Chapitre 3

Arithmétique

Certaines solutions sont données sans justification, la lectrice studieuse est donc encouragée à chercher ces justifications manquantes. Par ailleurs, certaines solutions sont potentiellement non-optimales.

Exercice 3.1

1. Le nombre recherché est 1622.
2. La précédente date contenant 8 chiffres différents est le 25 06 1987.

Exercice 3.2

1. $100001 = 101 \times 990 + 11$.
2. $656665 = 11 \times 59696 + 9$.
3. $66227 = 13 \times 5094 + 5$.

Exercice 3.3

Le reste de 12079233 dans la division par 75968 est 321.
Le reste de 12079233 dans la division par 159 est 3.

Exercice 3.4

On sait que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Lorsque n est pair,

$$S_n = n \times \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$$

donc le reste de la division euclidienne de S_n par n est $\frac{n}{2}$.
Lorsque n est impair,

$$S_n = n\frac{n+1}{2}$$

donc le reste de la division euclidienne de S_n par n est nul.

Exercice 3.5

1.
   - Si n est pair, alors $2 \mid n$, donc $2 \mid n(n+1)$.
   - Si n est impair, alors $2 \mid n+1$, donc $2 \mid n(n+1)$.
2.
   - Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $3 \mid n$, donc $3 \mid n(n+1)(n+2)$.
   - Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $3 \mid n+2$, donc $3 \mid n(n+1)(n+2)$.
   - Si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $3 \mid n+1$, donc $3 \mid n(n+1)(n+2)$.
3.
   - Si $n \equiv 0 \pmod 4$, alors $4 \mid n$ et $2 \mid n+2$, donc $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.
   - Si $n \equiv 1 \pmod 4$, alors $4 \mid n+3$ et $2 \mid n+1$, donc $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.
   - Si $n \equiv 2 \pmod 4$, alors $4 \mid n+2$ et $2 \mid n$, donc $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.
   - Si $n \equiv 3 \pmod 4$, alors $4 \mid n+1$ et $2 \mid n+3$, donc $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Exercice 3.6

1. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) =$ « $4^{4n+2} - 3^{n+3} \equiv 0 \pmod{11}$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, on a
$$4^2 - 3^3 = -11 \equiv 0 \pmod{11}$$
La propriété $\mathcal{P}$ est donc initialisée.

Hérédité : Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour *un* entier naturel n. Alors
$$4^{4n+2} - 3^{n+3} \equiv 0 \pmod{11}$$
On a alors
$$4^{4(n+1)+2} - 3^{(n+1)+3} = 4^4 \times 4^{4n+2} - 3 \times 3^{n+3}$$
Or $4^4 \equiv 3 \pmod{11}$, car $256 = 11 \times 23 + 3$, donc
$$4^{4(n+1)+2} - 3^{(n+1)+3} \equiv 3(4^{4n+2} - 3^{n+3}) \pmod{11}$$
Par hypothèse de récurrence,
$$4^{4(n+1)+2} - 3^{(n+1)+3} \equiv 3 \times 0 \equiv 0 \pmod{11}$$
Ainsi, la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) =$ « $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 \pmod{17}$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, on a
$$3 \times 5 + 2 = 17 \equiv 0 \pmod{17}$$
La propriété $\mathcal{P}$ est donc initialisée.

Hérédité : Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour *un* entier naturel n. Alors
$$3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 \pmod{17}$$
On a alors
$$3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3 \times 5^2 \times 5^{2n+1} + 2^3 \times 2^{3n+1}$$
Or $5^2 \equiv 8 \pmod{17}$, donc
$$3 \times 5^2 \times 5^{2n+1} + 2^3 \times 2^{3n+1} \equiv 8(3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}) \pmod{17}$$
Par hypothèse de récurrence,
$$3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} \equiv 8 \times 0 \equiv 0 \pmod{17}$$
Ainsi, la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3.7

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) =$ « $40^n n! \mid (5n)!$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, on a

$$40^0 0! = 1$$

$$(5 \times 0)! = 1$$

Donc $40^0 0! \mid (5 \times 0)!$.

Hérédité : Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour *un* entier naturel n. Alors

$$40^n n! \mid (5n)!$$

On a alors

$$40^{n+1}(n+1)! = 40 \times (40^n n!) \times (n+1)$$

Et

$$(5(n+1))! = (5n)! \times (5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)$$

Par hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que $40(n+1) \mid (5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)$.

- Par 3.5.3, $8 \mid (5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)$. Donc

$$8 \mid (5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)$$

- De plus, $5n+5 = 5(n+1)$, donc

$$5 \mid (5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)$$

et

$$(n+1) \mid (5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)$$

Ainsi,

$$40(n+1) = 8 \times 5 \times (n+1) \mid (5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)$$

Enfin,

$$40^{n+1}(n+1)! \mid (5(n+1))!$$

Donc la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3.8

1. On a, pour tout entier n,
$$2n-3 = 2\times(n-2)+1$$
On cherche donc n tel que $n-2 \mid 1$, comme 1 n'a pour diviseurs que ± 1, on a
$$n-2=-1 \iff n=1$$
$$n-2=1 \iff n=3$$
2. On a, pour tout entier n,
$$3n-7 = 3\times(n-4)+5$$
On cherche donc n tel que $n-4 \mid 5$, comme 5 n'a pour diviseurs que ± 1 et ± 5, on a
$$n-4=-5 \iff n=-1$$
$$n-4=-1 \iff n=3$$
$$n-4=1 \iff n=5$$
$$n-4=5 \iff n=9$$

Exercice 3.9

1. On a
$$x^2-y^2=1 \iff (x+y)(x-y)=1$$
Donc $x+y=x-y=\pm 1$. Ainsi, la solution (dans $\mathbb{N}$) est $(1,0)$.
2. On a
$$xy=x+y \iff (1-x)(1-y)=1$$
Donc $1-x=1-y=\pm 1$. Ainsi, les solutions sont $(0,0)$ et $(2,2)$.
3. On a
$$xy=2x+2y \iff (2-x)(2-y)=4$$
Donc $2-x\in\{-4,-2,-1,1,2,4\}$, donc $x\in\{-2,0,1,3,4,6\}$. Les solutions sont donc $(0,0)$, $(3,6)$, $(4,4)$ et $(6,3)$.
4. On a
$$2xy=x+y \iff (1-2x)(1-2y)=1$$
Donc $1-2x=1-2y=\pm 1$. Ainsi les solutions sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

Exercice 3.10

1.

$n \pmod 4$	0	1	2	3
$2^n \pmod 5$	2	4	8	1

2.

$n \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$3^n \pmod 7$	3	2	6	4	5	1

3. Comme $38 \equiv 3 \pmod 7$, $38^n \equiv 3^n \pmod 7$, ainsi

$n \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$38^n \pmod 7$	3	2	6	4	5	1

Exercice 3.11

1. On conjecture, en faisant le calcul pour de petites valeurs de n, que $4^n + 2^n + 1$ est divisible par 7 si et seulement si n n'est pas un multiple de 3. Montrons cette conjecture :
   - Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $4^n \equiv 1 \pmod 7$ et $2^n \equiv 1 \pmod 7$. Donc
   $$4^n + 2^n + 1 \equiv 3 \pmod 7$$
   Donc $4^n + 2^n + 1$ n'est pas divisible par 7.
   - Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $4^n \equiv 4 \pmod 7$ et $2^n \equiv 2 \pmod 7$. Donc
   $$4^n + 2^n + 1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7$$
   Donc $4^n + 2^n + 1$ est divisible par 7.
   - Si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $4^n \equiv 2 \pmod 7$ et $2^n \equiv 4 \pmod 7$, donc
   $$4^n + 2^n + 1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod 7$$
   Donc $4^n + 2^n + 1$ est divisible par 7.

2. On conjecture que $9^n + 3^n + 1$ est divisible par 13 si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.
   - Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $9^n \equiv 1 \pmod{13}$ et $3^n \equiv 1 \pmod{13}$. Donc
   $$9^n + 3^n + 1 \equiv 3 \pmod{13}$$
   Donc $9^n + 3^n + 1$ n'est pas divisible par 13.
   - Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $9^n \equiv 9 \pmod{13}$ et $3^n \equiv 3 \pmod{13}$. Donc
   $$9^n + 3^n + 1 \equiv 13 \equiv 0 \pmod{13}$$
   Donc $9^n + 3^n + 1$ est divisible par 13.
   - Si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $9^n \equiv 3 \pmod{13}$ et $3^n \equiv 9 \pmod{13}$. Donc
   $$9^n + 3^n + 1 \equiv 13 \equiv 0 \pmod{13}$$
   Donc $9^n + 3^n + 1$ est divisible par 13.

3. On conjecture que $25^n + 5^n + 1$ est divisible par 31 si et seulement si n n'est pas un multiple de 3.
   - Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $25^n \equiv 25 \pmod{31}$ et $5^n \equiv 5 \pmod{31}$. Donc
   $$25^n + 5^n + 1 \equiv 3 \pmod{31}$$
   Donc $25^n + 5^n + 1$ n'est pas divisible par 31.
   - Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $25^n \equiv 25 \pmod{31}$ et $5^n \equiv 5 \pmod{31}$. Donc
   $$25^n + 5^n + 1 \equiv 31 \equiv 0 \pmod{31}$$
   Donc $25^n + 5^n + 1$ est divisible par 31.
   - Si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $25^n \equiv 5 \pmod{31}$ et $5^n \equiv 25 \pmod{31}$. Donc
   $$25^n + 5^n + 1 \equiv 31 \equiv 0 \pmod{31}$$
   Donc $25^n + 5^n + 1$ est divisible par 31.

Exercice 3.12

- Si n est pair, alors $7^n \equiv 1 \pmod 8$, donc $7^n + 1 \equiv 2 \pmod 8$.
- Si n est impair, alors $7^n \equiv 7 \pmod 8$, donc $7^n + 1 \equiv 0 \pmod 8$.

Exercice 3.13

Soit n un entier relatif. On a

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2+2)$$

Ainsi il suffit de montrer que, pour tout entier relatif n, $n(n^2+2)$ est divisible par 3. On fait une disjonction de cas :

- Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $n^2 + 2 \equiv 2 \pmod 3$ et $n(n^2+2) \equiv 0 \pmod 3$.
- Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $n^2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ et $n(n^2+2) \equiv 0 \pmod 2$.
- Si $n \equiv 2 \pmod 2$, alors $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ donc $n^2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ et $n(n^2+2) \equiv 0 \pmod 3$.

Dans les trois cas, $n(n^2+2)$ est divisible par 3, ce qui conclut.

Exercice 3.14

Soit $n \geq 2$. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \equiv b \pmod n$. Alors il existe p, q, r des entiers relatifs tels que

$$a = pn + r$$

$$b = qn + r$$

Donc, par la formule du binôme

$$a^n = (pn+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k n^k r^{n-k} = n^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p^k n^{k-2} r^{n-k} + n \times pnr^{n-1} + r^n \equiv r^n \pmod{n^2}$$

$$b^n = (qn+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k n^k r^{n-k} = n^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} q^k n^{k-2} r^{n-k} + n \times qnr^{n-1} + r^n \equiv r^n \pmod{n^2}$$

Ainsi,

$$a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$$

Exercice 3.15

1. On a $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ et $5^2 \equiv -1 \pmod{13}$, donc

$$3^{126} + 5^{126} \equiv 1^{42} + (-1)^6 3 \equiv 0 \pmod{13}$$

   Ainsi, $3^{126} + 5^{126}$ est divisible par 13.

2. Montrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

   Initialisation : $n = 0$, on a

$$3^{2\times 0+1} + 2^{4\times 0+2} = 7$$

   La propriété est donc initialisée.

   Hérédité : Supposons, pour **un** entier naturel n, que $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7. Alors

$$3^{2n+1} + 2^{4n+2} \equiv 0 \pmod 7$$

   On a

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{4(n+1)+2} = 3^2 \times 3^{2n+1} + 2^4 \times 2^{4n+2}$$

   Comme $3^2 \equiv 2^4 \equiv 2 \pmod 7$,

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{4(n+1)+2} \equiv 2 \times \left(3^{2n+1} + 2^{4n+2}\right) \equiv 0 \pmod 7$$

   Donc $3^{2(n+1)+1} + 2^{4(n+1)+2}$ est divisible par 7, la propriété est héréditaire.

   Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3.16

1. On sait que $247 \equiv 2 \pmod 7$. Donc
$$247^{349} \equiv 2^{349} \pmod 7$$
Par un raisonnement similaire à l'exercice 3.10, on obtient

$n \pmod 3$	0	1	2
$2^n \pmod 7$	1	2	4

Ainsi, comme $349 \equiv 1 \pmod 3$,
$$247^{349} \equiv 2^{349} \equiv 2 \pmod 7$$

2. Par la même méthode, on obtient
$$1357^{2013} \equiv 2 \pmod 5$$

Exercice 3.17

1. **Initialisation :** $n = 1$. On a
$$6^1 = 6 \equiv 6 \pmod{10}$$
Donc la propriété est initialisée.
Hérédité : Supposons que, pour **un** entier naturel non-nul n, $6^n \equiv 6 \pmod{10}$. Alors
$$6^{n+1} = 6 \times 6^n \equiv 6 \times 6 \equiv 36 \equiv 6 \pmod{10}$$
La propriété est donc héréditaire.
Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
2. Comme $123456 \equiv 6 \pmod{10}$,
$$123456^{789} \equiv 6 \pmod{10}$$
3. On a
$$56 \equiv 56 \pmod{100}$$
$$56^2 = 3136 \equiv 36 \pmod{100}$$
$$56^3 = 56 \times 56^2 \equiv 16 \pmod{100}$$
$$56^4 = 56^2 \times 56^2 \equiv 96 \pmod{100}$$
$$56^5 = 56^3 \times 56^2 \equiv 56 \pmod{100}$$
$$56^6 = (56^2)^3 \equiv 36^3 \equiv 56 \pmod{100}$$
4. On remarque que $789 \equiv 3 \pmod 6$, donc
$$\begin{aligned}123456^{789} &= (123456^6)^{131} \times 123456^3 \\ &\equiv 56^{131} \times 56^3 \\ &\equiv 56^{134} \\ &\equiv 56^22 \times 56^2 \\ &\equiv 56^{24} \\ &\equiv 56^4 \\ &\equiv 96 \pmod{100}\end{aligned}$$
le chiffre des dizaines de 123456^{789} est donc 9.

Exercice 3.18

1. On calcule
$$49^2 = (50-1)^2 = 50^2 - 2\times 50 + 1^2 = 2401 \equiv 401 \pmod{1000}$$
$$401^5 = (400+1)^5 = 400^5 + 5\times 400^4 + 10\times 400^3 + 10\times 400^2 + 5\times 400^1 + 1 \equiv 1 \pmod{1000}$$
2. On a
$$7^{20} = 49^{10} \equiv 401^5 \equiv 1 \pmod{1000}$$
et
$$7^{1001} = 7\times 7^{1000} = 7\times (7^{20})^{50} \equiv 7\times 1^{50} \equiv 7 \pmod{1000}$$

Exercice 3.19

1. La décomposition de 8190 en produit de facteurs premiers est
$$8190 = 2\times 3^2 \times 5\times 7\times 13$$
Comme 2, 7 et 13 divisent 231868,
$$8190 \wedge 231868 = 2\times 7\times 13 = 182$$
2. Comme 17 est premier et ne divise pas 23145, ces nombres sont premiers entre eux.
3. La décomposition de 678 en produit de facteurs premiers est
$$678 = 2\times 3\times 113$$
Comme ni 2 ni 113 ne divisent 12345,
$$678 \wedge 12345 = 3$$
4. Comme $2^{445}+7$ est divisible par 3 mais pas par 5,
$$15 \wedge 2^{445}+7 = 3$$

Exercice 3.20

1. $$-3\times 23 + 2\times 35 = 1$$
2. $$-12\times 27 + 13\times 25 = 1$$

Exercice 3.21

1. On a $2873 = 13^2\times 17$ et $1001 = 7\times 11\times 13$, donc
$$1001 \wedge 2873 = 13$$
De plus,
$$23\times 2873 - 66\times 1001 = 13$$
2. Comme 13 ne divise pas 15, l'équation $2873u + 1001v = 15$ n'a pas de solution entière.

Exercice 3.22

1. Soit $a = 2k$ un nombre pair, alors $a^2 = 4k^2$ est un multiple de 4.
2. Soit $a = 2k+1$ un nombre impair, alors $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$.
3. (a) On a $a^2+b^2+c^2 \equiv 3 \pmod 8$, donc $a^2+b^2+c^3 \not\equiv 0 \pmod 4$, donc $a^2+b^2+c^2$ n'est pas un carré.
   (b) On a
   $$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \equiv 1 \pmod 4$$
   Donc $2(ab+bc+ac) \equiv -2 \pmod 4$ donc $ab+bc+ac \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$, donc ce n'est pas un carré.

Exercice 3.23

1. Il suffit de montrer que, quelque soit $n \in \mathbb{Z}$, $2 \mid n(n+1)(n+2)$ et $3 \mid n(n+1)(n+2)$.
   - Si n est pair, alors $2 \mid n(n+1)(n+2)$, sinon, alors $n+1$ est pair.
   - Si $n \equiv 0 \pmod 3$, alors $3 \mid n(n+1)(n+2)$.
     Si $n \equiv 1 \pmod 3$, alors $n+2$ est divisible par 3.
     Si $n \equiv 2 \pmod 3$, alors $n+1$ est divisible par 3.
2. Il suffit de montrer que, quelque soit $n \in \mathbb{Z}$, $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$ et $3 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.
   - Par la première question, on sait que $3 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.
   - Si $n \equiv 0 \pmod 4$, alors $2 \mid n+2$ et $4 \mid n$, donc $8 \mid n(n+2)$.
     Si $n \equiv 1 \pmod 4$, alors $2 \mid n+1$ et $4 \mid n+3$, donc $8 \mid (n+1)(n+3)$.
     Si $n \equiv 2 \pmod 4$, alors $2 \mid n$ et $4 \mid n+2$, donc $8 \mid n(n+2)$.
     Si $n \equiv 3 \pmod 4$, alors $2 \mid n+3$ et $4 \mid n+1$, donc $8 \mid (n+1)(n+3)$.

Exercice 3.24

1. Si a et b sont premiers entre eux, alors il existe des entiers u et v tels que
   $$au + bv = 1$$
   Donc
   $$a(u-v) + (a+b)v = au - av + av + bv = au + bv = 1$$
   Ainsi, a et $a+b$ sont premiers entres eux.
2. Comme a et b sont premiers entre eux, ils ne partagent pas de facteur premier. De même, a et c ne partagent pas de facteur premier. Or les facteurs premiers de bc sont les facteurs premiers de b ou de c. Ainsi a et bc ne peuvent partager de facteur premier, ils sont premiers entre eux.
3. Les facteurs premiers de a^k sont les facteurs premiers de a, de même avec b^l et b. Comme a et b sont premiers entre eux, ils ne partagent pas de facteur premier. Donc a^k et b^l ne peuvent partager de facteur premier, ils sont premiers entre eux.

Exercice 3.25

Supposons qu'il existe un tel tableau de 5 lignes et 6 colonnes. Notons S la somme (constante) des colonnes. Alors la somme de tout le tableau vaut $6S$. Or cette dernière somme est

$$\sum_{k=1}^{30} k = \frac{30 \times 31}{2} = 465$$

Ainsi,

$$6S = 465$$

donc 465 est divisible par 6. C'est absurde, donc un tel tableau n'existe pas.

Avec 6 lignes et 5 colonnes en revanche, un tel tableau existe.

1	2	3	4	5
30	29	28	27	26
6	7	8	9	10
25	24	23	22	21
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
$= 93$	$= 93$	$= 93$	$= 93$	$= 93$

Exercice 3.26

1. On remarque que
$$3 \times (8n+7) - 4 \times (6n+5) = 24n + 21 - 24n - 20 = 1$$
Par l'identité de Bézout, $6n+5$ et $8n+7$ sont donc premier entre eux, quelque soit n.
2. On remarque que
$$(2n+3) \times (2n+3) - 4 \times (n^2+3n+2) = 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 12n + 8) = 1$$
Par l'identité de Bézout, n^2+3n+2 et $2n+3$ sont premiers entre eux, quelque soit n.
3. Soit p un nombre premier divisant à la fois $5^{n+1}+6^{n+1}$ et 5^n+6^n. Alors
   - D'une part,
   $$p \mid (5^{n+1}+6^{n+1}) - 5(5^n+6^n) = 6^n$$
   Donc $p=2$ ou $p=3$.
   - D'autre part,
   $$p \mid 6(5^n+6^n) - (5^{n+1}+6^{n+1}) = 5^n$$
   Donc $p=5$.

   On a atteint une contradiction, un tel nombre premier p n'existe donc pas, donc $5^{n+1}+6^{n+1}$ et 5^n+6^n sont premiers entre eux, quelque soit n.

Exercice 3.27

1. Les solutions sont de la forme $a = 11n$ et $b = -6n$, avec n un entier relatif.
2. On remarque que $6 \times 2 + 11 \times (-1) = 1$. Grâce à la première question, on en déduit que les solutions sont de la forme $a = 11n + 2$ et $b = 6n - 1$, avec n un entier relatif.
3. Comme $6 \wedge 12 = 6$, et comme 6 ne divise pas, l'équation $6a + 12b = 5$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.28

On écrit
$$a = 2^{a_2} \times 3^{a_3} \times 5^{a_5}$$
$$b = 2^{b_2} \times 3^{b_3} \times 5^{b_5}$$
Comme $18 = 2 \times 3^2$ et $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, on obtient
$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} \min(a_2,b_2) & = & 1 & , & \max(a_2,b_2) & = & 3 \\ \max(a_3,b_3) & = & 2 & , & \max(a_3,b_3) & = & 2 \\ \max(a_5,b_5) & = & 0 & , & \max(a_5,b_5) & = & 1 \end{array}\right.$$
On distingue alors 4 cas (car $a_3 = b_3 = 2$) :

- $a_2 = 1, b_2 = 3, a_5 = 0, b_5 = 1$. Alors $\boxed{a = 18 \text{ et } b = 360}$
- $a_2 = 3, b_2 = 1, a_5 = 0, b_5 = 1$. Alors $\boxed{a = 72 \text{ et } b = 90}$
- $a_2 = 1, b_2 = 3, a_5 = 1, b_5 = 0$. Alors $\boxed{a = 90 \text{ et } b = 72}$
- $a_2 = 3, b_2 = 1, a_5 = 1, b_5 = 0$. Alors $\boxed{a = 360 \text{ et } b = 18}$

Exercice 3.29

1. $51 = 3 \times 17, 72 = 2^3 \times 3^2$ et $216 = 2^3 \times 3^3$.
2. On en déduit que $51 \wedge 216 = 3$.
3. $72 = 8 \times 9$ et $216 = 8 \times 27$.
4. Comme $a \wedge b \mid a \vee b$ et $a \wedge b \mid a + b$, $a \wedge b$ divise $(a+b) \wedge (a \vee b)$.
5. On déduit de la question précédente que $a \wedge b$ vaut 1 ou 3. On distingue les cas :
   - Si $a \wedge b = 1$, alors $ab = 216$, donc a et b sont les solutions de $x^2 - 51x + 216$. On calcule alors
   $$\Delta = 51^2 - 4 \times 216 = 1737$$
   Puisque 1737 n'est pas un carré, ce cas ne donne aucune solution.
   - Si $a \wedge b = 3$, alors $ab = 648$, donc a et b sont les solutions de $x^2 - 51x + 648$. On calcule alors
   $$\Delta = 51^2 - 4 \times 648 = 9$$
   Les solutions sont donc $a = \dfrac{51-3}{2} = 24$ et $b = \dfrac{51+3}{2} = 27$ (ou inversement).

Exercice 3.30

1. Supposons que $\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)} = \dfrac{m}{n}$ avec $m \wedge n = 1$. Alors
   $$n \ln(a) = m \ln(b)$$
   donc $a^n = b^m$. Ainsi, pour p un nombre premier, $nv_p(a) = mv_p(b)$. Comme $n \wedge m = 1$, $n \mid v_p(b)$, donc il existe c tel que $b = c^n$. Similairement, il existe c' tel que $a = c'^m$. Ainsi $(c'^m)^n = (c^n)^m$ donc $c = c'$, donc $c \mid a \wedge b$, donc a et b ne sont pas premiers entre eux.
2. Si ab et $a+b$ sont entiers, alors
   $$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$
   est entier, donc $a-b$ est entier (corollaire de l'exercice 3.24.3), donc $2a = (a+b) + (a-b)$ est entier. De même,
   $$2a^2 = (a+b)^2 + (a+b)(a-b) - 2ab$$
   est entier, donc $2(a^2 - a)$ est entier. On pose alors $a = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Alors
   $$2(a^2 - a) = 2a(a-1) = \frac{2p(p-q)}{q^2}$$
   Comme on suppose que $2a(a-1)$ est entier, on obtient les cas suivants :
   - Soit $q^2 = 1$, alors $q = \pm 1$ et a est entier, on a fini.
   - Soit $q^2 \mid 2p(p-q)$, donc $q \mid 2p(p-q)$ donc
     - Soit $q \mid 2$, alors $q = 1$ et on a fini, ou $q = 2$, et alors
     $$2a(a-1) = \frac{2p(p-2)}{4}$$
     donc $2 \mid p(p-2)$ donc $2 \mid p$ donc $p \wedge q \neq 1$, c'est absurde donc $q \neq 2$.
     - Soit $q \mid p(p-q)$ donc $q \mid p$ donc $p \wedge q = q$, donc $q = 1$ et on a fini.

Exercice 3.31

- 111 est divisible par 3.
- 1111 est divisible par 11.
- 11111 est divisible par 41.
- 111111 est divisible par 3.

Exercice 3.32

$$46848 = 2^8 \times 3 \times 61$$
$$2379 = 3 \times 13 \times 61$$
$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$
$$2873 = 13^2 \times 17$$

Exercice 3.33

Pour k entier entre 2 et n, $n! + k$ est divisible par k.

Exercice 3.34

Les facteurs premiers de 210 sont 2, 3, 5 et 7. Si un entier n entre 10 et 120 est premier avec 210, alors il n'est divisible par aucun de ces facteurs premiers. Par la méthode du crible, on en déduit que n est premier.

Exercice 3.35

1. On écrit $a = 2^{a_2}3^{a_3}\cdots$ et $b = 2^{b_2}3^{b_3}\cdots$.
   Soit p un nombre premier divisant à la fois $a+b$ et ab, alors
   $$a_p + b_p \geq 1$$
   donc $p \mid a$ **ou** $p \mid b$.
   - Si $p \mid a$, alors $p \mid a+b-a = b$.
   - Si $p \mid b$, alors $p \mid a+b-b = a$.

   Donc $p \mid a$ **et** $p \mid b$.
2. Si a et b sont premier entre eux, alors ils ne partagent pas de facteur premier, donc $a+b$ et ab ne peuvent pas en partager non plus (par la première question), donc sont également premiers entre eux.

Exercice 3.36

1. Soit q impair (alors $(-1)^q = -1$), on a
   $$\begin{aligned}(x+1)\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k x^k &= \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k x^k \\ &= -\sum_{k=0}^{q}(-1)^k x^k + 1 + \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k x^k \\ &= x^q + 1\end{aligned}$$
2. On raisonne par contraposée. Supposons que m ai un facteur premier p différent de 2. Alors $m = pm'$ et p est impair, donc
   $$2^m + 1 = (2^{m'})^p + 1 = (2^{m'} + 1)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k (2^{m'})^k$$
   Donc $2^m + 1$ est divisible par $2^{m'} + 1$, donc n'est pas premier.
3. On calcule $65536 = 120 \times 641 + 154$. On calcule également
   $$2^{32} + 1 = (2^{16})^2 + 1 \equiv 154^2 + 1$$
   Or $154^2 = 23716 = 641 \times 36 + 640$ donc
   $$2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$$
   Donc $2^{32} + 1$ n'est pas premier.

Exercice 3.37

1. Commençons par montrer que a doit valoir 2. On remarque que

$$a^n - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

   Ainsi, si $a \neq 2$, alors $a - 1 \mid a^n - 1$, donc $a^n - 1$ n'est pas premier.
   Montrons maintenant que n doit être premier :
   - Si $n = 1$, alors $2^1 - 1 = 1$ et 1 n'est pas premier.
   - Si $n = kl$ est composé, alors

$$2^n - 1 = (2^k)^l - 1 = (2^k - 1)\sum_{n=0}^{l-1} 2^{kn}$$

     Comme $k \geq 1$, $2^k - 1 \mid 2^n - 1$, donc $2^n - 1$ n'est pas premier.
2. On sait que $2^5 = 32 \equiv 9 \pmod{23}$ et $2^6 = 64 \equiv 18 \pmod{23}$. Donc

$$2^{11} - 1 \equiv 18 \times 9 - 1 \equiv 163 \equiv 0 \pmod{23}$$

Exercice 3.38

1. Supposons que, pour tout nombre premier p, $n \mid v_p(a)$, alors il existe k_p tel que $v_p(a) = nk_p$, on pose alors

$$b = \prod_p p^{k_p}$$

   pour obtenir $a = b^n$.
   Supposons réciproquement que $a = b^n$. Alors pour p un nombre premier,

$$v_p(a) = nv_p(b)$$

   donc $n \mid v_p(a)$, pour tout nombre premier p.
2. Par la question précédente, si $a = b^2 = c^3$, alors, pour tout nombre premier p,

$$2 \mid v_p(a) \text{ et } 3 \mid v_p(a)$$

   donc

$$6 \mid v_p(a)$$

   donc a est une puissance sixième.
3. Comme ab est un carré, pour p un nombre premier, $2 \mid v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Comme a et b sont premier entre eux, on a

$$v_p(a) = 0 \quad \text{ou} \quad v_p(b) = 0$$

   donc $2 \mid v_p(a)$ ou $2 \mid v_p(b)$. Ceci valant pour tout nombre premier p, on obtient bien que a et b sont des carrés.

Exercice 3.39

1. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $n = p_1 \cdots p_k \equiv 3 \pmod{4}$ tel que $p_i \not\equiv 3 \pmod{4}$, alors $p_i \equiv 1 \pmod{4}$. Ainsi

$$n \equiv p_1 \cdots p_k \equiv 1 \pmod{4}$$

   d'où l'absurdité.
2. On a $4p_1 \cdots p_n \equiv 0 \pmod{4}$ donc $4p_1 \cdots p_n - 1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$.
3. Supposons par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini n de nombres premiers de la forme $4k-1$, que l'on note $p_1, \ldots, p_n$. Alors

$$N = 4p_1 \cdots p_n - 1 \equiv 3 \pmod{4}$$

   donc (par la première question) N admet un facteur premier de la forme $4k-1$. De plus, un tel facteur premier ne peut pas être l'un des p_n, car sinon il diviserait 1. On a donc atteint une contradiction, il doit ainsi y avoir une infinité de nombres premiers de la forme $4k-1$.