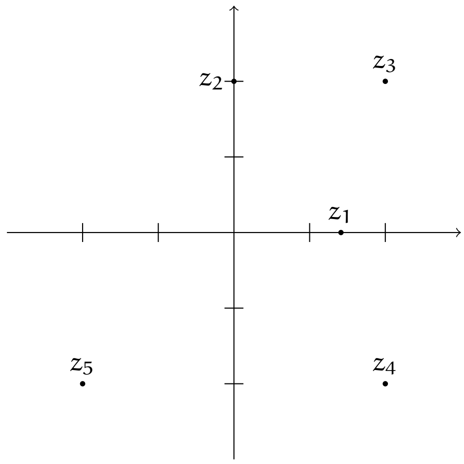
Algèbre et Arithmétique 1

Corrigé

Exercice 1



Exercice 2

(a) $\dfrac{1}{2+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2}$;

(b) $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i-1}{2} = 2$;

(c) $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$;

(d) $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 3i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{3i\sqrt{3}}{8} - \dfrac{9}{8} + \dfrac{3i\sqrt{3}}{8} = -1$;

Exercice 3

Soit $z \in \mathbf{C}$, alors

(a) $z + 2i = iz - 1 \iff z(1-i) = -1-2i \iff z = -\dfrac{1+2i}{1-i} = \boxed{\dfrac{1-3i}{2}}$;

(b) $(3+2i)(z-1) = i \iff (3+2i)z = 3+3i \iff z = \dfrac{3+3i}{3+2i} = \boxed{\dfrac{15+3i}{13}}$;

(c) $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i \iff 1+i = (1+3i)z \iff z = \dfrac{1+i}{1+3i} = \boxed{\dfrac{2-i}{5}}$;

(d) $(4-2i)z^2 = (1+5i)z \iff z = 0 \text{ ou } (4-2i)z = 1+5i \iff z = 0 \text{ ou } z = \dfrac{1+5i}{4-2i} = \boxed{\dfrac{-3+11i}{10}}$;

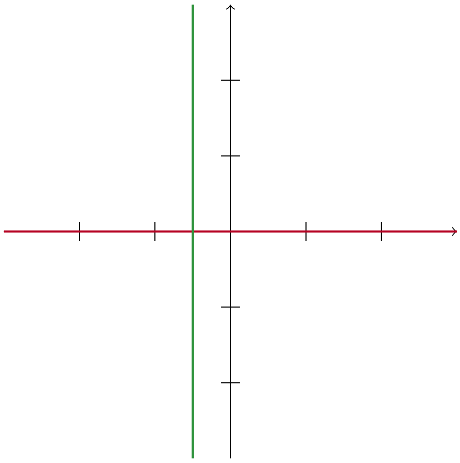
Exercice 4

Soit z un nombre complexe. Soient M_1, M_2 et M_4 les points d'affixes z, z^2 et z^4. Alors

$$\begin{aligned} M_1, M_2 \text{ et } M_4 \text{ sont alignés} &\iff z^2 = z \text{ ou } \frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbf{R} \\ &\iff z \in \{0, 1\} \text{ ou } \frac{(z^2 - z)(z^2 + z)}{z^2 - z} = z^2 + z \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

On note $z = a + ib$, alors

$$\begin{aligned} z^2 + z \in \mathbf{R} &\iff (a+ib)^2 + a + ib \in \mathbf{R} \\ &\iff a^2 + i2ab - b^2 + a + ib \in \mathbf{R} \\ &\iff 2ab + b = 0 \\ &\iff b = 0 \text{ ou } a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Exercice 5

(a) On a $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z^3 = -1$.

(b) On a donc $z^4 = z^3 z = -z$ et $z^5 = z^3 z^2 = -z^2$ et $z^6 = (z^3)^2 = 1$.

(c) Comme $z^6 = 1$, l'inverse de z est $z^{-1} = z^5$.

(d) On a $1 + i\sqrt{3} = 2z$, donc

$$(1+i\sqrt{3})^5 = (2z)^5 = 32z^5 = -32z^2 = 16 - 16i\sqrt{3}$$

(e) On en déduit

$$(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = 32$$
$$(1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5 = -32i\sqrt{3}$$

Exercice 6

Soit $z = a + ib \in \mathbf{C}$ tel que $|1 + iz| = |1 - iz|$. Alors

$$|1 + i(a+ib)| = |1 - i(a+ib)|$$

Donc

$$|1 - b + ia| = |1 + b - ia|$$

Donc

$$(1-b)^2 + a^2 = (1+b)^2 + a^2$$

Donc

$$1 - 2b + b^2 = 1 + 2b + b^2$$

Donc

$$b = -b$$

Ainsi $b = 0$ et $z \in \mathbf{R}$.

Exercice 7
On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{7}(1+i)^k &= \frac{1-(1+i)^8}{1-(1+i)}\\ &= \frac{1-16}{-i}\\ &= -15i\end{aligned}$$

Exercice 8
Soit $z \in \mathbf{C}$. On a (par le changement d'indice $j = k+1$)

$$\begin{aligned}(1-z)S_n = (1-z)\sum_{k=0}^{n} kz^k &= \sum_{k=0}^{n} kz^k - \sum_{k=0}^{n} kz^{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{j=1}^{n+1}(j-1)z^j\\ &= \sum_{k=1}^{n} z^k - nz^{n+1}\\ &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - 1 - nz^{n+1}\\ &= \frac{1-z^{n+1}-(1-z)-n(1-z)z^{n+1}}{1-z}\\ &= \frac{nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+z}{1-z}\end{aligned}$$

Ainsi

$$S_n = \frac{nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+z}{1-z}$$

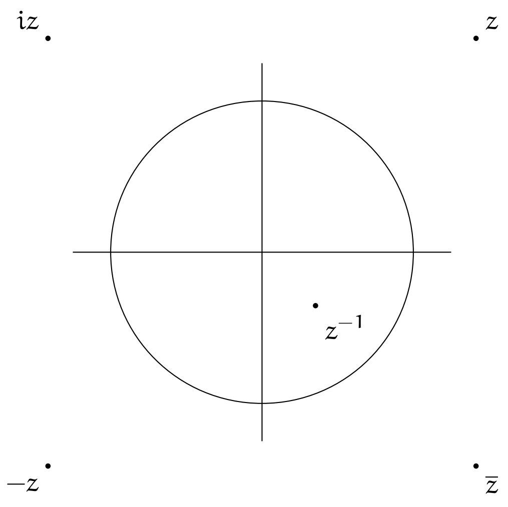
Exercice 9

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$-z = 2e^{i\frac{-3\pi}{4}}$$

$$iz = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$



Exercice 10

(a) $1 = e^{i0}$;

(b) $-1 = e^{i\pi}$;

(c) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$;

(d) $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

(e) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

(f) $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

(g) $-1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

(h) $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 11

(a) On a

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{e^{i3x}+3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-i2x}+e^{-i3x}}{8} \\ &= \frac{(e^{i3x}+e^{-i3x})+3(e^{ix}+e^{-ix})}{8} \\ &= \boxed{\frac{3}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)}\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{e^{i3x}-3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-i2x}-e^{-i3x}}{-8i} \\ &= \frac{(e^{i3x}-e^{-i3x})-3(e^{ix}-e^{-ix})}{-8i} \\ &= \boxed{\frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(x)}\end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}\sin^2(5x) &= \left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{e^{i10x}-2e^{i5x}e^{-i5x}+e^{-i10x}}{-4} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(10x)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^2(5x) &= \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{1}{2}\cos(3x)\cos(10x) \\ &= \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\cdot\frac{e^{i10x}+e^{-i10x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i13x}+e^{i7x}+e^{-i7x}+e^{-i13x}}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{1}{4}\cos(7x)-\frac{1}{4}\cos(13x)}\end{aligned}$$

(d) On a

$$\cos^3(3x) = \frac{3}{4}\cos(3x)+\frac{1}{4}\cos(9x)$$

et

$$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin(2x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\\ &= \frac{\left(e^{i2x}+2+e^{-i2x}\right)\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)}{8i}\\ &= \frac{e^{i4x}+2e^{i2x}+1-1-2e^{-i2x}-e^{-i4x}}{8i}\\ &= \frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{8i}+2\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{8i}\\ &= \frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{4}\sin(4x)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\cos^2(x)\sin(2x)+\cos^3(3x) = \boxed{\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{3}{4}\cos(3x)+\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{4}\cos(9x)}$$

Exercice 12

On a

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc

$$\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12) = e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\cos(\pi/3)+i\sin(\pi 3))(\cos(\pi/4)-i\sin(\pi/4))$$

En développant on obtient

$$\begin{aligned}\cos(\pi/12) &= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4)+\sin(\pi/3)\sin(\pi/4)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(\pi/12) &= -\sin(\pi/4)\cos(\pi/3)+\sin(\pi/3)\cos(\pi/4)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Exercice 13

(a) $(1+i)^9 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^9 = 16\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}} = 16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

(b) $(1-i)^7 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^7 = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

(c) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \dfrac{16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2$;

Exercice 14

(a) On a

$$1+e^{ia} = e^{i\frac{a}{2}}\left(e^{-i\frac{a}{2}}+e^{i\frac{a}{2}}\right) = 2e^{i\frac{a}{2}}\frac{e^{i\frac{a}{2}}+e^{-i\frac{a}{2}}}{2} = 2\cos(a/2)e^{i\frac{a}{2}}$$

Ce nombre est bien sous forme exponentielle car $\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(a/2) \geqslant 0$.

(b) On a

$$e^{ia}+e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{b-a}{2}}+e^{-i\frac{b-a}{2}}\right) = 2e^{i\frac{a+b}{2}}\frac{e^{i\frac{b-a}{2}}+e^{-i\frac{b-a}{2}}}{2} = 2\cos((b-a)/2)e^{i\frac{a+b}{2}}$$

Ce nombre est bien sous forme exponentielle car $\left|\dfrac{b-a}{2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos((b-a)/2) \geqslant 0$.

Exercice 15

(a) Soit $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{2\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}-e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{2}}{2\frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}{2}} = e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

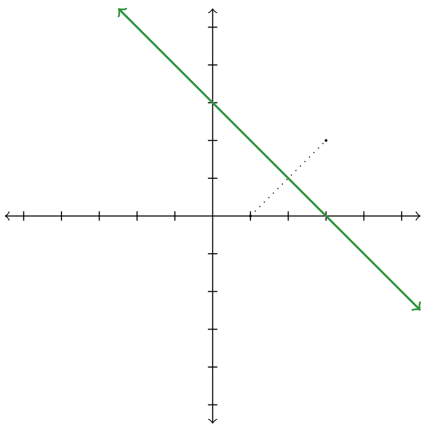
(b) On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{ikx}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

Exercice 16

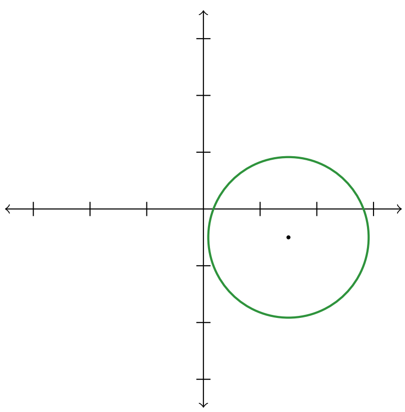
(a) Les points M d'affixe z vérifiant $|z-1| = |z-3-2i|$ forment la médiatrice du segment $[1; 3+2i]$.



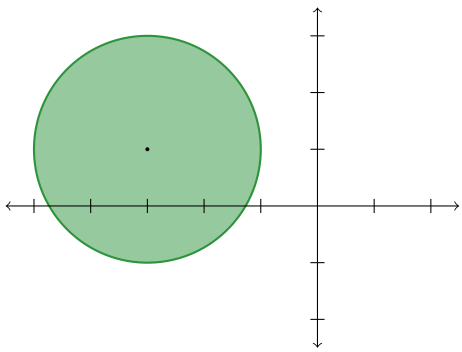
(b) Soit $z \in \mathbf{C}$, alors

$$\left|(1+i)z-2-i\right| = 2 \iff \left|z-\frac{2+i}{1+i}\right| = \frac{2}{|1+i|} \iff \left|z-\frac{3-i}{2}\right| = \sqrt{2}$$

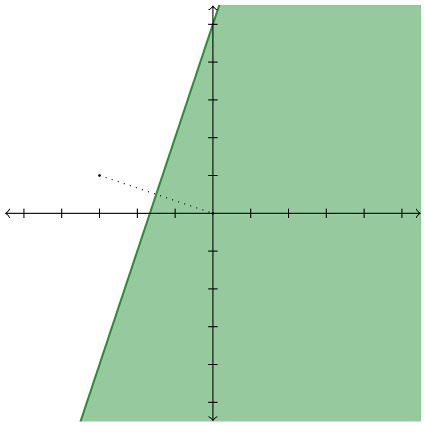
Les points M d'affixe z vérifiant $|(1+i)z-2-i| = 2$ forment donc le cercle de centre $O\left(\dfrac{3-i}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$



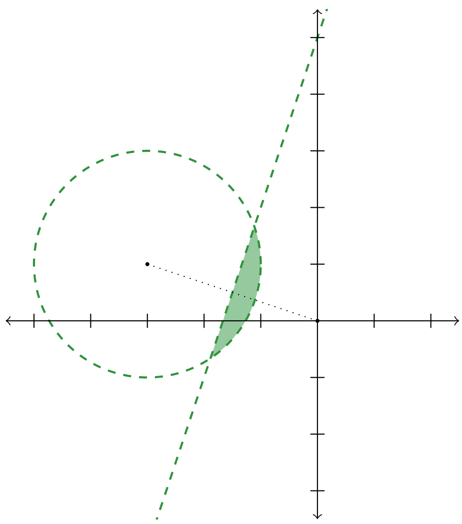
(c) Les points M d'affixe z vérifiant $|z-3+i| \leqslant 2$ forment le disque de centre $O(-3+i)$ et de rayon 2



(d) Les points M d'affixe z vérifiant $|z+3-i| \geqslant |z|$ forment le demi-plan sous la médiatrice du segment $[0; -3+i]$



(e) Les points M d'affixe z vérifiant $|z| < |z+3-i| < 2$ forment l'intersection du demi-plan sous la médiatrice du segment $[0; -3+i]$ et du cercle de centre $O(-3+i)$ de rayon 2.



Exercice 17

(a) Soit $a + ib \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = i \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& 0 \\ 2ab &=& 1 \\ a^2 + b^2 &=& 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 &=& 1 \\ 2b^2 &=& 1 \\ ab &>& 0 \end{array}\right. \\
&\iff a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi les racines carrées de i sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Soit $a + ib \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = 5 + 12i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& 5 \\ 2ab &=& 12 \\ a^2 + b^2 &=& 13 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 &=& 18 \\ 2b^2 &=& 8 \\ ab &>& 0 \end{array}\right. \\
&\iff a = \pm 3, \quad b = \pm 2
\end{aligned}$$

Ainsi les racines carrées de $5 + 12i$ sont $3 + 2i$ et $-3 - 2i$.

(c) Soit $a + ib \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = 1 + 4\sqrt{5}i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = 1 + 4\sqrt{5}i \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& 1 \\ 2ab &=& 4\sqrt{5} \\ a^2 + b^2 &=& 9 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 &=& 10 \\ 2b^2 &=& 8 \\ ab &>& 0 \end{array}\right. \\
&\iff a = \pm\sqrt{5}, \quad b = \pm 2
\end{aligned}$$

Ainsi les racines carrées de $1 + 4\sqrt{5}i$ sont $\sqrt{5} + 2i$ et $-\sqrt{5} - 2i$.

(d) Soit $a + ib \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = 1 + i\sqrt{3} &\iff a^2 - b^2 + 2abi = 1 + i\sqrt{3} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& 1 \\ 2ab &=& \sqrt{3} \\ a^2 + b^2 &=& 2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 &=& 3 \\ 2b^2 &=& 1 \\ ab &>& 0 \end{array}\right. \\
&\iff a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$ sont $\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 18

(a) On calcule le discriminant de l'equation :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

L'équation a donc une racine réelle double

$$z_0 = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

(b) On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = (1+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot i = 2i - 4i = -2i$$

On calcule une racine carrée de $\Delta = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on trouve

$$\delta = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i$$

Les solutions sont alors

$$z_1 = \frac{-(1+i) - \delta}{2} = -i$$
$$z_2 = \frac{-(1+i) + \delta}{2} = -1$$

(c) On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -8$$

On calcule une racine carrée de $\Delta = -8$, on trouve

$$\delta = 2\sqrt{2}i$$

Les solutions sont alors

$$z_1 = \frac{-2i - \delta}{2} = -(1+\sqrt{2})i$$
$$z_2 = \frac{-2i + \delta}{2} = -(1-\sqrt{2})i$$

(d) On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (1+i) \cdot i = 8 - 4i = 4(2-i)$$

On calcule une racine carrée de $\Delta = 8 - 4i$, pour cela on résout un système. Soit $a + bi \in \mathbf{C}$ alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = 2 - i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = 2 - i \\
&\iff \begin{cases} a^2 - b^2 &= 2 \\ 2ab &= -1 \\ a^2 + b^2 &= \sqrt{5} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a^2 &= 2 + \sqrt{5} \\ 2b^2 &= \sqrt{5} - 2 \\ ab &< 0 \end{cases} \\
&\iff a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}, \quad b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}
\end{aligned}$$

Une racine de Δ est donc

$$\delta = 2\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\right)$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-2-\delta}{2(1+i)} = \frac{-1 - \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}}{1+i}$$

$$z_2 = \frac{-2+\delta}{2(1+i)} = \frac{-1 + \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}}{1+i}$$

Question (d) de substitution : $z^2 - 4z + 7 + 4i = 0$:
On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(7+4i) = 16 - 28 - 16i = -12 - 12i$$

On calcule une racine carrée de $\Delta = -12 - 16i$, pour cela on résout un système. Soit $a + bi \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = -12-16i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = -12 - 16i \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 &=& -12 \\ 2ab &=& -16 \\ a^2 + b^2 &=& 20 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 &=& 8 \\ 2b^2 &=& 32 \\ ab &<& 0 \end{array}\right. \\
&\iff a = \pm 2, \quad b = \mp 4
\end{aligned}$$

Une racine de Δ est donc

$$\delta = 2 - 4i$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{4+\delta}{2} = \frac{4+2-4i}{2} = 3 - 2i$$

$$z_2 = \frac{4-\delta}{2} = \frac{4-2+4i}{2} = 1 + 2i$$

Exercice 19

Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. Alors

$$\begin{aligned}
z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de } z^2 - sz + p = 0 &\iff z^2 - sz + p = (z - z_1)(z - z_2) \\
&\iff z^2 - sz + p = z^2 - z_1 z - z_2 z + z_1 z_2 \\
&\iff s = z_1 + z_2 \text{ et } p = z_1 z_2
\end{aligned}$$

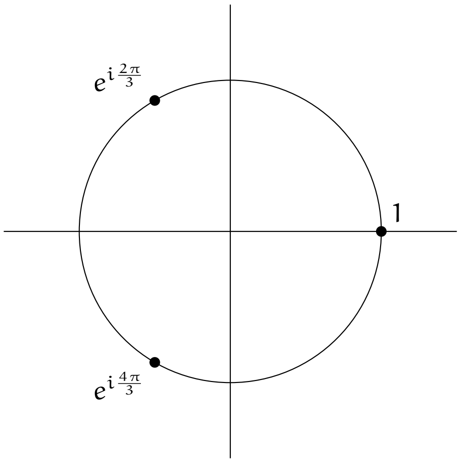
Exercice 20

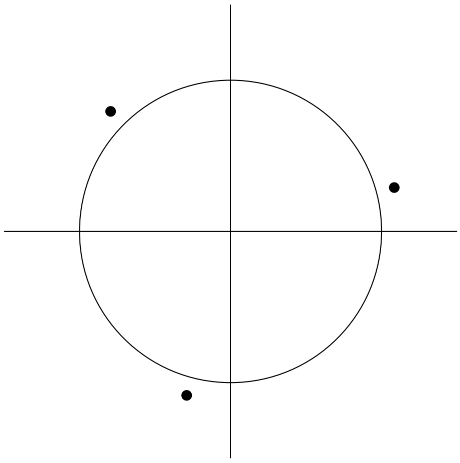
(a) Les racines 3^e de l'unité sont 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Une racine 3^e de $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. Ainsi, les 3 racines 3^e de $1 + i$ sont :

$$1 \times \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

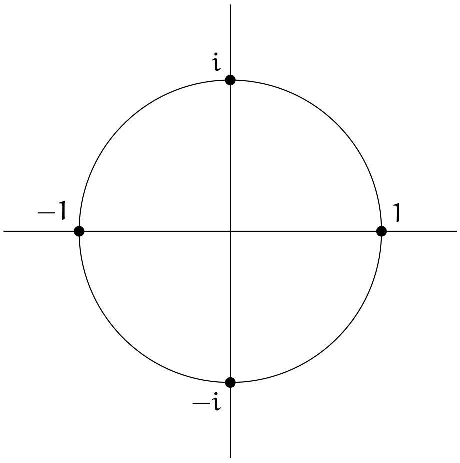
$$e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

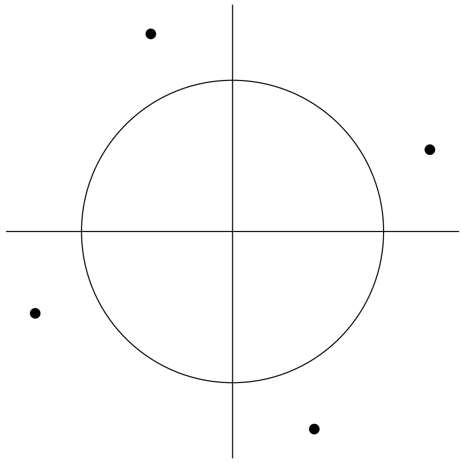




(b) Les racines 4^e de l'unité sont 1, i, -1 et $-i$. Une racine 4^e de $4i$ est $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$. Ainsi, les 4 racines 4^e de $4i$ sont :

$$1 \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$$
$$i \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}$$
$$-1 \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{8}}$$
$$-i \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{8}}$$



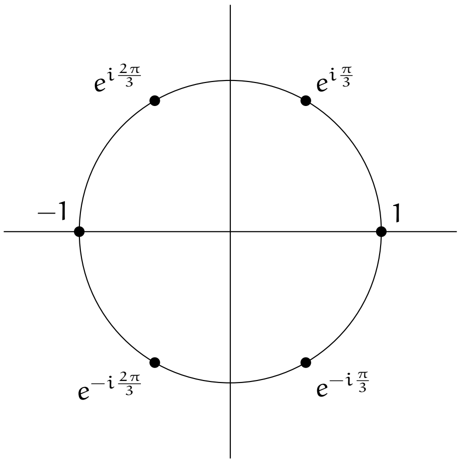


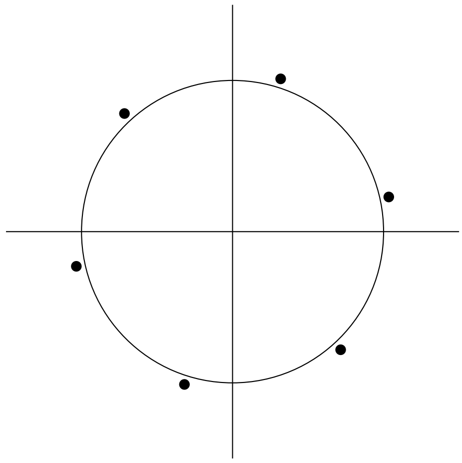
(c) Les racines 6^e de l'unité sont 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, -1, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. De plus

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

Une racine 6^e de ce nombre est $\sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}}$. Ainsi, les 6 racines 6^e de $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ sont

$$1 \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} = \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}}$$
$$e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{17\pi}{72}}$$
$$e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{41\pi}{72}}$$
$$-1 \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{65\pi}{72}}$$
$$e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} = \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{55\pi}{72}}$$
$$e^{-i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} = \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{31\pi}{72}}$$





Exercice 21

On dispose des formules suivantes pour le calcul des invariants d'une similitude $z' = \alpha z + \beta$:

$$\omega = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad \alpha \neq 1$$

$$k = |\alpha| \qquad \theta = \arg(\alpha)$$

Le point Ω d'affixe ω est le *centre* de la similitude (i.e. son unique point fixe), k est son *rapport* et θ son *angle*.

(a) La similitude $z' = z + 3 - i$ est une translation de vecteur $(3, -1)$.

(b) La similitude $z' = 2z + 3$ a pour centre le point Ω d'affixe $\frac{3}{1-2} = -3$, pour angle $\arg(2) = 0$ et pour rapport $|2| = 2$.

(c) La similitude $z' = iz + 1$ a pour centre le point Ω d'affixe $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$, pour angle $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ et pour rapport $|i| = 1$.

(d) La similitude $z' = (1-i)z + 2 + i$ a pour centre le point Ω d'affixe $\frac{2+i}{1-(1-i)} = \frac{2+i}{i} = 1 - 2i$, pour angle $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ et pour rapport $|1-i| = \sqrt{2}$.

Exercice 22

(a) La similitude $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ a pour rapport $k = |\alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pour angle $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{6}$ et pour centre le point Ω d'affixe

$$\omega = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{3+i\sqrt{3}}{4}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2$$

(b) Le triangle (Ω, M, M') est rectangle en M' si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M'\Omega}$ et $\overrightarrow{M'M}$ sont orthogonaux, si et seulement si

$$\frac{z'-z}{z'-\omega} \in i\mathbf{R}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{z'-z}{z'-\omega} &= \frac{(\alpha-1)z+\beta}{\alpha z+\beta-\omega} \\
&= \frac{\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}z + e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}z - \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}}} \\
&= -\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{z}{2}-1\right)}{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{z}{2}-1\right)} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

Ainsi, le rectangle (Ω, M, M') est bien rectangle en M'.

Exercice 23

Soient $k \in \mathbf{R}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $\omega \in \mathbf{C}$. La similitude directe de centre Ω d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k a pour forme complexe

$$z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

(a) On a $\omega = 1 + i$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $k = 2$, donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - (1 + i)) + 1 + i = 2iz + 3 - i$$

(b) On a $\omega = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $k = \sqrt{3}$, donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)z$$

(c) On a $\omega = 1 - 2i$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et $k = 2\sqrt{2}$, donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (1 - 2i)) + 1 - 2i = (2 + 2i)z - 5$$

Exercice 24

Soient M et N deux points d'affixes respectives z et w. Soient M' et N', d'affixes respectives z' et w', leur image par une similitude directe $z' = \alpha z + \beta$. On dispose des formules suivantes :

$$\alpha = \frac{z' - w'}{z - w}$$

$$\beta = \frac{zw' - z'w}{z - w}$$

(a) On a $z = 1$, $z' = 1 + i$, $w = 2i$ et $w' = -3 - i$. Ainsi

$$\alpha = \frac{1 + i + 3 + i}{1 - 2i} = 2i$$

$$\beta = \frac{-3 - i - 2i(1 + i)}{1 - 2i} = 1 - i$$

Donc la similitude a pour centre le point Ω d'affixe $\dfrac{1 - i}{1 - 2i} = \dfrac{3 + i}{5}$, pour angle $\arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$ et pour rapport $|2i| = 2$.

(b) On a $z = 5 - 4i$, $z' = -1 - 4i$, $w = -1 - 4i$ et $w' = -4 - i$. Ainsi

$$\alpha = \frac{-1 - 4i + 4 + i}{5 - 4i + 1 + 4i} = \frac{1 - i}{2}$$

$$\beta = \frac{(5 - 4i)(-4 - i) - (-1 - 4i)^2}{6} = \frac{-3 + i}{2}$$

Donc la similitude a pour centre le point Ω d'affixe $\dfrac{-\frac{3+i}{2}}{1 - \frac{1-i}{2}} = -1 + 2i$, pour angle $\arg\left(\dfrac{1 - i}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ et pour rapport $\left|\dfrac{1 - i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) On a $z = 0$, $z' = 0$, $w = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $w' = 2\sqrt{3} - 2i$. Ainsi

$$\alpha = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{-2\sqrt{3} - 2i} = \frac{4e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\beta = 0$$

Donc la similitude a pour centre le point Ω d'affixe 0, pour angle $\arg(\alpha) = \dfrac{7\pi}{12}$ et pour rapport $|\alpha| = 2$.

Exercice 25

(a) La translation de vecteur $(1,-1)$ a pour forme complexe

$$z' = z + 1 - i$$

(b) L'homothétie de centre $(1,-1)$ et de rapport 2 a pour forme complexe

$$z' = 2(z-1+i) + 1 - i = 2z - 1 + i$$

(c) La symétrie[a] de centre $(0,0)$ a pour forme complexe

$$z' = -z$$

(d) La symétrie de centre $(1,-1)$ a pour forme complexe

$$z' = -(z-1+i) + 1 - i = -z + 2 - 2i$$

a. Les symétrie centrales sont des rotation d'angle π

Exercice 26

(a) La table de vérité de la proposition $(p \implies q) \wedge (\neg q \vee r)$ est

p	q	r	$p \implies q$	$\neg q \vee r$	$(p \implies q) \wedge (\neg q \vee r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

(b) La table de vérité de la proposition $\neg(p \wedge \neg r) \implies (q \vee r)$ est

p	q	r	$\neg(p \wedge \neg r)$	$q \vee r$	$\neg(p \wedge \neg r) \implies (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

(c) La table de vérité de la proposition $\underbrace{((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)}_{\star}$ est

p	q	r	$p \implies q$	$q \implies r$	$(p \implies q) \wedge (q \implies r)$	$p \implies r$	$\star$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

La proposition est toujours vraie, c'est une *tautologie*.

(d) La table de vérité de la proposition $(\neg p \vee q) \implies ((p \wedge r) \implies q)$ est

p	q	r	$\neg p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \implies q$	$(\neg p \vee q) \implies ((p \wedge r) \implies q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	T	F	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	T

Exercice 27

(a) « $n \leqslant 5$ »est une condition suffisante pour que n ne soit pas strictement supérieur à 10, mais pas nécessaire.

(b) « $2 \mid n$ »est une condition nécessaire pour que n soit divisible par 6, mais pas suffisante.

Exercice 28

Avant de déterminer la contraposée, on exprime formellement « $f \geqslant g$ » :

$$f \geqslant g \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geqslant g(x)$$

La contraposée de « $f \geqslant g \implies \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \geqslant g(x)$ »est donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) < g(x) \implies \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) < g(x)$$

L'option (d) est donc la contraposée recherchée.

Exercice 29

(a) $\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N},\ m > n$ est vraie, il suffit de prendre $m = n + 1$.

(b) $\exists n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N},\ m > n$ est fausse, car sa négation est vraie ($m = 0$).

(c) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x + y \leqslant 0$ est vraie, il suffit de prendre $y = -|x| - 1$.

(d) $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x + y \leqslant 0$ est fausse, car sa négation est vraie ($y = |x| + 1$).

(e) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x + y \leqslant 0$ est fausse, un contre-exemple est $x = y = 1$.

(f) $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R},\ x + y \leqslant 0$ est vraie, il suffit de prendre $x = y = -1$.

Exercice 30

(a) Montrons par contraposition que, pour tout entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair :
Supposons n impair. Alors n peut s'écrire $n = 2k+1$ avec k un entier. Alors

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Donc n^2 est impair. Par contraposition, on obtient le résultat voulu.

(b) Montrons par contraposition que, pour tout réel x, si $x^2 = 2$, alors $x < 2$:
Supposons $x \geqslant 2$, alors, comme la fonction carrée est croissante sur $[0, +\infty[$,

$$x^2 \geqslant 2^2 = 4$$

Donc $x^2 \neq 2$. Par contraposition, on obtient le résultat voulu.

Exercice 31

(a) Montrons par l'absurde la proposition suivante

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star, \exists y \in \mathbf{R}_+^\star, y < x$$

Supposons donc sa négation :

$$\exists x \in \mathbf{R}_+^\star, \forall y \in \mathbf{R}_+^\star, y \geqslant x$$

Alors, comme $\dfrac{x}{2}$ est un réel strictement positif, on a

$$\frac{x}{2} \geqslant x$$

Comme $x \neq 0$, on peut le simplifier en

$$\frac{1}{2} \geqslant 1$$

Ce qui est absurde. Ainsi, la négation de la proposition initiale est fausse, donc la proposition est vraie.

(b) Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors il existe des entiers p et q premiers entre eux (i.e. $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$) tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Ainsi,

$$2 = \sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Donc $p^2 = 2q^2$ donc p est pair. Ainsi p peut s'écrire $p = 2k$ pour un certain entier naturel k. Alors

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

D'où $q^2 = 2k^2$, donc q est également pair.
Ceci contredit l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux. Ainsi, $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel.

Exercice 37

(a) Soit $x \in E$, alors

$$x \in A \implies x \in A \cup B \implies x \in A \cap B \implies x \in B$$

$$x \in B \implies x \in A \cup B \implies x \in A \cap B \implies x \in A$$

Ainsi, $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, donc $A = B$.

(b) [1] On raisonne par contraposée, on suppose $A \subset B$. Soit $x \in E$, alors

$$x \in A \implies x \in B \implies x \notin B^{\complement} \implies A \cap B^{\complement} = \varnothing$$

(c) On suppose $A = A \setminus B$. On a

$$\begin{aligned} B \setminus A &= B \setminus (A \setminus B) \\ &= B \cap (A \setminus B)^{\complement} \\ &= B \cap (A \cap B^{\complement})^{\complement} \\ &= B \cap (A^{\complement} \cup B) \\ &= (B \cap A^{\complement}) \cup (B \cap B) \\ &= (B \setminus A) \cup B \\ &= B \end{aligned}$$

Exercice 40

Supposons par l'absurde que le disque unité

$$\mathbf{D} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + x^2 \leqslant 1\right\}$$

soit un produit $A \times B$ de parties de $\mathbf{R}$. Alors, comme $(1, 0) \in \mathbf{D}$, $1 \in A$, et comme $(0, 1) \in \mathbf{D}$, $1 \in B$. Donc $(1, 1) \in A \times B$, donc $(1, 1) \in \mathbf{D}$. Or, $1^2 + 1^2 > 1$, donc $(1, 1) \notin \mathbf{D}$.

1. Attention, typo dans le sujet, lire $A \cap B^{\complement} \neq \varnothing \implies A \not\subset B$.

Exercice BONUS (Relations d'équivalence)

(a) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, \qquad x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Soient E un ensemble non vide et A une partie de E.
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur[2] $\mathfrak{P}(E)$ définie par

$$\forall X \in \mathfrak{P}(E),\ \forall Y \in \mathfrak{P}(E), \qquad X\mathcal{R}Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(a) On vérifie les axiomes un par un :

Réflexivité : Soit $x \in \mathbf{R}$, alors
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
par identité trigonométrique, donc $x\mathcal{R}x$.

Symétrie : Soient x et y deux réels tels que $x\mathcal{R}y$ (i.e. $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$), alors
$$(1 - \sin^2 x) + (1 - \cos^2 y) = 1$$
Donc
$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$
D'où $y\mathcal{R}x$.

Transitivité : Soient x, y et z trois réels tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors
$$\cos^2 x + \sin^2 z = \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + \sin^2 z$$
On a donc
$$2 = (\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 z) = (\cos^2 x + \sin^2 z) + (\cos^2 y + \sin^2 y) = (\cos^2 x + \sin^2 z) + 1$$
D'où
$$\cos^2 x + \sin^2 z = 1$$
D'où $x\mathcal{R}z$.

(b) On vérifie les axiomes un par un :

Réflexivité : Soit X une partie de E, on a bien
$$X \cap A = X \cap A$$
Donc $X\mathcal{R}X$.

Symétrie : Soient X et Y deux parties de E telles que $X\mathcal{R}Y$ (i.e. $X \cap A = Y \cap A$), alors
$$Y \cap A = X \cap A$$
Donc $Y\mathcal{R}X$.

Transitivité : Soient X, Y et Z trois parties de E telles que $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}Z$, alors
$$X \cap A = Y \cap A = Z \cap A$$
Donc
$$X \cap A = Z \cap A$$
Donc $X\mathcal{R}Z$.

2. On rappelle que $\mathfrak{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E, i.e. l'ensemble des ensembles contenus dans E