Mémoire de Master 1

David Kolar

Sous la direction de Vincent Beck

Catégories abéliennes

Théorème de plongement de Freyd-Mitchell

- Théorème de plongement de Freyd-Mitchell

- Théorie des catégories abéliennes ;
- Théorème de plongement de Freyd-Mitchell

- Théorie des catégories
- Théorie des catégories abéliennes ;
- Théorème de plongement de Freyd-Mitchell

- Théorie des catégories (et diagrammes commutatifs) ;
- Théorie des catégories abéliennes ;
- Théorème de plongement de Freyd-Mitchell

Théorie des catégories

Définition 1.1.1 (Catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de

Définition 1.1.1 (Catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de

- Une classe d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;

Définition 1.1.1 (Catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de

- Une classe d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- Pour tout (X, Y), une classe de morphismes $\mathrm{Hom}(X, Y)$;

Définition 1.1.1 (Catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de

- Une classe d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- Pour tout (X, Y), une classe de morphismes $\mathrm{Hom}(X, Y)$;
- Une identité pour chaque objet $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$

Définition 1.1.1 (Catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de

- Une classe d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- Pour tout (X, Y), une classe de morphismes $\mathrm{Hom}(X, Y)$;
- Une identité pour chaque objet $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$
- Une loi de composition

$$\circ : \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

Définition 1.1.1 (Catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de

- Une classe d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- Pour tout (X, Y), une classe de morphismes $\mathrm{Hom}(X, Y)$;
- Une identité pour chaque objet $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$
- Une loi de composition

$$\circ : \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

Par abus de notation, on notera $X \in \mathcal{C}$ plutôt que $X \in Ob(\mathcal{C})$ et $f : A \to B \in \mathcal{C}$ plutôt que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

- **Ens** la catégorie des ensembles ;

- **Ens** la catégorie des ensembles ;
- **Ab** la catégorie des groupes abéliens ;

- **Ens** la catégorie des ensembles ;
- **Ab** la catégorie des groupes abéliens ;
- (et **Grp** celle des groupes) ;

- **Ens** la catégorie des ensembles ;
- **Ab** la catégorie des groupes abéliens ;
- (et **Grp** celle des groupes) ;
- ${}_R\mathbf{Mod}$ la catégorie des R-modules à gauche.

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{N}) = \mathbf{N}$;
- $\mathrm{Hom}(n, p) = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$

Soit $(M, +)$ un monoïde.

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{M}) = \{\bullet\}$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\bullet, \bullet) = M$.

Définition 1.1.3 (Catégorie localement petite)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite localement petite lorsque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un ensemble quels que soient X et Y.

Définition 1.1.3 (Catégorie localement petite)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite <u>localement petite</u> lorsque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un ensemble quels que soient X et Y.

Définition 1.1.3 (Petite catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite <u>petite</u> lorsque $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est un ensemble.

Définition 1.1.5 (Sous-catégorie)

Une sous-catégorie $\mathcal{S}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Définition 1.1.5 (Sous-catégorie)

Une sous-catégorie $\mathcal{S}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Définition 1.1.6 (Sous-catégorie pleine)

Une sous-catégorie $\mathcal{S}$ est dite <u>pleine</u> lorsque

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Ab est une sous-catégorie pleine de **Grp** ;

Définition 1.1.7 (Catégorie opposée)

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Définition 1.1.10 (Monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes)

- f est un monomorphisme lorsque

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

Définition 1.1.10 (Monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes)

- f est un monomorphisme lorsque

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

- f est un épimorphisme lorsque

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

Définition 1.1.10 (Monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes)

- f est un monomorphisme lorsque

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

- f est un épimorphisme lorsque

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

- $f : X \to Y$ est un isomorphisme lorsqu'il existe $g : Y \to X$ tel que

$$f \circ g = \mathrm{id}_X \qquad g \circ f = \mathrm{id}_Y$$

- Un isomorphisme est un monomorphisme et un épimorphisme (mais la réciproque est fausse)

- Un isomorphisme est un monomorphisme et un épimorphisme (mais la réciproque est fausse)
- Un monomorphisme de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$.

Définition 1.2.1 (Foncteur)

Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée

Définition 1.2.1 (Foncteur)

Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée

- d'une application $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;

Définition 1.2.1 (Foncteur)

Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée

- d'une application $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;
- d'une application $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ telle que

$$F[\mathrm{id}_X] = \mathrm{id}_{F(X)}$$

$$F[f \circ g] = F[f] \circ F[g]$$

Définition 1.2.1 (Foncteur)

Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée

- d'une application $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;
- d'une application $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ telle que

$$F[\mathrm{id}_X] = \mathrm{id}_{F(X)}$$

$$F[f \circ g] = F[f] \circ F[g]$$

Définition (Foncteur contravariant)

Un foncteur contravariant est un foncteur covariant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathcal{D}$. Il associe donc, à tout morphisme $f : X \to Y$, un morphisme $G[f] : G(Y) \to G(X)$.

Définition

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit

plein lorsque $F_{X,Y}$ est surjective ;

Définition

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit

plein lorsque $F_{X,Y}$ est surjective ;

fidèle lorsque $F_{X,Y}$ est injective ;

Définition

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit

plein	lorsque $F_{X,Y}$ est surjective ;
fidèle	lorsque $F_{X,Y}$ est injective ;
conservatif	lorsque $f \in \mathcal{C}$ est un isomorphisme si et seulement si $F[f] \in \mathcal{D}$ en est un.

Définition

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit

plein	lorsque $F_{X,Y}$ est surjective ;
fidèle	lorsque $F_{X,Y}$ est injective ;
conservatif	lorsque $f \in \mathcal{C}$ est un isomorphisme si et seulement si $F[f] \in \mathcal{D}$ en est un.

Un foncteur plein et fidèle est dit pleinement fidèle.

- Le foncteur d'oubli **Grp** $\rightarrow$ **Ens** est fidèle et conservatif, mais pas plein.

- Le foncteur d'oubli $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ens}$ est fidèle et conservatif, mais pas plein.
- Le foncteur d'inclusion $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ est pleinement fidèle ;

Proposition 1.2.4

Un foncteur pleinement fidèle est conservatif.

Démonstration.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleinement fidèle. Soit $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ tel que $F[f]$ soit un isomorphisme de $\mathcal{D}$.

Démonstration.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleinement fidèle. Soit $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ tel que $F[f]$ soit un isomorphisme de $\mathcal{D}$.
Alors il existe $g : F(Y) \to F(X)$ tel que

$$F[f] \circ g = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad \text{et} \qquad g \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)}$$

Démonstration.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleinement fidèle. Soit $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ tel que $F[f]$ soit un isomorphisme de $\mathcal{D}$.
Alors il existe $g : F(Y) \to F(X)$ tel que

$$F[f] \circ g = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad \text{et} \qquad g \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)}$$

Comme F est plein, il existe $h : Y \to X$ tel que $g = F[h]$.

Démonstration.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleinement fidèle. Soit $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ tel que $F[f]$ soit un isomorphisme de $\mathcal{D}$.
Alors il existe $g : F(Y) \to F(X)$ tel que

$$F[f] \circ g = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad \text{et} \qquad g \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)}$$

Comme F est plein, il existe $h : Y \to X$ tel que $g = F[h]$.
On a donc

$$F[f \circ h] = F[f] \circ F[h] = \mathrm{id}_{F(X)} = F[\mathrm{id}_X]$$
$$F[h \circ f] = F[h] \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)} = F[\mathrm{id}_Y]$$

Démonstration.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleinement fidèle. Soit $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ tel que $F[f]$ soit un isomorphisme de $\mathcal{D}$.
Alors il existe $g : F(Y) \to F(X)$ tel que

$$F[f] \circ g = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad \text{et} \qquad g \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)}$$

Comme F est plein, il existe $h : Y \to X$ tel que $g = F[h]$.
On a donc

$$F[f \circ h] = F[f] \circ F[h] = \mathrm{id}_{F(X)} = F[\mathrm{id}_X]$$

$$F[h \circ f] = F[h] \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)} = F[\mathrm{id}_Y]$$

Comme F est fidèle, $f \circ h = \mathrm{id}_X$ et $h \circ f = \mathrm{id}_Y$.

Démonstration.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleinement fidèle. Soit $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ tel que $F[f]$ soit un isomorphisme de $\mathcal{D}$.
Alors il existe $g : F(Y) \to F(X)$ tel que

$$F[f] \circ g = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad \text{et} \qquad g \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)}$$

Comme F est plein, il existe $h : Y \to X$ tel que $g = F[h]$.
On a donc

$$F[f \circ h] = F[f] \circ F[h] = \mathrm{id}_{F(X)} = F[\mathrm{id}_X]$$

$$F[h \circ f] = F[h] \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)} = F[\mathrm{id}_Y]$$

Comme F est fidèle, $f \circ h = \mathrm{id}_X$ et $h \circ f = \mathrm{id}_Y$. Donc f est un isomorphisme.

Démonstration.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleinement fidèle. Soit $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ tel que $F[f]$ soit un isomorphisme de $\mathcal{D}$.
Alors il existe $g : F(Y) \to F(X)$ tel que

$$F[f] \circ g = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad \text{et} \qquad g \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)}$$

Comme F est plein, il existe $h : Y \to X$ tel que $g = F[h]$.
On a donc

$$F[f \circ h] = F[f] \circ F[h] = \mathrm{id}_{F(X)} = F[\mathrm{id}_X]$$

$$F[h \circ f] = F[h] \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)} = F[\mathrm{id}_Y]$$

Comme F est fidèle, $f \circ h = \mathrm{id}_X$ et $h \circ f = \mathrm{id}_Y$. Donc f est un isomorphisme. Donc F est conservatif. $\square$

Définition 1.3.1 (Transformation naturelle)

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs.

Définition 1.3.1 (Transformation naturelle)

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs.
Une transformation naturelle η entre F et G est la donnée, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, d'un morphisme $\eta_X : F(X) \to G(X)$ faisant commuter le diagramme

Définition 1.3.1 (Transformation naturelle)

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs.
Une transformation naturelle η entre F et G est la donnée, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, d'un morphisme $\eta_X : F(X) \to G(X)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F[f]"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G[f]"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Définition 1.3.1 (Transformation naturelle)

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs.
Une transformation naturelle η entre F et G est la donnée, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, d'un morphisme $\eta_X : F(X) \to G(X)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F[f]"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G[f]"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Les morphismes η_X sont les composantes de η.

On note $\mathrm{Nat}(F, G)$ l'ensemble des transformations naturelles entre F et G.

Définition 1.3.3 (Catégorie de foncteurs)

Pour $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{D}$ une catégorie quelconque, on définit $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ la catégorie des foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, avec comme morphismes les transformations naturelles.

Définition 1.3.3 (Catégorie de foncteurs)

Pour $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{D}$ une catégorie quelconque, on définit $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ la catégorie des foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, avec comme morphismes les transformations naturelles.

Définition 1.3.4 (Isomorphisme naturel)

Un isomorphisme naturel est une transformation naturelle ι entre $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui est un isomorphisme dans la catégorie de foncteur $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$.

Définition 1.4.1 (Foncteur Hom)

Pour $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $A \in \mathcal{C}$, on pose

$$\begin{array}{cccccccc} h_A & : & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Ens} & & & \\ & & X & \mapsto & \mathrm{Hom}(A,X) & & & \\ & & f : X \to Y & \mapsto & h_A[f] & : & \mathrm{Hom}(A,X) & \to & \mathrm{Hom}(A,Y) \\ & & & & & & g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

appelé <u>foncteur hom covariant</u>

Définition 1.4.1 (Foncteur Hom)

Pour $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $A \in \mathcal{C}$, on pose

$$\begin{array}{cccccccc} h_A & : & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Ens} & & & \\ & & X & \mapsto & \mathrm{Hom}(A,X) & & & \\ & & f : X \to Y & \mapsto & h_A[f] & : & \mathrm{Hom}(A,X) & \to & \mathrm{Hom}(A,Y) \\ & & & & & & g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

appelé <u>foncteur hom covariant</u>

On définit duellement le <u>foncteur hom contravariant</u>

$$\begin{array}{cccccccc} h^A & : & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Ens} & & & \\ & & X & \mapsto & \mathrm{Hom}(X,A) & & & \\ & & f : X \to Y & \mapsto & h_A[f] & : & \mathrm{Hom}(X,A) & \to & \mathrm{Hom}(Y,A) \\ & & & & & & g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Théorème 1.5.1 (Lemme de Yoneda)

Pour une catégorie localement petite $\mathcal{C}$ et un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$, on a, pour tout $A \in \mathcal{C}$,

$$\mathrm{Nat}(h_A, F) \simeq F(A)$$

Cet isomorphisme étant naturel en A et en F.

Corollaire

Le foncteur (contravariant)

$$\begin{array}{cccc} h_{\_} & : & \mathcal{C} & \to & [\mathcal{C}, \mathbf{Ens}] \\ & & A & \mapsto & h_A \end{array}$$

est pleinement fidèle.

Définition 1.5.2 (Foncteur représentable)

Pour une catégorie localement petite $\mathcal{C}$. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est dit <u>représentable</u> lorsqu'il existe $A \in \mathcal{C}$ tel que F soit naturellement isomorphe à h_A.

Définition 1.5.2 (Foncteur représentable)

Pour une catégorie localement petite $\mathcal{C}$. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est dit <u>représentable</u> lorsqu'il existe $A \in \mathcal{C}$ tel que F soit naturellement isomorphe à h_A.

Proposition 1.5.3

La représentation d'un foncteur est unique à unique isomorphisme près.

Constructions catégoriques

Formellement, un diagramme de forme J est un foncteur

$$F : J \to \mathcal{C}$$

Définition 2.1.1 (Cône)

Pour $N \in \mathcal{C}$ et $F : J \to \mathcal{C}$.
Un <u>cône de sommet N et de base F</u> est une transformation naturelle du foncteur constant N vers le foncteur F.

Définition 2.1.1 (Cône)

Pour $N \in \mathcal{C}$ et $F : J \to \mathcal{C}$.
Un <u>cône de sommet N et de base F</u> est une transformation naturelle du foncteur constant N vers le foncteur F.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\lambda_X"'] \arrow[dr, "\lambda_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F[f]"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

Définition 2.1.2 (Foncteur cône)

Pour une petite catégorie J, $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $F : J \to \mathcal{C}$ un diagramme. On définit le foncteur contravariant

$$\mathrm{Cone}(\cdot, F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$$

associant à chaque objet N l'ensemble des cônes de sommet N et de base F.

Définition 2.1.2 (Foncteur cône)

Pour une petite catégorie J, $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $F : J \to \mathcal{C}$ un diagramme. On définit le foncteur contravariant

$$\mathrm{Cone}(\cdot, F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$$

associant à chaque objet N l'ensemble des cônes de sommet N et de base F.

Définition 2.1.3 (Limite)

Pour un diagramme $F : J \to \mathcal{C}$, une limite de F est une représentation du foncteur $\mathrm{Cone}(\cdot, F)$.
C'est donc un objet $\lim F$ et un cône α qui soit un isomorphisme naturel

$$\alpha : \mathrm{Cone}(\cdot, F) \simeq h^{\lim F}$$

Duellement, on définit le foncteur covariant $\mathrm{Cone}(F, \cdot)$ et la co-limite, comme représentation de ce foncteur.

Proposition 2.1.4

Pour un foncteur F admettant une limite L, celle-ci est unique à unique isomorphisme près.

Définition 2.2.1 (Produit)

Un produit est la limite d'un diagramme discret.
Un co-produit est la co-limite d'un diagramme discret.

Définition 2.3.1 (égaliseur)

Un égaliseur est la limite d'un diagramme de forme $\bullet \rightrightarrows \bullet$.
Un co-égaliseur est la co-limite d'un diagramme de même forme.

Définition 2.4.1 (Noyau)

Pour une catégorie $\mathcal{C}$ avec des morphismes nul et un morphisme $f : X \to Y$. Le noyau de f, $\ker(f)$ est l'égaliseur de f et du morphisme nul.

Proposition 2.4.2

Pour une catégorie $\mathcal{C}$ avec un objet nul, le noyau d'un monomorphisme est nul.

Proposition 2.4.2

Pour une catégorie $\mathcal{C}$ avec un objet nul, le noyau d'un monomorphisme est nul.

Duellement, le co-noyau d'un épimorphisme est nul.

Théorie des catégories abéliennes

Définition 3.2.1 (Catégorie abélienne (selon Freyd))

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Elle possède un objet nul ;

Définition 3.2.1 (Catégorie abélienne (selon Freyd))

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Elle possède un objet nul ;
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ;

Définition 3.2.1 (Catégorie abélienne (selon Freyd))

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Elle possède un objet nul ;
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ;
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ;

Définition 3.2.1 (Catégorie abélienne (selon Freyd))

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Elle possède un objet nul ;
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ;
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ;
4. Les monomorphismes sont des noyaux et les épimorphismes des co-noyaux.

Proposition 3.2.2

Ab est abélienne.

Proposition 3.2.2

Ab est abélienne.

Démonstration.

1. Elle possède un objet nul ;
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ;
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ;
4. Les monomorphismes sont des noyaux et les épimorphismes des co-noyaux.

□

Proposition 3.2.2

Ab est abélienne.

Démonstration.

1. Elle possède un objet nul ; ✓
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ;
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ;
4. Les monomorphismes sont des noyaux et les épimorphismes des co-noyaux.

□

Proposition 3.2.2

Ab est abélienne.

Démonstration.

1. Elle possède un objet nul ; ✓
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ; ✓
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ;
4. Les monomorphismes sont des noyaux et les épimorphismes des co-noyaux.

□

Proposition 3.2.2

Ab est abélienne.

Démonstration.

1. Elle possède un objet nul ; ✓
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ; ✓
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ; ✓
4. Les monomorphismes sont des noyaux et les épimorphismes des co-noyaux.

□

Proposition 3.2.2

Ab est abélienne.

Démonstration.

1. Elle possède un objet nul ; ✓
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ; ✓
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ; ✓
4. Les monomorphismes sont des noyaux et les épimorphismes des co-noyaux. ✓

□

Proposition 3.2.2

Ab est abélienne.

Démonstration.

1. Elle possède un objet nul ; ✓
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ; ✓
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ; ✓
4. Les monomorphismes sont des noyaux et les épimorphismes des co-noyaux. ✓

□

Proposition 3.2.3

${}_R\mathbf{Mod}$ est abélienne.

Définition 3.2.4 (Catégorie abélienne (moderne))

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Pour tous objets X, Y, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est un groupe abélien ;

Définition 3.2.4 (Catégorie abélienne (moderne))

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Pour tous objets X, Y, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est un groupe abélien ;
2. La composition est bilinéaire ;

Définition 3.2.4 (Catégorie abélienne (moderne))

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Pour tous objets X, Y, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est un groupe abélien ;
2. La composition est bilinéaire ;
3. Tout morphisme admet un noyau et un co-noyau ;

Définition 3.2.4 (Catégorie abélienne (moderne))

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Pour tous objets X, Y, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est un groupe abélien ;
2. La composition est bilinéaire ;
3. Tout morphisme admet un noyau et un co-noyau ;
4. Pour tout morphisme $f : X \to Y$, $X/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f)$.

Définition 3.4.1 (Suites exactes)

Une suite exacte est une famille de morphisme (f_i) tels que

$$\ker(f_{i+1}) = \mathrm{im}(f_i)$$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & B_{13} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d] & B_{32} \arrow[r] \arrow[d] & B_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & B_{13} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d] & B_{32} \arrow[r] \arrow[d] & B_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Draw a noughts-and-crosses board... Do not fill it in with noughts and crosses... Instead, use curved arrows... Wave your hands about in complicated patterns over this board. Make some noughts, but not in the squares ; put them at both ends of the horizontal and vertical lines. Make faces. You have now proved : the Nine Lemma, the Sixteen Lemma, the Twenty-five Lemma...

–Linderholm

Définition 4.1.5 (Foncteur exact)

Un foncteur est exact *à gauche* lorsqu'il préserve les suites exactes de la forme $0 \to A \to B \to C$.

Définition 4.1.5 (Foncteur exact)

Un foncteur est exact *à gauche* lorsqu'il préserve les suites exactes de la forme $0 \to A \to B \to C$.

Un foncteur est exact *à droite* lorsqu'il préserve les suites exactes de la forme $A \to B \to C \to 0$.

Définition 4.1.5 (Foncteur exact)

Un foncteur est exact *à gauche* lorsqu'il préserve les suites exactes de la forme $0 \to A \to B \to C$.

Un foncteur est exact *à droite* lorsqu'il préserve les suites exactes de la forme $A \to B \to C \to 0$.

Un foncteur est exact lorsqu'il est exact à gauche et à droite.

Théorème de plongement de Freyd-Mitchell

$$
\begin{array}{ccccccccc}
h_A & : & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Ens} & & & & \\
 & & X & \mapsto & \mathrm{Hom}(A,X) & & & & \\
 & & f : X \to Y & \mapsto & h_A[f] & : & \mathrm{Hom}(A,X) & \to & \mathrm{Hom}(A,Y) \\
 & & & & & & g & \mapsto & f \circ g
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
h^A & : & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Ens} & & & & \\
 & & X & \mapsto & \mathrm{Hom}(X,A) & & & & \\
 & & f : X \to Y & \mapsto & h_A[f] & : & \mathrm{Hom}(X,A) & \to & \mathrm{Hom}(Y,A) \\
 & & & & & & g & \mapsto & g \circ f
\end{array}
$$

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_R\mathbf{Mod}$.

Démonstration.

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathbf{Ab}]$ des foncteurs exacts à gauche.

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_R\mathbf{Mod}$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathbf{Ab}]$ des foncteurs exacts à gauche.
  Le foncteur $h^- : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ est alors pleinement fidèle et exact.

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathbf{Ab}]$ des foncteurs exacts à gauche.
  Le foncteur $h^{-} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ est alors pleinement fidèle et exact.
- $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne, c'est même une catégorie de Grothendieck.

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathbf{Ab}]$ des foncteurs exacts à gauche.
  Le foncteur $h^{-} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ est alors pleinement fidèle et exact.
- $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne, c'est même une catégorie de Grothendieck.
  Elle admet donc un co-générateur injectif I.

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathbf{Ab}]$ des foncteurs exacts à gauche.
  Le foncteur $h^{-} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ est alors pleinement fidèle et exact.
- $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne, c'est même une catégorie de Grothendieck.
  Elle admet donc un co-générateur injectif I.
- On pose $R = \mathrm{End}(I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(I, I)$.

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathbf{Ab}]$ des foncteurs exacts à gauche.
  Le foncteur $h^{-} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ est alors pleinement fidèle et exact.
- $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne, c'est même une catégorie de Grothendieck.
  Elle admet donc un co-générateur injectif I.
- On pose $R = \mathrm{End}(I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(I, I)$.

  Les ensembles $\mathrm{Hom}(X, I)$ sont alors des R-modules à gauche.

Théorème 6.4.6 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Démonstration.

- On note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{A}, \mathbf{Ab}]$ des foncteurs exacts à gauche.
  Le foncteur $h^{-} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ est alors pleinement fidèle et exact.
- $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne, c'est même une catégorie de Grothendieck.
  Elle admet donc un co-générateur injectif I.
- On pose $R = \mathrm{End}(I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}(I, I)$.

  Les ensembles $\mathrm{Hom}(X, I)$ sont alors des R-modules à gauche.
- Le foncteur h^{I} est pleinement fidèle et exact également, donc $h^{I} \circ h^{-}$ est un foncteur pleinement fidèle et exact de $\mathcal{A}$ dans ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

□

Merci de votre attention