(X)+q_C(X)+\phi(X) \\
& +\alpha(z(\omega X)\cdot g(X)-z(X)\cdot f(X))+\alpha^2(L_0(X)\cdot(z(X)-1))
\end{aligned} \tag{29}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
f(X) &= \Big(w_a(X)+\beta\cdot id_a(X)+\gamma\Big)\Big(w_b(X)+\beta\cdot id_b(X)+\gamma\Big)\Big(w_c(X)+\beta\cdot id_c(X)+\gamma\Big) \\
g(X) &= \Big(w_a(X)+\beta\cdot \sigma_a(X)+\gamma\Big)\Big(w_b(X)+\beta\cdot \sigma_b(X)+\gamma\Big)\Big(w_c(X)+\beta\cdot \sigma_c(X)+\gamma\Big)
\end{aligned} \tag{30}
$$

其中商多项式 $t(X)=\frac{h(X)}{z_H(X)}$ ；

第六步：Verifier 发送随机挑战数 ζ，查询上述的所有 Oracle，得到

- $\bar{w}_a = w_a(\zeta)$，$\bar{w}_b = w_b(\zeta)$，$\bar{w}_c = w_c(\zeta)$
- $\bar{q}_L = q_L(\zeta)$，$\bar{q}_R = q_R(\zeta)$，$\bar{q}_M = q_M(\zeta)$，$\bar{q}_O = q_O(\zeta)$，$\bar{q}_C = q_C(\zeta)$
- $\bar{\sigma}_a = \sigma_a(\zeta)$，$\bar{\sigma}_b = \sigma_b(\zeta)$，$\bar{\sigma}_c = \sigma_c(\zeta)$
- $\bar{z}\_(\omega \cdot \zeta) = z(\omega \cdot \zeta)$，$\bar{z}_{(\zeta)} = z(\zeta)$
- $\bar{t} = t(\zeta)$

Verifier 还要自行计算

- $\bar{f}_{(\zeta)} = (\bar{w}_a + \beta \cdot \zeta + \gamma)(\bar{w}_b + \beta \cdot k_1 \cdot \zeta + \gamma)(\bar{w}_c + \beta \cdot k_2 \cdot \zeta + \gamma)$
- $\bar{g}_{(\zeta)} = (\bar{w}_a + \beta \cdot \bar{\sigma}_1 + \gamma)(\bar{w}_b + \beta \cdot \bar{\sigma}_2 + \gamma)(\bar{w}_c + \beta \cdot \bar{\sigma}_3 + \gamma)$
- $L_0(\zeta)$
- $z_H(\zeta)$
- $\phi(\zeta)$

验证步：

$$
\begin{aligned}
&\bar{q}_L\bar{w}_a + \bar{q}_R\bar{w}_b + \bar{q}_M\bar{w}_a\bar{w}_b - \bar{q}_O\bar{w}_c + \bar{q}_C + \phi(\zeta) \\
&\qquad + \alpha(\bar{z}\_(\omega \cdot \zeta) \cdot \bar{g}\_(\zeta) - \bar{z}\_(\zeta) \cdot \bar{f}\_(\zeta)) + \alpha^2(L_0(\zeta) \cdot (\bar{z}\_(\zeta) - 1)) \stackrel{?}{=} \bar{t} \cdot z_H(\zeta)
\end{aligned} \tag{31}
$$