IN 2100 – Forelesning 5

Terminering

Peter Ölveczky (Universitetet i Oslo)

Innhold

Pensum

- Bevis for uavgjørbarhet av terminering
- Teori rundt forenklingsordninger

ikke pensum

Terminering: Basics

Terminering Basics (I)

Definition (Terminering)

Terminering: Finnes ingen uendelig avledning

$$t_0 \rightsquigarrow t_1 \rightsquigarrow t_2 \rightsquigarrow \cdots$$

Terminering Basics (I)

Definition (Terminering)

Terminering: Finnes ingen uendelig avledning

$$t_0 \rightsquigarrow t_1 \rightsquigarrow t_2 \rightsquigarrow \cdots$$

- Maude antar – men sjekker ikke – at din likhets-spesifikasjon er terminerende

Terminering: Basics (II)

- Tilstrekkelig å sjekke sekvenser av grunntermer

Terminering: Basics (II)

- Tilstrekkelig å sjekke sekvenser av grunntermer
- Antagelser:
  - minst én grunnterm
  - én sort; ingen betingede ligninger, ingen funksjonsattributter

Terminering: eksempler

Example

- $\{a = b,\ b = c,\ b = a\}$ ikke terminerende

Terminering: eksempler

Example

- $\{a = b,\ b = c,\ b = a\}$ ikke terminerende
- $\{f(f(x)) = f(x)\}$ terminerende

Terminering: eksempler

Example

- $\{a = b,\ b = c,\ b = a\}$ ikke terminerende
- $\{f(f(x)) = f(x)\}$ terminerende
- $\{0 + x = x,\ s(x) + y = s(x + y)\}$ burde være terminerende
  - kan du bevise det?

Terminering: eksempler

Example

- $\{a = b,\ b = c,\ b = a\}$ ikke terminerende
- $\{f(f(x)) = f(x)\}$ terminerende
- $\{0 + x = x,\ s(x) + y = s(x + y)\}$ burde være terminerende
  - kan du bevise det?
- Er $\{f(g(x, y)) = g(g(f(f(x)), y), y)\}$ terminerende?

Terminering: eksempler

Example

- $\{a = b,\ b = c,\ b = a\}$ ikke terminerende
- $\{f(f(x)) = f(x)\}$ terminerende
- $\{0 + x = x,\ s(x) + y = s(x + y)\}$ burde være terminerende
  - kan du bevise det?
- Er $\{f(g(x, y)) = g(g(f(f(x)), y), y)\}$ terminerende?
- (Kaffebønne-spillet, versjon 2)
  $\{\bullet\,\bullet \longrightarrow \circ\ \circ\ \circ\,\circ,\ \bullet\,\circ \longrightarrow \circ\ \circ\ \circ\,\bullet,\ \circ\,\bullet \longrightarrow \bullet,\ \circ\,\circ \longrightarrow \circ\}$

Sjekke terminering

Ønskelig med algoritme/program

```
char[] terminerer(spesifikasjon S) {
   ...
   if <S er terminerende>
     return "terminerer";
   else return "terminerer ikke";
}
```

Sjekke terminering

Ønskelig med algoritme/program

```
char[] terminerer(spesifikasjon S) {
   ...
   if <S er terminerende>
     return "terminerer";
   else return "terminerer ikke";
}
```

Teorem

Det er uavgjørbart hvorvidt en likhetspesifikasjon terminerer

Ikke-terminering

Bevise ikke-terminering (I)

Hvordan bevise at en spec ikke er terminerende?

Bevise ikke-terminering (I)

Hvordan bevise at en spec ikke er terminerende?

Teorem

En spec er ikke-terminerende hvis den har en "gjentagende" sekvens

$$t_0 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t_j \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t_k$$

hvor t_j er en (ekte eller ikke-ekte) subterm av t_k for en $j < k$

Bevise ikke-terminering (I)

Hvordan bevise at en spec ikke er terminerende?

Teorem

En spec er ikke-terminerende hvis den har en "gjentagende" sekvens

$$t_0 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t_j \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t_k$$

hvor t_j er en (ekte eller ikke-ekte) subterm av t_k for en $j < k$

Example

- $\{f(x) = f(f(x))\}$ har gjentagende $f(x) \rightsquigarrow f(f(x))$

Bevise ikke-terminering (I)

Hvordan bevise at en spec ikke er terminerende?

Teorem

En spec er ikke-terminerende hvis den har en "gjentagende" sekvens

$$t_0 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t_j \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t_k$$

hvor t_j er en (ekte eller ikke-ekte) subterm av t_k for en $j < k$

Example

- $\{f(x) = f(f(x))\}$ har gjentagende $f(x) \rightsquigarrow f(f(x))$
- $\{a = b,\ b = a\}$ har gjentagende $a \rightsquigarrow b \rightsquigarrow a$

Bevise ikke-terminering (I)

Hvordan bevise at en spec ikke er terminerende?

Teorem

En spec er ikke-terminerende hvis den har en "gjentagende" sekvens

$$t_0 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t_j \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow t_k$$

hvor t_j er en (ekte eller ikke-ekte) subterm av t_k for en $j < k$

Example

- $\{f(x) = f(f(x))\}$ har gjentagende $f(x) \rightsquigarrow f(f(x))$
- $\{a = b,\ b = a\}$ har gjentagende $a \rightsquigarrow b \rightsquigarrow a$

Det finnes ikke-terminerende systemer uten gjentagende avledninger: $\{f(x) = f(g(x))\}$

Toyama's (mot)eksempel

Example (Toyama)

Hva med $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$?

Toyama's (mot)eksempel

Example (Toyama)

Hva med $\{f(a, b, x) = f(x, x, x),\ g(y, z) = y,\ g(y, z) = z\}$?

- union $\{f(a, b, x) = f(x, x, x)\}$ og $\{g(y, z) = y,\ g(y, z) = z\}$
- ... som begge er terminerende

Toyama's (mot)eksempel

Example (Toyama)

Hva med $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$?

- union $\{f(a,b,x) = f(x,x,x)\}$ og $\{g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$
- ... som begge er terminerende
- er også $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$ terminerende?

Toyama's (mot)eksempel

Example (Toyama)

Hva med $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$?

- union $\{f(a,b,x) = f(x,x,x)\}$ og $\{g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$
- ... som begge er terminerende
- er også $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$ terminerende?

Nei: Uendelig avledning

$f(a,b,g(a,b))$

$\rightsquigarrow f(g(a,b),g(a,b),g(a,b))$

Toyama's (mot)eksempel

Example (Toyama)

Hva med $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$?

- union $\{f(a,b,x) = f(x,x,x)\}$ og $\{g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$
- ... som begge er terminerende
- er også $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$ terminerende?

Nei: Uendelig avledning

$f(a,b,g(a,b))$
$\rightsquigarrow f(g(a,b),g(a,b),g(a,b))$
$\rightsquigarrow f(a,g(a,b),g(a,b))$

Toyama's (mot)eksempel

Example (Toyama)

Hva med $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$?

- union $\{f(a,b,x) = f(x,x,x)\}$ og $\{g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$
- ... som begge er terminerende
- er også $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$ terminerende?

Nei: Uendelig avledning

$f(a,b,g(a,b))$
$\rightsquigarrow f(g(a,b),g(a,b),g(a,b))$
$\rightsquigarrow f(a,g(a,b),g(a,b))$
$\rightsquigarrow f(a,b,g(a,b)) \rightsquigarrow \cdots$

Toyama's (mot)eksempel

Example (Toyama)

Hva med $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$?

- union $\{f(a,b,x) = f(x,x,x)\}$ og $\{g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$
- ... som begge er terminerende
- er også $\{f(a,b,x) = f(x,x,x),\ g(y,z) = y,\ g(y,z) = z\}$ terminerende?

Nei: Uendelig avledning

$f(a,b,g(a,b))$
$\rightsquigarrow f(g(a,b),g(a,b),g(a,b))$
$\rightsquigarrow f(a,g(a,b),g(a,b))$
$\rightsquigarrow f(a,b,g(a,b)) \rightsquigarrow \cdots$

Sentralt problem innen data: egenskaper ikke modulære

Bevise ikke-terminering (II)

- Ikke-terminerende hvis det er en ny variabel i høyresiden av en ligning: $\{f(x) = g(x, y)\}$ gir gjentagende $f(x) \rightsquigarrow g(x, f(x))$

Bevise ikke-terminering (II)

- Ikke-terminerende hvis det er en ny variabel i høyresiden av en ligning: $\{f(x) = g(x, y)\}$ gir gjentagende $f(x) \rightsquigarrow g(x, f(x))$
- Ikke-terminerende hvis venstreside er en variabel: $\{x = g(a)\}$

Bevise terminering med “vektfunksjoner”

Bevise terminering

Bevise ikke-terminering er “lett”, men hvordan bevise terminering?

Bevise terminering

Bevise ikke-terminering er “lett”, men hvordan bevise terminering?

- Uavgjørbart $\Rightarrow$ ingen metode som alltid kan brukes

Bevise terminering

Bevise ikke-terminering er “lett”, men hvordan bevise terminering?

- Uavgjørbart $\Rightarrow$ ingen metode som alltid kan brukes
- Vi skal se på metoder som ofte kan brukes til å bevise at et gitt system S er terminerende

Vektfunksjoner

Hvordan bevise at $\{f(x) = x\}$ terminerer for all input?

Vektfunksjoner

Hvordan bevise at $\{f(x) = x\}$ terminerer for all input?

- "Vekt": "antall symboler" (eller "antall f'er") i en term minsker i hvert forenklingsteg

Vektfunksjoner

Hvordan bevise at $\{f(x) = x\}$ terminerer for all input?

- "Vekt": "antall symboler" (eller "antall f'er") i en term minsker i hvert forenklingsteg
- . . . kan aldri bli mindre enn 0

Vektfunksjoner

Hvordan bevise at $\{f(x) = x\}$ terminerer for all input?

- "Vekt": "antall symboler" (eller "antall f'er") i en term minsker i hvert forenklingsteg
- ... kan aldri bli mindre enn 0
- ergo: finnes ingen uendelig avledning

$$t_0 \rightsquigarrow t_1 \rightsquigarrow t_2 \rightsquigarrow \cdots$$

fordi den ville ført til uendelig sekvens

$$size(t_0) > size(t_1) > size(t_2) > \cdots$$

av naturlige tall

Vektfunksjoner (II)

Teorem

En spesifikasjon er terminerende hvis det finnes en funksjon $\mathit{vekt} : \mathcal{T}_{\Sigma} \to \mathbb{N}$ *slik at* $\mathit{vekt}(t) > \mathit{vekt}(t')$ *hvis* $t \rightsquigarrow t'$

Vektfunksjoner (II)

Teorem

En spesifikasjon er terminerende hvis det finnes en funksjon $vekt : \mathcal{T}_\Sigma \to \mathbb{N}$ *slik at* $vekt(t) > vekt(t')$ *hvis* $t \rightsquigarrow t'$

Example ($\{f(x) = x\}$)

$vekt(t) =$ "antall symbolforekomster i t", eller

$vekt(t) =$ "antall f'er i t"

Vektfunksjoner (II)

Teorem

En spesifikasjon er terminerende hvis det finnes en funksjon $vekt : \mathcal{T}_\Sigma \to \mathbb{N}$ *slik at* $vekt(t) > vekt(t')$ *hvis* $t \rightsquigarrow t'$

Example ($\{f(x) = x\}$)

$vekt(t) =$ "antall symbolforekomster i t", eller

$vekt(t) =$ "antall f'er i t"

- Må bevise $vekt(t) > vekt(t')$ for uendelig mange $t \rightsquigarrow t'$

Vektfunksjoner (III)

Definition (Monotoni)

vekt er monoton hvis, for hvert funksjonsymbol f og alle grunntermer t, t':

$$vekt(t) > vekt(t')$$
$$\text{impliserer}$$
$$vekt(f(\ldots, t, \ldots)) > vekt(f(\ldots, t', \ldots))$$

Vektfunksjoner (III)

Definition (Monotoni)

vekt er monoton hvis, for hvert funksjonsymbol f og alle grunntermer t, t':

$$vekt(t) > vekt(t')$$

impliserer

$$vekt(f(\ldots, t, \ldots)) > vekt(f(\ldots, t', \ldots))$$

Teorem

En spesifikasjon er terminerende hvis det finnes en monoton vektfunksjon $vekt : \mathcal{T}_\Sigma \to \mathbb{N}$ *slik at* $vekt(l\sigma) > vekt(r\sigma)$ *for hver ligning* $l = r$ *og hver substitusjon* σ

Vektfunksjoner (III)

Definition (Monotoni)

vekt er monoton hvis, for hvert funksjonsymbol f og alle grunntermer t, t':

$$vekt(t) > vekt(t')$$
impliserer
$$vekt(f(\ldots, t, \ldots)) > vekt(f(\ldots, t', \ldots))$$

Teorem

En spesifikasjon er terminerende hvis det finnes en monoton vektfunksjon $vekt : \mathcal{T}_\Sigma \to \mathbb{N}$ *slik at* $vekt(l\sigma) > vekt(r\sigma)$ *for hver ligning* $l = r$ *og hver substitusjon* σ

Må sjekke for uendelig mange substitusjoner σ!

Eksempel

Example

$\{f(x) = x\}$ og $vekt(t) =$''antall funksjonsymbolforekomster i t''.

For å bevise terminering må vi vise:

Eksempel

Example

$\{f(x) = x\}$ og $vekt(t) =$"antall funksjonsymbolforekomster i t".

For å bevise terminering må vi vise:

1. $vekt$ er monoton:
   $vekt(t) > vekt(t') \Rightarrow vekt(f(t)) > vekt(f(t'))$

Eksempel

Example

$\{f(x) = x\}$ og $vekt(t) =$"antall funksjonsymbolforekomster i t".

For å bevise terminering må vi vise:

1. $vekt$ er monoton:
   $vekt(t) > vekt(t') \Rightarrow vekt(f(t)) > vekt(f(t'))$
2. $vekt(f(x)\sigma) > vekt(x\sigma)$ for alle σ: holder, siden $f(x)\sigma$ er lik $f(x\sigma)$ slik at $vekt(f(x)\sigma) = 1 + vekt(x\sigma)$, som er større enn $vekt(x\sigma)$ for enhver σ

Fler eksempler I

Example

- En bra vektfunksjon for $\{f(x) = g(x)\}$ er ...

Fler eksempler I

Example

- En bra vektfunksjon for $\{f(x) = g(x)\}$ er ...
- En bra vektfunksjon for $\{f(x) = g(x),\ g(b) = f(a)\}$ er $vekt(t) = (2 * \text{“antall } b\text{'er i } t\text{''}) + \text{“antall } f\text{'er i } t\text{''}$

Fler eksempler II

Vektfunksjon often definert rekursivt (for hvert funksjonsymbol)

Example

- $\{f(x) = g(x),\ \ g(b) = f(a)\}$ kan vises å terminere med vektfunksjon
  - $vekt(a) = 1$,
  - $vekt(b) = 88$,
  - $vekt(f(t)) = 4 + vekt(t)$, og
  - $vekt(g(t)) = vekt(t)$.
- Monoton og vektminskende?

Fler eksempler II

Vektfunksjon often definert rekursivt (for hvert funksjonsymbol)

Example

- $\{f(x) = g(x),\ \ g(b) = f(a)\}$ kan vises å terminere med vektfunksjon
  - $vekt(a) = 1$,
  - $vekt(b) = 88$,
  - $vekt(f(t)) = 4 + vekt(t)$, og
  - $vekt(g(t)) = vekt(t)$.
- Monoton og vektminskende?
- $\{f(g(x)) = g(f(x))\}$ vises terminerende med vektfunksjon
  - $vekt(a) = 2$ for hver konstant a
  - $vekt(f(t)) = (vekt(t))^3$
  - $vekt(g(t)) = 2 \cdot vekt(t)$
- Monoton og vektminskende?

Fler eksempler III

Example

En ok vektfunksjon for $\{f(f(x)) = f(g(f(x)))\}$ er ...

Fler eksempler III

Example

En ok vektfunksjon for $\{f(f(x)) = f(g(f(x)))\}$ er ...

- ... "antall f-nabo-par"
- Ikke monoton!

Fler eksempler III

Example

En ok vektfunksjon for $\{f(f(x)) = f(g(f(x)))\}$ er ...

- ... "antall f-nabo-par"
- Ikke monoton!

Naturlige tall av og til ikke nok

Velfunderte ordninger

Definisjon (Velfundert strikt partiell ordning)

En strikt partiell order $\succ$ *over en mengde* S *er velfundert hvis det ikke finnes noen uendelig sekvens* $s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ *av* S*-elementer*

Velfunderte ordninger

Definisjon (Velfundert strikt partiell ordning)

En strikt partiell order $\succ$ *over en mengde* S *er velfundert hvis det ikke finnes noen uendelig sekvens* $s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ *av* S*-elementer*

Example

Hvilke er velfunderte strikte partielle ordninger?

- $(\mathbb{N}, >)$

Velfunderte ordninger

Definisjon (Velfundert strikt partiell ordning)

En strikt partiell order $\succ$ *over en mengde* S *er velfundert hvis det ikke finnes noen uendelig sekvens* $s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ *av* S*-elementer*

Example

Hvilke er velfunderte strikte partielle ordninger?

- $(\mathbb{Z}, >)$

Velfunderte ordninger

Definisjon (Velfundert strikt partiell ordning)

En strikt partiell order $\succ$ over en mengde S er velfundert hvis det ikke finnes noen uendelig sekvens $s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ av S-elementer

Example

Hvilke er velfunderte strikte partielle ordninger?

- $(\mathbb{N}, <)$

Velfunderte ordninger

Definisjon (Velfundert strikt partiell ordning)

En strikt partiell order $\succ$ over en mengde S er velfundert hvis det ikke finnes noen uendelig sekvens $s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ av S-elementer

Example

Hvilke er velfunderte strikte partielle ordninger?

- $(\mathbb{Q}^+, >)$

Velfunderte ordninger

Definisjon (Velfundert strikt partiell ordning)

En strikt partiell order $\succ$ over en mengde S er velfundert hvis det ikke finnes noen uendelig sekvens $s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ av S-elementer

Example

Hvilke er velfunderte strikte partielle ordninger?

- $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, >^{lex})$

Velfunderte ordninger

Definisjon (Velfundert strikt partiell ordning)

En strikt partiell order $\succ$ *over en mengde* S *er velfundert hvis det ikke finnes noen uendelig sekvens* $s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ *av* S*-elementer*

Example

Hvilke er velfunderte strikte partielle ordninger?

- $(\mathbb{N}^k, >^{lex})$

Velfunderte ordninger

Definisjon (Velfundert strikt partiell ordning)

En strikt partiell order $\succ$ over en mengde S er velfundert hvis det ikke finnes noen uendelig sekvens $s_1 \succ s_2 \succ \cdots$ av S-elementer

Example

Hvilke er velfunderte strikte partielle ordninger?

- $(\mathcal{T}_\Sigma, \overset{+}{\rightsquigarrow})$ når spec'en er terminerende

Generaliserte vektfunksjoner

Teorem

En spesifikasjon er terminerende hvis det finnes en velfundert strikt partiell ordning $(S, \succ)$ *og en funksjon* $vekt : \mathcal{T}_\Sigma \to S$ *slik at* $t \rightsquigarrow t'$ *medfører* $vekt(t) \succ vekt(t')$ *for alle grunntermer* t, t'

Generaliserte vektfunksjoner

Teorem

En spesifikasjon er terminerende hvis det finnes en velfundert strikt partiell ordning $(S, \succ)$ *og en funksjon* $\mathit{vekt} : \mathcal{T}_{\Sigma} \rightarrow S$ *slik at* $t \rightsquigarrow t'$ *medfører* $\mathit{vekt}(t) \succ \mathit{vekt}(t')$ *for alle grunntermer* t, t'

- Generalisering av vektfunksjon der $(\mathbb{N}, >)$ generaliseres til en velfundert strikt partielt ordnet mengde $(S, \succ)$

Eksempel

Example

$$\{\, f(g(g(x))) = f(f(g(f(g(f(x)))))),$$
$$f(f(f(x))) = f(g(f(x)))\,\}$$

- Spec terminerer (?), men vrient å vise med tidligere teknikker

Eksempel

Example

$$\{\, f(g(g(x))) = f(f(g(f(g(f(x)))))),\\ f(f(f(x))) = f(g(f(x)))\,\}$$

- Spec terminerer (?), men vrient å vise med tidligere teknikker
- La *vekt* være et par av naturlige tall:

$$vekt(t) = \\ (\text{“antall } g\text{-nabo-par i } t\text{”}, \text{“antall } f\text{'er i } t\text{”})$$

som sammenlignes med $>^{lex}$ over $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Eksempel

Example

$$\{\ f(g(g(x))) = f(f(g(f(g(f(x)))))),$$
$$f(f(f(x))) = f(g(f(x)))\ \}$$

- Spec terminerer (?), men vrient å vise med tidligere teknikker
- La *vekt* være et par av naturlige tall:

$$vekt(t) =$$
$$(\text{“antall } g\text{-nabo-par i } t\text{”}, \text{“antall } f\text{’er i } t\text{”})$$

  som sammenlignes med $>^{lex}$ over $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- Må vise at *vekt* er vektminskende for alle forenklingssteg
  - Merk: *vekt* ikke monoton

Stiordninger

Stiordninger

- “Vektfunksjoner”:
  - trenger genialitet!
  - forskjellige vektfunksjoner for hver spec
  - ikke mekaniserbar

Stiordninger

- “Vektfunksjoner”:
  - trenger genialitet!
  - forskjellige vektfunksjoner for hver spec
  - ikke mekaniserbar
- Stiordninger:
  - ganske kraftige
  - mekaniserbare
  - ingen tenking!!
  - bygger på teorien om forenklingsordninger

Leksikografisk stiordning (I)

Start: definér en presedens, en strikt partiell ordning $\succ$ over funksjonsymbolene i Σ.

Example

- $* \succ + \succ s \succ 0$
- $f \succ b \succ g \succ a$

Leksikografisk stiordning (II)

Definisjon (Leksikografisk stiordning (lpo))

Den leksikografiske stiordningen (lpo) utvider en presedens $\succ$ på funksjonsymboler til en ordning $\succ_{lpo}$ over grunntermer som følger:

lpo-1: $f(\ldots, t_i, \ldots) \succ_{lpo} u$ *hvis* $(t_i \succ_{lpo} u$ *eller* $t_i = u)$

lpo-2: $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{lpo} g(u_1, \ldots, u_m)$ *hvis* $(f \succ g$ *og* $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{lpo} u_i$ *for hver* $i \leq m)$

lpo-3: $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{lpo} f(u_1, \ldots, u_n)$ *hvis* $((t_1, \ldots, t_n) \succ_{lpo}^{lex} (u_1, \ldots, u_n)$ *og* $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{lpo} u_i$ *for alle* $2 \leq i \leq n)$

($\succ_{lpo}^{lex}$ er den leksikografiske utvidelsen av $\succ_{lpo}$)

Leksikografisk stiordning (III)

- Definisjonen innbefatter også konstanter!
  (f og/eller g er konstanter når $n = 0$ og/eller $m = 0$)

Leksikografisk stiordning (III)

- Definisjonen innbefatter også konstanter!
  (f og/eller g er konstanter når $n = 0$ og/eller $m = 0$)
- Kan utvides til termer med variable:
  - en variabel kan ikke sammenlignes med noe annet symbol i $\succ$
  - $l \succ_{lpo} r$ medfører $l\sigma \succ_{lpo} r\sigma$ for enhver σ

lpo-eksempler

Example

Gitt presedens $b \succ f \succ g \succ a \succ h$

- Da har vi:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(x)$

lpo-eksempler

Example

Gitt presedens $b \succ f \succ g \succ a \succ h$

- Da har vi:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(x)$
  - $f(f(a)) \succ_{lpo} f(g(a))$

lpo-eksempler

Example

Gitt presedens $b \succ f \succ g \succ a \succ h$

- Da har vi:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(x)$
  - $f(f(a)) \succ_{lpo} f(g(a))$
  - $g(b) \succ_{lpo} f(a)$

lpo-eksempler

Example

Gitt presedens $b \succ f \succ g \succ a \succ h$

- Da har vi:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(x)$
  - $f(f(a)) \succ_{lpo} f(g(a))$
  - $g(b) \succ_{lpo} f(a)$
- Hva med:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(y)$?

lpo-eksempler

Example

Gitt presedens $b \succ f \succ g \succ a \succ h$

- Da har vi:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(x)$
  - $f(f(a)) \succ_{lpo} f(g(a))$
  - $g(b) \succ_{lpo} f(a)$
- Hva med:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(y)$?
  - $h(a, f(x)) \succ_{lpo} h(a, g(x))$?

lpo-eksempler

Example

Gitt presedens $b \succ f \succ g \succ a \succ h$

- Da har vi:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(x)$
  - $f(f(a)) \succ_{lpo} f(g(a))$
  - $g(b) \succ_{lpo} f(a)$
- Hva med:
  - $f(x) \succ_{lpo} g(y)$?
  - $h(a, f(x)) \succ_{lpo} h(a, g(x))$?
  - $h(f(x), a) \succ_{lpo} h(g(x), b)$?

lpo: Terminering

Teorem

En (endelig) spesifikasjon er terminerende hvis

$$l \succ_{lpo} r$$

for hver ligning $l = r$ *i spec'en*

Leksikografisk stiordning (IV)

Mekaniserbar: kan sjekke alle mulige presedenser

Leksikografisk stiordning (IV)

Mekaniserbar: kan sjekke alle mulige presedenser

Example

$\{0 + x = x,\ s(x) + y = s(x + y)\}$ vises terminerende med presedens der $+ \succ s$:

- $0 + x \succ_{lpo} x$
- $s(x) + y \succ_{lpo} s(x + y)$

Multisett stiordning

Multisett stiordning (mpo): multisett sammenligning i stedet for leksikografisk sammenligning i **lpo-3**:

mpo-3: $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{mpo} f(u_1, \ldots, u_n)$ hvis

$$\{t_1, \ldots, t_n\} \succ_{mpo}^{mul} \{u_1, \ldots, u_n\}$$

Multisett stiordning

Multisett stiordning (mpo): multisett sammenligning i stedet for leksikografisk sammenligning i **lpo-3**:

mpo-3: $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{mpo} f(u_1, \ldots, u_n)$ hvis

$$\{t_1, \ldots, t_n\} \succ_{mpo}^{mul} \{u_1, \ldots, u_n\}$$

Oppgave

Gitt spec'er

$$E_1 = \{f(a, b) = f(b, a)\}$$

og

$$E_2 = \{g(x, a) = g(b, x)\}.$$

Hvilken kan vises terminerende med lpo? med mpo?