CHAPITRE 2

LOGIQUE ET ENSEMBLES

Certaines solutions sont données sans justification, la lectrice studieuse est donc encouragée à chercher ces justifications manquantes.

Exercice 2.1

On calcule la table de vérité de chaque proposition

1.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Ainsi, la proposition n'est pas une tautologie.

2.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	non($\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$)	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow$ non($\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Ainsi, la proposition est une tautologie.

3.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$	$((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V

Ainsi, la proposition est une tautologie[1].

4.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non$\mathcal{P} \Rightarrow$ non$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	(non$\mathcal{P} \Rightarrow$ non$\mathcal{Q}$) $\Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Ainsi, la proposition n'est pas une tautologie.

Exercice 2.2

La négation de « $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ » est « $\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$ ».

1. C'est ce qu'on appelle la *transitivité* de l'implication logique.

Exercice 2.3

1. Un entier est strictement plus grand que 10 *si* il est plus grand que 15, mais ce n'est pas nécessaire.

2. Un entier est divisible par 6 *seulement si* il est divisible par 3, mais ce n'est pas suffisant.

Exercice 2.4

La contraposée de « f croissante $\Rightarrow f(3) \geq f(2)$ » est « $f(3) < f(2) \Rightarrow f$ pas croissante ».

Exercice 2.5

1. La proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ est vraie.
2. La proposition $2 > 1 \Rightarrow 2^2 > 1$ est vraie.
3. La proposition $0 > 1 \Rightarrow 0^2 > 1$ est vraie.
4. La proposition $(-2) > 1 \Rightarrow (-2)^2 > 1$ est vraie.

Exercice 2.6

1. La négation de « $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \leq n$ » est « $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > n$ ».
   Cette négation est vraie (car tout entier naturel admet un successeur).

2. La négation de « $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m \leq n$ » est « $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n$ ».
   Cette négation est fausse (car 0 n'est plus grand qu'aucun entier naturel).

3. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Ces deux propositions n'ont pas de sens, car y n'est pas défini.

4. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Ces deux propositions n'ont pas de sens, car y n'est pas défini.

5. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Cette négation est vraie (il suffit de prendre $y = -x - 1$).

6. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Cette négation est fausse (il suffit de prendre $y = -x + 1$).

7. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Cette négation est fausse (car $1 + 1 = 2 > 0$).

8. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leq 0$ ».
   Cette négation est vraie (car $(-1) + (-1) = -2 \leq 0$).

Exercice 2.7

1. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ ».
   Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$ ».
   Les fonctions $f(x) = |x|$ et $f(x) = x^2$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = -1$ vérifient sa négation.

2. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \geq x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ ».
   Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \geq x$ et $f(y) < f(x)$ ».
   Les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = 1$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = x^2$ et $f(x) = -x$ vérifient sa négation.

3. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \geq x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ ».
   Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$ ou $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \geq x$ et $f(y) < f(x)$ ».
   Les fonctions $f(x) = \arctan(x) + \pi$ et $f(x) = e^x$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$ vérifient sa négation.

4. La proposition se traduit par « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ ».
   Sa négation est « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$ ».
   Les fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $f(x) = x$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = -1$ et $f(x) = -e^{-x}$ vérifient sa négation.

5. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ ».
   Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 0$ ».
   Les fonctions $f(x) = e^x$ et $f(x) = \sin(x) + 2$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = \cos(x) + 1$ et $f(x) = |x|$ vérifient sa négation.

6. La proposition se traduit par « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ ».
   Sa négation est « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(-x) \neq f(x)$ ».
   Les fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $f(x) = x^2$ vérifient la première proposition.
   Les fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = x^2 + x$ vérifient sa négation.

Exercice 2.8

1. La contraposée de « Un entier naturel dont le carré est pair est automatiquement pair » est « Un entier naturel impair est de carré impair ». Et en effet, pour $2n + 1$ un entier naturel impair, $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 2n + 1$ est impair.

2. La contraposée de « Un nombre réel dont le carré vaut deux est toujours strictement inférieur à deux » est « Un nombre réel supérieur ou égal à deux est de carré différent de deux ». Et en effet, pour $x \in \mathbb{R}$ plus grand que 2, $x^2 \geq 4$, donc en particulier, $x^2 \neq 2$.

Exercice 2.9

1. La négation de « zéro est le seul réel positif inférieur à tout réel strictement positif » est « il existe un réel positif non nul inférieur à tout réel strictement positif ».
   Supposons que tel soit le cas et notons x un tel nombre. Alors x est positif, non nul, et inférieur à tout réel strictement positif.
   Cependant, $\dfrac{x}{2}$ est positif, non nul, et inférieur à x, ceci est une contradiction avec notre hypothèse, qui doit être fausse.
   Ainsi, la proposition initiale est vraie.

2. La négation de « la racine carrée de deux n'est pas un nombre entier » est « la racine carrée de deux est un nombre entier ».
   Supposons que tel soit le cas, et notons n un tel nombre entier. Alors $n^2 = 2$. Donc $n < 2$, ainsi, soit $n = 0$, soit $n = 1$.
   Cependant, $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, donc $2 = 0$ ou $2 = 1$, ce qui est absurde.
   Ainsi, la proposition initiale est vraie.

Exercice 2.10

1. Soit $n \geq 3$, on suppose $2^n > n^2$. Alors
   $$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2 \times n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$
   Ainsi, pour $n \geq 3$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
2. Le plus petit entier naturel n tel que $2^n > n^2$ est $n = 5$, par la première question, pour tout entier $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Exercice 2.11

1. Soit n un entier tel que 4^n+5 est multiple de 3. Alors
$$4^n+5=3k$$
Donc
$$4^{n+1}+5=4\times 4^n+5=4\times(4^n+5)-15$$
est multiple de 3 (par hypothèse de récurrence et car 15 est multiple de 3).
2. Pour $n=0$, $4^n+5=6$. Comme 6 est multiple de 3, 4^n+5 est toujours multiple de 3.
3. Soit n un entier tel que 10^n+7 est multiple de 9. Alors
$$10^n+7=9k$$
Donc
$$10^{n+1}+7=10\times 10^n+7=10\times(10^n+7)-63$$
est multiple de 9 (par hypothèse de récurrence et car 63 est multiple de 9).
4. 10^n+7 n'est jamais multiple de 9 (car il n'est pas multiple de 3).

Exercice 2.12

Initialisation : $n=0$.
$$(1+x)^n=1=1+0\times x$$
Donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité : Supposons, pour **un** entier naturel n, que $(1+x)^n\geq 1+nx$. Alors
$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1}&=(1+x)(1+x)^n\\&\geq(1+x)(1+nx)\\&=1+x+nx+nx^2\\&\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 2.13

1. **Initialisation :** $n=0$.
$$\sum_{k=0}^{0}(2k+1)=1=(0+1)^2$$
Donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons, pour **un** entier naturel n, que $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)&=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+2(n+1)+1\\&=(n+1)^2+2n+3\\&=n^2+2n+1+2n+3\\&=n^2+4n+4\\&=(n+2)^2\end{aligned}$$
Donc la propriété est vrai au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

2. **Initialisation :** $n = 0$.
$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$
Donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons, pour **un** entier naturel n, que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$
Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vrai pour tout entier naturel.

3. **Initialisation :** $n = 0$.
$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$$
Donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons, pour **un** entier naturel n, que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} \\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel.

4. **Initialisation :** $n = 0$.

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k k^2 = 0 = (-1)^0 \frac{0(0+1)}{2}$$

Donc la propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons, pour **un** entier naturel n, que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^n \left(\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)^2 \right) \\
&= (-1)^n \frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n - 2}{2} \\
&= (-1)^n \frac{-n^2 - 3n - 2}{2} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

5. **Initialisation :** $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Donc la propriété est initialisée.

Hérédité : On suppose, pour **un** entier naturel non nul n, que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel non nul.

Exercice 2.14

1. Non. Par contre-exemple : $E = [0, 3]$, $F = [0, 2]$ et $G = [1, 4]$.
2. Non. Par contre-exemple : $E = [0, 1]$, $F = [1, 2]$ et $G = \{1\}$

Exercice 2.15

1. Non. Par contre-exemple : $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,2,4\}$.
2. Oui. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in A \cup B$ plus petit que le plus petit élément de A ou de B. Si $x \in A$, alors x est plus petit que le plus petit élément de A, ce qui est contradictoire. De même, si $x \in B$, alors x est plus petit que le plus petit élément de B, ce qui est contradictoire. Un tel x ne peut ainsi pas exister.

Exercice 2.16

1. Une condition nécessaire et suffisante est $A \subset B$, on peut alors prendre $X = B \cap A^{\complement}$ ou $X = B$.
2. Une condition nécessaire et suffisante est $B \subset A$, on peut alors prendre $X = B \cup Y$, où Y est n'importe quelle partie de $A^{\complement}$.

Exercice 2.17

1. Par contraposée, supposons qu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, donc $A \cup B \not\subset A \cap B$.
2. Par contraposée, supposons que $A \subset B$, alors pour tout $x \in A$, $x \in B$, donc $x \notin B^{\complement}$, donc $A \cap B^{\complement} = \varnothing$.
3. Les deux implications sont symétriques, on n'en démontre qu'une seule.
   Par contraposée, supposons que $B \setminus A \neq B$, alors $B \cap A \neq \varnothing$, donc $A \setminus B \neq A$ (car il existe alors $x \in A$ et $x \notin A \setminus B$).

Exercice 2.18

1. Par contraposée et absurde, supposons qu'il existe $x \in B \setminus C$. Alors $x \in A \cup B \subset A \cup C$ et $x \notin C$, donc $x \in A$, donc $x \in A \cap B \subset A \cap C$, donc $x \in C$, ce qui est une contradiction. Donc la proposition initiale est vraie.
2. Les rôles de B et C dans la question précédente sont symétriques. On obtient donc $B \subset C$ et $C \subset B$, d'où leur égalité.

Exercice 2.19

Sens direct : Supposons $A \cup B = B \cap C$. Alors $A \cup B \subset B$ donc $A \subset B$ et $A \cup B \subset C$ donc $B \subset C$. Ainsi $A \subset B \subset C$.

Sens réciproque : Supposons $A \subset B \subset C$. Alors $A \cup B = B = B \cap C$.

Exercice 2.20

1. Oui, il suffit de prendre $A = X \cap E$ et $B = X \cap F$.
2. Non, par contre-exemple : $E = \{1,2\}$, $F = \{a,b\}$ et $X = \{(1,a),(2,b)\}$.

Exercice 2.21

Supposons que le disque unité $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ soit le produit de deux parties de $\mathbb{R}$, notées A et B.
Alors, comme $(1,0) \in \mathbb{D}$, $1 \in A$. De même, comme $(0,1) \in \mathbb{D}$, $1 \in B$, donc $(1,1) \in A \times B$, mais $(1,1) \notin \mathbb{D}$.

Exercice 2.22

1. Injective.
2. Bijective.
3. Bijective.
4. Rien.
5. Surjective.
6. Surjective.

Exercice 2.23

1. Non. Par contre-exemple : $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x} \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \lfloor x \rfloor} \mathbb{Z}$. La composée est bijective, mais f n'est pas surjective.
2. Oui. Soit $z \in G$. Alors il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$. Ainsi $f(x)$ est un antécédent de z par g. Donc g est surjective.
3. Oui. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors
   $$g(f(x)) = g(f(x'))$$
   donc $x = x'$ (car $g \circ f$ est injective). Donc f est injective.
4. Non. Par contre-exemple : $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x} \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \lfloor x \rfloor} \mathbb{Z}$. La composée est bijective, mais g n'est pas injective.

Exercice 2.24

1. La fonction f doit être surjective[2]. En effet, si elle ne l'est pas, alors pour $x \in F$ sans antécédent par f, il suffit alors de poser
$$g_1(x) \neq g_2(x)$$
pour obtenir $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ mais $g_1 \neq g_2$.
2. La fonction g doit être injective[3]. En effet, si elle ne l'est pas, alors il existe $y \neq y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. Il suffit alors de poser, pour un certain $x \in E$, $f_1(x) = y$ et $f_2(x) = y'$ pour obtenir $g \circ f_1 = g \circ f_2$ mais $f_1 \neq f_2$.

Exercice 2.25

On a, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} g \circ f(n) &= g(2n) \\ &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g(n) &= \left| \begin{array}{ll} f(n/2) & \text{si } n \text{ est pair} \\ f((n-1)/2) & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right. \\ &= \left| \begin{array}{ll} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exercice 2.26

1. **Initialisation :** $n = 0$. On a bien $f^1 = \mathrm{id}_E \circ f = f^0 \circ f$. La propriété est initialisée.
Hérédité : On suppose, pour **un** entier naturel n, que $f^{n+1} = f^n \circ f$. Alors
$$f^{n+2} = f \circ f^{n+1} = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^n \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f^{n+1} \circ f$$
La propriété est héréditaire.
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

2. **Initialisation :** $n = 0$. On constate bien que $f^0 = \mathrm{id}_E$ une bijection. La propriété est initialisée.
Hérédité : On suppose, pour **un** entier naturel n, que f^n est une bijection, et que $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$. Alors
$$(f^{-1})^{n+1} \circ f^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} \circ (f^{-1})^n \circ f^n \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_E \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$$
Ainsi, f^{n+1} est une bijection, d'inverse $(f^{-1})^{n+1}$. La propriété est héréditaire.
Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel.

Exercice 2.27

1. La fonction $f(n) = n + 1$ réalise une bijection entre $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $\mathbb{Z}_{\geq 2}$.
2. La fonction $g(x) = \dfrac{1}{f(1/x)}$ réalise une biijection entre A_1 et A_2.
3. On remarque que $A_1 \setminus A_2 = \{1\}$, donc $[0,1] \setminus A_1 = ([0,1] \setminus A_2) \setminus \{1\} = [0,1[\setminus A_2$.
4. La fonction
$$h(x) = \left| \begin{array}{ll} x & \text{si } x \notin A_1 \\ g(x) & \text{si } x \in A_1 \end{array} \right.$$
réalise une bijection entre $[0,1]$ et $[0,1[$.

2. On dit que les fonctions surjectives sont des *épimorphismes*.
3. On dit que les fonctions injectives sont des *monomorphismes*.

Exercice 2.28

1. La fonction

$$f(n) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

   réalise une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

2. La fonction

$$f(p,q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$$

   réalise une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$.

3. La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ définie récursivement par

$$f(0) = 0$$
$$f(2n) = \frac{1}{f(n)+1}$$
$$f(2n+1) = f(n) + 1$$

   réalise une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$.

Bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+$