Chapitre 2

Logique et ensembles

Exercice 2.1

On calcule la table de vérité de chaque proposition

1.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Ainsi, la proposition n'est pas une tautologie.

2.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	non($\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$)	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow$ non($\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Ainsi, la proposition est une tautologie.

3.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$	$\big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\big) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V

Ainsi, la proposition est une tautologie[1].

4.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non$\mathcal{P} \Rightarrow$ non$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	(non$\mathcal{P} \Rightarrow$ non$\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Ainsi, la proposition n'est pas une tautologie.

Exercice 2.2

La négation de « $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ » est « $\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$ ».

Exercice 2.3

1. Un entier est strictement plus grand que 10 *si* il est plus grand que 15, mais ce n'est pas nécessaire.

2. Un entier est divisible par 6 *seulement si* il est divisible par 3, mais ce n'est pas suffisant.

1. C'est ce qu'on appelle la *transitivité* de l'implication logique.

Exercice 2.4

La contraposée de « f croissante $\Rightarrow f(3) \geq f(2)$ » est « $f(3) < f(2) \Rightarrow f$ pas croissante ».

Exercice 2.5

1. La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ est vraie.
2. La proposition $2 > 1 \Rightarrow 2^2 > 1$ est vraie.
3. La proposition $0 > 1 \Rightarrow 0^2 > 1$ est vraie.
4. La proposition $(-2) > 1 \Rightarrow (-2)^2 > 1$ est vraie.

Exercice 2.6

1. La négation de « $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \leq n$ » est « $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > n$ ».
   Cette négation est vraie (car tout entier naturel admet un successeur).

2. La négation de « $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m \leq n$ » est « $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n$ ».
   Cette négation est fausse (car 0 n'est plus grand qu'aucun entier naturel).

3. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Ces deux propositions n'ont pas de sens, car y n'est pas défini.

4. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Ces deux propositions n'ont pas de sens, car y n'est pas défini.

5. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Cette négation est vraie (il suffit de prendre $y = -x - 1$).

6. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Cette négation est fausse (il suffit de prendre $y = -x + 1$).

7. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Cette négation est fausse (car $1 + 1 = 2 > 0$).

8. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Cette négation est vraie (car $(-1) + (-1) = -2 \leq 0$).

Exercice 2.7

1. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ ».
   Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$ ».
   Les fonctions $f(x) = |x|$ et $f(x) = x^2$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = -1$ vérifient sa négation.

2. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \geq x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ ».
   Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \geq x$ et $f(y) < f(x)$ ».
   Les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = 1$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = x^2$ et $f(x) = -x$ vérifient sa négation.

3. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \geq x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ ».
   Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$ ou $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \geq x$ et $f(y) < f(x)$ ».
   Les fonctions $f(x) = \arctan(x) + \pi$ et $f(x) = e^x$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$ vérifient sa négation.

4. La proposition se traduit par « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ ».
   Sa négation est « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$ ».
   Les fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $f(x) = x$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = -1$ et $f(x) = -e^{-x}$ vérifient sa négation.

5. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ ».
Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0$ ».
Les fonctions $f(x) = e^x$ et $f(x) = \sin(x) + 2$ vérifient la première proposition.
Les fonctions $f(x) = \cos(x) + 1$ et $f(x) = |x|$ vérifient sa négation.

6. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ ».
Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(-x) \neq f(x)$ ».
Les fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $f(x) = x^2$ vérifient la première proposition.
Les fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = x^2 + x$ vérifient sa négation.

Exercice 2.8

1. La contraposée de « Un entier naturel dont le carré est pair est automatiquement pair » est « Un entier naturel impair est de carré impair ». Et en effet, pour $2n + 1$ un entier naturel impair, $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 2n + 1$ est impair.

2. La contraposée de « Un nombre réel dont le carré vaut deux est toujours strictement inférieur à deux » est « Un nombre réel supérieur ou égal à deux est de carré différent de deux ». Et en effet, pour $x \in \mathbb{R}$ plus grand que 2, $x^2 \geq 4$, donc en particulier, $x^2 \neq 2$.

Exercice 2.9

1. La négation de « zéro est le seul réel positif inférieur à tout réel strictement positif » est « il existe un réel positif non nul inférieur à tout réel strictement positif ».
Supposons que tel soit le cas et notons x un tel nombre. Alors x est positif, non nul, et inférieur à tout réel strictement positif.
Cependant, $\frac{x}{2}$ est positif, non nul, et inférieur à x, ceci est une contradiction avec notre hypothèse, qui doit être fausse.
Ainsi, la proposition initiale est vraie.

2. La négation de « la racine carrée de deux n'est pas un nombre entier » est « la racine carrée de deux est un nombre entier ».
Supposons que tel soit le cas, et notons n un tel nombre entier. Alors $n^2 = 2$. Donc $n < 2$, ainsi, soit $n = 0$, soit $n = 1$.
Cependant, $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, donc $2 = 0$ ou $2 = 1$, ce qui est absurde.
Ainsi, la proposition initiale est vraie.