

Stage de Recherche
Master 2

David Kolar

Sous la direction de Bernard Le Stum

Formalismes à six foncteurs

Version du 22 juin 2024, 18h14
Incomplète mais (je l'espère) cohérente

Table des matières

Table des matières	i
Remerciements	iii
Introduction	v
1 ∞-Catégories	1
1 Ensembles simpliciaux, fibrations et animation	1
2 Théorie des ∞ -catégories	4
3 Structures monoïdales symétriques	9
4 Stabilité et ∞ -catégories dérivées	10
2 Formalismes à six foncteurs abstraits	15
1 Correspondances	15
2 Formalismes à six foncteurs	17
3 Construire un contexte géométrique	18
4 Dualités	20
5 Coïncidences	25
3 Faisceaux cohérents	27
1 Schémas dérivés	27
2 Faisceaux cohérents	28
Bibliographie	33

REMERCIEMENTS

*Soyons reconnaissants envers les gens qui nous rendent heureux.
Ils sont les jardiniers qui font fleurir notre âme.*

MARCEL PROUST

Il y a beaucoup de monde à remercier.

En premier lieu, Monsieur Bernard Le Stum, qui m'a confié ce sujet de stage et a relu et commenté, avec une infinie bienveillance, les brouillons que je lui apportais.

Je remercie également les enseignants qui m'ont fait découvrir la géométrie et les cohomologies, Messieurs Matthieu Romagny et Juan Souto.

Puisqu'on ne peut pas passer son temps devant une feuille (souvent blanche) ou un écran (tout aussi blanc), il me faut remercier Romane, Mitsu et Thibault, Kitty et Ryan, Charly, Louise et Célestine.

Je remercie aussi mes parents, qui m'ont soutenu depuis toujours dans mes études, et ma sœur, qui, en plus d'elle aussi me soutenir, a accepté de relire les pages qui vont suivre, en me rappelant inlassablement les mêmes règles de grammaire, pages après pages.

Enfin, à la personne qui m'a initié à ce qui, à mes yeux encore novices, fait le cœur de la recherche : la curiosité contemplative, mon grand-père, merci.

INTRODUCTION

Ce que nous n'avons pas eu à déchiffrer, à éclaircir par notre effort personnel, ce qui était clair avant nous, n'est pas à nous.

MARCEL PROUST

Lorsque l'on étudie des objets géométriques, il est souvent intéressant de leur associer des invariants. Au milieu du 18^e siècle, Leonhard Euler introduisit la *caractéristique d'Euler* $\chi(X)$ (initialement définie pour un polyèdre, mais qui peut se généraliser à un espace topologique moyennant qu'il ne soit pas trop monstrueux). Au 19^e siècle, Enrico Betti introduisit ce que Henri Poincaré allait appeler les *nombre de Betti* $(b_n(X))_n$, un invariant plus fort que la caractéristique d'Euler puisque, encore une fois pour un espace topologique sympathique,

$$\chi = \sum_n (-1)^n b_n$$

L'une des nombreuses prouesses mathématiques d'Emmy Noether fut de montrer que ces nombres de Betti étaient eux aussi l'ombre d'un invariant encore plus élevé : l'*homologie* $H_n(X)$. En effet

$$b_n(X) = \text{rank}(H_n(X)) = \dim(H_n(X) \otimes \mathbb{Q})$$

L'étude des objets géométriques se ramenait donc bien souvent à l'étude de leur homologie, ou de sa duale, la *cohomologie*. Ainsi, dans sa refondation de la géométrie algébrique, Alexandre Grothendieck prit grand soin de placer les outils homologiques au centre de sa théorie, par l'utilisation des catégories et des foncteurs. L'une des raisons ayant mené Grothendieck à reformuler la géométrie algébrique étaient les conjectures de Weil sur la fonction ζ d'une variété :

$$\zeta_X(T) = \exp \left(\sum_n \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n} T^n \right)$$

Weil a fameusement conjecturé que, sous certaines conditions sur X , cette fonction est rationnelle et vérifie une équation fonctionnelle (entre autre bonnes propriétés). Il supposait alors que ces bonnes propriétés découleraient d'une bonne théorie cohomologique, que Jean-Pierre Serre, Alexandre Grothendieck et Pierre Deligne (entre autres) dégageraient sous la forme de la *cohomologie ℓ -adique*. Ces développements s'appuyaient sur l'algèbre homologique autant qu'ils l'enrichissaient, notamment avec l'introduction des catégories et foncteurs *dérivés*.

C'est dans ce contexte que le premier *formalisme à six foncteurs* fut dégagé, afin d'étudier la cohomologie ℓ -adique d'un point de vue relatif. En effet, à chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$, on peut associer un foncteur

$$f^* : D(Y) \rightarrow D(X)$$

entre catégories dérivées, qui possède un co-adjoint $f_* : D(X) \rightarrow D(Y)$. Dans le cas d'un morphisme propre, on peut également définir un foncteur

$$f_! : D(X) \rightarrow D(Y)$$

de co-adjoint $f^! : D(Y) \rightarrow D(X)$. Bien souvent, les catégories considérées sont munies d'une structure monoïdale symétrique, donc d'un (bi-)foncteur

$$- \otimes - : D(X) \times D(X) \rightarrow D(X)$$

qui, lui aussi, possède un co-adjoint $\text{Hom}(-, -) : D(X)^{\text{op}} \times D(X) \rightarrow D(X)$. Mais le tout est plus grand que la somme de ses parties, et un formalisme à six foncteurs doit vérifier quelques compatibilités (parfois appelées *yoga des six opérations*). Ces compatibilités ont longtemps été un obstacle à une définition claire d'un formalisme à six foncteurs, notamment quand, comme de nos jours, les catégories dérivées sont à comprendre comme des ∞ -catégories stables. Les travaux de Yifeng Liu et Weizhe Zheng ([5]) ainsi que de Denis Gaistgory et Nick Rozenblyum ([3]) ont clarifié la situation, mais ils comprenaient encore quelques inconvénients :

- La définition de Liu et Zheng utilise les ∞ -catégories de Lurie extensivement, mais se retrouve parfois coincée dans la combinatoire de certains ensembles simpliciaux ;
- Celle de Gaistgory et Rozenblyum admet de bien meilleures propriétés formelles, mais utilise à de multiples reprises les $(\infty, 2)$ -catégories, bien moins maîtrisées.

Dans sa thèse de doctorat, Lucas Mann ([6]) a dégagé une définition qui réunit le meilleur des deux approches, fermement ancrée dans les travaux de Lurie, et avec de bonnes propriétés formelles. Ce mémoire présente cette nouvelle approche, et quelques raffinements apportés par Peter Scholze à l'occasion d'un cours donné sur les formalismes à six foncteurs ([7]). Nous allons donc commencer par établir les résultats nécessaires de théorie des ∞ -catégories, puis la définition de Mann des formalismes à six foncteurs et les bonnes propriétés formelles dont elle bénéficie. Nous appliquerons enfin ce nouveau formalisme aux faisceaux cohérents, à titre d'exemple.

∞ -CATÉGORIES

Ça c'est la caisse. Le mouton que tu veux est dedans.

ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY

Dans ce chapitre, on met en place la théorie nécessaire des ∞ -catégories, suivant l'approche des quasi-catégories introduites Boardman-Vogt, étudiées Joyal et très largement développées par Lurie ([HTT, HA]).

Pour ce faire, on commence par une section de rappels sur les ensembles simpliciaux et leurs fibrations, on fait ensuite une brève interlude pour discuter des notions d'objets simpliciaux et d'animation. La section suivante étudie la théorie des ∞ -catégories, avec notamment les notions de limites et d'adjonction. On étudie ensuite la notion de structure monoïdale symétrique, qui sera centrale dans le chapitre suivant. Enfin, on développe les notions de stabilité et d' ∞ -catégorie dérivée d'une catégorie abélienne.

1 Ensembles simpliciaux, fibrations et animation

Ensembles simpliciaux

Notation: On note Δ la catégorie des ensembles finis ordonnés $[n] = \{0 < \dots < n\}$.

Remarque

La catégorie Δ admet un unique automorphisme non trivial, de renversement d'ordre, qui renverse la relation d'ordre sur tout ensemble ordonné fini E . On note alors E^{op} l'ensemble obtenu.

Définition 1.1.1 (Ensemble simplicial)

Un *ensemble simplicial* est un foncteur $K : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. On note alors $K_n := K([n])$ l'ensemble de ses n -simplexes. Un *sommet* est un 0-simplexe, tandis qu'une *arête* est un 1-simplexe.

Notation: On note \mathbf{sSet} la catégorie des ensembles simpliciaux.

Deux classes de morphismes se distinguent dans Δ :

- Les *faces* : $\delta^{n,i} : [n] \rightarrow [n-1]$, qui « évitent » la i^{e} valeur ;
- Les *dégénérescences* : $\sigma^{n,i} : [n-1] \rightarrow [n]$, qui « dédoublent » la i^{e} valeur.

Leurs images dans un ensemble simplicial sont notées $d_{n,i}$ et $s_{n,i}$, ou (hors ambiguïté) d_i et s_i . Un n -simplexe est dit *dégénéré* lorsqu'il est dans l'image d'une dégénérescence. Un ensemble simplicial est dit *discret* lorsque ses seuls simplexes non-dégénérés sont en degré 0. La *dimension* d'un ensemble simplicial est le degré maximal admettant des simplexes non-dégénérés. Pour un cardinal régulier κ , un ensemble simplicial est dit κ -*petit* lorsqu'il admet strictement moins de κ simplexes non-dégénérés, dans le cas $\kappa = \aleph_0$, on parle également d'ensemble simplicial *fini*.

Définition 1.1.2 (Nerf)

Le *foncteur de nerf* sur la catégorie \mathbf{Cat} des petites catégories est

$$\begin{aligned} \Delta^- : \mathbf{Cat} &\rightarrow \mathbf{sSet} \\ \mathcal{C} &\mapsto ([n] \mapsto \text{Hom}([n], \mathcal{C})) \end{aligned}$$

Notation: On note $\Delta^n := \Delta^{[n]}$.

Définition 1.1.3 (Corne)

Pour $0 \leq k \leq n$, la k^{e} *corne* du simplexe standard Δ^n est

$$\Lambda_k^n = \bigcup_{\substack{[m] \subsetneq [n] \\ k \in [m]}} \Delta^m$$

Remarque: Pour $k \in \{0, n\}$, on parle de corne *extérieure* (ou *première* et *dernière* cornes), et de corne *intérieure* sinon.

Définition 1.1.4 (Frontière)

La *frontière* d'un simplexe standard Δ^n est

$$\partial\Delta^n = \bigcup_{[m] \subsetneq [n]} \Delta^m$$

Notation: Pour $i, j \in \{0, \dots, n\}$ avec $i < j$, on note $P_{ij} := \{I \subset [i, j] \mid i, j \in I\}$.

Notation: Pour $n \geq 0$, on note \mathbf{S}^n la catégorie¹ définie par $\text{Ob}(\mathbf{S}^n) = \{0, \dots, n\}$ et $\text{Hom}_{\mathbf{S}^n}(i, j) = \Delta^{P_{ij}}$.

Définition 1.1.5 (Nerf cohérent)

Le *nerf cohérent* d'une catégorie \mathcal{C} enrichie en ensembles simpliciaux est l'ensemble simplicial

$$N(\mathcal{C}) = (\text{Hom}_{\mathbf{sSetCat}}(\mathbf{S}^n, \mathcal{C}))_n$$

Remarque

Par cette construction, on pourra interpréter une catégorie enrichie en animas comme une ∞ -catégorie.

Fibrations

Définition 1.1.6 (Fibration triviale)

Un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \rightarrow L$ est une *fibration triviale* lorsque, pour $n \geq 1$, le problème de relèvement

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & L \end{array}$$

admet une solution.

Définition 1.1.7 (Fibration intérieure, à gauche, à droite, de Kan)

Pour un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \rightarrow L$, on considère, pour $n \geq 1$, le problème de relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & L \end{array}$$

On dit que f est une *fibration*

intérieure lorsque ce problème admet une solution pour toute corne intérieure (i.e. $0 < k < n$);

à gauche lorsque ce problème admet une solution pour toute corne, sauf la dernière (i.e. $0 \leq k < n$);

à droite lorsque ce problème admet une solution pour toute corne, sauf la première (i.e. $0 < k \leq n$);

de Kan lorsque ce problème admet une solution pour toute corne (i.e. $0 \leq k \leq n$).

Définition 1.1.8 (Arête cartésienne)

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Une arête e de K est *f-cartésienne* lorsque, pour $n \geq 2$, le problème de relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\{n-1, n\}} & & \\ \downarrow & \searrow e & \\ \Lambda_n^n & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & L \end{array}$$

admet une solution.

1. Enrichie en ensembles simpliciaux

Définition 1.1.9 (Arête co-cartésienne)

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Une arête e de K est f -co-cartésienne lorsque, pour $n \geq 2$, le problème de relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\{0,1\}} & & \\ \downarrow & \searrow e & \\ \Lambda_0^n & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow \text{dashed} & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & L \end{array}$$

admet une solution.

Définition 1.1.10 (Fibration cartésienne, co-cartésienne)

Une *fibration cartésienne* est une fibration intérieure $f : K \rightarrow L$ telle que, pour toute arête $e : S \rightarrow T$ de L et tout relèvement \tilde{T} de T , il existe une arête f -cartésienne $\tilde{e} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{T}$ relevant e .

Une *fibration co-cartésienne* est une fibration intérieure $f : K \rightarrow L$ telle que, pour toute arête $e : S \rightarrow T$ de L et tout relèvement \tilde{S} de S , il existe une arête f -co-cartésienne $\tilde{e} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{T}$ relevant e .

Notation: On note $\text{cart}(\mathcal{C})$ (resp. $\text{cocart}(\mathcal{C})$) l' ∞ -catégorie des fibrations cartésiennes (resp. co-cartésiennes) sur \mathcal{C} .

Animation

Définition 1.1.11 (Groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial)

Soit K un ensemble simplicial.

- L'ensemble des composantes connexes de K est l'ensemble $\pi_0(K)$ des classes d'équivalence de K_0 sous la relation

$$K_1 \xrightarrow{d_1 \times d_0} K_0 \times K_0$$

- Pour $x \in K_0$, un n -lacet en x est un morphisme $\alpha : \Delta^n \rightarrow K$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & \Delta^0 \\ \downarrow & & \downarrow x \\ \Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & K \end{array}$$

- Deux n -lacets α, α' en x sont *homotopes* lorsqu'il existe une *homotopie simpliciale* η faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & & \\ \text{id} \times \delta^0 \downarrow & \searrow \alpha & \\ \Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{\eta} & K \\ \text{id} \times \delta^1 \uparrow & \nearrow \alpha' & \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \partial\Delta^n \times \Delta^1 & \longrightarrow & \Delta^0 \\ \downarrow & & \downarrow x \\ \Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{\eta} & K \end{array}$$

- Le n^{e} groupe² d'homotopie de K en x est l'ensemble $\pi_n(K, x)$ des classes d'équivalence de n -lacets sous la relation d'homotopie.

Définition 1.1.12 (Ensemble simplicial n -tronqué)

Un ensemble simplicial K est dit n -tronqué lorsque $\pi_m(K, x) = *$ pour tout $x \in K$ et tout $m > n$.

Définition 1.1.13 (Ensemble simplicial contractile)

Un ensemble simplicial K est *contractile* lorsque $K \rightarrow \Delta^0$ admet un inverse à homotopie près.

2. La loi de groupe est donnée par la concaténation des lacets. Pour $n \geq 2$, un argument de Eckmann-Hilton montre que $\pi_n(K, x)$ est abélien.

Remarque

Par convention, un ensemble simplicial est (-2) -tronqué lorsqu'il est non-vidé et contractile, et (-1) -tronqué lorsqu'il est vidé ou contractile.

Définition 1.1.14 (Équivalence faible)

Un morphisme d'ensembles simpliciaux $f : K \rightarrow L$ est une *équivalence faible* lorsqu'il induit des isomorphismes entre les ensembles de composantes connexes et entre chaque groupes d'homotopie.

Remarque: On dit aussi que K et L sont *faiblement équivalents*.

Définition 1.1.15 (Ensemble animé)

La catégorie des *ensembles animés* est la localisation de \mathbf{sSet} aux équivalences faibles.

Notation: On notera \mathbf{Ani} cette ∞ -catégorie.

Définition 1.1.16 (Objet simplicial)

Un *objet simplicial* dans une catégorie \mathcal{C} est un foncteur $K : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$.

Remarque: Un ensemble simplicial est donc un objet simplicial de \mathbf{Set} .

Notation: On note $s\mathcal{C}$ la catégorie des objets simpliciaux d'une catégorie \mathcal{C} .

Remarques

- On peut également définir la catégorie des *anneaux animés*, à partir des anneaux simpliciaux, en considérant les équivalences faibles ensemblistes.
- Cette notion fait partie du procédé plus général d'animation, expliqué plus en détails dans [1, section 5.1.4].
- L'animation d'une catégorie peut être vue comme une « généralisation » des catégories dérivées à des catégories non nécessairement abéliennes.
- On note enfin que le foncteur $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ani}$ admet un adjoint $\pi_0 : \mathbf{Ani} \rightarrow \mathbf{Set}$.

2 Théorie des ∞ -catégories

∞ -Catégories

Définition 1.2.1 (∞ -Catégorie)

Une ∞ -catégorie est un ensemble simplicial \mathcal{C} tel que $\mathcal{C} \rightarrow *$ est une fibration intérieure.

Remarque

Si \mathcal{C} est une ∞ -catégorie, alors l'ensemble simplicial \mathcal{C}^{op} défini par

$$\mathcal{C}^{\text{op}}([n]) = \mathcal{C}([n]^{\text{op}})$$

est une ∞ -catégorie, dite *opposée* de \mathcal{C} .

Remarques

- Une ∞ -catégorie est donc un ensemble simplicial tel que toute corne intérieure peut se compléter.
- De manière équivalente, une ∞ -catégorie est un ensemble simplicial \mathcal{C} tel que la restriction

$$\text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta^2, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_1^2, \mathcal{C})$$

est une fibration triviale.

Définition 1.2.2 (Foncteur)

Un *foncteur* entre deux ∞ -catégories est un morphisme d'ensembles simpliciaux.

Définition 1.2.3 (Transformation naturelle)

Une *transformation naturelle* entre deux foncteurs $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux $\eta : \mathcal{C} \times \Delta^1 \rightarrow \mathcal{C}'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ \text{id} \times \delta^0 \downarrow & \searrow F & \\ \mathcal{C} \times \Delta^1 & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}' \\ \text{id} \times \delta^1 \uparrow & \nearrow G & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$$

Notation: Pour un ensemble simplicial K , les foncteurs $K \rightarrow \mathcal{C}$ forment une ∞ -catégorie, notée $\text{Fun}(K, \mathcal{C})$.

Notation: Pour un ensemble simplicial K , on note $\text{Fun}(K, \mathcal{C})^\simeq$ le complexe de Kan maximal dans $\text{Fun}(K, \mathcal{C})$.

Notation: On note \mathbf{Cat}_∞ l' ∞ -catégorie dont les objets sont les ∞ -catégories et $\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')^\simeq$.

Définition 1.2.4

Soient X et Y deux objets d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} . L'ensemble simplicial $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow (1,0) \\ \Delta^0 & \xrightarrow{(X,Y)} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \end{array}$$

est un anima, appelé *anima des morphismes* entre X et Y .

Définition 1.2.5 (Objet k -tronqué)

Un objet X dans une ∞ -catégorie \mathcal{C} est *k -tronqué* lorsque, pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $\text{Hom}(X, Y)$ est k -tronqué.

Proposition 1.2.6

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie. Les morphismes d'évaluation

$$\text{eval}_0, \text{eval}_1 : \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\Delta^0, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$$

sont des fibrations intérieures sur \mathcal{C} .

Démonstration

Comme $\text{Fun}(\Delta^0, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}$, un morphisme $\Lambda_k^n \rightarrow \text{Fun}(\Delta^0, \mathcal{C})$ peut être vu comme une chaîne composable de morphismes de \mathcal{C} , un relèvement est alors le morphisme composé correspondant.

Définition 1.2.7 (∞ -catégorie au dessus d'un objet, en dessous)

Soit X un objet d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} .

- L' ∞ -catégorie *au dessus de X* est composée des antécédents, par eval_1 , de X .
- L' ∞ -catégorie *en dessous de X* est composée des antécédents, par eval_0 , de X .

Notation: On note $\mathcal{C}_{/X}$ l' ∞ -catégorie au dessus de X , et $\mathcal{C}^{<X}$ l' ∞ -catégorie en dessous de X .

Définition 1.2.8 (Monomorphisme, épimorphisme)

Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans une ∞ -catégorie est un *monomorphisme* lorsque, vu comme objet de $\mathcal{C}_{/Y}$, c'est un objet (-1) -tronqué.

Un *épimorphisme* est un monomorphisme dans l' ∞ -catégorie opposée.

Définition 1.2.9 (Catégorie d'homotopie)

La *catégorie d'homotopie* $\text{h}\mathcal{C}$ d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} est l'image de \mathcal{C} par l'adjoint du foncteur de nerf.

Remarque: $\text{h}\mathcal{C}$ a les mêmes objets que \mathcal{C} , mais $\text{Hom}_{\text{h}\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_0 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Définition 1.2.10 (Équivalence)

Un morphisme dans une ∞ -catégorie \mathcal{C} est une *équivalence* lorsque son image dans $h\mathcal{C}$ est un isomorphisme.

Définition 1.2.11 (Foncteur pleinement fidèle, essentiellement surjectif)

Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est *pleinement fidèle* lorsqu'il induit un foncteur pleinement fidèle $h\mathcal{C} \rightarrow h\mathcal{C}'$.

Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est *essentiellement surjectif* lorsqu'il induit un foncteur essentiellement surjectif $h\mathcal{C} \rightarrow h\mathcal{C}'$.

Remarque

Deux ∞ -catégories sont équivalentes comme objets de \mathbf{Cat}_∞ si et seulement si leurs catégories d'homotopie le sont.

Définition 1.2.12 (Catégorie des préfaisceaux)

L' ∞ -catégorie des *préfaisceaux* d'animas sur une ∞ -catégorie \mathcal{C} est

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ani})$$

Lemme 1.2.13 (Lemme de Yoneda)

Pour une ∞ -catégorie \mathcal{C} , le *plongement de Yoneda*

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}) \\ X &\mapsto [Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)] \end{aligned}$$

est pleinement fidèle.

Démonstration: [HTT, proposition 5.1.3.1], [Ker, tag 03NJ]

Théorème 1.2.14 (Théorème de Yoneda)

Soient \mathcal{C} une ∞ -catégorie et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ani}$ un foncteur. Alors le foncteur composé

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{Y}} \mathcal{P}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}(-, F)} \mathbf{Ani}$$

est équivalent à F .

Démonstration: [HTT, lemme 5.5.2.1], [Ker, tag 03M5]

Théorème 1.2.15 (Lissage-Délissage)

Soit \mathcal{S} une ∞ -catégorie. Il y a une équivalence d' ∞ -catégories

$$\mathrm{St} : \mathrm{cocart}(\mathcal{S}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{S}, \mathbf{Cat}_\infty) : \mathrm{Un}$$

Démonstration: [HTT, théorème 2.2.1.2]

Limites et colimites

On rappelle qu'un *diagramme de forme* K dans une ∞ -catégorie \mathcal{C} est un foncteur $K \rightarrow \mathcal{C}$.

Notation: Pour un ensemble simplicial K , on note \underline{X}_K le diagramme constant en X de forme K .

Définition 1.2.16 (Limite)

Soit $F : K \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme. Un objet $Y \in \mathcal{C}$ est une *limite* de F lorsqu'il existe une transformation naturelle $\underline{Y}_K \rightarrow F$ induisant, pour tout $X \in \mathcal{C}$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})}(\underline{X}_K, F)$$

Duallement, un objet $X \in \mathcal{C}$ est une *colimite* de F lorsqu'il existe une transformation naturelle $F \rightarrow \underline{X}_K$ induisant, pour tout $Y \in \mathcal{C}$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(K, \mathcal{C})}(F, \underline{Y}_K)$$

Remarque: La limite de F , lorsqu'elle existe, est unique à équivalence près, et dépend fonctoriellement de F .

Notation: Pour un diagramme F , on note $\lim F$ sa limite et $\operatorname{colim} F$ sa colimite.

La plupart des constructions catégoriques usuelles s'étendent naturellement aux ∞ -catégories :

Définition 1.2.17 (Objet initial, final, nul)

Un objet est

final lorsqu'il est limite d'un diagramme vide ;

initial lorsqu'il est colimite d'un diagramme vide ;

nul lorsqu'il est initial et final.

Une ∞ -catégorie est dite *pointée* lorsqu'elle admet un objet nul.

Notation: On note \emptyset l'objet initial, $*$ l'objet final et 0 l'objet nul, lorsqu'ils existent.

Définition 1.2.18 (Produit, co-produit)

Un *produit* est une limite d'un diagramme discret.

Un *co-produit* est une colimite d'un diagramme discret.

Notation: On note $X \times Y$ (ou $\prod_{i \in I} X_i$) un produit et $X + Y$ (ou $\coprod_{i \in I} X_i$) un co-produit.

Définition 1.2.19 (Produit fibré, somme amalgamée)

Un *produit fibré* est une limite d'un diagramme de forme $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$.

Une *somme amalgamée* est une colimite d'un diagramme de forme $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$.

Notation: On note $X \times_Z Y$ un produit fibré et $X \overset{+}{\underset{Z}{+}} Y$ une somme amalgamée.

Remarque

On dit que le carré

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

est *cartésien* lorsque $W \simeq X \times_Z Y$, et *co-cartésien* lorsque $Z \simeq X \overset{+}{\underset{W}{+}} Y$.

Définition 1.2.20 (Co-produit disjoint)

Un co-produit $X + Y$ est dit *disjoint* lorsque le produit fibré $X \times_{X+Y} Y$ est initial.

Notation: On note $X \sqcup Y$ un co-produit disjoint.

Définition 1.2.21 (Co-produit universel)

Un co-produit $X + Y$ est *universel* lorsque le produit fibré d'un morphisme $f : X + Y \rightarrow Z$ le long de $g : W \rightarrow Z$ est de la forme $W_X + W_Y \rightarrow W$ avec $W_X \rightarrow W$ le produit fibré de $X \rightarrow Z$ le long de g .

Définition 1.2.22 (Égaliseur, co-égaliseur)

Un *égaliseur* est une limite d'un diagramme de forme $\bullet \rightrightarrows \bullet$.

Un *co-égaliseur* est une colimite d'un diagramme de forme $\bullet \rightrightarrows \bullet$.

Définition 1.2.23 (∞ -Catégorie complète, co-complète)

Une ∞ -catégorie est

K-complète pour un ensemble simplicial K lorsqu'elle admet toutes les limites de forme K ;

complète lorsqu'elle admet toutes les petites limites ;

K-co-complète pour un ensemble simplicial K lorsqu'elle admet toutes les colimites de forme K ;

co-complète lorsqu'elle admet toutes les petites colimites.

Théorème 1.2.24

Une ∞ -catégorie \mathcal{C} admet toutes les colimites finies si et seulement si elle admet toutes les sommes amalgamées et un objet initial.

Démonstration

Le sens direct est trivial, on se concentre sur le sens réciproque.

Soit $p : K \rightarrow \mathcal{C}$ un diagramme fini. On procède par récurrence, à la fois sur la dimension de K et sur le nombre de simplexes non dégénéré de degré maximal :

- Si K est vide, alors une colimite de p est un objet initial.
- Sinon, on peut décomposer K comme la somme amalgamée $K_0 +_{\partial\Delta^n} \Delta^n$. Par hypothèse de récurrence, $p|_{K_0}$ admet une limite X et $p|_{\partial\Delta^n}$ admet une limite Y . Comme Δ^n a un objet final, $p|_{\Delta^n}$ admet une colimite Z . Donc p a pour colimite $X +_Y Z$.

Corollaire 1.2.25

Un foncteur qui préserve les sommes amalgamées et l'objet initial préserve toutes les colimites finies.

Remarque: On peut dualiser ces deux résultats.

Théorème 1.2.26

Soit X un objet d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} . Alors le foncteur

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

préserve les limites qui existent dans \mathcal{C} .

Démonstration: [2, Corollaire 6.3.5]

Adjonctions

Définition 1.2.27 (Adjoint)

Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre ∞ -catégories est *adjoint* à un foncteur $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ lorsqu'il existe une transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}'} \rightarrow G \circ F$ induisant, pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$, une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

Remarques

- De manière équivalente, G est *co-adjoint* à F lorsqu'il existe une transformation naturelle $\eta : F \circ G \rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ induisant une équivalence d'animas

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

- Les transformations ε et η sont alors nommées *unité* et *co-unité* de la paire adjointe.

Ici aussi, les théorèmes usuels admettent des analogues ∞ -catégoriques :

Théorème 1.2.28 (Unicité de l'adjoint)

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur admettant un co-adjoint G . Alors G est unique à équivalence près.

Démonstration

Soient G et G' deux co-adjoints de F . Alors, pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{C}'$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G'Y)$$

Le lemme de Yoneda permet alors de conclure.

Remarque: L' ∞ -catégorie des foncteurs co-adjoints à F est en fait un complexe de Kan contractile.

Proposition 1.2.29

Soient $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur admettant un co-adjoint G . Alors F préserve toutes les colimites.

Démonstration

Soit (X_i) un diagramme admettant une colimite dans \mathcal{C} . Alors, pour $Y \in \mathcal{C}'$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F \operatorname{colim} X_i, Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim} X_i, GY) \\ &\simeq \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, GY) \\ &\simeq \lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(FX_i, Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\operatorname{colim} FX_i, Y) \end{aligned}$$

Le lemme de Yoneda permet alors de conclure que $F \operatorname{colim} X_i \simeq \operatorname{colim} FX_i$.

Remarque: Duallement, un foncteur admettant un adjoint préserve toutes les limites.

Présentabilité

Dans cette section, on introduit brièvement la notion de présentabilité, qui sera utile plus tard dans la construction explicite des formalismes à six foncteurs.

Ici, il n'est plus possible d'éviter les questions ensemblistes, on fixe donc un cardinal régulier κ , on dit alors qu'un ensemble est *petit* lorsqu'il est de cardinal strictement inférieur à κ .

Définition 1.2.30 (∞ -Catégorie localement petite)

Une ∞ -catégorie est *localement petite* lorsque tous ses objets de morphismes sont petits.

Définition 1.2.31 (∞ -Catégorie filtrée)

Une ∞ -catégorie \mathcal{C} est *filtrée* lorsque toute colimite de forme \mathcal{C} dans \mathbf{Ani} existe et commute avec toutes les limites finies.

Définition 1.2.32

Soit \mathcal{C} une petite ∞ -catégorie. $\operatorname{Ind}(\mathcal{C})$ est l' ∞ -catégorie ayant pour objets les petits diagrammes filtrés $X : D_X \rightarrow \mathcal{C}$ et comme objets de morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\operatorname{Ind}(\mathcal{C})}(X, Y) = \lim_{d \in D_X} \operatorname{colim}_{d' \in D_Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X(d), Y(d'))$$

Remarque: Duallement, on définit l' ∞ -catégorie $\operatorname{Pro}(\mathcal{C})$ comme $\operatorname{Pro}(\mathcal{C}) := \operatorname{Ind}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$.

Définition 1.2.33 (∞ -Catégorie accessible)

Une ∞ -catégorie est *accessible* lorsqu'il existe une petite ∞ -catégorie \mathcal{C}' telle que $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Ind}(\mathcal{C}')$.

Définition 1.2.34 (∞ -Catégorie présentable)

Une ∞ -catégorie est *présentable* lorsqu'elle est accessible et qu'elle admet toutes les petites colimites.

Proposition 1.2.35

Une ∞ -catégorie est présentable si et seulement si elle est localement petite et qu'elle est engendrée par petites colimites d'un petit ensemble d'objets.

Remarque: Là aussi, la preuve, longue et technique, est disponible dans [HTT, section 5.5.1].

3 Structures monoïdales symétriques

Notation: On note \mathbf{Fin}_* la catégorie des ensembles finis $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$ et des applications partielles.

Notation: On note $\rho_i^n : \langle n \rangle \rightarrow \langle 1 \rangle$ l'unique morphisme défini uniquement en i .

Définition 1.3.1 (∞ -Catégorie monoïdale symétrique)

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie. Une *structure monoïdale symétrique* sur \mathcal{C} est une fibration co-cartésienne

$$\mathcal{C}^{\otimes} \rightarrow \Delta^{\mathbf{Fin}_*}$$

telle que $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_{\langle 1 \rangle}^{\otimes}$ et les morphismes ρ_i^n induisent des foncteurs $\mathcal{C}_{\langle n \rangle}^{\otimes} \rightarrow \mathcal{C}$ qui déterminent une équivalence

$$\mathcal{C}_{\langle n \rangle}^{\otimes} \simeq \mathcal{C}^n$$

Remarque

Par le théorème de Lissage-Déissage (1.2.15), une structure monoïdale symétrique sur \mathcal{C} peut se comprendre comme un foncteur $\Delta^{\mathbf{Fin}_*} \rightarrow \mathbf{Cat}_{\infty}$ par lequel $\langle 1 \rangle$ a pour image \mathcal{C} .

Notation: On note $1_{\mathcal{C}}$ l'unité de \mathcal{C} , unique objet de $\mathcal{C}_{\langle 0 \rangle}^{\otimes}$.

Définition 1.3.2 (Structure monoïdale symétrique cartésienne)

Une structure monoïdale symétrique sur une ∞ -catégorie \mathcal{C} est dite *cartésienne* lorsque $1_{\mathcal{C}}$ est final et que, pour deux objets X et Y de \mathcal{C} , $X \otimes Y \simeq X \times Y$.

Remarque: Une telle structure est essentiellement unique.

Définition 1.3.3 (Foncteur monoïdal symétrique)

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux ∞ -catégories admettant des structures monoïdales symétriques, définies par des fibrations

$$\mathcal{C}^{\otimes}, \mathcal{C}'^{\otimes} \rightarrow \Delta^{\mathbf{Fin}_*}$$

Un *foncteur monoïdal symétrique (faible)* est un foncteur $\mathcal{C}^{\otimes} \rightarrow \mathcal{C}'^{\otimes}$ au-dessus de \mathbf{Fin}_* préservant les relèvements co-cartésiens des ρ_i^n .

Un foncteur monoïdal symétrique est dit *fort* lorsqu'il préserve tous les relèvements co-cartésiens.

Remarque

La condition de préserver les relèvements co-cartésiens des ρ_i^n permet d'induire un morphisme

$$\bigotimes_i F(X_i) \rightarrow F\left(\bigotimes_i X_i\right)$$

qui est une équivalence quand F est fort.

Définition 1.3.4 (∞ -Catégorie monoïdale symétrique fermée)

Une ∞ -catégorie monoïdale symétrique \mathcal{C} est dite *fermée* lorsque, pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, le foncteur $- \otimes Y$ admet un co-adjoint $\mathcal{H}om(-, Y)$.

4 Stabilité et ∞ -catégories dérivées

Stabilité

On rappelle qu'une ∞ -catégorie est *pointée* lorsqu'elle admet un objet nul, à la fois initial et final.

Définition 1.4.1 (Triangle)

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie pointée. Un *triangle* de \mathcal{C} est un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Notation: On note plus souvent $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ un triangle.

Définition 1.4.2 (Suite fibrée, co-fibrée)

Un triangle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est une *suite*
fibrée lorsque c'est un produit fibré;
co-fibrée lorsque c'est une somme amalgamée.
On dit alors que X est la *fibre* de g , et que Z est la *co-fibre* de f .

Notation: On note $\text{fib}(g)$ la fibre d'un morphisme, et $\text{cofib}(f)$ sa co-fibre.

Définition 1.4.3

Une ∞ -catégorie pointée est *stable* lorsque

- Tout morphisme admet une fibre et une co-fibre;
- Un triangle est une suite fibrée si et seulement si c'est une suite co-fibrée.

Remarque: La stabilité est une propriété auto-duale.

Proposition 1.4.4

Une ∞ -catégorie pointée \mathcal{C} est stable si et seulement si

- Elle admet toutes les limites et colimites finies;
- Un carré est un produit fibré si et seulement si c'est une somme amalgamée.

Démonstration

Le sens réciproque est trivial, on se concentre donc sur le sens direct.

Comme \mathcal{C} est pointée, par le théorème 1.2.24, il suffit de montrer que \mathcal{C} admet les co-produits finis pour obtenir toutes les colimites finies. On considère donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ f \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

Comme \mathcal{C} est stable, f admet une fibre

$$\begin{array}{ccccc} \text{fib}(f) & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow & & f \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & & \end{array}$$

De même, $g \circ h$ admet une co-fibre, ce qui permet de compléter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \text{fib}(f) & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{g} & Z & & \\ \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \text{cofib}(g \circ h) & & \end{array}$$

Comme le carré de gauche et le rectangle extérieur sont des sommes amalgamées, le carré inférieur en est également une. Donc \mathcal{C} admet toutes les colimites finies

Duallement, \mathcal{C} admet tous les produits fibrés, donc toutes les limites finies.

Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & W \end{array}$$

un produit fibré, on peut le compléter à gauche en un rectangle comme ci-dessus, dans lequel le carré de gauche est une suite fibrée et co-fibrée, alors le rectangle extérieur et le carré de gauche seront des sommes amalgamées, donc également notre produit fibré initial.

Duallement, toute somme amalgamée est un produit fibré.

Théorème 1.4.5

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie stable, alors $\text{Fun}(K, \mathcal{C})$ est stable, pour tout ensemble simplicial K .

Démonstration

C'est direct car les fibres et co-fibres se calculent point par point.

Définition 1.4.6 (Foncteur exact)

Un foncteur entre ∞ -catégories est

- exact à gauche* lorsqu'il préserve les limites finies ;
- exact à droite* lorsqu'il préserve les colimites finies ;
- exact* lorsqu'il est exact à gauche et à droite.

Théorème 1.4.7

Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre ∞ -catégories stables est exact à gauche si et seulement s'il est exact à droite.

Démonstration

F est exact à gauche si et seulement s'il préserve les limites finies, donc si et seulement s'il préserve l'objet final et les produits fibrés (1.2.24*), donc si et seulement s'il préserve l'objet initial et les sommes amalgamées, donc si et seulement s'il préserve les colimites finies (1.2.24).

Corollaire 1.4.8

Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre ∞ -catégories stables est exact si et seulement s'il est exact à gauche (ou à droite).

Proposition 1.4.9

Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre ∞ -catégories stables est exact si et seulement s'il préserve l'objet nul et les suites fibrées.

Démonstration

Soit F un foncteur préservant les suites fibrées et l'objet nul. Alors F préserve l'objet final. De plus, la preuve de 1.4.4 montre que F préserve les produits fibrés. Donc F préserve les limites finies, donc est exact à gauche, donc est exact.

Remarque: Duallement, F est exact si et seulement s'il préserve les objets nuls et les suites co-fibrées.

Proposition 1.4.10

Soit $\{C_i\}_i$ une famille d' ∞ -catégories stables. Alors le produit $\mathcal{C} = \prod_i C_i$ est stable et, pour toute ∞ -catégorie stable \mathcal{C}' , un foncteur $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ est exact si et seulement si ses coordonnées $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\pi_i} C_i$ sont exactes.

Démonstration

C'est direct car les limites et colimites de \mathcal{C} sont calculées composante par composante.

∞ -Catégories dérivées

Notation

Pour une catégorie abélienne \mathcal{A} , on note $\text{Ch}(\mathcal{A})$ (resp. $\text{Ch}_-(\mathcal{A})$, $\text{Ch}_+(\mathcal{A})$) sa catégorie de complexes de chaînes (resp. borné par dessus, bornée par dessous).

Théorème 1.4.11 (Correspondance de Dold-Kan)

Le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{sAb} &\rightarrow \mathbf{Ch}_+(\mathbf{Ab}) \\ A_\bullet &\mapsto \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(d_i) \right)_n \end{aligned}$$

induit une équivalence de catégories.

Démonstration: [9, theorem 3.3.1] (cas particulier $R = \mathbb{Z}$).

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. En posant, pour $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{Hom}(A, B)_n := \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{A})}(A_i, B_{i+n})$$

on fait de $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ une catégorie enrichie en complexes de groupes abéliens. Par la correspondance de Dold-Kan, on peut donc voir $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ comme enrichie en groupes abéliens simpliciaux.

Définition 1.4.12 (∞ -Catégorie dérivée)

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne avec assez de projectifs. L' ∞ -catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} est

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathrm{N}(\mathrm{Ch}_+(\mathcal{A}_{\mathrm{proj}}))$$

où $\mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$ est la sous-catégorie pleine des objets projectifs de \mathcal{A} .

Théorème 1.4.13

L' ∞ -catégorie dérivée d'une catégorie abélienne est stable.

Démonstration: [HA, proposition 1.3.10]

FORMALISMES À SIX FONCTEURS ABSTRAITS

C'est véritablement utile puisque c'est joli.

ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY

Dans ce chapitre, on étudie en détail la notion de formalisme à six foncteurs, suivant la nouvelle approche développée par Gaistgory-Rozenblyum, Liu-Zheng et plus récemment par Mann ([6]) et Scholze ([7]).

On commence par définir la notion de correspondance, ainsi que sa structure monoïdale symétrique, ce qui permet de définir la notion de formalisme à trois puis six foncteurs. Les interactions entre ces foncteurs (formules de projection et de changement de base) sont développées par la suite. On étudie ensuite la construction précise d'un contexte géométrique et du formalisme qui en découle. La section suivante est dédiée aux dualités de Poincaré et de Verdier, pour lesquelles cette nouvelle approche permet des démonstrations unifiées. Enfin, on discute rapidement des cas où certains de ces foncteurs coïncident.

1 Correspondances

Définition 2.1.1 (Contexte géométrique)

Un *contexte géométrique* est la donnée d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} et d'une classe de morphismes E de \mathcal{C} tels que

- \mathcal{C} admet toutes les limites finies;
- E contient tous les isomorphismes et est stable par composition et changement de base.

Notation: Pour $n \geq 0$, on note $(\Delta^n)_+^2$ le sous-ensemble de $(\Delta^n)^{\text{op}} \times \Delta^n$ engendré par $\{(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \mid i \geq j\}$.

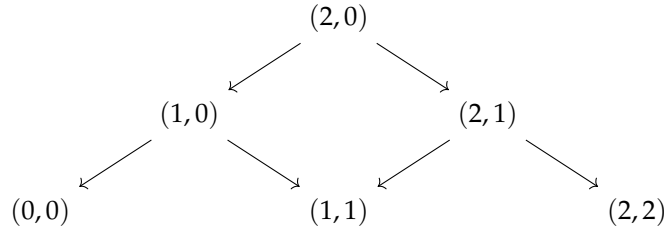
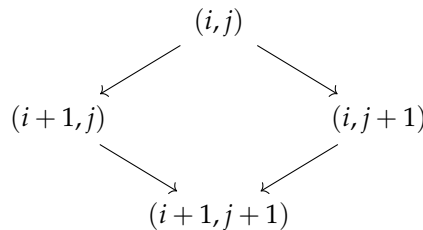


FIGURE 2.1 – Exemple de $(\Delta^n)_+^2$ pour $n = 2$.

Définition 2.1.2 (Correspondance)

Soit (\mathcal{C}, E) un contexte géométrique. L'ensemble simplicial des *correspondances* $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$ a pour n -simplexes les applications $(\Delta^n)_+^2 \rightarrow \mathcal{C}$ telles que

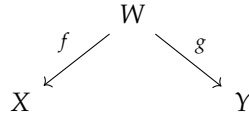
- Tout morphisme induit par $(i, j) \rightarrow (i, j + k)$, avec $k \in \llbracket 0, i - j \rrbracket$ est dans E ;
- Tout carré induit par



est cartésien.

Remarque

Un peu plus explicitement, les objets de $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$ sont les objets de \mathcal{C} , un morphisme $X \rightarrow Y$ étant donné par un diagramme



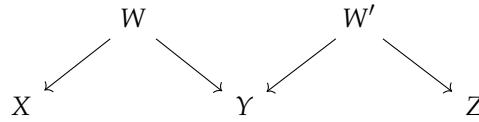
avec $g \in E$.

Proposition 2.1.3

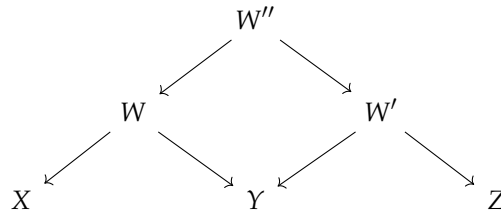
L'ensemble simplicial $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$ est une ∞ -catégorie.

Démonstration

Il faut essentiellement montrer que toute corne de $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$



peut être complétée en un simplexe



Comme \mathcal{C} admet tous les produits fibrés, et comme E est stable par changement de base, il suffit de prendre $W'' = W \times_Y W'$ et $W'' \rightarrow W$ et $W'' \rightarrow W'$ les morphismes naturels.

Proposition 2.1.4

L' ∞ -catégorie $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$ admet une structure monoïdale symétrique.

Démonstration: [5, proposition 6.1.3]

Remarque

On note \mathcal{C}' l' ∞ -catégorie ayant comme objets les paires $(I, (X_i)_{i \in I})$, avec $I \in \mathbf{Fin}_*$, et où un morphisme

$$(I, (X_i)) \rightarrow (J, (Y_j))$$

est donné par une application partielle $J \rightharpoonup I$ et une famille de morphismes $\left(X_i \rightarrow \prod_{j \in f^{-1}(i)} Y_j \right)_{i \in I}$.

On note de plus E' la classe de morphismes induit par les applications partielles identités de \mathbf{Fin}_* et les morphismes de E . Alors

- (i) (\mathcal{C}', E') est un contexte géométrique.
- (ii) $\text{Corr}(\mathcal{C}', E')$ est une structure monoïdale symétrique sur $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$.

Notation: On note $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)^\otimes := \text{Corr}(\mathcal{C}', E')$.

Remarque

$\text{Corr}(\mathcal{C}, E)^\otimes$ est une ∞ -catégorie de correspondances dont les objets sont les paires $(I, (X_i)_{i \in I})$ avec $I \in \mathbf{Fin}_*$ et où un morphisme $(I, (X_i)) \rightarrow (J, (Y_j))$ est donné par une application partielle $f : I \rightarrow J$ et une famille de correspondances

$$\left(\begin{array}{ccc} & W_j & \\ \swarrow & & \searrow \\ \prod_{i \in f^{-1}(j)} X_i & & Y_j \end{array} \right)_{j \in J}$$

où chaque morphisme $W_j \rightarrow Y_j$ est dans E .

2 Formalismes à six foncteurs

Définition 2.2.1 (Formalisme à trois foncteurs)

Soit (\mathcal{C}, E) un contexte géométrique. Un *formalisme à trois foncteurs* sur \mathcal{C} est un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathcal{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \text{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

où $\text{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$ désigne ∞ -catégorie des ∞ -catégories munies d'une structure monoïdale symétrique.

Remarque

Plus explicitement, un formalisme à trois foncteurs sur \mathcal{C} est la donnée (fonctorielle)

- Pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$, d'une ∞ -catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{D}(X)$, et d'un bi-foncteur $- \otimes -$;
- Pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} , d'un foncteur monoïdal symétrique $f^* : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$;
- Pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans E , d'un foncteur $f_! : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$.

Notation: Dans un formalisme à trois foncteurs, on notera $\mathbf{1}_X$ l'unité de $\mathcal{D}(X)$.

Définition 2.2.2 (Formalisme à six foncteurs)

Soit (\mathcal{C}, E) un contexte géométrique. Un *formalisme à six foncteurs* sur \mathcal{C} est un formalisme à trois foncteurs

$$\mathcal{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \text{cMon}(\mathbf{Cat}_\infty)$$

tel que, les ∞ -catégories monoïdales symétriques $\mathcal{D}(X)$ sont toujours fermées et, les foncteurs f^* et $f_!$ admettent toujours des co-adjoints.

Notation: Dans un formalisme à six foncteurs, on notera f_* et $f^!$ les co-adjoints de f^* et $f_!$.

Proposition 2.2.3 (Changement de base)

Soit $\mathcal{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty$ un formalisme à trois foncteurs. Pour tout carré cartésien de \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

avec $f \in E$, on a une équivalence

$$g^* f_! \simeq f'_! g'^*$$

de foncteurs $\mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y')$.

Démonstration

On considère les morphismes de $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \parallel & \searrow f & \\ X & & Y \\ & \nearrow h_1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y' & \\ & \nwarrow g & \\ Y & & Y' \\ & \nearrow h_2 & \end{array}$$

Alors $h_2 \circ h_1$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} & X' & \\ & \nwarrow g' & \\ X & & Y' \\ & \nearrow f' & \end{array}$$

Donc

$$f'_! g'^* = \mathcal{D}(h_2 \circ h_1) \simeq \mathcal{D}(h_2) \circ \mathcal{D}(h_1) = g^* f_!$$

Proposition 2.2.4 (Formule de projection)

Soit $\mathcal{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E)$ un formalisme à trois foncteurs. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de E , $A \in \mathcal{D}(X)$ et $B \in \mathcal{D}(Y)$. Alors

$$f_!(A) \otimes B \simeq f_!(A \otimes f^* B)$$

Démonstration

On constate rapidement que le carré suivant de $\text{Corr}(\mathcal{C}, E)$ commute

$$\begin{array}{ccc} (Y, X) & \xrightarrow{(\text{id}, f)} & (Y, Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Les morphismes verticaux étant donnés par

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ (f, \text{id}) \swarrow & \parallel & \\ (Y, X) & & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ (\text{id}, \text{id}) \swarrow & \parallel & \\ (Y, Y) & & Y \end{array}$$

En appliquant \mathcal{D} , on obtient un diagramme d' ∞ -catégories,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(Y) \times \mathcal{D}(X) & \xrightarrow{\text{id} \times f_!} & \mathcal{D}(Y) \times \mathcal{D}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}(X) & \xrightarrow{f_!} & \mathcal{D}(Y) \end{array}$$

Par définition de la structure monoïdale, le morphisme de droite est $- \otimes -$ et celui de gauche est $f^*(-) \otimes -$. La commutativité permet de conclure au résultat attendu.

3 Construire un contexte géométrique

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie d'objets « géométriques ». Dans la plupart des cas, il est aisé de construire un foncteur monoïdal symétrique

$$\mathcal{D} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{cMon}(\mathbf{Cat}_{\infty})$$

qui associe à chaque objet X une ∞ -catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{D}(X)$ de « faisceaux » sur X et à chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ un foncteur monoïdal symétrique $f^* : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$ de « pré-image ». Il est en général un peu plus difficile de construire les foncteurs $f_!$ pour une certaine classe de morphismes E .

En général, on peut distinguer deux classes de morphismes :

- la classe I des « isomorphismes locaux », pour lesquels $f_!$ est adjoint à f^* ;
- la classe P des « morphismes propres », pour lesquels $f_! \simeq f_*$.

À supposer que tout morphisme de E puisse s'écrire comme composé d'un morphisme de I et d'un de P , alors $f_!$ est défini pour tout $f \in E$. Cependant, il n'est pas évident alors que $f_!$ soit bien défini (indépendamment du choix de décomposition) de manière cohérente.

Pour cette section, on laisse en suspend les démonstrations, relativement techniques, et on fixe un contexte géométrique (\mathcal{C}, E) .

Définition 2.3.1 (Décomposition de Grothendieck-Wirthmüller)

Une *décomposition de Grothendieck-Wirthmüller* de E est une paire de parties (I, P) de E telle que

- Tout morphisme $f \in E$ peut s'écrire $f \simeq i \circ p$ avec $i \in I$ et $p \in P$.
- Tout morphisme $f \in I \cap P$ est n -tronqué pour $n \geq -2$.
- I et P sont stables par changement de base et contiennent les identités.
- Pour $f \in I$ (resp. P), $f \circ g \in I$ (resp. P) si et seulement si $g \in I$ (resp. P).

Proposition 2.3.2

Soit (I, P) une décomposition Grothendieck-Wirthmüller de E et $\mathcal{D} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty$ un foncteur monoïdal symétrique. En notant $f^* := \mathcal{D}(f)$, on suppose que

(i) Pour tout $j : X \rightarrow Y$ dans I ,

- $j^* : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$ admet un adjoint $j_! : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$;
- Pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ j' \downarrow & & \downarrow j \\ Y' & \xrightarrow{g'} & Y \end{array}$$

Le morphisme naturel $j'_! g'^* \rightarrow g^* j_!$ est une équivalence.

- Pour $M \in \mathcal{D}(X)$ et $N \in \mathcal{D}(Y)$, le morphisme naturel $j_!(M \otimes j^*(N)) \rightarrow j_!(M) \otimes N$ est une équivalence.

(ii) Pour tout $f : X \rightarrow Y$ dans P ,

- $f^* : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$ admet un co-adjoint $f_* : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$;
- Pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g'} & Y \end{array}$$

Le morphisme naturel $g^* f_* \rightarrow f'_* g'^*$ est une équivalence.

- Pour $M \in \mathcal{D}(X)$ et $N \in \mathcal{D}(Y)$, le morphisme naturel $f_*(M \otimes N) \rightarrow f_*(M \otimes f^*(N))$ est une équivalence.

(iii) Pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j'} & Y' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

avec $j \in I$ et $f \in P$, le morphisme naturel $j_! f'_* \rightarrow f_* j'_!$ est une équivalence.

Alors \mathcal{D} s'étend en un formalisme à trois foncteurs

$$\mathcal{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty$$

tel que, pour $f \in P$, $f_! \simeq f_*$ et pour $j \in I$, $j_!$ est adjoint à j^* .

Démonstration: [6, proposition A.5.10]

Corollaire 2.3.3

Sous les hypothèses de la proposition précédente, si de plus

- (iv) Pour tout objet X , l' ∞ -catégorie monoidale symétrique $\mathcal{D}(X)$ est fermée.
- (v) Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$, le foncteur f^* admet un co-adjoint f_* .
- (vi) Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans P , le foncteur $f_! \simeq f_*$ admet un co-adjoint $f^!$.

Alors \mathcal{D} s'étend en un formalisme à six foncteurs.

A l'aide de ces deux résultats, on peut construire des formalismes à six foncteurs avec relativement peu de contraintes. Cependant, on peut vouloir étendre E à une classe de morphismes qui n'admettent pas immédiatement de décomposition de Grothendieck-Worthmüller, on se retrouve alors souvent dans l'une des deux situations suivantes pour un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans E :

- f n'est décomposable que « localement » sur X .
- f n'est décomposable qu'après changement de base le long d'un recouvrement $Y' \twoheadrightarrow Y$.

Les résultats suivants viennent combler ces lacunes.

Lemme 2.3.4

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie admettant deux contextes géométriques (\mathcal{C}, E) et (\mathcal{C}, E') tels que $E \subseteq E'$.

Soit $\mathcal{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty$ un formalisme à six foncteurs tel que

- (i) Pour tout objet X , $\mathcal{D}(X)$ est présentable.
- (ii) Pour tout $f : X \rightarrow Y$ dans E' , en notant $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{C}_{/X}$ la sous-catégorie dont les objets sont les morphismes $g : W \rightarrow X$ tels que g et $f \circ g$ sont dans E , et dont les morphismes sont les X -morphismes $W \rightarrow W'$ dans E , le morphisme naturel

$$\mathcal{D}(X) \rightarrow \lim_{W \in \mathcal{I}_f^{\text{op}}} \mathcal{D}(W)$$

est une équivalence.

Alors \mathcal{D} s'étend de manière unique en un formalisme à six foncteurs sur $\text{Corr}(\mathcal{C}, E')$.

Démonstration: [6, lemme A.5.11]

Proposition 2.3.5

Soit $\mathcal{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty$ un formalisme à six foncteurs tel que

- (i) Pour tout objet X , $\mathcal{D}(X)$ est présentable.
- (ii) \mathcal{C} admet tous les produits fibrés et les petits co-produits et ceux-ci sont disjoints et universels.
- (iii) Pour tous objets X et Y , $X \rightarrow X + Y$ et $Y \rightarrow X + Y$ sont dans E .
- (iv) \mathcal{D} préserve les petits co-produits.

On note E' la collection des morphismes de \mathcal{C} pouvant s'écrire $\coprod X_i \rightarrow Y$ pour une petite famille (X_i) , avec $X_i \rightarrow Y$ dans E . Alors (\mathcal{C}, E') est un contexte géométrique et \mathcal{D} s'étend de manière unique en un formalisme à six foncteurs sur $\text{Corr}(\mathcal{C}, E')$.

Démonstration: [6, proposition A.5.12]

4 Dualités

Dans cette section, on montre une forme de dualité de Poincaré dans le cadre général des formalismes à six foncteurs discutés ci-dessus : pour tout morphisme « lisse » f , il existe un « objet dualisant » ω_f tel que

$$f^!(-) \simeq \omega_f \otimes f^*(-)$$

On développe également une seconde dualité : la dualité de Verdier.

On fixe donc pour cette section un formalisme à six¹ foncteurs $\mathcal{D} : \text{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty$ et un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans E . On fait de plus les hypothèses simplificatrices suivantes

- En remplaçant \mathcal{C} par $\mathcal{C}_{/Y}$, on peut supposer que Y est final;
- En ne gardant dans $\mathcal{C}_{/Y}$ que les objets X tels que $X \rightarrow Y$ est dans E , et en ne considérant que les Y -morphisms qui sont dans E^2 , on peut supposer que tout morphisme de \mathcal{C} est dans E .

On commence par quelques notions de 2-catégories, qu'on utilise dans les deux sous-sections suivantes, dédiées respectivement à la dualité de Poincaré et à la dualité de Verdier.

Foncteur de Fourier-Mukai et 2-catégorie de Lu-Zheng

Définition 2.4.1 (Foncteur de Fourier-Mukai)

Soient X et X' deux objets de \mathcal{C} et $K \in \mathcal{D}(X \times X')$. Le foncteur de Fourier-Mukai de noyau K est

$$\begin{aligned} \text{FM}_K & : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(X') \\ A & \mapsto \text{pr}_{2!}(K \otimes \text{pr}_1^* A) \end{aligned}$$

Remarque: La composé de foncteurs de Fourier-Mukai est un foncteur de Fourier-Mukai.

Définition 2.4.2 (2-catégorie de Lu-Zheng)

La 2-catégorie de Lu-Zheng d'un formalisme à six foncteurs \mathcal{D} a pour objets les objets de \mathcal{C} et pour catégorie de morphismes $\text{Hom}_{\text{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X') = \text{h}\mathcal{D}(X \times X')$.

Remarques

- L'identité d'un objet X dans cette 2-catégorie est $\text{id}_X = \Delta_! \mathbf{1}_X$.
- Comme \mathbf{Cat}_∞ est munie de sa structure monoïdale symétrique cartésienne, et comme \mathcal{D} est monoïdal symétrique, il y a un morphisme $\mathcal{D}(X \times X') \times \mathcal{D}(X' \times X'') \rightarrow \mathcal{D}(X \times X' \times X' \times X'')$.
- La composition dans $\text{LZ}_{\mathcal{D}}$ est donnée par la convolution des noyaux :

$$\begin{aligned} \circ & : \text{Hom}_{\text{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X') \times \text{Hom}_{\text{LZ}_{\mathcal{D}}}(X', X'') \rightarrow \text{Hom}_{\text{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, X'') \\ A, B & \mapsto A \star B := \text{pr}_{X, X''!}(\text{pr}_{X, X'}^*(A) \otimes \text{pr}_{X', X''}^*(B)) \end{aligned}$$

- Cette 2-catégorie est auto-duale : $\text{LZ}_{\mathcal{D}}^{\text{op}} \simeq \text{LZ}_{\mathcal{D}}$.

Remarque

Il faudrait pour être parfaitement rigoureux ajouter des isomorphismes d'associativité qui vérifie des axiomes pentagonaux. Une autre approche est disponible dans [10], elle utilise cependant des $(\infty, 2)$ -catégories, plus difficiles à manipuler, on évite donc cet écueil ici.

On peut naturellement définir un foncteur

$$\begin{aligned} \text{LZ}_{\mathcal{D}} & \rightarrow \mathbf{Cat} \\ X & \mapsto \text{h}\mathcal{D}(X) \\ K \in \text{h}\mathcal{D}(X \times X') & \mapsto \text{FM}_K \end{aligned}$$

En général, ce foncteur perd énormément d'informations sur K . En travaillant dans $\text{LZ}_{\mathcal{D}}$, on préserve cette information aussi longtemps que nécessaire. On conclut en définissant la notion d'adjonction dans une 2-catégorie.

Définition 2.4.3 (Adjonction dans une 2-catégorie)

Soit $F : X \rightarrow Y$ un 1-morphisme dans une 2-catégorie \mathcal{C} . Un *co-adjoint* à F est un triplet (G, α, β) composé d'un 1-morphisme $G : Y \rightarrow X$ et de deux 2-morphismes $\alpha : \text{id} \rightarrow GF$ et $\beta : FG \rightarrow \text{id}$ tels que les composés

$$\begin{aligned} F & \xrightarrow{F\alpha} FGF \xrightarrow{\beta F} F \\ G & \xrightarrow{\alpha G} GFG \xrightarrow{G\beta} G \end{aligned}$$

sont les identités.

1. On pourrait n'imposer que trois foncteurs et ajouter aubesoins l'hypothèse que $f^!$ existe, mais pour simplifier le développement, on impose les six foncteurs.

2. C'est le cas en particulier pour les formalismes construits avec une décomposition de Grothendieck-Wirthmüller, par propriété 2-sur-3.

Remarques

- On dit aussi que F est *adjoint* à G , ou que F et G forment une *paire adjointe*.
- Les (co-)adjoints d'un 1-morphisme sont isomorphes à unique isomorphisme près.
- Les foncteurs entre 2-catégories préservent les paires adjointes.
- Un co-adjoint à un 1-morphisme dans **Cat** est précisément un co-adjoint en tant que foncteur.

Dualité de Poincaré

Définition 2.4.4 (Dualisant)

Le *dualisant* de f est

$$\omega_f := f^!(1_Y)$$

Définition 2.4.5 (Morphisme cohomologiquement lisse)

Le morphisme f est *cohomologiquement lisse* lorsque

- (i) Le morphisme $\omega_f \otimes f^*(-) \rightarrow f^!(-)$ est une équivalence;
- (ii) Le dualisant de f est \otimes -inversible;
- (iii) Pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le morphisme f' vérifie les conditions (i) et (ii) et le morphisme $g'^* \omega_f \rightarrow \omega_{f'}$ est une équivalence.

Remarques

- Le morphisme de (i) est défini par adjonction en utilisant la formule de projection

$$f_!(\omega_f \otimes f^*(-)) \simeq f_! f^!(1_Y) \otimes - \rightarrow -$$

- Le morphisme de (iii) est défini par adjonction en utilisant la formule de changement de base

$$f'_! g'^* f^!(1_Y) \simeq g^* f_! f^!(1_Y) \rightarrow g^*(1_Y) \simeq 1_{Y'}$$

Par définition, la classe des morphismes cohomologiquement lisses est stable par changement de base et composition et contient tous les isomorphismes. De plus, lorsque E admet une décomposition de Grothendieck-Wirthmüller (I, P) les morphismes de I sont tous cohomologiquement lisses (car alors $f^! \simeq f^*$).

Vérifier qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ donné est cohomologiquement lisse semble cependant assez difficile, il faut en effet montrer que pour tout changement de base de f , un certain morphisme est une équivalence pour tout $B \in \mathcal{D}(Y)$. Pire encore, ce morphisme est défini par rapport à $f^! B$, qui est lui-même défini par adjonction, donc il faut avoir un contrôle sur tous les morphismes $A \rightarrow f^! B$ pour tout $A \in \mathcal{D}(X)$.

Le reste de cette section va montrer qu'en réalité, relativement peu d'hypothèses sont nécessaires.

Théorème 2.4.6

En notant $\Delta_f : X \rightarrow X \times X$ la diagonale, f est cohomologiquement lisse si et seulement s'il existe un objet \otimes -inversible $L \in \mathcal{D}(X)$ et des morphismes

$$\alpha : \Delta_{f!} 1_X \rightarrow \text{pr}_2^* L$$

et

$$\beta : f_! L \rightarrow 1_X$$

tels que les composés

$$1_X \simeq \text{pr}_{1!} \Delta_{f!} 1_X \xrightarrow{\alpha} \text{pr}_{1!} \text{pr}_2^* L \simeq f^* f_! L \xrightarrow{\beta} 1_X$$

et

$$L \simeq \text{pr}_{2!} (\text{pr}_1^*(L) \otimes \Delta_{f!}(1_X)) \xrightarrow{\alpha} \text{pr}_{2!} (\text{pr}_1^*(L) \otimes \text{pr}_2^*(L)) \simeq \text{pr}_{2!} \text{pr}_1^*(L) \otimes L \simeq f^* f_!(L) \otimes L \xrightarrow{\beta} L$$

sont équivalents à l'identité.

On note que, pour montrer que (à tensorisation près) f^* est co-adjoint à $f_!$, il suffit de montrer que les noyaux induisant ces foncteurs sont eux-mêmes adjoints dans $\mathbf{LZ}_{\mathcal{D}}$.

Démonstration

On remarque avant de débiter que le foncteur $f_! : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$ est un foncteur de Fourier-Mukai, induit par le noyau $\mathbf{1}_X$, de même que le foncteur $L \otimes f^*(-) : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$, induit par le noyau $L \in \mathcal{D}(X)$.

Sens direct³ : On considère $L = \omega_f$. La lissité cohomologique de f assure que L est \otimes -inversible et que les foncteurs $F = f_!(-)$ et $G = L \otimes f^*(-)$ sont adjoints, donc qu'il existe des transformations naturelles

$$\alpha_0 : \mathrm{id}_{\mathcal{D}(X)} \rightarrow GF$$

$$\beta_0 : FG \rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}(Y)}$$

D'une part, comme FG est induit par $f_!L \in \mathcal{D}(Y)$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{D}(Y)}$ par $\mathbf{1}_Y \in \mathcal{D}(Y)$, alors β_0 est induit par un morphisme

$$\beta : f_!L \rightarrow \mathbf{1}_Y$$

D'autre part, comme GF est induit par $\mathrm{pr}_2^*(L) \in \mathcal{D}(X \times X)$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{D}(X)}$ par $\Delta_{f_!}(\mathbf{1}_X) \in \mathcal{D}(X \times X)$, alors α_0 est induit par un morphisme

$$\alpha : \Delta_{f_!}(\mathbf{1}_X) \rightarrow \mathrm{pr}_2^*L$$

Le composé de morphismes de noyaux

$$L \simeq \mathrm{pr}_{2!}(\mathrm{pr}_1^*(L) \otimes \Delta_{f_!}(\mathbf{1}_X)) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{2!}(\mathrm{pr}_1^*(L) \otimes \alpha)} \mathrm{pr}_{2!}(\mathrm{pr}_1^*(L) \otimes \mathrm{pr}_2^*(L)) \simeq \mathrm{pr}_{2!} \mathrm{pr}_1^*(L) \otimes L \simeq f^* f_!(L) \otimes L \xrightarrow{(f^*\beta) \otimes L} L$$

induit la composée de transformations naturelles

$$G \xrightarrow{\alpha_0 G} GFG \xrightarrow{G\beta_0} G$$

qui est l'identité, ce qui conclut le sens direct.

Sens réciproque : On considère un objet L et des morphismes α et β comme dans l'énoncé. On considère également les objets X et Y dans $\mathbf{LZ}_{\mathcal{D}}$ et les morphismes

$$F = \mathbf{1}_X \in \mathcal{D}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, Y)$$

$$G = L \in \mathcal{D}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{LZ}_{\mathcal{D}}}(Y, X)$$

(On rappelle que Y est supposé final). Alors F encode le foncteur $f_!(-)$ et G encode le foncteur $L \otimes f^*(-)$. En montrant que F et G sont adjoints dans $\mathbf{LZ}_{\mathcal{D}}$, on aura montré que $f_!(-)$ et $L \otimes f^*(-)$ sont adjoints. Pour cela on voit que α et β proviennent de morphismes

$$\mathrm{id}_X = \Delta_{f_!}(\mathbf{1}_X) \rightarrow GF = \mathrm{pr}_2^*(L)$$

$$FG = f_!(L) \rightarrow \mathrm{id}_Y = \mathbf{1}_Y$$

En particulier, le co-adjoint de $f^!$ est donné par un noyau, donc $f^!(\mathbf{1}_Y) \otimes f^*(-) \rightarrow f^!(-)$ est une équivalence. De plus, on a nécessairement $L = f^!(\mathbf{1}_Y)$, donc il est \otimes -inversible par hypothèse. Enfin, pour tout changement de base de f le long d'un morphisme $g : Y' \rightarrow Y$, il y a un foncteur de 2-catégories $\mathbf{LZ}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{LZ}_{\mathcal{D}|_{\mathcal{C}_{Y'}/Y}}$, qui permet de conclure.

Dualité de Verdier

Définition 2.4.7 (Objet f -lisse, f -propre)

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est

f -lisse lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{LZ}_{\mathcal{D}}}(X, Y)$, c'est un adjoint;

f -propre lorsque, vu dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{LZ}_{\mathcal{D}}}(Y, X)$, c'est un adjoint;

Remarque : Ces deux propriétés sont stables par changement de base.

3. On aurait également pu procéder à une chasse aux diagrammes assez fastidieuse.

Dans le même esprit que la sous-section précédente, un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est f -lisse si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{D}(X)$ (vu comme $\text{Hom}_{\text{LZ}_{\mathcal{D}}}(Y, X)$) et des morphismes

$$\begin{aligned}\alpha : \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X) &\rightarrow \text{pr}_1^*(A) \otimes \text{pr}_2^*(B) \\ \beta : f_!(A \otimes B) &\rightarrow \mathbf{1}_Y\end{aligned}$$

tels que le composé

$$\begin{aligned}B &\simeq \text{pr}_{2!}(\text{pr}_1^*(B) \otimes \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X)) \\ &\xrightarrow{\alpha} \text{pr}_{2!}(\text{pr}_1^*(B) \otimes \text{pr}_1^*(A) \otimes \text{pr}_2^*(B)) \\ &\simeq \text{pr}_{2!} \text{pr}_1^*(B \otimes A) \otimes B \\ &\simeq f^* f_!(B \otimes A) \otimes B \\ &\xrightarrow{\beta} f^*(\mathbf{1}_Y) \otimes B \simeq B\end{aligned} \tag{*}$$

est une équivalence.

Définition 2.4.8 (Dual de Verdier)

Le *dual de verdier* d'un objet f -lisse $A \in \mathcal{D}(X)$ est

$$\mathbb{D}_f(A) := \mathcal{H}om(A, f^!(\mathbf{1}_Y))$$

Proposition 2.4.9

Soit $A \in \mathcal{D}(X)$ un objet f -lisse, de co-adjoint $B \in \mathcal{D}(X)$.

- (i) B est f -lisse, de co-adjoint A .
- (ii) Il y a une équivalence de foncteurs

$$B \otimes f^*(-) \simeq \mathcal{H}om(A, f^!(-)) : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$$

- (iii) Le morphisme naturel

$$A \rightarrow \mathbb{D}_f(\mathbb{D}_f(A))$$

est une équivalence.

- (iv) La formation du dual de Verdier commute au changement de base.

Démonstration

- (i) La caractérisation de la f -lissité vue plus haut est symétrique en A et B , et $\text{LZ}_{\mathcal{D}}$ est auto-duale.
- (ii) Par le foncteur naturel $\text{LZ}_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbf{Cat}$, $B \otimes f^*(-)$ est le co-adjoint de $f_!(- \otimes A)$, mais ce co-adjoint est également $\mathcal{H}om(A, f^!(-))$.
- (iii) On applique le point précédent deux fois.
- (iv) Les 2-foncteurs préservent les adjonctions, c'est en particulier le cas du 2-foncteur de changement de base.

Remarque

Par la première propriété, on a également $A \otimes f^*(-) \simeq \mathcal{H}om(B, f^!(-)) : \mathcal{D}(Y) \rightarrow \mathcal{D}(X)$

Proposition 2.4.10

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est f -lisse si et seulement si le morphisme naturel

$$\text{pr}_1^*(A) \otimes \text{pr}_2^*(\mathbb{D}_f(A)) \rightarrow \mathcal{H}om(\text{pr}_2^*(A), \text{pr}_1^!(A))$$

est un isomorphisme⁴.

On a une caractérisation similaire de la f -propreté, avec cette fois des morphismes

$$\begin{aligned}\alpha : \text{pr}_1^*(A) \otimes \text{pr}_2^*(B) &\rightarrow \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X) \\ \beta : \mathbf{1}_Y &\rightarrow f_!(A \otimes B)\end{aligned}$$

faisant commuter un diagramme analogue à (*). L'analogie de la proposition 2.4.9 est alors

4. Il suffit en fait de vérifier cet isomorphisme en section globales.

Proposition 2.4.11

Soit $A \in \mathcal{D}(X)$ un objet f -propre de co-adjoint $B \in \mathcal{D}(X)$.

- (i) B est f -propre, de co-adjoint A .
- (ii) Il y a une équivalence de foncteurs

$$f_!(B \otimes -) \simeq f_* \mathcal{H}om(A, -) : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{D}(Y)$$

- (iii) L'appairement $\alpha : \mathrm{pr}_1^*(A) \otimes \mathrm{pr}_2^*(B) \rightarrow \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X)$ induit des isomorphismes

$$B \simeq \mathrm{pr}_{2*} \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_1^*(A), \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X))$$

$$A \simeq \mathrm{pr}_{1*} \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2^*(B), \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X))$$

Démonstration: Identique à celle de la proposition 2.4.9.

Remarque

Dans le cas où $\Delta_{f!} \simeq \Delta_{f*}$ (ce qui arrive souvent), on a la simplification (assez drastique) suivante :

$$\mathrm{pr}_{2*} \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_1^*(A), \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X)) \simeq \mathrm{pr}_{2*} \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_1^*(A), \Delta_{f*}(\mathbf{1}_X)) \simeq \mathrm{pr}_{2*} \Delta_{f*} \mathcal{H}om(\Delta_f^* \mathrm{pr}_1^* A, \mathbf{1}_X) \simeq \mathcal{H}om(A, \mathbf{1}_X)$$

Le « dual » (au sens de 2.4.11(iii)) de A est son dual naïf.

Proposition 2.4.12

Un objet $A \in \mathcal{D}(X)$ est f -propre si et seulement si le morphisme naturel

$$f_!(A \otimes \mathrm{pr}_{2*}(\mathcal{H}om(\mathrm{pr}_1^*(A), \Delta_{f!}(\mathbf{1}_X)))) \rightarrow f_* \mathcal{H}om(A, A)$$

est un isomorphisme⁵.

5 Coïncidences

Dans cette section, on dégage des hypothèses minimales qui assurent que, pour un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans E , les foncteurs $f_!$ et f_* (resp. $f^!$ et f^*) coïncident.

On fixe un formalisme à six foncteurs $\mathcal{D} : \mathrm{Corr}(\mathcal{C}, E) \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty$.

Définition 2.5.1 (Morphisme cohomologiquement propre)

Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans E est *cohomologiquement propre* lorsque

1. f est n -tronqué pour un certain n ;
2. $\mathbf{1}_X \in \mathcal{D}(X)$ est f -propre;
3. $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ est cohomologiquement propre (ou un isomorphisme).

Remarque

Cette définition est récursive, puisque Δ_f est $n - 1$ -tronqué.

Proposition 2.5.2

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans E tel que Δ_f soit cohomologiquement propre.

- (i) Il y a une transformation naturelle

$$f_! \rightarrow f_*$$

- (ii) Cette transformation est une équivalence lorsque f est cohomologiquement propre.

- (iii) f est cohomologiquement propre si et seulement si $f_!(\mathbf{1}_X) \rightarrow f_*(\mathbf{1}_X)$ est une équivalence en sections globales.

5. Là aussi, il suffit en fait de vérifier cet isomorphisme en section globales.

Démonstration

On procède par récurrence sur n tel que f est n -tronqué. On peut donc supposer que $\Delta_{f!} \simeq \Delta_{f*}$. En particulier, le morphisme de la proposition 2.4.12, appliqué à $\mathbf{1}_X$, définit un morphisme $f_!(\mathbf{1}_X) \rightarrow f_*(\mathbf{1}_X)$, qui est une équivalence en sections globales si et seulement si f est cohomologiquement propre. Cette construction donne de plus la transformation naturelle attendue.

Définition 2.5.3 (Morphisme cohomologiquement étale)

Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans E est *cohomologiquement étale* lorsque

1. f est n -tronqué pour un certain n ;
2. $\mathbf{1}_X \in \mathcal{D}(X)$ est f -lisse;
3. $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ est cohomologiquement étale (ou un isomorphisme).

Proposition 2.5.4

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dans E tel que Δ_f soit cohomologiquement étale.

- (i) Il y a une transformation naturelle

$$f^! \rightarrow f^*$$

- (ii) Cette transformation est une équivalence lorsque f est cohomologiquement étale.
(iii) f est cohomologiquement étale si et seulement si $f^!(\mathbf{1}_Y) \rightarrow \mathbf{1}_X$ est une équivalence en sections globales.

Démonstration: Analogie à 2.5.2

FAISCEAUX COHÉRENTS

μη εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν

EUCLIDE

Dans ce dernier chapitre, on applique les constructions du chapitre précédent au cas des faisceaux cohérents, pour lesquels on doit d'abord introduire la notion de schéma dérivé.

1 Schémas dérivés

Dans cette section, on discute rapidement de la notion de schéma dérivé, en se basant sur le modèles des anneaux animés¹, selon [8]. Il est nécessaire d'en parler car les théorèmes de changement de base sur les faisceaux cohérents ont tendance à demander certaines conditions de platitude ou de Tor-indépendance, ce qui est mieux traité en considérant un produit tensoriel dérivé sur les anneaux, qui doivent donc être animés.

Définition 3.1.1 (Schéma dérivé)

Un *schéma dérivé* est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux animés \mathcal{O}_X tel que $(X, \pi_0 \mathcal{O}_X)$ est un schéma et chaque $\pi_i \mathcal{O}_X$ est un $\pi_0 \mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent.

Un *morphisme de schémas dérivés* $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est une application continue $f : X \rightarrow Y$ accompagnée d'un morphisme de faisceaux $f^\# : f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ induisant un morphisme de schémas classiques.

Remarque: Un schéma dérivé est dit *affine* lorsque le schéma $(X, \pi_0 \mathcal{O}_X)$ est affine.

Définition 3.1.2 (Module animé plat, morphisme d'anneaux plat)

Soit A un anneau animé. Un A -module M est *plat* lorsque $\pi_0(M)$ est un $\pi_0(A)$ -module plat et que, pour tout n , le morphisme induit

$$\pi_0(M) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(M)$$

est un isomorphisme.

Un morphisme d'anneaux animés $A \rightarrow B$ est *plat* lorsqu'il fait de B un A -module plat.

Définition 3.1.3 (Morphisme de schémas dérivés plat)

Un morphisme de schémas dérivés $f : X \rightarrow Y$ est *plat* lorsque, pour tout ouvert affine $U \subset X$ et $V = f(U) \subset Y$, le morphisme d'anneaux animés induit en sections globales $\Gamma(V) \rightarrow \Gamma(U)$ est plat.

Définition 3.1.4 (Morphisme étale, lisse)

Un morphisme de schémas dérivés est

étale lorsqu'il est plat et induit un morphisme étale de schémas classiques;

lisse lorsqu'il est plat et induit un morphisme lisse de schémas classiques.

Remarque

Pour simplifier le reste de ce chapitre, on se restreint aux schémas dérivés quasi-compacts et quasi-séparés.

Définition 3.1.5 (Faisceau quasi-cohérent)

Pour un anneau animé R , on note $\mathcal{D}_{\text{qc}}(R)$ l' ∞ -catégorie dérivée des faisceaux de modules sur $\text{Spec}(R)$.

On étend cette définition aux schémas dérivés quelconques par descente, on note alors $\mathcal{D}_{\text{qc}}(X)$ l' ∞ -catégorie dérivée des faisceaux *quasi-cohérents* sur X .

1. On renvoie à la toute première section de ce mémoire pour un très bref rappel sur l'animation, et à [1, section 5.1.4] pour une discussion plus approfondie.

Définition 3.1.6

Soit A un anneau animé. Un objet $K \in \mathcal{D}(A)$ est

pseudo-cohérent lorsque, pour tout n , il existe un complexe parfait² K_n et un morphisme $K_n \rightarrow K$ dont le cône est en degré supérieur à n ;

cohérent lorsqu'il est cohérent et borné.

Notation: On note $\text{Perf}(X)$ la catégorie des complexes parfaits de \mathcal{O}_X -modules.

Remarque

Ces deux notions se généralisent à un schéma dérivé quelconque par descente.

Définition 3.1.7 (Schéma dérivé noethérien)

Un schéma dérivé X est *noethérien* lorsque le schéma classique $(X, \pi_0 \mathcal{O}_X)$ est noethérien et que $\pi_i \mathcal{O}_X$ est un $\pi_0 \mathcal{O}_X$ -module cohérent pour tout i .

Théorème 3.1.8

Soit (X, \mathcal{O}_X) un schéma dérivé tel que $(X, \pi_0 \mathcal{O}_X)$ soit cohérent et que $\pi_i \mathcal{O}_X$ est un $\pi_0 \mathcal{O}_X$ -module cohérent pour tout i . Alors $K \in \mathcal{D}_{\text{qc}}(X)$ est pseudo-cohérent si et seulement si tous les $\pi_i K$ sont des $\pi_0 \mathcal{O}_X$ -modules cohérents.

Remarque

En particulier, toute troncature de K est alors pseudo-cohérente.

Définition 3.1.9 (Morphisme presque de présentation finie)

Un morphisme d'anneaux animés $f : A \rightarrow B$ est *presque de présentation finie* lorsqu'il existe une factorisation $A \rightarrow A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$ telle que B est un $A[X_1, \dots, X_n]$ -module pseudo-cohérent.

Définition 3.1.10 (Morphisme propre)

Un morphisme de schémas dérivés est *propre* lorsqu'il est presque de présentation finie et qu'il induit un morphisme propres de schémas classiques.

Théorème 3.1.11

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre de schémas dérivés quasi-compacts et quasi-cohérents. Alors f^* préserve la pseudo-cohérence et la cohérence. De plus, lorsque f est de Tor-dimension finie, f^* préserve la perfection.

2 Faisceaux cohérents

Le but de cette section est d'étendre de différentes façons $X \mapsto \mathcal{D}_{\text{qc}}(X)$ en un formalisme à six foncteurs. On définit donc des classes I et P de morphismes afin d'obtenir une paire de Grothendieck-Wirthmüller. On rappelle que \mathcal{C} désigne la catégorie des schémas dérivés quasi-compacts et quasi-séparés.

Proposition 3.2.1

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{C} . Alors f^* admet un co-adjoint co-continu qui vérifie les formules de projections et de changement de base.

Démonstration

Le cas général découle du cas affine sur Y , car alors le co-adjoint défini localement commute au changement de base et donc se globalise. De même, on peut supposer que X est affine, par recouvrement fini. On suppose donc que $X = \text{Spec}(A)$ et $Y = \text{Spec}(B)$. Le foncteur f^* correspond alors au foncteur de produit tensoriel

$$f^*(-) = - \otimes_B A : \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{D}(A)$$

son co-adjoint est donc le foncteur d'oubli $\mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(B)$, qui commute aux colimites et vérifie les formules de projections et de changement de base, en dérivant dès que nécessaire.

2. Quasi-isomorphe à un complexe borné de modules finis projectifs.

Proposition 3.2.2

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre de Tor-dimension finie. Alors f^* admet un adjoint f^\sharp vérifiant les formules de projection et de changement de base, donné par

$$\operatorname{colim}_i P_i \mapsto \operatorname{colim}_i (f_*(P_i^\vee))^\vee := \operatorname{colim}_i \mathcal{H}om(f_* \mathcal{H}om(P_i, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_Y)$$

Démonstration

On a l'adjonction $f^* \dashv f_*$ sur $\mathcal{D}_{\text{qc}} = \operatorname{Ind}(\operatorname{Perf})$, comme ces deux foncteurs préservent Perf , ils y sont adjoints. Comme Perf est auto-dual, on peut renverser cette adjonction. Comme f^* commute à la dualité, il admet un adjoint. En repassant aux Ind-catégories, on obtient le résultat attendu.

On peut maintenant explorer plusieurs options possibles pour I et P .

Tous les morphismes sont propres

On commence par prendre P la classe de tous les morphismes (donc nécessairement E également), et I la classe des isomorphismes. Par les propositions 3.2.1 et 2.3.2, on obtient un formalisme à six foncteurs sur \mathcal{C} , à valeurs stables et présentables.

Théorème 3.2.3

Pour tout morphisme propre de Tor-dimension finie $f : X \rightarrow Y$, \mathcal{O}_X est f -lisse.

Démonstration

Il suffit de vérifier que la formation de $f^! \mathcal{O}_Y$ commute à tout changement de base. Comme $f^!$ commute à toute co-limite (par le théorème 3.1.11), il est $\mathcal{D}_{\text{qc}}(Y)$ -linéaire. L'adjonction $f_* \dashv f^!$ se transporte alors par tout changement de base $Y' \rightarrow Y$, en remarquant qu'alors

$$\mathcal{D}_{\text{qc}}(X \times_Y Y') \simeq \mathcal{D}_{\text{qc}}(X) \otimes_{\mathcal{D}_{\text{qc}}(Y)} \mathcal{D}_{\text{qc}}(Y')$$

Remarque

En particulier, le dualisant de f est $f^! \mathcal{O}_Y$, le dual de Verdier de \mathcal{O}_Y .

Proposition 3.2.4

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre et lisse de schémas dérivés. Alors f et sa diagonale relative Δ_f sont cohomologiquement lisse. De plus, le dualisant de f est \otimes -inverse du dualisant de Δ_f , et est donc local sur X .

Démonstration

Par le théorème précédent, puisque Δ_f est de Tor-dimension finie, on a

$$\mathcal{O}_X \simeq \Delta_f^! \operatorname{pr}_1^! (\mathcal{O}_X) \simeq \Delta_f^! \operatorname{pr}_2^* f^! (\mathcal{O}_Y) \simeq \Delta_f^* \operatorname{pr}_2^* f^! (\mathcal{O}_Y) \otimes \Delta_f^! (\mathcal{O}_{X \times_Y X}) \simeq f^! (\mathcal{O}_Y) \otimes \Delta_f^! (\mathcal{O}_{X \times_Y X})$$

I contient les morphismes propres de Tor-dimension finie, P contient les immersions ouvertes

Si l'on veut avoir plus de morphismes dans I , on est forcé d'ajouter les morphismes propres de Tor-dimension finie, ce qui restreint P aux immersions ouvertes. Alors E consiste des morphismes séparés presque de présentation finie et de Tor dimension finie.

Théorème 3.2.5 (Compactification de Nagata dérivée)

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme presque de présentation finie entre schémas dérivés. Alors il existe une factorisation

$$X \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

avec j une immersion ouverte et \bar{f} un morphisme propre.

Démonstration: [3, Chapitre 5, proposition 2.1.6]

Remarque

Toute compactification de Nagata entre schémas classiques peut se relever, à homéomorphisme universel près, en une compactification entre schémas dérivés.

Dans notre contexte, ce n'est cependant pas suffisant, car on a besoin d'une hypothèse de Tor-dimension finie, dont on ne sait pas si elle est préservée par compactification de Nagata. On peut tout de même montrer que ces choix de I et P vérifient le quatrième axiome de la définition 2.3.1.

Proposition 3.2.6

Dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

où f est propre et de Tor-dimension finie et g est une immersion ouverte, le morphisme naturel

$$f_{\#} g'_* \rightarrow g_* f'_{\#}$$

est une équivalence.

Démonstration

Le résultat est local sur Y , donc on peut supposer que $Y = \text{Spec}(B)$ est affine. On peut même supposer par descente le long d'une immersion ouverte que $Y = \text{Spec}(B[1/h])$ est un ouvert affine standard. Comme tous les foncteurs commutent aux colimites il suffit de vérifier l'équivalence dans $\text{Perf}(X')$. On peut alors supposer que les complexes parfaits sur X' proviennent de ceux de X par changement de base. Dans ce contexte, on conclut en remarquant que $g_{\#}$ est compatible avec le changement de base d'inversion de h .

Ainsi, sous la seule hypothèse restante que la compactification de Nagata préserve la finitude en Tor-dimension, on pourrait obtenir un formalisme à six foncteurs

$$X \mapsto \mathcal{D}_{\text{qc}}(X)$$

à valeurs stables et présentables, où E est composé des morphismes séparés, propres, de Tor-dimension finie.

Remplacer $\text{Ind}(\text{Perf})$ par $\text{Pro}(\text{Perf})$

Puisque remplacer $\mathcal{D}(X)$ par $\mathcal{D}(X)^{\text{op}}$ échange les morphismes cohomologiquement propres et cohomologiquement étales, et comme dans l'option précédent il semble y avoir besoin de cet échange, il peut s'avérer utile de définir

$$\mathcal{D}_{\text{qc}}(X) := \text{Pro}(\text{Perf}(X))$$

(on rappelle que $\text{Perf}(X)$ est auto-dual). On perd alors la présentabilité, donc la possibilité d'un formalisme à six foncteurs. On a cependant un formalisme à trois foncteurs, avec occasionnellement des co-adjoints. Pour tout morphisme $f \in E$, on a

$$f_! = \bar{f}_* j_!$$

(avec \bar{f} propre et j une immersion ouverte) où $j_!$ est adjoint à j_* et \bar{f}_* co-adjoint à \bar{f}^* .

On a dans ce contexte le résultat de dualité suivant.

Théorème 3.2.7

Soit $f : X \rightarrow Y$ dans E une intersection complète locale³. Alors f est cohomologiquement lisse.

Démonstration

Dans ce formalisme, les immersions ouvertes sont sohomologiquement lisses, donc on peut se localiser (sur X et sur Y), et supposer que X et Y sont affines. Puisque f est une intersection complète locale, on peut se restreindre au cas $f : \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ et de \mathbb{A}^1 on peut encore se restreindre à \mathbb{P}^1 . Dans ce cas, le co-adjoint $f^!$ de $f_! = f_*$ est défini, préserve les complexes parfaits, et commute à tout changement de base. Donc \mathcal{O}_X est f -lisse et $f^! \mathcal{O}_X$ est \otimes -inversible.

3. Voir [Stacks, 00S9]

Remplacer $\text{Pro}(\text{Perf})$ par $\text{Pro}(\text{Coh})$

Puisque le problème principal des deux dernières options viennent de condition de Tor-dimension finie, qui vient elle-même des complexes parfaits, on peut essayer de remplacer ces derniers par les complexes cohérents (au moins pour les schémas dérivés noethériens).

Théorème 3.2.8

Le foncteur

$$X \mapsto \text{Pro}(\text{Coh}(X))$$

vérifie les hypothèses de la proposition 2.3.2 avec I la classe des immersions ouvertes et P la classe des morphismes propres, donc s'étend en un formalisme à six foncteurs.

Remarque

La preuve est très similaire à celles qui ont précédé dans cette section.

Dans ce contexte, on obtient un bien meilleur résultat de bi-dualité.

Proposition 3.2.9

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de schémas dérivés noethériens presque de type fini. Soit $K \in \text{Coh}(X) \subset \text{Pro}(\text{Coh}(X))$ de Tor-dimension finie sur Y . Alors K est f -lisse.

En particulier, si Y est un schéma classique régulier, alors tout $K \in \text{Coh}(X)$ est f -lisse et $\text{Coh}(X)$ est auto-dual par la dualité de Verdier

$$\mathbb{D}_f(K) = \mathcal{H}om(K, f^! \mathcal{O}_Y)$$

Démonstration

Le résultat est local sur X et Y , qu'on suppose donc affines. En remplaçant Y par un espace affine sur Y , qui est cohomologiquement lisse, on peut supposer que f est une immersion fermée. Dans ce cas, K est parfait comme objet de $\text{Coh}(Y)$ et son dual naïf convient comme f -dual.

Remplacer $\text{Pro}(\text{Coh})$ par $\text{Ind}(\text{Coh})$

On peut maintenant dualiser une dernière fois, et remplacer $\text{Pro}(\text{Coh}(X))$ par son opposée $\text{Ind}(\text{Coh}(X)^{\text{op}})$.

En se restreignant aux schémas presque de type fini sur un schéma classique régulier (un corps), on peut identifier $\text{Coh}(X)$ et son opposé. Le formalisme à trois foncteurs obtenu est à nouveau à valeurs stables et présentables, et les trois foncteurs commutent aux colimites, donc on peut l'étendre en un formalisme à six foncteurs.

On a donc maintenant deux formalismes à six foncteurs différents, tous deux à valeurs stables et présentables :

$$X \mapsto \mathcal{D}_{\text{qc}}(X)$$

$$X \mapsto \text{Ind}(\text{Coh}(X))$$

Ils vérifient tous deux la descente de Zariski, donc on peut dans leur définition se limiter au cas affine. On peut formuler une comparaison entre les deux formalismes, sous la forme d'une transformation naturelle monoïdale symétrique

$$\mathcal{D}_{\text{qc}}(X) = \text{Ind}(\text{Perf}(X)) \simeq \text{Ind}(\text{Perf}(X)^{\text{op}}) \rightarrow \text{Ind}(\text{Coh}(X)^{\text{op}}) \simeq \text{Ind}(\text{Coh}(X)) = \text{IndCoh}(X)$$

qui, essentiellement, tensorise par le dualisant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kestutis CESNAVICIUS et Peter SCHOLZE. *Purity for flat cohomology*. 2023.
- [2] Denis-Charles CISINSKI. *Higher Categories and Homotopical Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2019.
- [3] Denis GAITSGORY et Nick ROZENBLYUM. *A Study in Derived Algebraic Geometry : Volume I : Correspondences and Duality*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2019.
- [4] Martin GALLAUER. *An introduction to six-functor formalisms*. 2021.
- [5] Yifeng LIU et Weizhe ZHENG. *Enhanced six operations and base change theorem for higher Artin stacks*. 2017.
- [HTT] Jacob LURIE. *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, 2009.
- [HA] Jacob LURIE. *Higher Algebra*. Harvard University Press, 2017.
- [Ker] Jacob LURIE. *Kerodon*. <https://kerodon.net>. 2018.
- [6] Lucas MANN. “A p -Adic 6-Functor Formalism in Rigid-Analytic Geometry”. Thèse de doct. University of Bonn, 2022.
- [7] Peter SCHOLZE. *Six-Functor Formalisms*. 2022.
- [Stacks] The STACKS PROJECT AUTHORS. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>.
- [8] Bertrand TOËN. *Derived Algebraic Geometry*. 2014.
- [9] Paula VERDUGO. “Dold-Kan equivalence and homotopy”. Mém. de mast. Université Paris 13, 2016.
- [10] Bogdan ZAVYALOV. *Poincaré Duality in abstract 6-functor formalisms*. 2023.