1.8 Exercices (2 septembre 2024)

Exercice 1.1 Représenter les points M_k d'affixes z_k pour $k = 1, \dots, 5$ avec

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = 2+2i, \quad z_4 = 2-2i, \quad z_5 := -2-2i.$$

Exercice 1.2 Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Exercice 1.3 Déterminer les formes algébriques de :

1. $z = \dfrac{1}{1+i}$,
2. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$,
3. $z = (1+i)^4$,
4. $z = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

Exercice 1.4 Résoudre les équations suivantes :

1. $z + 2i = iz - 1$,
2. $(3+2i)(z-1) = i$,
3. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$,
4. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$.

Exercice 1.5 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes z, z^2, z^4 sont alignés ?

Exercice 1.6 On considère le nombre complexe $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer z^2 puis z^3.
2. En déduire z^4, z^5 et z^6.
3. En déduire l'inverse z^{-1} de z.
4. En déduire aussi la valeur de $(1+i\sqrt{3})^5$.
5. En déduire finalement les valeurs de

$$(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 \quad \text{et} \quad (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5.$$

Exercice 1.7 Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ satisfait $|1+iz| = |1-iz|$, alors $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.8

1. Montrer que

$$\forall z, w \in \mathcal{C}, \quad |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

2. En déduire que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des cotés est égale à la somme des carrés des diagonales [a].

[a] Si z_1, z_2, z_3, z_4 désignent les affixes des sommets, on pourra poser $z = z_2 - z_1$ et $w = z_4 - z_1$.

Exercice 1.9 Calculer $\sum_{k=0}^{7} (1+i)^k$.

Exercice 1.10 Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer $S_n := \sum_{k=0}^{n} kz^k$ en développant $(1-z)S_n$.

Exercice 1.11 On pose $z = 2e^{i\pi/4}$. Déterminer les formes exponentielles de $\overline{z}$, z^{-1}, $-z$ et iz. et les représenter tous ces nombres dans le plan complexe.

Exercice 1.12 Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z = 1$,
2. $z = -1$,
3. $z = i$,
4. $z = -i$,
5. $z = 1 + i$,
6. $z = 1 - i$,
7. $z = -1 + i\sqrt{3}$,
8. $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 1.13 Utiliser les formules d'Euler pour linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos^5(x)$,
2. $\sin^5(x)$,
3. $\cos^2(3x)\sin^2(5x)$,
4. $\cos^2(x)\sin^4(x)$.

Exercice 1.14 Montrer que $e^{i\frac{\pi}{12}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 1.15 Déterminer la forme exponentielle des nombres suivants :

1. $z = (1+i)^9$,
2. $z = (1-i)^7$,
3. $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

Exercice 1.16 Déterminer la forme exponentielle de

1. $z = 1 + e^{ia}$ avec $|a| \leq \pi$,
2. $z = e^{ia} + e^{ib}$ avec $|b-a| \leq \pi$.

Exercice 1.17

1. Montrer que si $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{nx}{2}}.$$
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

Exercice 1.18 Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition suivante :

1. $|z-1| = |z-3-2i|$,
2. $|z-3| = |z-1-i|$,
3. $|z-2+i| = \sqrt{5}$,
4. $|(1+i)z-2-i| = 2$,
5. $|z+3-i| \leq 2$,
6. $|z+3-i| \geq |z|$,
7. $|z| < |z+3-i| < 2$.

Exercice 1.19

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, alors
$$\arg(a+ib) \equiv \arctan(b/a) \mod 2\pi.$$

2. Calculer $z := (1+i)(1+2i)(1+3i)$.
3. En déduire que $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.

Exercice 1.20 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z = i$,
2. $z = 5 + 12i$,
3. $z = 1 + 4\sqrt{5}i$,
4. $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 1.21 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$,
2. $5z^2 + (9 - 7i)z + 2 - 6i = 0$,
3. $z^2 + (2+i)z - 1 + 7i = 0$.

Exercice 1.22 Montrer que si $s, p, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$ si et seulement si $z_1 + z_2 = s$ et $z_1 z_2 = p$.

Exercice 1.23 Déterminer les racines n-èmes de z dans les cas suivants :

1. $n = 3$ et $z = 1 + i$,
2. $n = 4$ et $z = 4i$,
3. $n = 6$ et $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$.

Exercice 1.24 On désigne par $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des *entiers de Gauss*, c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent $m + in$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, alors $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[i]$ et $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, alors $|\alpha| = 0$ ou $|\alpha| \geq 1$.
3. Déterminer tous les couples d'entiers (m, n) tels que $m^2 + n^2 = 1$.
4. Déterminer tous les éléments *inversibles* de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire les nombres complexes non nuls α tels que $\alpha, \alpha^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$.

Exercice 1.25

1. Montrer que si $u, v \in \mathbb{C}$ et $x = u + v$, alors $x^3 = 51x + 104$ si et seulement si $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 51(u+v) + 104$.
2. En déduire que si $uv = 17$, alors $x^3 = 51x + 104$ si et seulement si u^3 et v^3 sont les solutions de $X^2 - 104X + 4913 = 0$.
3. Résoudre cette équation du second degré et montrer que ses solutions sont des cubes d'entiers de Gauss.
4. En déduire que l'équation originale $x^3 = 51x + 104$ a une solution entière que l'on déterminera.

Exercice 1.26 Déterminer les invariants géométriques de la similitude donnée par :

1. $z' = z + 3 - i$,
2. $z' = 2z + 3$,
3. $z' = iz + 1$,
4. $z' = (1-i)z + 2 + i$.

Exercice 1.27 1. Déterminer les invariants géométriques de la similitude donnée par

$$z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

2. Montrer que si Ω désigne son centre et que M est transformé en M', alors le triangle $\{\Omega, M, M'\}$ est rectangle en M'.

Exercice 1.28 Déterminer la forme complexe de la similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport k :

1. $\Omega(1,1)$, $\theta = \pi/2$ et $k = 2$,
2. $\Omega(0,0)$, $\theta = \pi/3$ et $k = \sqrt{3}$,
3. $\Omega(1,-2)$, $\theta = \pi/4$ et $k = 2\sqrt{2}$.

Exercice 1.29 Déterminer les invariants géométriques de la similitude directe

1. qui transforme $M(1,0)$ en $M'(1,1)$ et $N(0,2)$ en $N'(-3,-1)$,
2. qui transforme $M(5,-4)$ en $M'(-1,-4)$ et M' en $M''(-4,-1)$,
3. de centre $O(0,0)$ qui transforme $M(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ en $M'(-2\sqrt{3},-2)$.

Exercice 1.30 1. Montrer que la composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie ou une translation.

2. Montrer que la composée d'une rotation et d'une translation est une rotation ou une translation.
3. Montrer que la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation.
4. Montrer que la composée de deux rotations est une rotation ou une translation.

Exercice 1.31 Déterminer les formes complexes des transformations planes suivantes :

1. La translation de vecteur $(1,-1)$.
2. L'homothétie de centre $(1,-1)$ et de rapport 2.
3. La symétrie de centre $(0,0)$.
4. La symétrie de centre $(1,-1)$.
5. La rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\pi/2$.
6. La rotation de centre $(1,-1)$ et d'angle $\pi/2$.
7. La reflexion verticale par rapport à la droite $y = 0$.
8. La reflexion verticale par rapport à la droite $y = -1$.
9. La reflexion horizontale par rapport à la droite $x = 0$.
10. La reflexion horizontale par rapport à la droite $x = 1$.