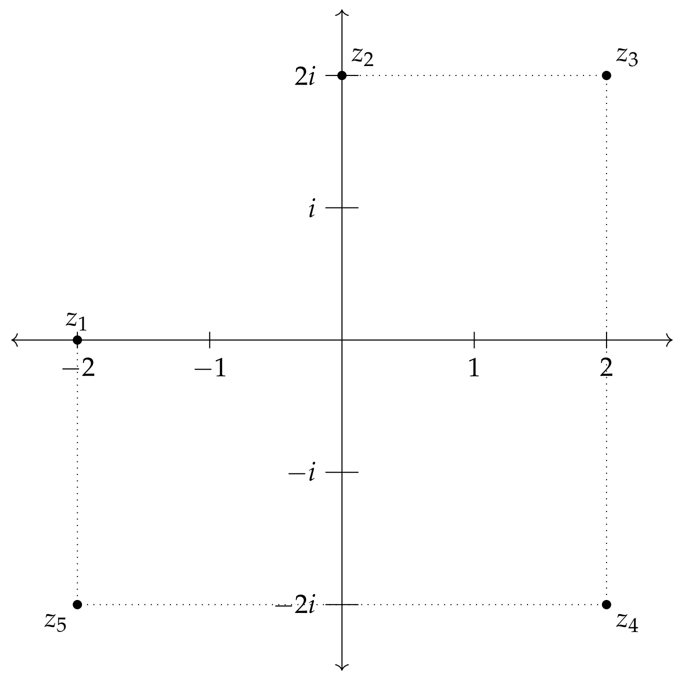
Chapitre 1

Nombres complexes

Exercice 1.1



Exercice 1.2

Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes des quatre sommets d'un parallélogramme. Alors

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$$

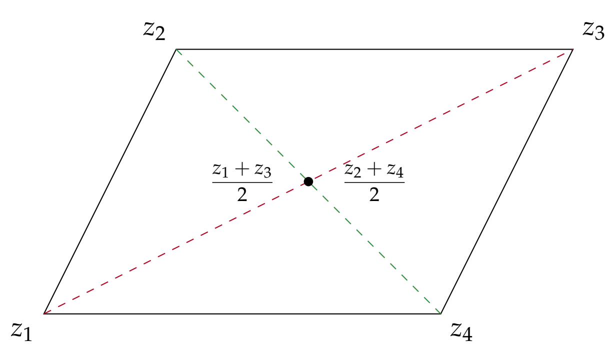
Donc

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4$$

Donc

$$\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2}$$

Donc les diagonales $[z_1 z_3]$ et $[z_2 z_4]$ du parallélogramme se coupent en leur milieu.



Exercice 1.3

1. $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2}$.

2. $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$.

3. $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4$.

4. $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8} + 3\dfrac{1}{4}\dfrac{i\sqrt{3}}{2} - 3\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4} - \dfrac{i3\sqrt{3}}{8} = -1$.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

Exercice 1.4

1. $z + 2i = iz - 1 \iff z(1-i) = -1 - 2i \iff z = -\dfrac{1+2i}{1-i} = \dfrac{1-3i}{2}$.

2. $(3+2i)(z-1) = i \iff z - 1 = \dfrac{i}{3+2i} \iff z = \dfrac{3+i}{3+2i} = \dfrac{15+3i}{13}$.

3. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i \iff (1+3i)z = 1 + i \iff z = \dfrac{1+i}{1+3i} = \dfrac{2-i}{5}$.

4. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z \iff z = 0 \text{ ou } z = \dfrac{1+5i}{4-2i} = \dfrac{-3+11i}{10}$.

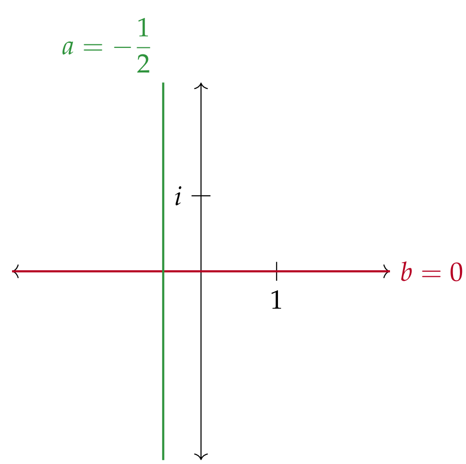
Exercice 1.5

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Les points d'affixes } z, z^2 \text{ et } z^4 \text{ sont alignés } &\iff z = z^2 \text{ ou } \frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } \frac{(z^2 - z)(z^2 + z)}{z^2 - z} = z^2 + z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On note $z = a + ib$. Alors

$$\begin{aligned} z^2 + z \in \mathbb{R} &\iff (a+ib)^2 + a + ib \in \mathbb{R} \\ &\iff a^2 - b^2 + 2iab + a + ib \in \mathbb{R} \\ &\iff 2ab + b = 0 \\ &\iff b = 0 \text{ ou } a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Exercice 1.6

1. $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\overline{z}$. $z^3 = -1$.

2. $z^4 = (z^2)^2 = (-\overline{z})^2 = \overline{z^2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $z^5 = z^2z^3 = -z^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $z^6 = (z^3)^2 = 1$.

3. $z^5z = zz^5 = z^6 = 1$ donc $z^{-1} = z^5$.

4. $(1+i\sqrt{3})^5 = 32z^5 = 16 - 16i\sqrt{3}$.

5.
   - $(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = 16 + 16i\sqrt{3} + 16 - 16i\sqrt{3} = 32$.
   - $(1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5 = 16 + 16i\sqrt{3} - 16 + 16i\sqrt{3} = 32i\sqrt{3}$.

Exercice 1.7

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $|1+iz| = |1-iz|$. Alors

$$|1 - b + ia| = |1 + b - ia|$$

Donc

$$\sqrt{(1-b)^2 + a^2} = \sqrt{(1+b)^2 + a^2}$$

Donc

$$(1-b)^2 = (1+b)^2$$

Donc

$$1 - 2b + b^2 = 1 + 2b + b^2$$

Donc $b = -b$, donc $b = 0$. Ainsi $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.8

1. Soient z et w deux nombres complexes. Alors

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= 2|z|^2 + 2|w|^2 \\
&= 2(|z|^2 + |w|^2)
\end{aligned}$$

2. Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes des quatre sommets d'un parallélogramme. On note

$$z = z_2 - z_1$$

$$w = z_4 - z_1$$

Alors la somme des carrés des côtés vaut $2|z|^2 + 2|w|^2$. De plus

$$z + w = z_2 - z_1 + z_4 - z_1 = z_3 - z_1$$

$$z - w = z_2 - z_1 - z_4 + z_1 = z_2 - z_4$$

Donc la somme des carrés des diagonales vaut $|z+w|^2 + |z-w|^2$. On conclut grâce à la première question.

Exercice 1.9

$\sum_{k=0}^{7}(1+i)^k = \frac{1-(1+i)^8}{1-(1+i)} = \frac{1-16}{i} = -15i$.

Exercice 1.10

En développant, on obtient

$$\begin{aligned}
(1-z)S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(kz^k - kz^{k+1}\right) &= z - z^2 + 2z^2 - 2z^3 + 3z^3 - 3z^4 + \cdots + nz^n - nz^{n+1} \\
&= z + \big(-z^2 + 2z^2\big) + \big(-2z^3 + 3z^3\big) + \cdots + \big(-(n-1)z^n + nz^n\big) - nz^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} z^k - nz^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} z^k - nz^{n+1} - 1 \\
&= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - nz^{n+1} - 1 \\
&= \frac{1-z^{n+1} - nz^{n+1}(1-z) - (1-z)}{1-z} \\
&= \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{1-z}
\end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{(1-z)^2}$$

Exercice 1.11

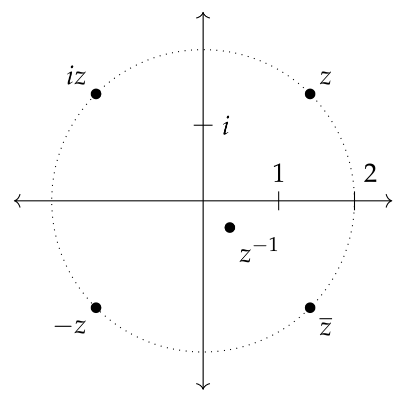
$$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\overline{z} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$-z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$iz = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$



Exercice 1.12

1. $1 = e^{i0}$.
2. $-1 = e^{i\pi}$.
3. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
4. $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
5. $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
6. $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
7. $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
8. $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.13

$$
\begin{aligned}
\cos^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{i5x}+5e^{i3x}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-i3x}+e^{-i5x}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(\left(e^{i5x}+e^{-i5x}\right)+5\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)+10\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{16}\Big(\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x)\Big)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{i5x}-5e^{i3x}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-i3x}-e^{-i5x}\right) \\
&= \frac{1}{32i}\left(\left(e^{i5x}-e^{-i5x}\right)-5\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)+10\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{16}\Big(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\Big)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos^2(3x)\sin^2(5x) &= \left(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{i6x}+2+e^{-i6x}\right)\left(e^{i10x}-2+e^{-i10x}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(e^{i16x}+2e^{i10x}+e^{i4x}-2e^{i6x}-4-2e^{-i6x}+e^{-i4x}+2e^{-i10x}+e^{-i16x}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left(\left(e^{i16x}+e^{-i16x}\right)+2\left(e^{i10x}+e^{-i10x}\right)-2\left(e^{i6x}+e^{-i6x}\right)+\left(e^{i4x}+e^{-i4x}\right)-4\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{8}\Big(\cos(16x)+2\cos(10x)-2\cos(6x)+\cos(4x)-2\Big)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{i2x}+2+e^{-i2x}\right)\left(e^{i4x}-4e^{i2x}+6-4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right) \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{i6x}-4e^{i4x}+6e^{i2x}-4+e^{-i2x}+2e^{i4x}-8e^{i2x}+12-8e^{-i2x}+2e^{-i4x}+e^{i2x}-4+6e^{-i2x}-4e^{-i4x}+e^{-i6x}\right) \\
&= \frac{1}{64}\left(\left(e^{i6x}+e^{-i6x}\right)-2\left(e^{i4x}+e^{-i4x}\right)-\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+4\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{32}\Big(\cos(6x)-2\cos(4x)-\cos(2x)+2\Big)}
\end{aligned}
$$

Exercice 1.14

On a
$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$
Donc
$$\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12) = e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4))$$
En développant, on obtient ainsi
$$\begin{aligned}\cos(\pi/12) &= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/3)\sin(\pi/4)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\sin(\pi/12) &= -\sin(\pi/4)\cos(\pi/3) + \sin(\pi/3)\cos(\pi/4)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Exercice 1.15

1. $(1+i)^9 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9 = \sqrt{2}^9 e^{i\frac{9\pi}{4}} = 16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. $(1-i)^7 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^7 = \sqrt{2}^7 e^{-i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3. $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \dfrac{16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2$.

Exercice 1.16

1. $1 + e^{ia} = e^{i\frac{a}{2}}\left(e^{-i\frac{a}{2}} + e^{i\frac{a}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$.
   Ce nombre est bien sous forme exponentielle car $\cos\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$ lorsque $|a| \leq \pi$.

2. $e^{ia} + e^{ib} = e^{ia}\left(1 + e^{-(b-a)}\right) = 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)e^{i\frac{b-a}{2}}e^{ia} = 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)e^{i\frac{b+a}{2}}$.
   Ce nombre est bien sous forme exponentielle car $\cos\left(\frac{b-a}{2}\right) \geq 0$ lorsque $|b-a| \leq \pi$.

Exercice 1.17

1. Soit $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

Par la formule de l'angle moitié (exercice précédent)

$$\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{n}{2}x}$$

Ce qui conclut.

2. On a

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \qquad \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$$

Donc

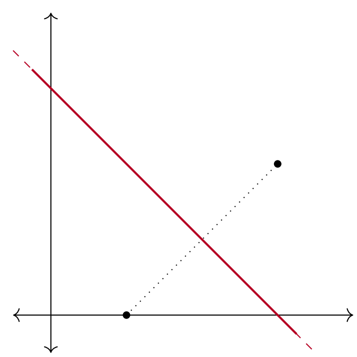
$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{n}{2}x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

et

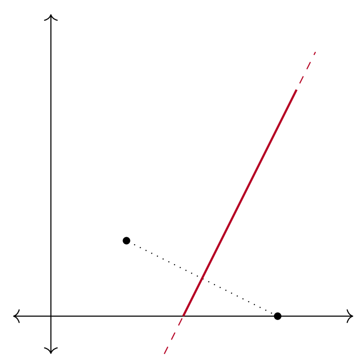
$$\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \mathrm{Im}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{n}{2}x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

Exercice 1.18

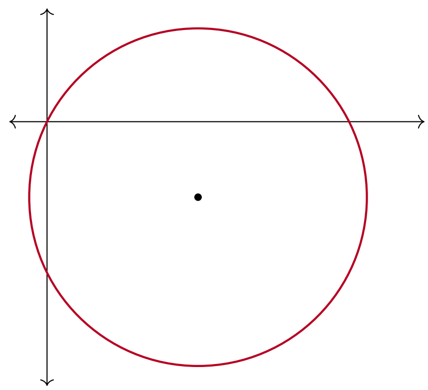
1. $|z-1| = |z-3-2i|$. L'ensemble des solutions est la médiatrice du segment reliant les points 1 et $3+2i$.



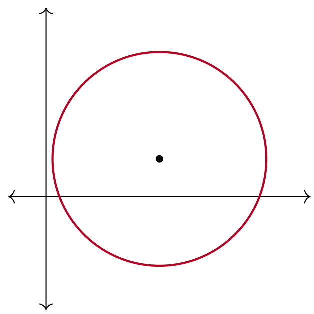
2. $|z-3| = z-1-i|$. L'ensemble des solutions est la médiatrice du segment reliant les points 3 et $1+i$.



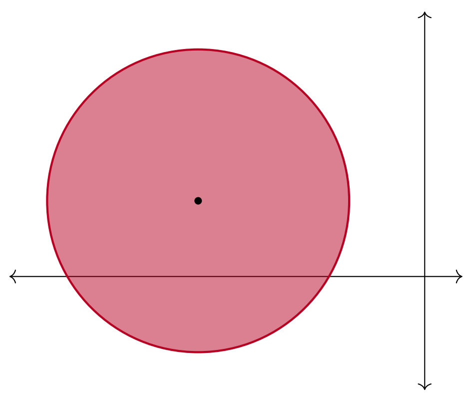
3. $|z-2+i|=\sqrt{5}$. L'ensemble des solutions est le cercle de centre $2-i$ et de rayon $\sqrt{5}$.



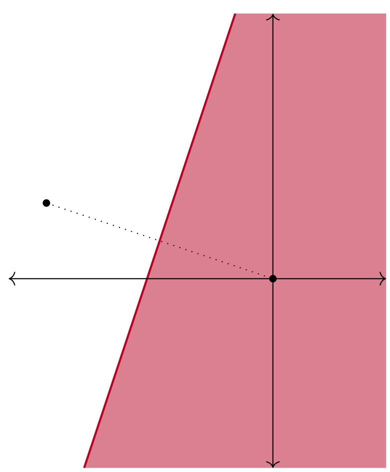
4. $|(1-i)z-2-i|=2 \iff |z-\dfrac{2-i}{1-i}|=\sqrt{2}$. L'ensemble des solutions est le cercle de centre $\dfrac{3}{2}+i\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\sqrt{2}$.



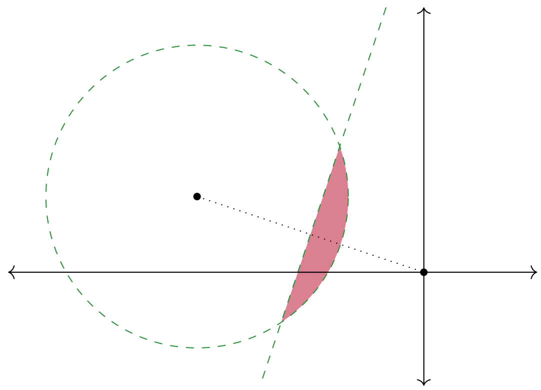
5. $|z+3-i|\leq 2$. L'ensemble des solutions est le disque de centre $-3+i$ et de rayon 2.



6. $|z+3-i|\geq |z|$. L'ensemble des solutions est le demi-plan sous la médiatrice du segment reliant les points 0 et $-3+i$.



7. $|z| < |z+3-i| < 2$. L'ensemble des solutions est l'intersection entre le demi-plan sous la médiatrice du segment reliant les points 0 et $-3+i$ et le disque de centre $-3+i$ et de rayon 2.



Exercice 1.19

1. Soient a et b deux réels. Alors

$$a+ib = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\overbrace{\arg(a+ib)}^{\theta}}$$

Donc

$$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta)$$
$$b = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta)$$

Donc

$$\frac{b}{a} = \tan(\theta)$$

Donc

$$\theta \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pmod{2\pi}$$

2. On a

$$(1+i)(1+2i)(1+3i) = (1+i+2i-2)(1+3i) = -10$$

3. On a

$$\arg((1+i)(1+2i)(1+3i)) = \arg(-10) = \pi$$

Or

$$\arg((1+i)(1+2i)(1+3i)) = \arg(1+i) + \arg(1+2i) + \arg(1+3i) = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$$

Donc

$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$$

Exercice 1.20

1. On sait que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Donc les racines carrées de i sont $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

2. On cherche a et b tels que $(a+bi)^2 = 5+12i$. On a

$$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi = 5+12i$$

Et

$$|(a+bi)^2| = a^2+b^2 = |5+12i| = 13$$

Donc

$$\begin{cases} a^2-b^2 & = & 5 \\ a^2+b^2 & = & 13 \\ 2ab & = & 12 \end{cases}$$

Les racines carrées de $5+12i$ sont donc $3+2i$ et $-3-2i$.

3. On cherche a et b tels que $(a+bi)^2 = 1+4\sqrt{5}i$. On a

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 1 + 4\sqrt{5}i$$

et

$$|(a+bi)^2| = a^2 + b^2 = |1+4\sqrt{5}i| = 9$$

Donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 1 \\ a^2 + b^2 & = & 9 \\ 2ab & = & 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Les racines carrées de $1+4\sqrt{5}i$ sont donc $\sqrt{5}+2i$ et $-\sqrt{5}-2i$.

4. On sait que $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc les racines carrées de $1+i\sqrt{3}$ sont $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Exercice 1.21

1. On calcule le discriminant de l'équation $2z^2 - 6z + 5 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -4$$

Les racines carrées de -4 sont $2i$ et $-2i$, donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{6+2i}{4}$$

$$z_2 = \frac{6-2i}{4}$$

2. On calcule le discriminant de l'équation $5z^2 + (9-7i)z + (2-6i) = 0$

$$\Delta = (9-7i)^2 - 4 \times 5 \times (2-6i) = -8-6i$$

Les racines carrées de $-8-6i$ sont $1-3i$ et $-1+3i$, donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-9+7i+1-3i}{10} = \frac{-4+2i}{5}$$

$$z_2 = \frac{-9+7i-1+3i}{10} = -1+i$$

3. On calcule le discriminant de l'équation $z^2 + (2+i)z - (1-7i) = 0$

$$\Delta = (2+i)^2 - 4 \times (-1-7i) = 7-24i$$

Les racines carrées de $7-24i$ sont $4-3i$ et $-4+3i$, donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-2-i+4-3i}{2} = 1-2i$$

$$z_2 = \frac{-2-i-4+3i}{2} = -3+i$$

Exercice 1.22

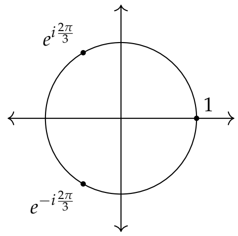
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors

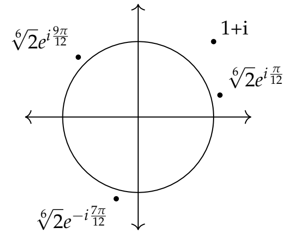
$$\begin{aligned} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de l'équation } z^2 - sz + p &\iff (z-z_1)(z-z_2) = z^2 - sz + p \\ &\iff z^2 - z_1 z - z_2 z + z_1 z_2 = z^2 - sz + p \\ &\iff s = z_1 + z_2 \text{ et } p = z_1 z_2 \end{aligned}$$

Exercice 1.23

1. On sait que $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et que les racines cubiques de l'unité sont 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
   Les racines cubiques de $1+i$ sont donc

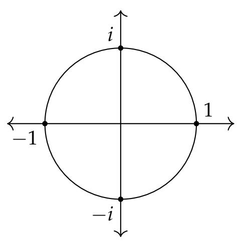
$$\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \qquad \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} \qquad \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

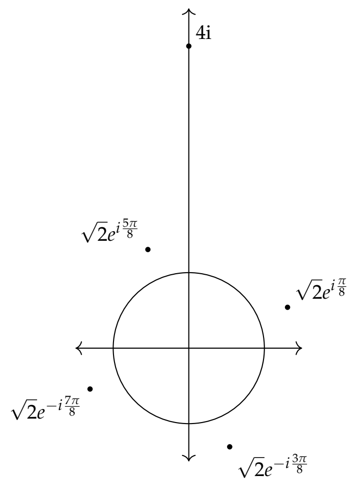




2. On sait que $4i=4e^{i\frac{\pi}{2}}$ et que les racines quatrièmes de l'unité sont 1, i, -1 et $-i$.
   Les racines quatrième de $4i$ sont donc

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \qquad \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{8}} \qquad \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{8}} \qquad \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{8}}$$

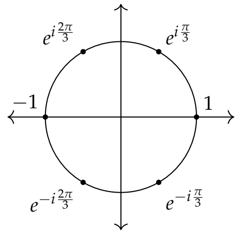


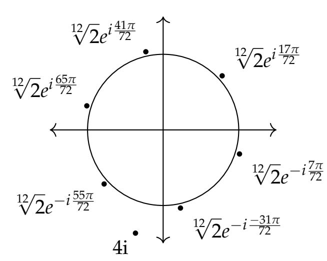


3. On sait que $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}=\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ et que les racines sixième de l'unité sont 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, -1, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   Les racines sixièmes de $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+i}$ sont donc

$$\sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} \qquad \sqrt[12]{2}e^{i\frac{17\pi}{72}} \qquad \sqrt[12]{2}e^{i\frac{41\pi}{72}}$$

$$\sqrt[12]{2}e^{i\frac{65\pi}{72}} \qquad \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{55\pi}{72}} \qquad \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{31\pi}{72}}$$





Exercice 1.24

1. Soient $\alpha = m + in$ et $\beta = m' + in'$ deux entiers de Gauss. Alors

$$\alpha + \beta = m + in + m' + in' = (m + m') + i(n + n')$$

$$\alpha\beta = (m + in)(m' + in') = (mm' - nn') + i(mn' + m'n)$$

   Comme $\mathbb{Z}$ est stable par addition et multiplication[1], $m + m'$, $n + n'$, $mm' - nn'$ et $mn' + m'n$ sont des entiers, donc $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont des entiers de Gauss.

2. Soit $\alpha = m + in$ un entier de Gauss. Alors

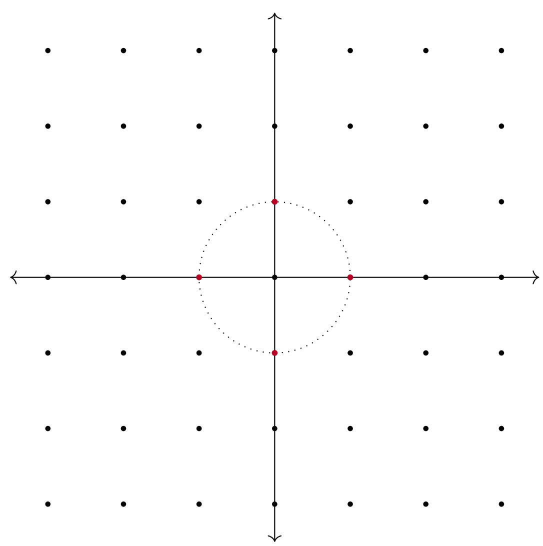
$$|\alpha|^2 = m^2 + n^2$$

   On distingue deux cas:

   - Soit $\alpha = 0$, alors $|\alpha| = 0$.
   - Soit $\alpha \neq 0$, alors soit $m \neq 0$, soit $n \neq 0$, alors $m^2 + n^2 \geq 1$, donc $|\alpha| \geq 1$.

3. On sait que les couples $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$ vérifient $m^2 + n^2 = 1$. Si $|m| \geq 2$ ou $|n| \geq 2$, alors $m^2 + n^2 \geq 4$, donc ces quatres solutions sont les seules.

4. Comme $|\alpha|$ est un entier positif, et que le seul entier positif inversible est 1, on cherche $|\alpha| = 1$. Par la question précédente, on trouve 1, i, -1 et $-i$.



Exercice 1.25

1. On a

$$\begin{aligned} x^3 = 51x + 104 &\iff (u+v)^3 = 51(u+v) + 104 \\ &\iff u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 51(u+v) + 104 \\ &\iff u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 51(u+v) + 104 \end{aligned}$$

2. On suppose que $uv = 17$, alors

$$(X - u^3)(X - v^3) = X^3 - (u^3 + v^3)X + u^3v^3 = X^2 - (u^3 + v^3)X + 4913$$

   Or

$$u^3 + v^3 = 51(u+v) + 104 - 3uv(u+v) = 104$$

   D'où u^3 et v^3 sont solutions de $X^2 - 104X + 4913$.

[1] On dit que $\mathbb{Z}$ est un anneau, tout comme $\mathbb{Z}[i]$.

3. On calcule le discriminant de l'équation $X^2 - 104X + 4913 = 0$

$$\Delta = 104^2 - 4 \times 4913 = -8836$$

Les racines carrées de -8836 sont $94i$ et $-94i$, donc les solutions de l'équation sont

$$X_1 = \frac{104 + 94i}{2} = 52 + 47i$$

$$X_2 = \frac{104 - 94i}{2} = 52 - 47i$$

On cherche $m + ni \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $(m + ni)^3 = 52 + 47i$. Alors

$$|m + ni|^6 = |52 + 47i|^2 = 4913 = 17^3$$

Donc

$$m^2 + n^2 = 17$$

Donc

$$m + ni = 4 + i$$

De même, $52 - 47i = (4 - i)^3$.

4. On calcule

$$(4 + i)(4 - i) = 17$$

Donc par la question 2, une solution de $x^3 = 51x + 104$ est

$$(4 + i) + (4 - i) = 8$$

Exercice 1.26

1. La similitude $z' = z + 3 - i$ est une translation de vecteur $3 - i$.
2. La similitude $z' = 2z + 3$ a pour centre Ω d'affixe -3, pour angle 0, et pour rapport 2.
3. La similitude $z' = iz + 1$ a pour centre Ω d'affixe $\frac{1+i}{2}$, pour angle $\frac{\pi}{2}$, et pour rapport 1.
4. La similitude $z' = (1 - i)z + 2 + i$ a pour centre Ω d'affixe $1 - 2i$, pour angle $-\frac{\pi}{4}$, et pour rapport $\sqrt{2}$.

Exercice 1.27

Une visualisation de cet exercice est disponible à l'adresse `https://www.geogebra.org/calculator/b7pnhgvy`

1. La similitude

$$z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4} z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

a pour centre Ω d'affixe $\omega = 2$, pour angle $\frac{\pi}{6}$, et pour rapport $\frac{2\sqrt{3}}{4}$.

2. On calcule le produit scalaire

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M'\Omega} \cdot \overrightarrow{M'M} &= \overrightarrow{M'\Omega} \cdot (\overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) \\
&= \overrightarrow{M'\Omega} \cdot \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{M'\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega M} \\
&= M'\Omega^2 - \overrightarrow{\Omega M'} \cdot \overrightarrow{\Omega M} \\
&= M'\Omega^2 - \Omega M' \times \Omega M \times \cos(\widehat{M'\Omega M}) \\
&= M'\Omega^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \Omega M'^2 \times \cos(-\pi/6) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc l'angle $\widehat{\Omega M' M}$ est rectangle, ce qui conclut.

Exercice 1.28

1. La similitude de centre $\Omega(1,1)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 a pour forme complexe

$$\begin{aligned} z' &= (z-(1+i)) \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} + (1+i) \\ &= 2iz + 3 - i \end{aligned}$$

2. La similitude de centre $\Omega(0,0)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\sqrt{3}$ a pour forme complexe

$$z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z$$

3. La similitude de centre $\Omega(1,-2)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $2\sqrt{2}$ a pour forme complexe

$$\begin{aligned} z' &= (z-(1-2i)) \times 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + (1-2i) \\ &= (2+2i)z - 5 \end{aligned}$$

Exercice 1.29

1. On commence par déterminer la forme complexe de cette similitude, on a

$$\alpha = \frac{1+i-(-3-i)}{1-2i} = 2i$$

$$\beta = \frac{(-3-i)-2i(1+i)}{1-2i} = 1-i$$

Donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = 2iz + 1 - i$$

Donc son centre est Ω d'affixe $\frac{1-i}{1-2i} = \frac{3+i}{5}$, son rapport est 2 et son angle est $\frac{\pi}{2}$.

2. On commence par déterminer la forme complexe de cette similitude, on a

$$\alpha = \frac{-1-4i-(-4-i)}{5-4i-(-1-4i)} = \frac{1-i}{2}$$

$$\beta = \frac{(5-4i)(-4-i)-(-1-4i)^2}{5-4i-(-1-4i)} = \frac{-3+i}{2}$$

Donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{3+i}{2}$$

Donc son centre est Ω d'affixe $\frac{\frac{-3+i}{2}}{1-\frac{1-i}{2}} = -1+2i$, son rapport est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et son angle est $-\frac{\pi}{4}$.

3. On commence par déterminer la forme complexe de cette similitude, on a

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta = 0$$

Donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = z \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \right)$$

Donc son centre est Ω d'affixe 0, son rapport est $|\alpha| = 2$ et son angle est $\arg(\alpha) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 1.30

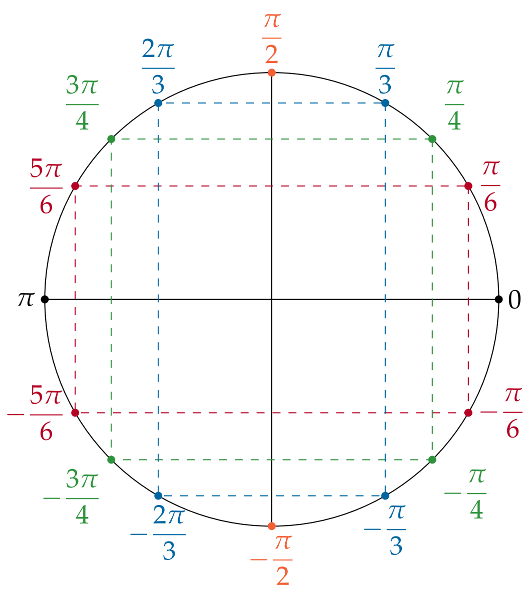
On détaille le raisonnement pour la première question, les suivantes se font de la même façon.

1. Soient M et N deux points du plan. Soit Ω un troisième point. Alors
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega N} = \overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}$$
Donc l'homothétie de centre Ω et de rapport k transforme $\overrightarrow{MN}$ en
$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = \overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega N} - k\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{MN}$$
La translation de vecteur $\vec{u}$ transforme $\overrightarrow{M'N'}$ en
$$\begin{aligned}\overrightarrow{M''N''} &= \overrightarrow{M''M'} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'N''}\\ &= -\vec{u} + \overrightarrow{M'N'} + \vec{u}\\ &= \overrightarrow{M'N'}\\ &= k\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$
On constate donc que la composée de ces transformations est
   - Dans le cas $k \neq 1$, une homothétie de rapport k.
   - Dans le cas $k = 1$, la translation de vecteur $\vec{u}$.

   On dit que l'ensemble des homothétie des translations est un sous-groupe des similitudes.
2. Soient M et N deux points du plan transformés respectivement en M' et N', puis en M'' et N''. Soit z l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$. Alors
$$\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{M'N'} = e^{i\theta}z$$
Donc la composée d'une rotation et d'une translation est
   - Une translation si la rotation est d'angle nul;
   - Une rotation sinon.
3. Soient M et N deux points du plan transformés respectivement en M' et N', puis en M'' et N''. Soit z l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$. Alors
$$\overrightarrow{M''N''} = k'\overrightarrow{M'N'} = k'kz$$
Donc la composée de deux homothétie est
   - Une translation si $k'k = 1$;
   - Une homothétie sinon.
4. Soient M et N deux points du plan transformés respectivement en M' et N', puis en M'' et N''. Soit z l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$. Alors
$$\overrightarrow{M''N''} = e^{i\varphi}\overrightarrow{M'N'} = e^{i(\varphi+\theta)}z$$
Donc la composée de deux rotations est
   - Une translation si $\varphi + \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$;
   - Une rotation sinon.

Exercice 1.31

1. $z' = z + 1 - i.$
2. $z' = 2(z - 1 + i) + 1 - i = 2z - 1 + i$
3. $z' = -z$
4. $z' = -(z - 1 + i) + 1 - i = -z + 2 - 2i$
5. $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$
6. $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i) + 1 - i = iz + 2 - 2i$
7. $z' = \overline{z}$
8. $z' = \overline{(z + i)} - i = \overline{z} - 2i$
9. $z' = -\overline{z}$
10. $z' = -\overline{(z - 1)} + 1 = -\overline{z} + 2$



θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1