Mémoire de Master 1

David Kolar

Sous la direction de Vincent Beck

Catégories abéliennes – Théorème de Freyd-Mitchell

Sommaire

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de mémoire : Monsieur Vincent Beck, maître de conférence et membre de l'institut Denis Poisson, pour m'avoir guidé avec bienveillance dans ma découverte du monde catégorique et de la recherche en mathématiques.

Je remercie également particulièrement Monsieur Laurent Mazet, professeur de l'université de Tours et également membre de l'institut Denis Poisson, qui m'a orienté (à très juste titre) vers Vincent Beck.

Je remercie également l'équipe pédagogique de l'université de Tours, dont certains cours ont influencé ce mémoire, et dont les allusions à la théorie des catégories ont éveillé ma curiosité à ce sujet dès la Licence.

Mon parcours en mathématiques ayant commencé hors de l'université, il me faut également remercier chaleureusement mes deux professeurs de mathématiques en classes préparatoires : Monsieur Arnaud Souvay et Monsieur David Hézard, qui ont su enseigner l'art de la démonstration au novice en mathématiques que j'étais alors.

Enfin, je remercie ma famille : mon père, ma mère et ma soeur qui, bien que très éloignés des mathématiques, m'ont écouté toute l'année parler, parfois (trop ?) longuement, de ce non-sens abstrait. Et dont les questions m'ont souvent ammené à repenser mes intuitions et ma rédaction.

Introduction

L'étude et la pratique des mathématiques a tendance à se concentrer sur un type d'objets particulier, et sur le contenu d'un seul objet de ce type. Ce qui rend bien souvent le mathématicien aveugle aux propriétés de structure qui émergent de l'interaction entre différents objets.

La théorie des catégories fait un pas en arrière et contemple les mathématiques « de plus haut », de sorte à identifier ces propriétés de structure. Le cœur de la théorie est la catégorie : une classe d'objets de même type, connectés entre eux par des morphismes. De cette manière, la théorie des catégories met au premier plan les relations entre les objets et leur différentes compositions.

Un exemple très important de catégorie est la classe des groupes abéliens, considérés avec leurs homomorphismes. Cette catégorie présente de nombreuses propriétés utiles et sa généralisation, sous la forme des catégories abéliennes sera l'objet d'étude du résultat central de ce mémoire.

Évidemment, pas de généralisation sans compromis, l'étude des catégories abéliennes nous prive des détails internes aux objets que l'on manipule. Ce compromis est fort car la connaissance de ces détails ouvre souvent la voie à de nombreuses preuves catégoriques. Le théorème de plongement de Freyd-Mitchell nous permet de voir que la structure implicite imposée par les catégories abéliennes est suffisante pour traiter ces catégories de la même façon que si leurs objets avaient des éléments.

Les deux premières parties de ce mémoire couvriront les notions catégoriques nécessaires à l'introduction des catégories abéliennes et à leur étude. La troisième partie introduit les catégories abéliennes et les outils spécifiques nécessaires au théorème de plongement, qui est démontré au long de la quatrième partie. Enfin, la cinquième et dernière partie expose quelques conséquences du théorème de plongement en algèbre homologique.

Chapitre 1

Le langage des catégories

Ce premier chapitre introduit les concepts fondamentaux de la théorie des catégories que sont les catégories, les foncteurs et les transformations naturelles. Ces concepts ont été introduits par Saunders MacLane et Samuel Eilenberg en 1945 pour fournir une définition claire de la naturalité en mathématiques.

On définit ensuite la notion d'adjonction, centrale dans la théorie des catégories et introduite par Daniel Kan en 1958.

Enfin, on introduit la notion de foncteur représentable et on énonce puis démontre un premier résultat important de la théorie des catégories : le lemme de Yoneda.

1.1 Catégories

Définition 1.1.1 (Catégorie)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

- d'une classe d'objets : $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- d'une classe de morphismes pour chaque paire d'objets X, Y : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.
  On notera $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ *la classe de tous les morphismes de* $\mathcal{C}$;
- d'une identité pour chaque objet : $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$;
- d'une loi de composition

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

  telle que
  - $\forall f,\ g,\ h \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}), \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (associativité)
  - $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$ (élément neutre)

Notation

Par abus de notation, on notera $X \in \mathcal{C}$ plutôt que $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $f : A \to B \in \mathcal{C}$ plutôt que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Exemples

- **Ens** la catégorie des ensembles ;
- **Grp** la catégorie des groupes ;
- **Rng** la catégorie des anneaux unitaires ;
- **Top** la catégorie des espaces topologiques ;
- Pour un anneau A, la catégorie ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}$ des modules à gauche sur A, et la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbf{A}}$ des modules à droite.

Définition 1.1.2 (Catégorie discrète)

Une catégorie est dite discrète lorsque ses seuls morphismes sont les identités.

Définition 1.1.3 (Catégorie petite et localement petite)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite localement petite lorsque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un ensemble quels que soient X et Y.
Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite petite lorsque $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ est un ensemble.

Proposition 1.1.4

Une petite catégorie est localement petite.

Démonstration

C'est trivial par l'inclusion $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$.

Définition 1.1.5 (Sous-catégorie)

Une sous-catégorie $\mathcal{S}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et, pour tout $X, Y \in \mathcal{S}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Définition 1.1.6 (Sous-catégorie pleine)

Une sous-catégorie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ est dite pleine lorsque, pour tout $X, Y \in \mathcal{S}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Exemple

La catégorie usuelle **Ab** des groupes abéliens est une sous-catégorie pleine de **Grp**. En effet, tout morphisme de groupes entre groupes abéliens est un morphisme de groupes abéliens, et réciproquement, tout morphisme de groupes abéliens est un morphisme de groupes.

Définition 1.1.7 (Catégorie opposée)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La catégorie opposée ou duale $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est la catégorie ayant pour objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et comme morphismes

$$\forall X, Y \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

les identités et la compositions de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ sont induites par celles de $\mathcal{C}$.

Remarque

Il est clair que $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$. Cette dualité permettra de symétriser la plupart des résultats.

Définition 1.1.8 (Objet initial et final)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.
Un objet $I \in \mathcal{C}$ est dit initial si, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, il existe un unique morphisme de I dans X.
Un objet $F \in \mathcal{C}$ est dit final si, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, il existe un unique morphisme de X dans F.

Remarques

- Si une catégorie possède un objet initial, il est unique à unique isomorphisme près ;
- L'objet initial de $\mathcal{C}$ est final dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$

Définition 1.1.9 (Objet nul)

Un objet à la fois initial et final est dit nul.

Exemple

Un exemple classique est la catégorie **Rng**, dans laquelle $\mathbf{Z}$ est initial et $\{0\}$ est final.

Définition 1.1.10 (Monomorphisme, épimorphisme)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.
Un morphisme f_1 est un monomorphisme si, pour toute paire de morphismes g, h,

$$f_1 \circ g = f_1 \circ h \Rightarrow g = h$$

Un morphisme f_2 est un épimorphisme si, pour toute paire de morphismes g, h,

$$g \circ f_2 = h \circ f_2 \Rightarrow g = h$$

Exemple

Dans la catégorie **Ens**, les monomorphismes sont les applications injectives et les épimorphismes sont les application surjectives.

Remarque

Un monomorphisme de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ et inversement, ces deux notions sont duales.

Définition 1.1.11 (Isomorphisme)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
f est un isomorphisme lorsqu'il existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
Le morphisme g est alors unique, noté f^{-1}.

Exemple

Dans la catégorie **Ens**, les isomorphismes sont les applications bijectives.

Proposition 1.1.12

Un isomorphisme est un monomorphisme et un épimorphisme.

Démonstration

Soit $f : A \to B$ un isomorphisme.

- Soient $g,\ h : C \to A$ tels que $f \circ g = f \circ h$, alors $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h$, donc $g = h$.
  f est un monomorphisme.
- Soient $g,\ h : B \to C$ tels que $g \circ f = h \circ f$, alors $g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f \circ f^{-1}$, donc $g = h$.
  f est un épimorphisme.

Considérons l'injection $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ dans la catégorie **Rng**.

- C'est trivialement un monomorphisme ;
- Soient $R \in \mathbf{Rng}$ et $g_1, g_2 : \mathbf{Q} \rightrightarrows R$ distincts. Alors il existe $x \in \mathbf{Q}$ tel que

  $$g_1(x) \neq g_2(x)$$

  Ainsi, pour $n \in \mathbf{Z}$,

  $$g_1(nx) \neq g_2(nx)$$

  Or, au moins un des nx est dans $\mathbf{Z}$, donc $g_{1|\mathbf{Z}} \neq g_{2|\mathbf{Z}}$. Donc

  $$g_1 \neq g_2 \implies g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$$

  donc, par contraposée, f est un épimorphisme.
- Soit $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ un morphisme d'anneaux unitaires. Alors $g(1) = 1$, donc $g(2) = 2$. Soit $a = g\left(\frac{1}{2}\right)$. On a donc $2a = 1$. Donc a est racine dans $\mathbf{Z}$ de $2X - 1$. Ce polynôme n'admettant pas de racine entière, g n'existe pas.

Ainsi, f est un monomorphisme et un épimorphisme, mais pas un isomorphisme, puisqu'il ne peut pas exister g tel que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{Z}}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{Q}}$.

Remarque

Un isomorphisme de $\mathcal{C}$ est aussi un isomorphisme de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Définition 1.1.13 (Morphisme constant)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On dit que f est constant lorsque, pour tout morphismes $g, h : W \to X$,

$$f \circ g = f \circ h$$

Remarques

- On définit duellement les morphismes co-constants.
- Un morphisme à la fois constant et co-constant est dit nul.

Exemple

Dans la catégorie **Ens**, les morphismes constants sont les applications constantes.

Remarque

On dit qu'une catégorie a des morphismes nuls lorsque, pour tous objets X, Y et Z et tous morphismes f et g, il existe des morphismes nuls $0_{X,Y}$, $0_{Y,Z}$, $0_{X,Z}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "0_{X,Y}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "0_{X,Z}"] & Y \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "0_{Y,Z}"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Proposition 1.1.14

Une catégorie $\mathcal{C}$ avec un objet nul a des morphismes nuls.

Démonstration

Soit X, Y et Z trois objets de $\mathcal{C}$.
L'objet nul 0 de $\mathcal{C}$ est initial, donc il existe un morphisme $0 \to Y$. Il est également final, donc il existe $X \to 0$.
La composition de ces deux morphismes fait commuter le diagramme 1.1.
Ainsi, $\mathcal{C}$ a des morphismes nuls.

1.2 Foncteurs

Définition 1.2.1 (Foncteur covariant et contravariant)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée

- d'une application $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;
- pour tout objets X, Y de $\mathcal{C}$, d'une application $F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$

telles que

$$\forall X \in \mathcal{C}, \quad F[\mathrm{id}_X] = \mathrm{id}_{F(X)}$$
$$\forall f, g \in \mathcal{C}, \quad F[f \circ g] = F[f] \circ F[g]$$

Remarque

Un foncteur contravariant est un foncteur covariant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathcal{D}$.
Il associe donc à tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un morphisme $G[f] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(G(Y), G(X)\right)$.

Notation

Afin de mieux différencier l'application d'un foncteur à un objet ou à un morphisme, on utilisera les notations $F(X)$ pour un objet et $F[f]$ pour un morphisme.

Remarque

La classes des petites catégories forme une catégorie, notée **Cat**, les morphismes étant les foncteurs entre petites catégories.
$\mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$ n'étant pas un ensemble, **Cat** n'est pas petite, il n'y a donc pas de problème de définition.

Exemple

Un exemple classique est le foncteur identité, qui envoie chaque objet et chaque morphisme sur lui-même.

Remarque

Un foncteur préserve naturellement les isomorphismes.

Définition 1.2.2 (Foncteur conservatif)

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit conservatif si $f \in \mathcal{C}$ est un isomorphisme dès que $F[f] \in \mathcal{D}$ en est un.

Exemple

Le foncteur d'oubli **Grp** $\to$ **Ens** est conservatif car une bijection d'ensembles qui est un homomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.

Définition 1.2.3 (Foncteur plein, foncteur fidèle et foncteur pleinement fidèle)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur, soient X et Y dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
F induit une fonction

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(X), F(Y)\right)$$

On dit alors que F est

- fidèle si, pour tout objets X, Y dans $\mathcal{C}$, $F_{X,Y}$ est injective ;
- plein si, pour tout objets X, Y dans $\mathcal{C}$, $F_{X,Y}$ est surjective ;
- pleinement fidèle si, pour tout objets X, Y dans $\mathcal{C}$, $F_{X,Y}$ est bijective.

Exemple

Le foncteur d'oubli **Grp** $\to$ **Ens** est fidèle, car chaque morphisme de groupes est une application, mais pas plein, car il existe des applications qui ne sont pas des morphismes de groupes.

Le foncteur d'oubli **Ab** $\to$ **Grp** est pleinement fidèle, car chaque morphisme de groupes abéliens est un morphisme de groupes et tout morphisme entre groupes abéliens est un morphisme de groupes abéliens.

Proposition 1.2.4

Un foncteur pleinement fidèle est conservatif.

Démonstration

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ pleinement fidèle.
Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $F[f]$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$.
Alors il existe $g : F(Y) \to F(X) \in \mathcal{D}$ tel que

$$F[f] \circ g = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad g \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)}$$

Comme F est plein, il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que $g = F[h]$, donc

$$F[f \circ h] = F[f] \circ F[h] = \mathrm{id}_{F(X)} = F[\mathrm{id}_X] \qquad F[h \circ f] = F[h] \circ F[f] = \mathrm{id}_{F(Y)} = F[\mathrm{id}_Y]$$

Comme F est fidèle,

$$f \circ h = \mathrm{id}_X \qquad h \circ f = \mathrm{id}_Y$$

Donc f est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$.

1.3 Transformations naturelles

Définition 1.3.1 (Transformation naturelle)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Soient F et G deux foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$.
Une transformation naturelle η de F vers G est la donnée, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$ d'un morphisme

$$\eta_X : F(X) \to G(X)$$

tel que, pour tout objet Y et tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F[f]"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G[f]"] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Les applications η_X sont alors nommées composantes en X de η.

Notation

On note $\mathrm{Nat}(F,G)$ l'ensemble des transformations naturelles entre les foncteurs F et G.

Remarque

On peut également définir une transformation naturelle entre deux foncteurs contravariants, il suffit d'inverser le sens des flèches horizontales dans le diagramme.

Proposition 1.3.2 (Composition de transformations naturelles)

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories. Soient F, G et H trois foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$. Soient $\eta : F \to G$ et $\varepsilon : G \to H$ deux transformations naturelles.
Pour X et Y dans $\mathcal{C}$, on pose

$$(\varepsilon\eta)_X = \varepsilon_X \circ \eta_X$$

Alors, $\varepsilon\eta$ est une transformation naturelle.

Démonstration

Comme ε et η sont des transformations naturelles, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F[f]"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G[f]"] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "G[f]"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & G(Y) \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\ H(X) \arrow[r, "H[f]"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

commutent. Il en résulte la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F[f]"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G[f]"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & G(Y) \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\ H(X) \arrow[r, "H[f]"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

On en déduit ainsi la commutativité du diagramme final

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F[f]"] \arrow[d, "(\varepsilon\eta)_X"'] & F(Y) \arrow[d, "(\varepsilon\eta)_Y"] \\ H(X) \arrow[r, "H[f]"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Ce qui montre que $\varepsilon\eta$ est une transformation naturelle.

Remarque

On peut également définir la composition de transformations naturelles entre foncteurs contravariants, en inversant le sens des flèches horizontales dans la démonstration ci-dessus.

Définition 1.3.3 (Catégorie de foncteurs)

Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{D}$ une catégorie arbitraire. La catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ a

- Comme objets les foncteurs covariants $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$;
- Comme morphismes les transformations naturelles.

On la note $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$.

Définition 1.3.4 (Isomorphisme naturel)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Soient F et G deux foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$.
Un isomorphisme naturel η de F vers G est un isomorphisme dans la catégorie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ entre les objets F et G.

Remarque

Une transformation naturelle est un isomorphisme naturel si et seulement si chacune de ses composantes est un isomorphisme.

1.4 Foncteurs adjoints

Définition 1.4.1 (Foncteur Hom covariant)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $A \in \mathcal{C}$. On pose

$$\begin{array}{cccc} h_A & : & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Ens} \\ & & X \in \mathcal{C} & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ & & f : X \to Y & \mapsto & h_A[f] \end{array}$$

Avec $h_A[f]$ défini par, pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$,

$$h_A[f](g) = f \circ g$$

Remarque

On définit de façon analogue un foncteur Hom contravariant

$$\begin{array}{cccc} h^A & : & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Ens} \\ & & X \in \mathcal{C} & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \\ & & f : X \to Y & \mapsto & h^A[f] \end{array}$$

Avec $h^A[f]$ défini par, pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$,

$$h^A[f](g) = g \circ f$$

Définition 1.4.2 (Foncteur adjoint)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories localement petites. Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs.
On dit que G est adjoint à droite de F et que F est adjoint à gauche de G lorsqu'il existe un isomorphisme naturel Φ entre les foncteurs $\mathrm{Hom}(F(\cdot), \cdot)$ et $\mathrm{Hom}(\cdot, G(\cdot))$, tous deux allant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ vers **Ens**. Ainsi, pour tout objets $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \mathcal{D}$, $\Phi_{X,Y}$ est une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

On note alors $F \dashv G$.

Remarque

La naturalité de Φ a pour conséquence que, pour $r : F(X) \to Y$, $f : X' \to X$ et $g : Y \to Y'$,

$$\Phi_{X',Y'}(g \circ r \circ F(f)) = G(g) \circ \Phi_{X,Y}(r) \circ f$$

Définition 1.4.3 (Triplet adjoint)

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ trois foncteurs. On dit que (F,G,H) est un triplet adjoint, et on note $F \dashv G \dashv H$ lorsque $F \dashv G$ et $G \dashv H$.

Exemples

- Le foncteur d'oubli de **Ab** dans **Grp** est l'adjoint à droite du foncteur qui, à un groupe G, associe son abélianisé $G/[G,G]$.
- Le foncteur d'oubli de **Top** dans **Ens** a pour adjoint à droite le foncteur associant la topologie grossière et pour adjoint à gauche le foncteur associant la topologie discrète.
- Un exemple fondamental (et utile bien plus loin dans ce mémoire) est l'adjonction « tenseur-hom » :

$$\mathrm{Hom}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y,Z))$$

Définition 1.4.4 (Unité et co-unité d'une adjonction)

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs avec $F \dashv G$. Soit Φ l'isomorphisme naturel de cette adjonction. Pour $X \in \mathcal{C}$, l'image η_X de id_X par $\Phi_{X,F(X)}$ est un morphisme de X vers $GF(X)$.
La famille $(\eta_X)_{X \in \mathcal{C}}$ défini ainsi une transformation naturelle du foncteur identité vers GF, appelée unité de l'adjonction $F \dashv G$.
De même, la famille des images réciproques $(\Phi^{-1}_{G(Y),Y}(\mathrm{id}_Y))_{Y \in \mathcal{D}}$ définie la co-unité de $F \dashv G$, transformation naturelle de FG vers le foncteur identité.

1.5 Lemme de Yoneda et foncteurs représentables

Théorème 1.5.1 (Lemme de Yoneda)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $F : \mathcal{C} \to$ **Ens** un foncteur. Alors pour tout objet $A \in \mathcal{C}$,

$$\mathrm{Nat}(h_A, F) \simeq F(A)$$

De plus, cet isomorphisme est naturel en A et en F.

Démonstration

Soit ϕ une transformation naturelle de h_A sur F. Par naturalité, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
h_A(A) \arrow[rrr, "h_A[f]"'] \arrow[ddd, "\phi_A"] & & & h_A(X) \arrow[ddd, "\phi_X"] \\
& \mathrm{id}_A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f \arrow[d, mapsto] & \\
& u \arrow[r, mapsto] & F[f](u) = \phi_X(f) & \\
F(A) \arrow[rrr, "F[f]"] & & & F(X)
\end{tikzcd}$$

Ainsi, ϕ est effectivement entièrement déterminé par $u = \phi_A(\mathrm{id}_A)$ puisqu'on a $\phi_X(f) = F[f](u)$.
De plus, chaque élément $u \in F(A)$ défini de cette manière une transformation naturelle.

Remarques

- Ce théorème se dualise avec l'isomorphie $\mathrm{Nat}(h^A, G) \simeq G(A)$ pour un foncteur contravariant G.
- Une formulation équivalente est que le foncteur (contravariant)

$$\begin{array}{cccc} h_- & : & \mathcal{C} & \to & [\mathcal{C}, \mathbf{Ens}] \\ & & A & \mapsto & h_A \end{array}$$

  est pleinement fidèle.
- De même, le foncteur (covariant)

$$\begin{array}{cccc} h^- & : & \mathcal{C} & \to & [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ens}] \\ & & A & \mapsto & h^A \end{array}$$

  est pleinement fidèle. On le nomme plongement de Yoneda.
- En particulier

$$\mathrm{Nat}(h_A, h_B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$$

$$\mathrm{Nat}(h^A, h^B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

Définition 1.5.2

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est dit représentable lorsqu'il existe un objet $A \in \mathcal{C}$ tel que F soit naturellement isomorphe à h_A.
Une représentation de F est un couple (A, ϕ) avec $A \in \mathcal{C}$ et ϕ un isomorphisme naturel entre F et h_A.

Remarque

On peut également définir la représentabilité d'un foncteur contravariant.

Proposition 1.5.3

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur représentable.
Alors sa représentation est unique à unique isomorphisme près.

Démonstration

Soient (X, ϕ) et (Y, ψ) deux représentations de F. On a

$$h_X \overset{\phi^{-1}}{\simeq} F \overset{\psi}{\simeq} h_Y$$

Ainsi, $\omega = \psi \circ \phi^{-1}$ est un isomorphisme naturel de h_X vers h_Y. Comme le plongement de Yoneda est pleinement fidèle et conservatif, il existe un isomorphisme de Y vers X.

Chapitre 2

Constructions catégoriques

2.1 Limites et co-limites

Remarque

Formellement, un diagramme de forme J dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : J \to \mathcal{C}$.

Définition 2.1.1 (Cône)

Un cône de sommet $N \in \mathcal{C}$ et de base $F : J \to \mathcal{C}$ est une transformation naturelle du foncteur constant $N : J \to \mathcal{C}$ vers le foncteur F.

Remarques

- J est appelée catégorie indice du cône de sommet N et de base F.
- Le cône est dit fini (resp. petit) lorsque la catégorie indice J est finie (resp. petite).

Définition 2.1.2 (Foncteur cône)

Soient J une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $F : J \to \mathcal{C}$ un diagramme. On définit le foncteur contravariant

$$\mathrm{Cone}(\cdot, F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$$

en associant à chaque objet A l'ensemble des cônes de sommet A et de base F.

Définition 2.1.3 (Limite)

Soit $F : J \to \mathcal{C}$ un diagramme. Une limite de F est une représentation du foncteur $\mathrm{Cone}(\cdot, F)$.
C'est à dire un objet $\lim F$ et un cône $\lambda : \lim F \to F$ qui, par le lemme de Yoneda définissent un isomorphisme naturel

$$\alpha : \mathrm{Cone}(\cdot, F) \simeq h^{\lim F}$$

Remarques

- $\lim F$ est appelée "limite de F" ;
- La limite d'un cône fini (resp. petit) est dite finie (resp. petite).

Remarques

- On définit duellement la notion de co-cône de sommet N et de base F comme transformation naturelle $\lambda : F \to N$.
- On peut ainsi définir le foncteur $\mathrm{Cone}(F, \cdot)$ et la co-limite comme représentation de ce foncteur, notée $\operatorname{colim} F$.

Exemples

- La limite du diagramme vide est un objet L tel que tout objet $N \in \mathcal{C}$ possède un unique morphisme vers L, c'est précisément la définition de l'objet final de $\mathcal{C}$, lorsque ce dernier existe.
- De même, la co-limite du diagramme vide est l'objet initial de $\mathcal{C}$, lorsqu'il existe.

Proposition 2.1.4 (Unicité de la limite)

Soit $F : J \to \mathcal{C}$ un diagramme. Si F admet une limite, alors celle ci est unique à isomorphisme près.

Démonstration

Cette proposition découle directement de l'unicité de la représentation.

Remarques

- On parle ici d'universalité : unicité à unique isomorphisme près.
- Cette universalité justifie l'expression "la limite de F" utilisée plus haut.

Remarque

On démontre de la même façon que la co-limite est universelle.

Notation

Lorsque la catégorie indice est dénombrable, on n'explicitera pas le foncteur F, on notera simplement X_i ses images.

Théorème 2.1.5 (Les foncteurs Hom préservent les limites)

Soit $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ un diagramme d'une catégorie $\mathcal{C}$ admettant une limite dans $\mathcal{C}$. Pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$,

$$h_Y(\lim X_i) \simeq \lim h_Y(X_i)$$

Autrement dit, les foncteurs hom préservent les limites.

Démonstration

Par définition de la limite, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & \lim X_i \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] & & X_j \end{tikzcd}$$

Soit $(A, (p_i))$ le cône associé au foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I} & \to & \mathbf{Ens} \\ i & \mapsto & h_Y(X_i) \\ f_{ij} & \mapsto & h_Y[f_{ij}] \end{array}$$

On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ h_Y(X_i) \arrow[rr, "h_Y[f_{ij}]"'] & & h_Y(X_j) \end{tikzcd}$$

Pour montrer que $\mathrm{Hom}(Y, \lim X_i) = \lim \mathrm{Hom}(Y, X_i)$, il suffit de montrer qu'il existe un unique morphisme $p : A \to \mathrm{Hom}(Y, \lim X_i)$ faisant commuter

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "p"] \arrow[ddl, "p_i"'] \arrow[ddr, "p_j"] & \\ & h_Y(\lim X_i) \arrow[dl, "h_Y[\pi_i]"'] \arrow[dr, "h_Y[\pi_j]"] & \\ h_Y(X_i) \arrow[rr, "h_Y[f_{ij}]"'] & & h_Y(X_j) \end{tikzcd}$$

Par construction, pour $a \in A$, on a le diagramme commutatif suivant, qui nous permet de construire p par propriété universelle de la limite, qui assure au passage son unicité.

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, dashed, "p(a)"] \arrow[ddl, "p_i(a)"'] \arrow[ddr, "p_j(a)"] & \\
& \lim X_i \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\
X_i \arrow[rr, "f_{ij}"] & & X_j
\end{tikzcd}$$

Ainsi, on a bien

$$h_Y(\lim X_i) \simeq \lim h_Y(X_i)$$

Corollaire 2.1.6

Soit $F \dashv G$ une adjonction, alors G préserve les limites.

Démonstration

Par le théorème précédent, et par définition de l'adjonction, pour un diagramme (X_i) admettant une limite et un objet Y,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(Y, G(\lim X_i)) &\simeq \mathrm{Hom}(F(Y), \lim X_i) \\
&\simeq \lim \mathrm{Hom}(F(Y), X_i) \\
&\simeq \lim \mathrm{Hom}(Y, G(X_i)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(Y, \lim G(X_i))
\end{aligned}$$

Par le lemme de Yoneda, cet isomorphisme $\mathrm{Hom}(Y, G(\lim X_i)) \simeq \mathrm{Hom}(Y, \lim G(X_i))$ correspond à un isomorphisme $G(\lim X_i) \simeq \lim G(X_i)$.

Remarque

Duellement, les foncteur hom contravariant préservent les co-limites, ainsi que les adjoints à gauche.

2.2 Produits et co-produits

Définition 2.2.1 (Produit)

Un produit est une limite dont la catégorie indice est discrète.

Remarque

Duellement, un co-produit est une co-limite de catégorie indice discrète.

Notations

- On note $A \times B$ le produit de deux objets et $A + B$ leur co-produit.
- Lorsque l'on fait le produit (resp. co-produit) de plus de deux objets, on utilise le symbole $\prod$ (resp. $\coprod$).
- On note π_A la projection canonique de $A \times B$ sur A, et ι_A l'injection canonique de A dans $A + B$.

2.3 Égaliseurs et co-égaliseurs

Définition 2.3.1 (Égaliseur)

Un égaliseur est une limite indexée par une catégorie à deux objets et deux morphismes parallèles : $\bullet \rightrightarrows \bullet$.

Remarque

Duellement, un co-égaliseur est une co-limite d'un diagramme de la forme $\bullet \rightrightarrows \bullet$.

Notations

- On note $\mathrm{eq}(f,g)$ l'égaliseur de f et g, on a donc $\mathrm{eq}(f,g) \to A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$.
- On note $\mathrm{coeq}(f,g)$ le co-égaliseur de f et g, on a donc $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \to \mathrm{coeq}(f,g)$.

2.4 Noyaux et co-noyaux

Définition 2.4.1 (Noyau)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec des morphismes nuls. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Le noyau de f est l'égaliseur de f et du morphisme nul $0_{X,Y}$.
Plus explicitement, on appelle "candidat noyaux" un couple (K,k) tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & \\
K \arrow[u, "k"] \arrow[r, "0"] & Y
\end{tikzcd}$$

le noyau est le candidat K faisant commuter le diagramme suivant pour tout autre candidat H

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "f"] & \\
& K \arrow[u, "k"] \arrow[r, "0"] & Y \\
H \arrow[uur, bend left, "h"] \arrow[ur, dashed, "u"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Remarque

On identifie souvent (dans le cas d'une catégorie concrète) K à un sous-ensemble de X et le morphisme k est alors une injection.

Remarque

La construction duale est le co-noyau, et fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "k"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "0"'] & K
\end{tikzcd}$$

Notation

On note $\ker(f)$ le noyau de f et $\mathrm{coker}(f)$ son co-noyau.

Proposition 2.4.2 (Noyau d'un monomorphisme)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un objet nul 0. Soit $f : A \hookrightarrow B$ un monomorphisme de $\mathcal{C}$. Alors $\ker(f) = 0$.

Démonstration

On a bien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ 0 \arrow[u, "0"] \arrow[r, "0"] & Y \end{tikzcd}$$

Et, par finalité de 0, pour tout candidat noyau H,

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ & 0 \arrow[u, "0"] \arrow[r, "0"] & Y \\ H \arrow[uur, bend left, "h"] \arrow[ur, "0"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

Ainsi, $f \circ h = 0 = f \circ 0$, comme f est un monomorphisme, $h = 0$.
Donc 0 est l'unique morphisme de H dans 0. Donc $\ker(f) = 0$.

Remarque

Duellement, le co-noyau d'un épimorphisme est nul.

Proposition 2.4.3

Dans une catégorie avec des morphismes nuls, le noyau d'un monomorphisme est un objet final.

Démonstration

Soit $\ker(f) \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$ un noyau de monomorphisme. On a $f \circ i = 0$. Or $f \circ 0 = 0$ donc, puisque f est un monomorphisme, $i = 0$.
Soit $H \overset{0}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \ker(f)$. Alors $f \circ i \circ g = f \circ i \circ 0$, donc $i \circ g = i \circ 0$. Comme i est un noyau, c'est un monomorphisme, donc $g = 0$.
Ainsi, 0 est l'unique morphisme entre H et $\ker(f)$, qui est donc final.

Lemme 2.4.4

Le noyau d'un morphisme nul est l'identité.

Démonstration

- On a bien $A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \xrightarrow{0} B = 0$;
- Pour $K \xrightarrow{k} A$ tel que $k \circ 0 = 0$, on a bien

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \xrightarrow{0} B = 0$$

D'où le résultat.

Remarque

Duellement, le co-noyau d'un morphisme identité est nul.

2.5 Produits fibrés et sommes amalgamées

Définition 2.5.1 (Produit fibré)

Un produit fibré est une limite de forme $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$.

Remarque

Duellement, une somme amalgamée est une limite de forme $\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$.

Chapitre 3

Théorie des catégories abéliennes

Les chapitres précédents ont introduit suffisamment d'élémets de langage catégorique pour enfin arriver au vrai sujet de ce mémoire : les catégories abéliennes.

Ce type de catégorie a été introduit par Alexandre Grothendieck (on en trouve les prémices dans les travaux de Buchsbaum sous le nom de catégories exactes) afin de généraliser certains résultats de la catégorie **Ab** des groupes abéliens, et ainsi d'unifier les différentes théories de cohomologie.

On définit d'abord les catégories abéliennes de la façon dont elles ont été introduites initialement par Peter Freyd, puis on montre que la définition moderne est équivalente.

3.1 Groupes abéliens

La notion de groupes abélien est assez centrales dans ce mémoire, il convient donc d'en rappeler quelques propriétés dans le contexte des catégories.

Un groupe abélien est un groupe commutatif, ainsi, tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué. En particulier, pour un morphisme $f : X \to Y$ de groupes abéliens, $\mathrm{im}(f)$ est un sous-groupe distingué de Y, donc le quotient $Y/\mathrm{im}(f)$ est bien défini, c'est même le co-noyaux de f.

Ainsi, comme un monomorphisme a un noyau nul, les monomorphismes sont exactement les morphismes de groupes injectifs, de même, un co-noyau nul implique que les épimorphismes sont exactement les morphismes surjectifs.

Les isomorphismes étant des morphismes bijectifs, un morphisme à la fois monomorphe et épimorphe est un isomorphisme.

3.2 Définitions

Définition 3.2.1 (Catégorie abélienne)

Une catégorie $\mathcal{A}$ est abélienne lorsque

1. Elle possède un objet nul ;
2. Chaque paire d'objets a un produit et un co-produit ;
3. Chaque morphisme a un noyau et un co-noyau ;
4. Les monomorphismes sont tous des noyaux et les épimorphismes des co-noyaux.

Comme énoncé plus haut, les catégories abéliennes généralisent les propriétés de la catégorie **Ab**, et en effet

Proposition 3.2.2

Ab est une catégorie abélienne.

Démonstration

Le groupe trivial est l'objet nul, les produits cartésiens et sommes directes, avec leurs morphismes respectifs font office de produits et co-produits, les noyaux sont définis algébriquement et le co-noyau d'un morphisme $f : X \to Y$ est le quotient $Y/\mathrm{im}(f)$. Un monomorphisme est le noyau de son co-noyau et un épimorphisme est le co-noyau de son noyau.

De même, une catégorie très importante pour ce mémoire est la catégorie ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ des R-modules à gauche, avec R un anneau unitaire.

Proposition 3.2.3

La catégorie ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ est abélienne.

Démonstration

Le module nul est l'objet nul, les noyaux et co-noyaux sont contruits comme dans **Ab**, les produits et somme directes font office de produits et co-produits. Un monomorphisme est le noyau de son co-noyau et un épimorphisme est le co-noyau de son noyau.

Ce chapitre est essentiellement dédié à montrer que les contraintes de la définition de Freyd sont suffisantes pour retrouver la définition moderne, que voici :

Définition 3.2.4

Une catégorie est abélienne lorsque

1. Pour toute paire d'objets X et Y, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est un groupe abélien ;
2. La composition est bilinéaire ;
3. Tout morphisme admet un noyau et un co-noyau ;
4. Pour tout morphisme $f : X \to Y$, $X/\ker f \simeq \mathrm{im}\, f$.

3.3 Généralités sur les catégories abéliennes

On commence par définir les notions de sous-objet et de quotient, duales l'une de l'autre.

Définition 3.3.1 (Monomorphisme contenu, sous-objet)

On dit que le monomorphisme $A_1 \to B$ est contenu dans le monomorphisme $A_2 \to B$ lorsqu'il existe un morphisme $A_1 \to A_2$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\
 & B \\
A_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Si $A_1 \to B$ et $A_2 \to B$ sont tous deux contenus l'un dans l'autre, alors ils sont dit équivalents, la classe d'équivalence ainsi définie est un sous-objet de B.

Définition 3.3.2 (Épimorphisme contenant, quotient)

On dit que l'épimorphisme $A \to B_1$ contient l'épimorphisme $B \to B_2$ lorsqu'il existe un morphisme $B_2 \to B_1$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
 & B_1 \\
A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & B_2 \arrow[uu, dashed]
\end{tikzcd}$$

Si $A \to B_1$ et $A \to B_2$ sont tous deux contenus l'un dans l'autre, alors ils sont dit équivalents, la classe d'équivalence ainsi définie est un quotient de A.

Théorème 3.3.3

Si le monomorphisme $A_1 \to B$ est contenu dans le monomorphisme $A_2 \to B$, alors le morphisme qui complète le diagramme est un monomorphisme, il est de plus unique.

Démonstration

Comme $A_1 \to B$ est un monomorphisme, $A_1 \to A_2 \to B$ aussi, donc $A_1 \to A_2$ est un monomorphisme. Supposons qu'il existe deux morphismes $f, g : A_1 \rightrightarrows A_2$, alors

$$A_1 \xrightarrow{f} A_2 \to B = A_1 \xrightarrow{g} A_2 \to B$$

Comme $A_2 \to B$ est un monomorphisme, on a $f = g$.

Remarque

Duellement, si l'épimorphisme $A \to B_1$ est contenu dans $A \to B_2$, alors le morphisme qui complète le diagramme est un épimorphisme qui est unique.

Théorème 3.3.4

Si $E \to A$ est l'égaliseur de $f, g : A \rightrightarrows B$, alors $E \to A$ est un monomorphisme et tout autre sous-objet $S \to A$ égalisant f et g est contenu dans $E \to A$.

Démonstration

Soient $h, i : C \rightrightarrows E$ tels que $C \xrightarrow{h} E \to A = C \xrightarrow{i} E \to A$.

Comme $E \to A$ égalise $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$,

$$C \xrightarrow{i} E \to A \xrightarrow{f} B = C \xrightarrow{i} E \to A \xrightarrow{g} B$$

Donc $C \xrightarrow{i} E \to A$ et $C \xrightarrow{h} E \to A$ égalisent $A \rightrightarrows B$. Donc $h = i$ et $E \to A$ est un monomorphisme.

Supposons maintenant que $S \to A$ égalise $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$. Alors par définition d'un égaliseur, $S \to A$ se factorise par $E \to A$ donc il existe un morphisme tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\
& A \\
E \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ce qui conclut.

Remarque

De même, si $B \to E$ est le co-égaliseur de $f, g : A \rightrightarrows B$, alors $B \to E$ est un épimorphisme et tout autre quotient $B \to Q$ co-égalisant f et g contient E.

Définition 3.3.5 (Catégorie complète)

Une catégorie est dite

Complète à gauche lorsqu'elle admet tous les égaliseurs et produits (arbitraires) ;

Complète à droite lorsqu'elle admet tous les co-égaliseurs et co-produits (arbitraires) ;

Complète lorsqu'elle est complète à gauche et à droite.

Proposition 3.3.6

La catégorie **Ab** est complète.

Démonstration

En tant que catégorie abélienne, elle admet tous les égaliseurs et co-égaliseurs. Les produits cartésiens et sommes directes font office de produits et co-produits.

Définition 3.3.7

Pour un objet A, on considère S la collection de ses sous-objets et Q la collection de ses quotients. On définit alors les applications $\ker : Q \to S$ qui à chaque quotient associe son noyau et $\mathrm{coker} : S \to Q$ qui à chaque sous-objet associe son co-noyau.

Proposition 3.3.8

Dans une catégorie abélienne, ker et coker sont mutuellement inverses.

Démonstration

Soit $A \xrightarrow{m} B$ un monomorphisme. Alors il existe $B \xrightarrow{f} C$ dont le noyau est $A \xrightarrow{m} B$. Par définition du co-noyau, il existe un morphisme $\mathrm{coker}(m) \to C$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & C \\
B \arrow[ur, "f"] \arrow[r] & \mathrm{coker}(m) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Comme $A \xrightarrow{m} B \to \mathrm{coker}(m) = 0$, par définition du noyau, il existe un morphisme $A \to \ker(\mathrm{coker}(m))$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d] \arrow[dr, "m"] & \\
\ker(\mathrm{coker}(m)) \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

On a alors

$$\ker(\mathrm{coker}(m)) \to B \xrightarrow{f} C = \ker(\mathrm{coker}(m)) \to B \to \mathrm{coker}(m) \to C = 0$$

donc, comme $A \xrightarrow{m} B$ est le noyau de $B \to C$, il existe un morphisme $\ker(\mathrm{coker}(m)) \to A$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\ker(\mathrm{coker}(m)) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
A \arrow[r, "m"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ainsi, $A \xrightarrow{m} B$ et $\ker(\mathrm{coker}(m)) \to B$ sont deux sous-objets équivalents de B, donc $\ker \circ \mathrm{coker}$ est l'identité sur S.
Duellement, $\mathrm{coker} \circ \ker$ est l'identité sur Q, d'où le résultat.

Théorème 3.3.9 (Isomorphismes dans une catégorie abélienne)

Dans une catégorie abélienne, un morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme.

Démonstration

Soit $f : A \to B$ à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. Alors $\ker(f) = \mathrm{coker}(f) = 0$.

Le noyau de $B \to 0$ est id_B. Comme $A \xrightarrow{f} B$ est un sous-objet de B, par la proposition précédente, $A \xrightarrow{f} B$ est le noyau de $B \to 0$.
Ainsi, il existe un isomorphisme $g : A \to B$ tel que $f = \mathrm{id}_B \circ g = g$, donc f est un isomorphisme.

La relation d'inclusion des monomorphismes induit un ordre partiel sur les sous-objets d'un objet B.

Définition 3.3.10

On nomme <u>intersection</u> de deux sous-objets leur plus grand sous-objet inférieur commun.
On note $A_1 \cap A_2$ l'intersection de A_1 et A_2.

Théorème 3.3.11

Une catégorie abélienne admet toutes les intersections.

Démonstration

Soient $A_1 \to B$ et $A_2 \to B$ deux sous-objets. On pose $C = \mathrm{coker}(A_1 \to B)$ et $K = \ker(A_2 \to B \to C)$. On a alors

$$K \to A_2 \to B \to C = 0$$

Comme $\ker \circ \mathrm{coker} = \mathrm{id}_S$, $A_1 \to B = \ker(B \to C)$ donc $K \to A_2 \to B$ se factorise par $A_1 \to B$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d] \\
A_2 \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

De plus, pour toute paire de morphismes $H \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} K$ telle que $H \overset{h_1}{\underset{h_2}{\rightrightarrows}} K \to A_1$ commute,

$$H \xrightarrow{h_1} K \to A_1 \to B \to C = H \xrightarrow{h_1} K \to A_2 \to B \to C = 0$$

et

$$H \xrightarrow{h_2} K \to A_1 \to B \to C = H \xrightarrow{h_2} K \to A_2 \to B \to C = 0$$

Donc $H \xrightarrow{h_1} K \to A_1 \to B \to C = H \xrightarrow{h_2} K \to A_1 \to B \to C$, donc $K \to A_1 \to B \to C$ est un monomorphisme, donc $K \to A_1$ en est un.
Donc K est un sous-objet de A_1. Par la propriété universelle du noyau, K est le produit fibré de A_1 et A_2, donc K est le plus grand sous-objet commun à A_1 et A_2, leur intersection.

Remarque

Duellement, on définit la <u>réunion</u> de deux sous-objets comme leur plus petit sous-objet supérieur commun (notée $A_1 \cup A_2$), et une catégorie abélienne admet toutes les réunions.

Notation

On introduit la notation vectorielle ligne des morphismes pour simplifier l'écriture des prochaines preuves.
Pour $f : A \to A$ et $g : A \to B$ dans une catégorie abélienne, on note $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : A \to A \oplus B$ le morphisme faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}"] & \\
A \arrow[dr, "\iota_A"'] & & B \arrow[dl, "\iota_B"] \\
& A \oplus B &
\end{tikzcd}$$

On introduit également la notation vectorielle colonne, faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& A & \\
A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "g"'] \\
& A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[uu, "\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}"] &
\end{tikzcd}$$

Ces deux notations sont duales.

Théorème 3.3.12

Une catégorie abélienne admet tous les égaliseurs.

Démonstration

Soit $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$. On a $\pi_A \circ \begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ f \end{pmatrix} = \pi_A \circ \begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ g \end{pmatrix} = \mathrm{id}_A$. Donc $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ f \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ g \end{pmatrix}$ sont des monomorphismes donc des sous-objets de $A \times B$. On note K leur intersection, on a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "k_2"'] & A \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ f \end{pmatrix}"] \\ A \arrow[r, "\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ g \end{pmatrix}"'] & A \times B \end{tikzcd}$$

La commutativité assure que $k_1 = k_2 = k$, donc

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ f \end{pmatrix}} A \times B \xrightarrow{\pi_A} A = K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ g \end{pmatrix}} A \times B \xrightarrow{\pi_A} A$$

De même

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ f \end{pmatrix}} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B = K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ g \end{pmatrix}} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$$

Donc

$$K \xrightarrow{k} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

commute. Soit $H \xrightarrow{h} A$ égalisant f et g, alors

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ g \end{pmatrix} \circ h = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ f \end{pmatrix} \circ h$$

Par la propriété universelle du produit fibré, h se factorise de façon unique par K, qui est donc l'égaliseur de f et g.

Remarque

Duellement, une catégorie abélienne admet tout les co-égaliseurs.

Théorème 3.3.13

Une catégorie abélienne admet tout les produit fibrés.

Démonstration

Soit $A \to C \leftarrow B$. On considère $K \xrightarrow{k} A \times B$ l'égaliseur de $A \times B \xrightarrow{\pi_A} A \to C$ et $A \times B \xrightarrow{\pi_B} B \to C$.
On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"'] & A \times B \arrow[r, "\pi_A"] & A \arrow[d] \\ A \times B \arrow[r, "\pi_B"'] & B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Ainsi, le diagramme suivant est également commutatif

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle de l'égaliseur, K est le produit fibré de A et B.

Remarque

Duellement, une catégorie abélienne admet toutes les sommes amalgamées.

Définition 3.3.14 (Sous-objet acceptant)

On dit qu'un monomorphisme $B \to C$ accepte $A \to C$ lorsque $A \to B \to C = A \to C$.

Définition 3.3.15 (Quotient)

On dit qu'un épimorphisme $B \to C$ est un quotient de $A \to B$ lorque $A \to B \to C = 0$.

Lemme 3.3.16

Un sous-objet $B \xrightarrow{m} C$ accepte $A \to C$ si et seulement si $\mathrm{coker}(B \to C)$ en est un quotient.

Démonstration

Sens direct : Supposons que $B \xrightarrow{m} C$ accepte $A \to C$, alors les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr] & \\ B \arrow[r, "m"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{coker}(m) \\ B \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "m"'] & C \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On a donc $A \to C \to \mathrm{coker}(m) = A \to B \xrightarrow{m} C \to \mathrm{coker}(m) = A \to B \to 0 \to \mathrm{coker}(m) = 0$.
Donc $\mathrm{coker}(m)$ est un quotient de $A \to C$.

Sens réciproque : Supposons que $\mathrm{coker}(m)$ soit un quotient de $A \to C$. On a $B \to C = \ker(\mathrm{coker}(B \to C))$.
Par hypothèse $A \to C \to \mathrm{coker}(m) = 0$, donc $A \to C$ se factorise par $B \to C$ et le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr] & \\ B \arrow[r, "m"'] & C \end{tikzcd}$$

Donc $B \to C$ accepte $A \to C$.

Définition 3.3.17 (Image d'un morphisme)

L'image d'un morphisme $A \xrightarrow{f} B$ est le noyau de son co-noyau. On le note $\mathrm{im}(f)$.

Remarque

Duellement, on définit la co-image, et on a $\mathrm{coim}(f) = \mathrm{coker}(\ker(f))$.

Proposition 3.3.18 (Caractérisation des épimorphismes et monomorphismes)

Dans une catégorie abélienne, les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $A \xrightarrow{f} B$ est un épimorphisme ;

(ii) $\mathrm{im}(f) = B$;

(iii) $\mathrm{coker}(f) = 0$.

Démonstration

(ii)⇒(i) : Supposons $\mathrm{im}(f) = B$. Soient $g, h : B \rightrightarrows C$ tels que

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C = A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C$$

alors f se factorise par $\mathrm{eq}(g, h) \to B$.

Comme $\mathrm{eq}(g, h)$ est un sous-objet de B qui contient f, il contient également $B \xrightarrow{\mathrm{id}} B$. Or $\mathrm{im}(f) = B$ est le plus petit sous-objet contenant f, donc il est contenu dans $\mathrm{eq}(g, h)$. Ainsi, $\mathrm{eq}(g, h) \to B = \mathrm{id}_B$ donc $g = h$ donc f est un épimorphisme.

(i)⇒(iii) : a été montrée précédemment, dans la deuxième partie.

(iii)⇒(ii) : a également été montrée en deuxième partie.

Remarque

Duellement, dans une catégorie abélienne, les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $A \xrightarrow{f} B$ est un monomorphisme ;

(ii) $\mathrm{coim}(f) = A$;

(iii) $\ker(f) = 0$.

Théorème 3.3.19 (Factorisation par l'image)

Soit $f : A \to B$ un morphisme dans une catégorie abélienne. Alors la factorisation $A \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{im}(f)$ est un épimorphisme.

Démonstration

Par la proposition précédente, il suffit de montrer que son co-noyau est nul.

Supposons par l'absurde que le co-noyau C de $\tilde{f}$ est non-nul. On pose alors $K \to \mathrm{im}(f) = \ker(\mathrm{im}(f) \to C)$.

Puisque $A \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{im}(f) \to C = 0$, $A \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{im}(f)$ se factorise par $K \to \mathrm{im}(f)$.
Si $K \to \mathrm{im}(f)$ était un épimorphisme, alors $\mathrm{im}(f) \to C = 0$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, $K \to \mathrm{im}(f)$ n'est pas un épimorphisme, c'est donc un monomorphisme et pas un isomorphisme.
Puisque $\mathrm{im}(f) \to B$ est un monomorphisme, $K \to \mathrm{im}(f) \to B$ est un monomorphisme, donc K est un sous-objet de B. C'est même un sous-objet acceptant $A \to B$, donc on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] & \mathrm{im}(f) \arrow[d] \\
\mathrm{im}(f) \arrow[u] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

On a donc

$$\mathrm{im}(f) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{im}(f) \to B = \mathrm{im}(f) \to K \to \mathrm{im}(f) \to B$$

Comme $\mathrm{im}(f) \to B$ est un monomorphisme, $\mathrm{im}(f) \to K \to \mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{im}(f)$.
Donc $K \to \mathrm{im}(f)$ est un épimorphisme.

Ceci contredit l'hypothèse de départ, donc $\mathrm{coker}(f) = 0$, donc $A \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{im}(f)$ est un épimorphisme.

Remarque (Factorisation par la co-image)

Duellement au théorème précédent, pour $f : A \to B$ dans une catégorie abélienne, $\mathrm{coim}(f) \to B$ est un monomorphisme.

3.4 Suites exactes

Les catégories abéliennes fournissent un cadre idéal pour l'étude des suites exactes, aussi convient-il des les introduire et de montrer quelques résultats qui seront mis à profit dans toute la suite de ce mémoire.

Définition 3.4.1 (Suite exacte)

Une suite exacte est une famille de morphismes (f_i) tels que $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{im}(f_i)$

$$\dots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \dots$$

Les suites exactes apparaissent naturellement dans de nombreux contextes, au-delà même du cadre de ce mémoire, on donne donc des conditions équivalente à l'exactitude d'une suite.

Proposition 3.4.2

Dans une catégorie abélienne avec des morphismes $A \to B \to C$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{im}(A \to B) = \ker(B \to C)$ (donc $A \to B \to C$ est exacte) ;

(ii) $\mathrm{coker}(A \to B) = \mathrm{coim}(B \to C)$;

(iii) $A \to B \to C = 0$ et $\ker(B \to C) \to B \to \mathrm{coker}(A \to B) = 0$.

Démonstration

(i)⇔(ii) : ces deux assertions sont duales.

(i)⇒(iii) : Par définition de l'image, on a la factorisation

$$A \to B = A \to \mathrm{im}(A \to B) \to B = A \to \ker(B \to C) \to B$$

Donc
$$A \to B \to C = A \to \ker(B \to C) \to B \to C = 0$$

On a également, par définition de l'image, $\ker(B \to C) = \mathrm{im}(A \to B) = \ker(B \to \mathrm{coker}(A \to B))$, donc
$$\ker(B \to C) \to B \to \mathrm{coker}(A \to B) = 0$$

(iii)⇒(i) : Puisque $\ker(B \to C) \to B \to \mathrm{coker}(A \to B) = 0$, $\ker(B \to C) \to B$ se factorise par $\mathrm{im}(A \to B) \to B$. Comme $A \to B \to C = 0$, $B \to \mathrm{coker}(A \to B) \to C = B \to C$. Ainsi

$$\mathrm{im}(A \to B) \to B \to C = \mathrm{im}(A \to B) \to B \to \mathrm{coker}(A \to B) \to C = 0$$

Donc $\mathrm{im}(A \to B) \to B$ se factorise par $\ker(B \to C)$, d'où $\ker(B \to C) = \mathrm{im}(A \to B)$.

On montre maintenant une série de lemme d'exactitude.
On se place systématiquement dans une catégorie abélienne.

Lemme 3.4.3

La suite $0 \to A \to B$ est exacte si et seulement si $A \to B$ est un monomorphisme.

Démonstration

Sens direct : Par exactitude, $\mathrm{im}(0 \to A) = \ker(A \to B)$. Comme $\mathrm{coker}(0 \to A) = \mathrm{id}_A$, $\ker(A \to B) = 0$ donc $A \to B$ est un monomorphisme.

Sens réciproque : On a $0 \to A \to B = 0$ puisque $A \to B$ est un monomorphisme, donc $\ker(A \to B) = 0$, ainsi
$$\ker(A \to B) \to B \to \mathrm{coker}(A \to B) = 0$$
par la proposition précédente, la suite est exacte.

Remarque

Duellement, $A \to B \to 0$ est exacte si et seulement si $A \to B$ est un épimorphisme.

Lemme 3.4.4

La suite $0 \to K \to A \to B$ est exacte si et seulement si $K \to A$ est le noyau de $A \to B$.

Démonstration

Sens direct : Par exactitude, $K \to A$ est un monomorphisme, donc $K \to A$ est sa propre image, ainsi $K \to A \to B = 0$ et il existe un unique morphisme $\mathrm{coker}(A \to B) \to B$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & & \mathrm{coker}(A \to B) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

De plus, puisque $K \to A \to B = K \to A \to \mathrm{coker}(A \to B) \to B = 0$, il existe un unique morphisme $K \to \ker(A \to B)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & A \\ \ker(A \to B) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Par exactitude, $\ker(A \to B) \to A \to \mathrm{coker}(K \to A) = 0$, donc par la propriété de l'image, il existe un morphisme $\ker(A \to B) \to K$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & A \\ \ker(A \to B) \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ainsi, $K \to A = \ker(A \to B) \to A$.

Sens réciproque : Comme $K \to A = \ker(A \to B) \to A$, $K \to A$ est un monomorphisme, donc par le lemme précédent, la suite $0 \to K \to A$ est exacte.
Par la définition du noyau, $K \to A \to B = 0$ donc $K \to A \to \mathrm{coker}(K \to A) = 0$ et ainsi $K \to A \to B$ est exacte. En combinant ces deux suites, on obtient l'exactitude de $0 \to K \to A \to B$.

Remarque

Duellement, $A \to B \to C \to 0$ est exacte si et seulement si $B \to C$ est le co-noyau de $A \to B$.

Lemme 3.4.5

La suite $0 \to A \to B \to 0$ est exacte si et seulement si $A \to B$ est un isomorphisme.

Démonstration

C'est direct par application du premier lemme de cette série et de son dual.

Lemme 3.4.6

La suite $A \to B \xrightarrow{\mathrm{id}} B$ est exacte si et seulement si $A \to B = 0$.

Démonstration

Sens direct : Par exatitude, et avec la proposition précédente, $A \to B \xrightarrow{\mathrm{id}} B = A \to B = 0$, donc $A \to B = 0$.

Sens réciproque : Si $A \to B = 0$, alors $\mathrm{im}(A \to B) = 0$, or $\ker(\mathrm{id}_B) = 0$, d'où l'exactitude.

Lemme 3.4.7

La suite $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte si et seulement si $A \to B$ est un monomorphisme et $B \to C$ est son co-noyau.

Démonstration

C'est direct par application du deuxième lemme de cette série et de son dual.

Remarque

Duellement, la suite $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte si et seulement si $B \to C$ est un épimorphisme et $A \to B$ est son noyau.

3.5 Structure additive

On montre dans cette section une propriété fondamentale sur les catégories abéliennes, et qui leur a donné un nom : les ensembles de morphismes ont une structure de groupe abélien.
C'est la dernière étape pour montrer que la définition de Freyd (3.2.1) est équivalente à la définition moderne des catégories abéliennes (3.2.4). On fera extensivement usage des construction de produit et co-produit pour arriver à ce résultat.

On se place systématiquement dans une catégorie abélienne pour cette partie.

Notation

On rappelle les notations vectorielles des morphismes, faisant commuter les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dd, "\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[dr, "\iota_A"'] & & B \arrow[dl, "\iota_B"] \\ & A \oplus B & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ A \arrow[ur, "f"] & & B \arrow[ul, "g"'] \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[uu, "\begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix}"] & \end{tikzcd}$$

Lemme 3.5.1

Soit $A \xrightarrow{\iota_A} A + B \xleftarrow{\iota_B} B$ un co-produit, alors les morphismes ι_A et ι_B sont des monomorphismes.

Démonstration

On a $A \xrightarrow{\iota_A} A + B \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}} A = A \xrightarrow{\mathrm{id}} A$. Donc $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \circ \iota_A$ est un automorphisme de A donc un monomorphisme, donc ι_A est un monomorphisme.

Remarque

Duellement, les projection d'un produit sont des épimorphismes.

Lemme 3.5.2

Pour $a : A \to A$, $b : B \to A$ et $g : A \to C$,

$$g \circ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \circ a & g \circ b \end{pmatrix}$$

Démonstration

On a, par définition du co-produit,

$$g \circ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \circ \iota_A = g \circ a$$

De même

$$g \circ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \circ \iota_B = g \circ b$$

D'où le résultat.

Remarque

Duellement,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circ g = \begin{pmatrix} a \circ g \\ b \circ g \end{pmatrix}$$

Théorème 3.5.3

La suite $0 \to A \xrightarrow{\iota_A} A + B \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}} B \to 0$ est exacte.

Démonstration

ι_A est un monomorphisme.
Pour tout $B \xrightarrow{g} X$, par le lemme précédent, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
A + B \arrow[ur, "\begin{pmatrix} 0 & g \end{pmatrix}"] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}"'] & B \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Donc $A + B \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}} B$ est le co-noyau de $A \xrightarrow{\iota_A} A + B$. D'où l'exactitude voulue.

Remarque

Duellement, la suite $0 \to A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ 0 \end{pmatrix}} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B \to 0$ est exacte.

Proposition 3.5.4

L'intersection de $A \xrightarrow{\iota_A} A + B$ et $B \xrightarrow{\iota_B} A + B$ est nulle.

Démonstration

L'intersection est le noyau de

$$B \to A + B \to \operatorname{coker}(A \to A + B)$$

Par le théorème précédent, on a $A + B \to \operatorname{coker}(A \to A + B) = A + B \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}} B$, donc l'intersection est le noyau de id_B, qui est nul.

Généralisons une fois de plus nos notations ! Les notations vectorielles en ligne ou en colonnes, mutuellement duales, peuvent se ré-écrire dans le cadre de produits et co-produits arbitraires.
Soient $\coprod A_i$ un coproduit et $\prod B_j$ un produit. Soit

$$x : \coprod A_i \to \prod B_j$$

un morphisme entre ces deux objets. On peut le caractériser entièrement par ses "composantes" $x_{ij} : A_i \to B_j$.
On obtient alors une matrice (x_{ij}) faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \coprod A_i \arrow[r, "(x_{ij})"] & \prod B_j \arrow[dr, "\pi_{B_j}"] & \\
A_i \arrow[ur, "\iota_{A_i}"] \arrow[rrr, "x_{ij}"] & & & B_j
\end{tikzcd}$$

Si l'on fixe i et qu'on fait varier j, on décrit (x_{ij}) comme la matrice colonne $((x_{ij})_j)_i$. De même, si on fixe j et qu'on fait varier i, on décrit (x_{ij}) comme $((x_{ij})_i)_j$.
On montre un résultat plus faible, en se réduisant à $0 \leq i, j \leq 2$, mais l'essence de la preuve se préserve dans le cas général.

Proposition 3.5.5

Pour $w : A \to C$, $x : A \to D$, $y : B \to C$, $z : B \to D$ des morphismes d'une catégorie abélienne

$$\begin{pmatrix} (w & x) \\ (y & z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Démonstration

On construit $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ de deux façons différentes. On a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} w & x \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "x"] & \\
C & C \oplus D \arrow[l, "\pi_C"'] \arrow[r, "\pi_D"] & D \\
 & B \arrow[ul, "y"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}"'] \arrow[ur, "z"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "\iota_A"] \arrow[dr, "x"] & \\
C & A \times B \arrow[l, "\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}"'] \arrow[r, "\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}"] & D \\
 & B \arrow[ul, "y"] \arrow[u, "\iota_B"'] \arrow[ur, "z"'] &
\end{tikzcd}$$

Donc $\begin{pmatrix} (w & x) \\ (y & z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$.

Théorème 3.5.6

Le morphisme $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} : A_1 + A_2 \to A_1 \times A_2$ est un isomorphisme.

Démonstration

On note $I = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ et K son noyau. On a

$$K \to A_1 + A_2 \xrightarrow{I} A_1 \times A_2 \xrightarrow{\pi_{A_1}} A_1 = K \to A_1 + A_2 \xrightarrow{(\mathrm{id} \quad 0)} A_1$$

donc le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, "\iota_{A_1}"] & \\
A_1 + A_2 \arrow[u, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}"] & A_1 + A_2 \\
K \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Donc $K \to A_1 + A_2 \to A_1 = 0$, donc $K \to A_1 + A_2$ se factorise par $\ker(A_1 + A_2 \to A_1) = A_2$.
Donc $K \to A_1 + A_2$ est contenu dans $A_1 \xrightarrow{\iota_{A_1}} A_1 + A_2$.
De même, $K \to A_1 + A_2$ est contenu dans $A_2 \xrightarrow{\iota_{A_2}} A_1 + A_2$.
Donc $K = A_1 \cap A_2$, or cette intersection est nulle, donc $K = 0$, donc I est un monomorphisme.

Duellement, le co-noyau de I est nul, donc I est un épimorphisme.
Donc I est un isomorphisme.

Par corollaire immédiat, les morphismes $A \xleftarrow{(\mathrm{id} \quad 0)} A + B \xrightarrow{(0 \quad \mathrm{id})} B$ forment un produit.

Définition 3.5.7 (Bi-produit, somme directe)

Lorsque $A + B \simeq A \times B$, on parle de bi-produit, dans le cadre des catégories abéliennes, on parle plutôt de somme directe, notée $A \oplus B$.
On notera $\bigoplus A_i$ les sommes directes arbitraires.

On peut maintenant définir la notion d'addition de morphismes, on commence par définir des prototypes d'additions, puis on montre que ces prototypes induisent une structure de monoïde commutatif sur les ensembles de morphismes.

Définition 3.5.8 (Addition gauche, addition droite)

Soient $A \xrightarrow{x} B$ et $A \xrightarrow{y} B$ deux morphismes. On définit $x \underset{L}{+} y$ et $x \underset{R}{+} y$ par

$$A \xrightarrow{x \underset{L}{+} y} B = A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}} B$$

$$A \xrightarrow{x \underset{R}{+} y} B = A \xrightarrow{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}} B \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id} & \mathrm{id}\end{pmatrix}} B$$

Lemme 3.5.9

Pour $x, y : A \rightrightarrows B$, $w : B \to C$ et $z : D \to A$,

$$w \circ (x \underset{L}{+} y) = (w \circ x) \underset{L}{+} (w \circ y)$$

$$(x \underset{R}{+} y) \circ z = (x \circ z) \underset{R}{+} (y \circ z)$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} A \xrightarrow{x \underset{L}{+} y} B \xrightarrow{w} C &= A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}} B \xrightarrow{w} C \\ &= A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix}w \circ x & w \circ y\end{pmatrix}} C \\ &= (w \circ x) \underset{L}{+} (w \circ y) \end{aligned}$$

la seconde égalité se montre de la même façon.

Lemme 3.5.10

Le morphisme nul est une identité pour $\underset{L}{+}$et $\underset{R}{+}$. Autrement dit, pour un morphisme x

$$x \underset{L}{+} 0 = x = 0 \underset{L}{+} x$$

$$x \underset{R}{+} 0 = x = 0 \underset{R}{+} x$$

Démonstration

On montre l'égalité $\mathrm{id} \underset{L}{+} 0 = \mathrm{id}$, le lemme précédent permet d'étendre le résultat à tout morphisme x, les autres égalités se montre similairement. On a

$$A \xrightarrow{\mathrm{id} \underset{L}{+} 0} A = A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id} & 0\end{pmatrix}} A = A \xrightarrow{\mathrm{id}} A$$

Théorème 3.5.11

Les opérations $\underset{L}{+}$ et $\underset{R}{+}$ sont égales, on note donc simplement $+$, qui est associative et commutative.

Démonstration

Par le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned}
A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A\oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix}} B\oplus B \xrightarrow{(\mathrm{id}\quad \mathrm{id})} B &= A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A\oplus A \xrightarrow{\left(\begin{pmatrix}w\\ y\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}\right)} B\oplus B \xrightarrow{(\mathrm{id}\quad\mathrm{id})} B \\
&= A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A\oplus A \xrightarrow{(w\quad y)\underset{R}{+}(x\quad z)} B \\
&= (w\quad y)\circ\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix} \underset{R}{+} (x\quad z)\circ\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix} \\
&= (w \underset{L}{+} y) \underset{R}{+} (x \underset{L}{+} z)
\end{aligned}$$

De même,

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A\oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix}} B\oplus B \xrightarrow{(\mathrm{id}\quad \mathrm{id})} B = (w \underset{R}{+} x) \underset{L}{+} (y \underset{R}{+} z)$$

Donc

$$(w \underset{L}{+} y) \underset{R}{+} (x \underset{L}{+} z) = (w \underset{R}{+} x) \underset{L}{+} (y \underset{R}{+} z)$$

En posant $x = y = 0$, on obtient l'égalité des opérations, on a donc

$$(w+y)+(x+z) = (w+x)+(y+z)$$

En posant $y = 0$, on obtient l'associativité. En posant $w = z = 0$, on obtient la commutativité.

Les ensembles de morphismes sont maintenant munis d'une structure de monoïde commutatif, il ne reste plus qu'à montrer que chaque morphisme admet un opposé afin d'obtenir une structure de groupe abélien. Pour cela on introduit une notation simplifiée de la composition, et on utilise les règles de multiplication matricielle pour définir l'opposé d'un morphisme.

Notation

On note, pour simplifier l'écriture des prochaines preuves, la composition $g \circ f = fg$. Cette inversion d'ordre reflète l'ordre d'application des morphismes.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "fg"] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Lemme 3.5.12 (Multiplication matricielle)

Les règles usuelles de multiplication matricielles s'appliquent aux matrices de morphismes, ainsi, pour $\begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix} : A\oplus B \to C\oplus D$ et $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} : C\oplus D \to E\oplus F$

$$\begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wa+xc & wb+xd\\ ya+zc & yb+zd\end{pmatrix}$$

Démonstration

On note $X = \begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. On a, comme $\pi_C\iota_C + \pi_D\iota_D = \mathrm{id}_{C\oplus D}$,

$$\begin{aligned}
A \xrightarrow{\iota_A} A\oplus B \xrightarrow{X} E\oplus F \xrightarrow{\pi_E} E &= A \xrightarrow{\iota_A} A\oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix}} C\oplus D \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}} E\oplus F \xrightarrow{\pi_E} E \\
&= A \xrightarrow{\iota_A} A\oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix}} C\oplus D \xrightarrow{\pi_C\iota_C+\pi_D\iota_D} C\oplus D \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}} E\oplus F \xrightarrow{\pi_E} E \\
&= A \xrightarrow{\iota_A} A\oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix}\pi_C\iota_C\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w & x\\ y & z\end{pmatrix}\pi_D\iota_D\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}} E\oplus F \xrightarrow{\pi_E} E
\end{aligned}$$

Or, par définition,

$$\imath_A \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \pi_C = w$$

$$\imath_C \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pi_E = a$$

$$\imath_A \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \pi_D = x$$

$$\imath_D \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pi_E = c$$

D'où $A \xrightarrow{\imath_A} A \oplus B \xrightarrow{X} E \oplus F \xrightarrow{\pi_E} E = wa + xc$. En changeant l'injection initiale et la projection finale, on traite les autres composantes.

Remarque

On montre d'une façon très similaire que l'addition composante par composante de matrices définie bien l'addition des morphismes représentés.

On est maintenant prêt à montrer que la définition de Freyd (3.2.1) et la définition moderne (3.2.4) sont équivalentes, il ne nous manque que la structure de groupe et la bilinéarité de la composition.

Théorème 3.5.13 (Structure de groupe abélien)

(i) Pour A, B deux objets d'une catégorie abélienne, $(\mathrm{Hom}(A,B),+)$ est un groupe abélien.
(ii) La composition est bilinéaire.

Démonstration

(i) Soit $x : A \to B$. On considère la matrice $A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id} & x \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}} A \oplus B$ et son noyau $K \to A \oplus B$. On a alors

$$K \to A \oplus B \xrightarrow{\pi_A} A = K \xrightarrow{a} A$$

$$K \to A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B = K \xrightarrow{b} B$$

pour certains a, b. On peut donc voir ce noyau comme $K \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A \oplus B$.
Par la propriété du noyau, on a alors

$$K \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ ax+b \end{pmatrix}} A \oplus B = K \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{id} & x \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}} A \oplus B = 0$$

Comme $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a nécessairement $a = b = 0$. Donc $K = 0$, donc $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & x \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ est un monomorphisme.

Par un argument dual, $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & x \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ est également un épimorphisme, donc un isomorphisme. Il existe donc un isomorphisme réciproque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & x \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + xc & b + xd \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ce qui force $c = 0$, donc $a = d = 1$ et $b + x = 0$, il existe donc un morphisme $-x : A \to B$ tel que $x + (-x) = 0$.

(ii) La linearité à gauche et à droite sont directe par application du lemme 3.5.9.

Corollaire 3.5.14

Les plongements de Yoneda à variable dans une catégorie abélienne sont à valeurs dans **Ab**.

Démonstration

On vient de montrer que, pour A et X dans une catégorie abélienne, $h_A(X) = \mathrm{Hom}(A, X)$ et $h^A(X) = \mathrm{Hom}(X, A)$ sont des groupes abéliens, donc des objets de **Ab**. La linéarité de la composition assure que, pour $f : A \xrightarrow{B}$, $h_A[f]$ et $h^A[f]$ sont des morphismes de groupes abéliens.

Proposition 3.5.15

L'ensemble $\mathrm{End}(A) = \mathrm{Hom}(A, A)$ des endomorphismes d'un objet A est un anneau.

Démonstration

On a montré que c'est un groupe abélien pour $+$, la composition fait office de multiplication, avec pour identité id, on a montré plus haut qu'elle est distributive sur $+$ et associative.

3.6 Produits fibrés, sommes amalgamées et lemmes de diagrammes

Dans cette section, on montre un résultat très efficace pour l'existence de suites exactes, le lemme des neuf, ou lemme 3×3.
Comme toujours, on se place dans une catégorie abélienne pour cette section.

Théorème 3.6.1

Considérons le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Soit $K = \ker(P \to B)$. On a $K \to P \to A = \ker(A \to C)$.
Donc $P \to B$ est un monomorphisme si et seulement si $A \to C$ en est un.

Démonstration

On considère X tel que $X \to A \to C = 0$, alors le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "0"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Par la propriété du produit fibré, X se factorise par P pour nous donner le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & P \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & A & \end{tikzcd}$$

Comme $X \to P \to B = 0$, $X \to P$ se factorise par $K \to P$,

$$X \to P = X \to K \to P$$

Or on a $X \to K \to P \to A = X \to P \to A$, donc, par la propriété universelle du produit fibré, $K \to P \to A$ est le noyau de $A \to C$.
Par la caractérisation des monomorphismes, si $P \to B$ est un monomorphisme, alors $K = 0$, donc $A \to C$ en est également un, et réciproquement.

Remarque

Duellement, dans la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

$C \to B$ est un épimorphisme si et seulement si $A \to S$ en est un, et leurs co-noyaux sont égaux.

Lemme 3.6.2

Considérons le carré

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b'"] \\ A \arrow[r, "a'"'] & P \end{tikzcd}$$

Et la suite $C \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A \oplus B \xrightarrow{(a' \quad -b')} P$, alors

1. $C \to A \oplus B \to P = 0$ si et seulement si le carré commute ;
2. La suite $0 \to C \to A \oplus B \to P$ est exacte si et seulement si le carré est un produit fibré ;
3. La suite $C \to A \oplus B \to P \to 0$ est exacte si et seulement si le carré est une somme amalgamée ;
4. La suite $0 \to C \to A \oplus B \to P \to 0$ est exacte si et seulement si le carré est à la fois un produit fibré et une somme amalgamée.

Démonstration

1. On a $aa' - bb' = 0$ si et seulement si $aa' = bb'$ si et seulement si le carré commute.
2. **Sens direct :** Par exactitude, le carré commute et $C \to A \oplus B$ est le noyau de $A \oplus B \to P$, le carré est donc bien un produit fibré (par le théorème 3.3.13).

   Sens réciproque : Comme le carré commute, $C \to A \oplus B \to P = 0$. Soit X tel que $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}} A \oplus B \to P = 0$, alors $x_A a' = x_B b'$ et X se factorise par C, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_A"'] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "x_B"] & \\ A & C \arrow[l, "a"] \arrow[r, "b"'] & B \end{tikzcd}$$

   Donc $c \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$, donc la factorisation de X dans C est unique, $C \to A \oplus B$ est le noyau de $A \oplus B \to P$, donc la suite est exacte.
3. Cette assertion est duale à la précédente.
4. C'est direct par 2 et 3.

Proposition 3.6.3

Dans le produit fibré

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Si $B \to C$ est un épimorphisme, alors $P \to A$ en est également un.

Démonstration

Par le lemme précédent, $0 \to P \to A \oplus B \to C$ est exacte. Comme $B \to C$ est un épimorphisme, $A \oplus B \to C$ en est également un.
Comme $0 \to P \to A \oplus B \to C$ est exacte, $0 \to P \to A \oplus B \to C \to 0$ est exacte si $A \oplus B \to C \to 0$ est exacte. C'est le cas puisque $A \oplus B \to C$ est un épimorphisme.
Le produit fibré est donc également une somme amalgamée, et par le théorème dual de 3.7.1, $P \to A$ est un épimorphisme.

Remarque

Duellement, dans la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

Si $A \to B$ est un monomorphisme, alors $C \to P$ en est également un.

Lemme 3.6.4

Dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] & B_{22} \arrow[r] & B_{23} \end{tikzcd}$$

Avec $0 \to B_{21} \to B_{22} \to B_{23}$ exacte, le carré

$$\begin{tikzcd} B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[d] \\ B_{21} \arrow[r] & B_{22} \end{tikzcd}$$

est un produit fibré si et seulement si $0 \to B_{11} \to B_{12} \to B_{23}$ est exacte.

Démonstration

Sens direct : la suite est exacte si et seulement si $B_{11} \to B_{12}$ est le noyau de $B_{12} \to B_{23}$. Supposons qu'il existe $X \to B_{12}$ tel que $X \to B_{12} \to B_{23} = 0$, alors par commutativité, on a

$$X \to B_{12} \to B_{22} \to B_{23} = 0$$

Comme $0 \to B_{21} \to B_{22} \to B_{23}$ est exacte, $B_{21} = \ker(B_{22} \to B_{23})$, donc $X \to B_{12} \to B_{22}$ se factorise de façon unique par $B_{21} \to B_{22}$, ce qui nous donne le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \\ B_{21} \arrow[r] & B_{22} \end{tikzcd}$$

Comme $B_{21} \to B_{22} \leftarrow B_{12}$ est un produit fibré, X se factorise par B_{11} et on obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \\ & B_{21} \arrow[r] & B_{22} \end{tikzcd}$$

Donc si $X \to B_{12} \to B_{23} = 0$, alors, comme $B_{11} \to B_{12}$ est un monomorphisme, c'est le noyau de $B_{12} \to B_{23}$ et la suite est exacte.

Sens réciproque : Par exactitude, $B_{11} \to B_{12}$ est le noyau de $B_{12} \to B_{23}$.
Soit X un candidat produit fibré de $B_{21} \to B_{22} \leftarrow B_{12}$, alors

$$X \to B_{12} \to B_{22} \to B_{23} = 0$$

Donc $X \to B_{12}$ se factorise par $B_{11} \to B_{12}$, on a donc

$$X \to B_{11} \to B_{21} \to B_{22} = X \to B_{11} \to B_{12} \to B_{22} = X \to B_{12} \to B_{22}$$

Comme X est un candidat produit fibré, $X \to B_{12} \to B_{22} = X \to B_{21} \to B_{22}$ donc

$$X \to B_{11} \to B_{21} \to B_{22} = X \to B_{21} \to B_{22}$$

Par exactitude de la suite $0 \to B_{21} \to B_{22} \to B_{23}$, $B_{21} \to B_{22}$ est un noyau donc un monomorphisme, donc $X \to B_{11} \to B_{21} = X \to B_{21}$. Ainsi, les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} & B_{11} \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr] & & B_{12} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B_{11} \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr] & & B_{21} \end{tikzcd}$$

B_{11} est bien le produit fibré recherché.

Proposition 3.6.5

Soit $X \to Y$ un monomorphisme. Pour tout objet W, $\ker(W \to X) = \ker(W \to X \to Y)$.

Démonstration

Soit K tel que $K \to W \to X = 0$, alors $K \to W \to X \to Y = 0$ donc le noyau de $W \to Y$ se factorise par celui de $W \to X \to Y$.
Réciproquement, si $K \to W \to X \to Y = 0$, comme $K \xrightarrow{0} X \to Y = 0$, et comme $X \to Y$ est un monomorphisme, $K \to W \to X = 0$, donc le noyau de $W \to X \to X$ se factorise par celui de $W \to Y$.
On a donc bien l'égalité voulue.

Remarque

Duellement, si $X \to Y$ est un épimorphisme, alors $\mathrm{coker}(Y \to Z) = \mathrm{coker}(X \to Y \to Z)$.

Lemme 3.6.6

Dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_3 & \end{tikzcd}$$

avec la première ligne exacte, la suite $0 \to B_0 \to B_1 \to B_3$ est exacte si et seulement si $0 \to B_2 \to B_3$ l'est.

Démonstration

Sens direct : Considérons $K = \ker(B_2 \to B_3)$ et P le produit fibré de $B_1 \to B_2 \leftarrow K$. Alors le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & P \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_3 &
\end{tikzcd}$$

avec les deux dernières lignes et la dernière colonne exactes. Ces exactitudes nous assurent que $B_1 \to B_2$ est un épimorphisme, donc $P \to K$ également, donc la première ligne est exacte.

Par commutativité, $P \to K \to B_2 \to B_3 = P \to B_1 \xrightarrow{\mathrm{id}} B_1 \to B_3$ donc $P \to B_1$ se factorise par le noyau $B_0 \to B_1$ et $P \to B_0 \to B_1 = P \to B_1$. On a donc

$$0 = P \to B_0 \to B_1 \to B_2 = P \to B_1 \to B_2$$

et par le produit fibré,

$$0 = P \to B_1 \to B_2 = P \to K \to B_2$$

Puisque $P \xrightarrow{0} K \to B_2 = 0 = P \to K \to B_2$, comme $K \to B_2$ est un monomorphisme, $P \to K = 0$. Comme $P \to K$ est un épimorphisme,

$$P \to K \xrightarrow{\mathrm{id}} K = P \to K \xrightarrow{0} K$$

Donc $K = 0$ et la suite $0 \to B_2 \to B_3$ est exacte.

Sens réciproque : Par exactitude de $0 \to B_2 \to B_3$, $B_2 \to B_3$ est un monomorphisme, donc $\ker(B_1 \to B_2) = \ker(B_1 \to B_2 \to B_3)$. Par exactitude de la première ligne, $\ker(B_1 \to B_2) = B_0$, donc

$$B_0 \to B_1 \to B_3 = B_0 \to B_1 \to B_2 \to B_3$$

et $\ker(B_1 \to B_3) = B_0$, donc la suite $0 \to B_0 \to B_1 \to B_3$ est exacte.

Lemme 3.6.7

Dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & B_{13} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \\
0 \arrow[r] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d] & B_{32} & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

avec les colonnes et la deuxième ligne exactes, la première ligne est exacte si et seulement si la dernière l'est.

Démonstration

Par exactitude de la dernière colonne, $B_{13} \to B_{23}$ est un monomorphisme, donc

$$\ker(B_{12} \to B_{13}) = \ker(B_{12} \to B_{13} \to B_{23})$$

Ainsi, la suite $0 \to B_{11} \to B_{12} \to B_{13}$ est exacte si et seulement si $0 \to B_{11} \to B_{12} \to B_{23}$ l'est, donc si et seulement si le diagramme suivant est un produit fibré (lemme 3.6.4)

$$\begin{tikzcd}
B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[d] \\
B_{21} \arrow[r] & B_{22}
\end{tikzcd}$$

Comme la deuxième colonne est exacte, ce carré est un produit fibré si et seulement si $0 \to B_{11} \to B_{21} \to B_{32}$ est exacte.
Comme le diagramme suivant commute, avec la première colonne exacte,

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & B_{11} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & B_{11} \arrow[d] \\
 & B_{21} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & B_{21} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d] & B_{32} \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

La suite $0 \to B_{11} \to B_{21} \to B_{32}$ est exacte si et seulement si $0 \to B_{31} \to B_{32}$ est exacte.
On a donc l'équivalence recherchée.

On peut maintenant montrer le dernier résultat de ce chapitre : le lemme 3×3.

Théorème 3.6.8 (Lemme 3×3)

Dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_{11} \arrow[r] \arrow[d] & B_{12} \arrow[r] \arrow[d] & B_{13} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{21} \arrow[r] \arrow[d] & B_{22} \arrow[r] \arrow[d] & B_{23} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{31} \arrow[r] \arrow[d] & B_{32} \arrow[r] \arrow[d] & B_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

avec les colonnes et la deuxième ligne exactes, la première ligne est exacte si et seulement si la dernière l'est.

Démonstration

C'est direct par application du précédent lemme et de son dual.

Chapitre 4

Des foncteurs et des objets spéciaux

Dans ce chapitre, on introduit les notions de foncteur exact et de foncteur additifs, puis la notion de générateur projectif (ou de co-générateur injectif). Tout ceci nous permet, en suivant le développement de Freyd de montrer que toute catégorie complète avec un générateur projectif admet un foncteur pleinement fidèle à valeurs dans $\mathbf{Mod}_\mathbf{A}$.

4.1 Foncteurs additifs, foncteurs exacts

Définition 4.1.1 (Foncteur additif)

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre catégories abéliennes est dit additif lorsque, pour tout objets X, Y, les fonctions induites

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), F(Y))$$

sont des morphismes de groupes abéliens.

Remarque

Le seul endomorphisme d'un objet nul est son morphisme nul, donc $\mathrm{id}_0 = 0$. Réciproquement, si $\mathrm{id}_X = 0$, alors $X = 0$. Ainsi, puisqu'un foncteur additif préserve à la fois les identités et les morphismes nuls, il doit préserver les objets nuls.

Dans une catégorie abélienne, tous les produits et co-produits existent, et forment tous des sommes directes (théorème 3.5.6), ceci nous permet d'énoncer une caractérisation simple des foncteurs additifs.

Théorème 4.1.2 (Caractérisation des foncteurs additifs)

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre catégories abéliennes est additif si et seulement s'il préserve les sommes directes.

Démonstration

Sens direct : Par la définition d'une somme directe, si F est additif, il préserve $+$ et 0, donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, shift left, "F[\iota_A]"] & F(A \oplus B) \arrow[l, shift left, "F[\pi_A]"] \arrow[r, shift right, "F[\pi_B]"'] & F(B) \arrow[l, shift right, "F[\iota_B]"'] \end{tikzcd}$$

définit $F(A \oplus B)$ comme la somme directe de $F(A)$ et $F(B)$, donc F préserve les sommes directes.

Sens réciproque : Si F préserve les sommes directes, alors pour $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$,

$$f + g = A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{(f \quad g)} B$$

Donc

$$F[f] + F[g] = F(A) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ \mathrm{id}\end{pmatrix}} F(A) \oplus F(A) \simeq F(A \oplus A) \xrightarrow{(F[f] \quad F[g]) F(B) = F[(f \quad g)]} = F[f + g]$$

Un corollaire immédiat est qu'on peut remplacer les sommes directes par des produits ou co-produits finis dans la caractérisation ci-dessus.

Proposition 4.1.3

Dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, les foncteurs h_X sont additifs.

Démonstration

Les foncteurs h_X sont des adjoints à droite (du foncteur de produit tensoriel), donc préservent les produits finis, donc sont additifs.

Définition 4.1.4 (Suite exacte à gauche, à droite)

Une suite exacte à gauche est un suite exacte de la forme $0 \to A \to B \to C$.
Une suite exacte à droite est un suite exacte de la forme $A \to B \to C \to 0$.

Définition 4.1.5 (Foncteur exact à gauche, à droite)

Un foncteur est exact à gauche lorsqu'il préserve les suites exactes à gauche, de même il est exact à droite lorsqu'il préserve les suites exactes à droite.

On remarque rapidement qu'un foncteur exact à gauche préserve les noyaux et qu'un foncteur exact à droite préserve les co-noyaux.

Théorème 4.1.6

Dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, les foncteurs $h_X : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ sont exacts à gauche.

Démonstration

Soit $K \to A \to B$ un noyau, on considère la suite $h_X(K) \to h_X(A) \to h_X(B)$, par définition du foncteur h_X, on obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & A \arrow[r] & B \\ & X \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

qui nous indique que le morphisme $h_X(K \to A \to B)$ est nul dans $\mathbf{Ab}$, c'est donc un candidat noyau.
Soit $h_X(C) \to h_X(A)$ un autre candidat noyau, alors par additivité, $C \to A \to B$ est un candidat noyau donc $C \to A$ se factorise uniquement par $K \to A$, ce qui nous donne une factorisation unique de $h_X(C) \to h_X(A)$ par $h_X(K) \to h_X(A)$, qui est bien un noyau.

Définition 4.1.7

Un foncteur entre catégories abéliennes qui préserve les suites exactes est dit exact.

Théorème 4.1.8

Un foncteur est exact si et seulement s'il est exact à gauche et à droite.

Démonstration

Sens direct : Trivialement vrai.

Sens réciproque : Un foncteur exact à gauche et à droite préserve les noyaux et co-noyaux, donc les noyaux et images, donc les suites exactes.

Théorème 4.1.9 (Caractérisation de la fidélité)

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F est fidèle ;

(ii) F préserve les diagrammes **non** commutatifs ;

(iii) F préserve les suites **non** exactes.

Démonstration

(i)⇒(ii) : Supposons par contradiction que F associe un diagramme commutatif à un diagramme non commutatif. Alors pour deux morphismes $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ distincts, on a $F[f] = F[g]$, ce qui contredit l'hypothèse de fidélité, donc F préserve les diagrammes non commutatifs.

(ii)⇒(i) : Pour deux morphismes $f \neq g$, le diagramme $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ est non commutatif, donc $F(A) \overset{F[f]}{\underset{F[g]}{\rightrightarrows}} B$ est non commutatif et $F[f] \neq F[g]$, donc F est fidèle.

(i)⇒(iii) : Soient $A \to B \to C$ une suite non exacte, $0 \to \ker(B \to C) \to B \to C$ et $A \to B \to \operatorname{coker}(A \to B) \to 0$ deux suites exactes. Par la proposition 3.4.2, soit $A \to B \to C \neq 0$, soit $\ker(B \to C) \to B \to \operatorname{coker}(A \to B) \neq 0$. Par additivité, soit $F(A) \to F(B) \to F(C) \neq 0$, soit $F(\ker(B \to C)) \to F(B) \to F(\operatorname{coker}(A \to B)) \neq 0$.

Si $F(A) \to F(B) \to F(C) \neq 0$, alors F préserve bien les suites non exactes et l'implication est prouvée.

Sinon, alors $F(\ker(B \to C)) \to F(B) \to F(\operatorname{coker}(A \to B)) \neq 0$. Considérons donc les suites exactes $0 \to K \to F(B) \to F(C)$ avec $K = \ker(F(B) \to F(C))$ et $F(A) \to F(B) \to L$ avec $L = \operatorname{coker}(F(A) \to F(B))$. Par exactitude de $0 \to \ker(B \to C) \to B \to C$, $\ker(B \to C) \to B \to C = 0$, par additivité,

$$F(\ker(B \to C)) \to F(B) \to F(C) = 0$$

et par propriété universelle du noyau, il existe un unique morphisme $F(\ker(B \to C)) \to K$ faisant commuter

$$\begin{tikzcd} F(\ker(B \to C)) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ K \arrow[r] & F(B) \end{tikzcd}$$

De même, par la propriété universelle du co-noyau, puisque $F(A) \to F(B) \to F(\operatorname{coker}(A \to B)) = 0$, il existe un unique morphisme $L \to F(\operatorname{coker}(A \to B))$ faisant commuter

$$\begin{tikzcd} & F(\operatorname{coker}(A \to B)) \\ F(B) \arrow[ur] \arrow[r] & L \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Supposons que $F(A) \to F(B) \to F(C)$ est exacte, alors, par la proposition 3.4.2, $K \to F(B) \to L = 0$, donc

$$\begin{aligned} &F(\ker(B \to C)) \to F(B) \to F(\operatorname{coker}(A \to B)) \\ &\qquad = F(\ker(B \to C)) \to K \to F(B) \to L \to F(\operatorname{coker}(A \to B)) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui contredit notre hypothèse de départ. Donc $F(A) \to F(B) \to F(C)$ est non exacte, l'implication voulue est prouvée.

(iii)⇒(i) : Considérons, pour un morphisme non nul f, la suite non exacte $A \xrightarrow{\text{id}} A \xrightarrow{f} B$, par hypothèse la suite $F(A) \xrightarrow{\text{id}} F(A) \xrightarrow{F[f]} F(B)$ est non exacte donc $F[f] \neq 0$.
Supposons qu'il existe $f \neq g$ tels que $F[f] = F[g]$, alors $F[f - g] = F[f] + F[-g] = 0$, donc $f - g = 0$ donc $f = g$. Donc F est fidèle.

Corollaire 4.1.10

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur exact (donc additif) et fidèle entre catégories abéliennes. Un diagramme de $\mathcal{C}$ est exact et commutatif si et seulement si son image par F l'est dans $\mathcal{D}$.

Démonstration

Le théorème précédent assure qu'un diagramme est exact si et seulement si son image l'est. Considérons un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

alors, par fonctorialité,

$$F(B \to D) \circ F(A \to B) = F(A \to B \to D) = F(A \to C \to D) = F(C \to D) \circ F(A \to C)$$

Ainsi, avec l'aide du résultat précédent, un diagramme est commutatif si et seulement si son image l'est.

4.2 Objets injectifs et projectifs

Définition 4.2.1 (Objet injectif, objet projectif)

Un objet I est dit injectif lorsque le fonteur h^I est exact.
Un objet P est dit projectif lorsque le fonteur h_P est exact.

Théorème 4.2.2

Dans une catégorie abélienne, un objet P est projectif si et seulement si, pour tout épimorphisme $A \xrightarrow{e} B$ et morphisme $P \to B$, il existe un morphisme $P \to A$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] & B \\ P \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration

Comme e est un épimorphisme, la suite $0 \to \ker(e) \to A \xrightarrow{e} B \to 0$ est exacte. Comme h_P est exact à gauche, on obtient le diagramme suivant

$$0 \to h_P(\ker(e)) \to h_P(A) \to h_P(B) \to 0$$

on voit alors que P est projectif si et seulement si $h_P[e]$ est surjectif, si et seulement si pour chaque morphisme $P \to B$, il existe $P \to A$ tel que $P \to A \xrightarrow{e} B = P \to B$.

Remarque

Duellement, un objet I est injectif si et seulement si, pour tout monomorphisme $A \xrightarrow{m} B$ et morphisme $A \to I$, il existe $B \to I$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & I \\ A \arrow[ur] \arrow[r, "m"'] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Théorème 4.2.3

Soit (P_i) une famille d'objets projectifs. Lorsqu'il existe, le co-produit $\coprod P_i$ est projectif.

Démonstration

Soient $A \xrightarrow{e} B$ un épimorphisme et $\coprod P_i \to B$ un morphisme. Par la propriété du co-produit, on a une unique famille de morphismes induits $P_i \xrightarrow{\iota_i} \coprod P_i \to B$. Comme chaque P_i est projectif, il existe une famille de morphismes $P_i \to A$ tels que $P_i \to B = P_i \to A \xrightarrow{e} B$. Par la propriété du co-produit, cette famille de morphismes induit un unique morphisme $\coprod P_i \to A$ tel que $\coprod P_i \to B = \coprod P_i \to A \xrightarrow{e} B$. Par le théorème précédent, $\coprod P_i$ est projectif.

Remarque

Duellement, le produit d'une famille d'objets injectif est injectif (lorsqu'il existe).

Définition 4.2.4 (Générateur, co-générateur)

Un objet G d'un catégorie abélienne est un générateur lorsque h_G est fidèle.
Un objet C d'un catégorie abélienne est un co-générateur lorsque h^C est fidèle.

Théorème 4.2.5

Dans une catégorie abélienne, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) G est un générateur ;

(ii) Pour tout morphisme $A \to B \neq 0$, il existe $G \to A$ tel que $G \to A \to B \neq 0$;

(iii) Pour tout sous-objet propre S de tout objet A, il existe un morphisme $G \to A$ dont l'image n'est pas contenue dans S.

Démonstration

(i)⇔(ii) : Puisque h_G est fidèle, il est injectif sur les ensembles de morphismes, ainsi, puisque $A \to B \neq 0$, $h_G[A \to B] \neq 0$ et il existe nécessairement un morphisme $G \to A$ tel que $G \to A \to B \neq 0$.

(ii)⇒(iii) : Soit S un sous-objet propre de A, alors $S \to A$ n'est pas un épimorphisme donc $C = \operatorname{coker}(S \to A) \neq 0$. Ainsi, par hypothèse, il y a un morphisme $G \to A \to C \neq 0$.
$G \to A$ a pour image $I \to A$, par la propriété de l'image, $G \to A$ se factorise par $I \to A$. Supposons que $I \to A$ soit contenu dans $S \to A$, alors le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] & A \arrow[r] & C \\
I \arrow[u] \arrow[ur] & G \arrow[u] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Mais alors $G \to A \to C = G \to I \to S \to A \to C = 0$, ceci contredit notre hypothèse initiale, donc $I \to A$ n'est pas contenu dans $S \to A$.

(iii)⇒(ii) : Puisque $A \to B \neq 0$, son noyau K est un sous-objet propre. Par hypothèse, il y a un morphisme $G \to A$ d'image I non contenue dans $K \to A$.
Soit $A \to C$ le co-noyau de $G \to A$ et supposons par l'absurde que $G \to A \to B = 0$, alors il y a un morphisme $C \to B$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[dr] & & B \\
G \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[ur] & C \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Cependant, par définition, $I \to A \to C = 0$ donc $I \to A \to B = 0$, donc $I \to A$ se factorise par $K \to A$, ce qui contedit notre hypothèse initiale, donc $G \to A \to B \neq 0$.

Remarque

Duellement, dans une catégorie abélienne, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) C est un co-générateur ;

(ii) Pour tout morphisme $A \to B \neq 0$, il existe $B \to C$ tel que $A \to B \to C \neq 0$;

(iii) Pour tout quotient propre Q de A, il existe $A \to C$ dont la co-image ne contient pas Q.

Théorème 4.2.6

Dans une catégorie abélienne, un objet projectif P est un générateur si et seulement si $h_P(A)$ est non nul pour tout A non nul.

Démonstration

Sens direct : Puisque A est non nul, le morphisme id_A est non nul, comme P est générateur, il existe $P \to A$ tel que $P \to A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \neq 0$, donc $P \to A \neq 0$ donc $h_P(A)$ est non nul.

Sens réciproque : Soit $A \to B \neq 0$, il se factorise uniquement par son image $I \to B$ et sa factorisation est un épimorphisme. Supposons par l'absurde que $P \to A \to B = 0$ quelque soit $P \to A$. Alors, puisque

$$P \to A \to B \to \mathrm{coker}(A \to B) = 0$$

$P \to A \to B$ se factorise uniquement par $I \to B$ et le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[drr] & & \\
P \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[ul, "e"'] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

Ainsi

$$P \to A \xrightarrow{e} I \to B = P \to A \to B = 0$$

Puisque $A \to B \neq 0$, $I \neq 0$ et puisque $I \to B$ est un monomorphisme, on a forcément $P \to A \xrightarrow{e} I = 0$. Puisque e est un épimorphisme et que, par projectivité, $h_P[e]$ envoie tous les morphismes de $h_P(A)$ vers le morphisme nul, $h_P(I) = 0$. Cependant $I \neq 0$ donc on arrive à une contradiction. Donc il existe $P \to A$ tel que $P \to A \to B \neq 0$ et P est un générateur.

Remarque

Duellement, un objet injectif I est un co-générateur si et seulement si $h^I(A)$ est non nul pour tout A non nul.

Définition 4.2.7 (Catégorie raisonnable)

On dit qu'une catégorie est raisonnable lorsque la classe de sous-objets de tout objet est un ensemble.

Théorème 4.2.8

Une catégorie abélienne possédant un générateur est raisonnable.

Démonstration

Un sous-objet $S \xrightarrow{m} A$ est un monomorphisme, donc $h_G[m]$ est injectif entre $h_G(S)$ et $h_G(A)$. Puisque h_G est fidèle, il y a autant de fonctions injectives vers $h_G(A)$ qu'il y a de parties de $h_G(A)$. Enfin, puisque l'ensemble des parties d'un ensemble est un ensemble, la classe des sous-objets de A forme un ensemble, donc la catégorie est raisonnable.

Théorème 4.2.9

Dans une catégorie abélienne complète à droite $\mathcal{A}$, un objet G est générateur si et seulement si, pour tout objet A, le morphisme $G^{\mathrm{Hom}(G,A)} \to A$ (qui existe par complétude), satisfaisant, pour tout $x \in \mathrm{Hom}(G, A)$,

$$G \xrightarrow{\iota_x} G^{\mathrm{Hom}(G,A)} \to A = G \xrightarrow{x} A$$

est un épimorphisme.

Démonstration

Sens direct : Soit $f, g : A \rightrightarrows B$ tels que $G^{\text{Hom}(G,A)} \to A \xrightarrow{f} B = G^{\text{Hom}(G,A)} \to A \xrightarrow{g} B$. Alors, par propriété du générateur, on a, pour $x \in \text{Hom}(G, A)$,

$$\begin{aligned} G \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} B &= G \xrightarrow{\iota_x} G^{\text{Hom}(G,A)} \to A \xrightarrow{f} B \\ &= G \xrightarrow{\iota_x} G^{\text{Hom}(G,A)} \to A \xrightarrow{g} B \\ &= G \xrightarrow{x} A \xrightarrow{g} B \end{aligned}$$

Donc $h_G[f] = h_G[g]$. Par fidélité, on a donc $f = g$ et $G^{\text{Hom}(G,A)} \to A$ est un épimorphisme.

Sens réciproque : Soit $A \to B \neq 0$. Par hypothèse $G^{\text{Hom}(G,A)} \to A$ est un épimorphisme. On a alors

$$G^{\text{Hom}(G,A)} \to B \neq 0$$

et il existe nécessairement $x \in \text{Hom}(G, A)$ tel que $G \xrightarrow{x} A \to B \neq 0$, donc G est un générateur.

Remarque

Duellement, dans une catégorie abélienne complète à gauche, un objet C est un co-générateur si et seulement si le morphisme $A \to C^{\text{Hom}(A,C)}$ est un monomorphisme.

Théorème 4.2.10

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne complète a gauche admettant un générateur. $\mathcal{A}$ admet un co-générateur injectif C si et seulement si, pour tout objet A, il existe un objet injectif I et un monomorphisme $A \to I$.

Démonstration

Sens direct : Si C est injectif, alors $C^{\text{Hom}(A,C)}$ est injectif et, par le théorème précédent, $A \to C^{\text{Hom}(A,C)}$ est un monomorphisme.

Sens réciproque : Soit G un générateur de $\mathcal{A}$. Soit (Q_i) la famille de ses quotients associés en correpondance à ses sous-objets. Par complétude, $P = \prod Q_i$ existe et il existe un objet injectif E et un monomorphisme $P \to E$. Montrons que E est un co-générateur de $\mathcal{A}$.

Soit $A \to B \neq 0$. Par le théorème 4.2.5, il existe $G \to A$ tel que $G \to A \to B \neq 0$. Soit $I = \text{im}(G \to A \to B)$ et $G \to I$ l'épimorphisme associé. Puisque $G \to I$ est un quotient, on a que $I \to P$ est un monomorphisme, donc $I \to P \to E$ également.
Par injectivité de E, puisque $I \to B$ est un monomorphisme, il existe $B \to E$ tel que

$$I \to P \to E = I \to B \to E$$

On a donc

$$G \to A \to B \to E = G \to I \to B \to E = G \to I \to P \to E$$

Comme $G \to I \neq 0$ et $I \to P \to E$ est un monomorphisme, $G \to A \to B \to E \neq 0$ et $A \to B \to E \neq 0$.
Donc E est un co-générateur injectif de $\mathcal{A}$.

Remarque

Duellement, dans une catégorie abélienne complète à droite admettant un co-générateur, il existe un générateur projectif si et seulement si, pour tout objet A, il existe un objet projectif P et un épimorphisme $P \to A$.

Définition 4.2.11 (Sous-catégorie exacte)

Une sous-catégorie $\mathcal{S}$ d'une catégorie abélienne est dite exacte lorsque son foncteur d'inclusion est exact.

Définition 4.2.12

Pour $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ une sous-catégorie d'une catégorie abélienne, on appelle $\mathcal{S}$-monomorphisme un morphisme de $\mathcal{A}$ qui est un monomorphisme de $\mathcal{S}$. On définit similairement les $\mathcal{S}$-produits, $\mathcal{S}$-noyaux et autre objets intéressants.

Théorème 4.2.13

Une sous-catégorie non vide et pleine $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ d'une catégorie abélienne est exacte si et seulement si ses $\mathcal{A}$-noyaux, $\mathcal{A}$-co-noyaux et $\mathcal{A}$-sommes directes sont dans $\mathcal{B}$.

Démonstration

Sens direct : L'exactitude du foncteur d'inclusion assure la préservation des $\mathcal{B}$-noyaux et $\mathcal{B}$-co-noyaux. Les foncteurs exacts étant en particulier additifs, ils préservent de plus les $\mathcal{B}$-sommes directes.

Sens réciproque : On montre que $\mathcal{B}$ est abélienne, son exacitude se déduit directement de la préservation des noyaux, co-noyaux et sommes directes.

- Comme $\mathcal{B}$ est non-vide, il existe $A \xrightarrow{\text{id}} A$ dans $\mathcal{B}$, de $\mathcal{A}$-noyau nul.
- Soient A, B dans $\mathcal{B}$, de $\mathcal{A}$-somme directe S. Comme $\mathcal{B}$ est pleine, pour $A \leftarrow C \rightarrow B$ dans $\mathcal{B}$, il existe une unique factorisation $C \rightarrow S$, donc S est la $\mathcal{B}$-somme directe.
- De même, les $\mathcal{A}$-noyaux sont les $\mathcal{B}$-noyaux.
- Soit $A \rightarrow B$ un monomorphisme, alors son noyau est nul donc les $\mathcal{B}$-monomorphismes sont les $\mathcal{A}$-monomorphismes. Si la suite $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \operatorname{coker}(A \rightarrow B) \rightarrow 0$ est exacte, alors $A \rightarrow B$ est le noyau de $B \rightarrow \operatorname{coker}(A \rightarrow B)$.

Ainsi $\mathcal{B}$ est abélienne.

4.3 Théorème de Mitchell

On montre dans cette section une version faible du théorème de Freyd-Mitchell : toute sous-catégorie pleine et exacte d'une catégorie abélienne complète admettant un générateur projectif admet un foncteur exact et pleinement fidèle vers ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}$.

Définition 4.3.1 (Catégorie très abélienne)

Une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est dite très abélienne si chaque petite sous-catégorie pleine et exacte admet un foncteur fidèle et exact vers $\mathbf{Ab}$.

Définition 4.3.2 (Catégorie totalement abélienne)

Une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est dite totalement abélienne si, pour chaque petite sous-catégorie pleine et exacte $\mathcal{B}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $F : \mathcal{B} \rightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Théorème 4.3.3 (Théorème de Mitchell)

Une catégorie abélienne complète et admettant un générateur projectif et un co-générateur est totalement abélienne.

Démonstration

Soit $\mathcal{A}'$ une petite sous-catégorie pleine et exacte de $\mathcal{A}$. Soit $\overline{P}$ un générateur projectif de $\mathcal{A}$. Par le théorème 4.2.9, il existe pour chaque objet $A \in \mathcal{A}'$ un $\mathcal{A}$-épimorphisme $\overline{P}^{\operatorname{Hom}(\overline{P},A)} \rightarrow A$, qui par le théorème précédent est également un $\mathcal{A}'$-épimorphisme.

Soit $I = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}'} \operatorname{Hom}(\overline{P}, A)$ et posons $P = \overline{P}^I$. Puisque P est une somme de projectifs, c'est un projectif. Par le théorème 4.2.9 encore, P est un générateur projectif de $\mathcal{A}$.

La proposition 3.5.15 nous assure que $R = \operatorname{End}(P)$ est un anneau, et en posant, pour $r \in R$ et $x \in \operatorname{Hom}(P, A)$, $rx = x \circ r$, on munit $\operatorname{Hom}(P, A)$ d'une structure de R-module à gauche.

On veut maintenant montrer que h_P est un foncteur à valeurs dans ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, pour cela, il suffit de vérifier que $h_P[f]$ est un morphisme de R-modules quelque soit f. Le lemme 3.5.9 nous assure que c'est un morphisme de groupes et puisque

$$h_P[f](P \xrightarrow{r} P \xrightarrow{x} A) = P \xrightarrow{r} P \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} B = rh_P[f](P \xrightarrow{x} A)$$

$h_P[f]$ est un morphisme de R-modules. Donc h_P est un foncteur de $\mathcal{A}$ dans ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.
Puisque P est un générateur projectif, h_P est fidèle et exact. Il reste à montrer que $h_{P|\mathcal{A}'}$ est plein.

Soient A et B deux objets de $\mathcal{A}'$. On veut montrer que quelque soit le morphisme $h_P(A) \xrightarrow{\overline{y}} h_P(B)$, il existe $A \xrightarrow{y} B$ tel que $\overline{y} = h_P[y]$. Le théorème dual de 4.2.10 assure qu'il existe des épimorphismes $P \to A$ et $P \to B$. Posons $K = \ker(P \to A)$, on a les suites exactes $0 \to K \to P \to A \to 0$ et $P \to B \to 0$. Puisque $h_P(P) = R$ est projectif et h_P exact, $R \to h_P(B)$ est un épimorphisme et il existe $R \xrightarrow{f^*} R$ faisant commuter le diagramme suivant, dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & h_P(K) \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & h_P(A) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{y}"'] & 0 \\
 & & R \arrow[r] & h_P(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On a donc que f^* agit sur R en multipliant à droite par un élément $r \in R$, donc on a le diagramme commutatifs suivant, dont les lignes sont exactes, dans $\mathcal{A}'$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & A \arrow[r] & 0 \\
 & & P \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque P est un générateur projectif, h_P est un foncteur additif fidèle, comme

$$0 = h_P(K) \to R \to h_P(A) \xrightarrow{\overline{y}} h_P(B) = h_P(K) \to R \xrightarrow{f^*} R \to h_P(B)$$

on a

$$K \to P \xrightarrow{r} P \to B = 0$$

Par exactitude, $P \to A$ est le co-noyau de $K \to P$, donc il existe un unique morphisme $A \to P$ faisant commuter

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & A \arrow[d, "y"] \\
P \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

Comme h_P est exact et fidèle, il préserve les diagrammes commutatifs, donc le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & h_P(A) \arrow[d, "h_P[y]"] \\
R \arrow[r] & h_P(B)
\end{tikzcd}$$

Finalement, comme $R \to h_P(A)$ est un épimorphisme et $R \to h_P(A) \xrightarrow{h_P[y]} h_P(B) = R \xrightarrow{f^*} R \to h_P(B) = R \to h_P(A) \xrightarrow{\overline{y}} h_P(B)$, on a $\overline{y} = h_P[y]$, donc h_P est plein.

Ainsi, $\mathcal{A}$ est totalement abélienne.

Chapitre 5

Catégories de foncteurs et enveloppe injective

5.1 Catégories de foncteurs additifs

Dans cette section, on introduit les catégories de foncteurs additifs et on montre quelques résultats les concernant, notamment que les plongements de Yoneda à variable dans une petite catégorie abélienne sont à valeurs dans une de ces catégories.

Définition 5.1.1

Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne, la catégorie des foncteurs additifs de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{Ab}$ est notée $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$

Théorème 5.1.2

Si $\mathcal{A}$ est une petite catégorie abélienne, alors $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est abélienne.

Démonstration

On vérifie les axiomes un par un :

- Le foncteur constant nul est additif et fait office d'objet nul.
- Pour F et G deux foncteurs de $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$, on pose

$$\begin{array}{rcrcl} F \oplus G & : & \mathcal{A} & \to & \mathbf{Ab} \\ & & X & \mapsto & F(X) \oplus G(X) \\ & & f & \mapsto & \begin{pmatrix} F[f] & 0 \\ 0 & G[f] \end{pmatrix} \end{array}$$

  Ce foncteur est additif par propriété de l'addition matricielle et par additivité de F et G. Il possède des transformation naturelles de projection, en posant

$$\pi_F = \left(\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}\right)_{X \in \mathcal{A}}$$

$$\pi_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}\right)_{X \in \mathcal{A}}$$

  Soit $F \xleftarrow{\alpha} S \xrightarrow{\beta} G$ un candidat produit, on considère le morphisme $S \xrightarrow{u} F \oplus G$ défini par $u_X = \begin{pmatrix} \alpha_X & \beta_X \end{pmatrix}$. u est bien une transformation naturelle car, pour un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[d, "G[f]"'] & S(X) \arrow[l, "\beta_X"'] \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, dashed, "S[f]"] & F(X) \arrow[d, "F[f]"] \\ G(Y) & S(Y) \arrow[l, "\beta_Y"] \arrow[r, "\alpha_Y"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

  Par commutativité, on obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "S[f]"'] & F \oplus G(X) \arrow[d, "F \oplus G[f]"] \\ S(Y) \arrow[r, "u_Y"'] & F \oplus G(Y) \end{tikzcd}$$

Car $u_X(F \oplus G)[f] = \begin{pmatrix} F[f] \circ \alpha_X \\ G[f] \circ \beta_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_Y \circ S[f] \\ \beta_Y \circ S[f] \end{pmatrix} = u_Y \circ S[f]$.
Ce morphisme u est tel que $\pi_F \circ u = \alpha$ et $\pi_G \circ u = \beta$. Donc $F \oplus G$ est le produit de F et G.

- Soit $F \to G$ un morphisme de $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$, soit K tel que, pour tout $X \in \mathcal{A}$,

$$K(X) = \ker(F(X) \to G(X))$$

Alors, pour tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r] & F(X) \arrow[r, "(F \to G)_X"] \arrow[d, "F[f]"'] & G(X) \arrow[d, "G[f]"'] \\ K(Y) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "(F \to G)_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Puisque $K(X) \to F(X) \to G(X) = 0$, on a

$$K(X) \to F(X) \to G(X) \to G(Y) = K(X) \to F(X) \to F(Y) \to G(Y) = 0$$

et par la propriété des noyaux, il y a un unique morphisme $K(X) \xrightarrow{K[f]} K(Y)$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r] \arrow[d, "K[f]"'] & F(X) \arrow[r, "(F \to G)_X"] \arrow[d, "F[f]"'] & G(X) \arrow[d, "G[f]"'] \\ K(Y) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "(F \to G)_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Puisque $K[f]$ est unique, K est un foncteur et $K \to F$, définit comme $(K \to F)_X = \ker(F(X) \to G(X))$, est une transformation naturelle telle que $(K \to F \to G)_X = 0$.
Considérons une transformation naturelle $H \to F$ telle que $H \to F \to G = 0$, alors, par la propriété de noyau de chaque $K(X)$, on a le diagramme de factorisation suivant

$$\begin{tikzcd} H(X) \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & F(X) \arrow[dd, "F[f]"] \\ & K(X) \arrow[ur] & \\ H(Y) \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & F(Y) \\ & K(Y) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme il existe $K(X) \to K(Y)$ tel que

$$K(X) \to F(X) \to F(Y) = K(X) \to K(Y) \to F(Y)$$

on a

$$H(X) \to H(Y) \to K(Y) \to F(Y) = H(X) \to K(X) \to F(X) \to F(Y) = H(X) \to K(X) \to K(Y) \to F(Y)$$

et comme $K(Y) \to F(Y)$ est un monomorphisme, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} H(X) \arrow[r] \arrow[d] & K(X) \arrow[d] \\ H(Y) \arrow[r] & K(Y) \end{tikzcd}$$

Donc K est le noyau de $F \to G$ dans $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$.

- Enfin, $F \to G$ est un monomorphisme si et seulement si $F(X) \to G(X)$ en est un pour tout X.
Un monomorphisme de $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est donc le noyau de son co-noyau.

Cette preuve montre également qu'une suite $F \to G \to H$ est exacte dans $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$ si et seulement si $F(X) \to G(X) \to H(X)$ est exacte dans $\mathbf{Ab}$ pour tout X.

Définition 5.1.3 (Foncteur d'évaluation)

Le foncteur d'évaluation en X

$$\mathbf{eval}_X : \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$$

associe à chaque transformation naturelle $F \to G$ sa composante en X, $(F \to G)_X$.

On voit rapidement que $\mathbf{eval}_X$ est exact, et que le produit $\prod_{\mathcal{A}} \mathbf{eval}_X : F \mapsto \prod_{\mathcal{A}} F(X)$ est fidèle et exact, de même que le co-produit associé.

Théorème 5.1.4

La catégorie $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$ est complète.

Démonstration

Puisque $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$ est abélienne, elle possède tous les noyaux et co-noyaux, donc tous les égaliseurs et co-égaliseurs. Il reste à montrer qu'elle possède tous les produits et co-produits.
Soit (F_i) une famille de foncteurs. On pose $\prod F_i$ tel que

$$(\prod F_i)(X) = \prod F_i(X)$$

$$(\prod F_i)[X \to Y] = \prod F_i(X) \to \prod F_i(Y)$$

Puisque $\mathbf{Ab}$ est complète, $\prod F_i(X)$ existe et le le morphisme défini est unique. La fonctorialité est assurée par l'unicité de la factorisation par le produit dans $\mathbf{Ab}$.
Ainsi $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$ possède tous les produits (et duellement tous les co-produits), donc est complète.

Pour une petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, le co-produit $\coprod_{X\in\mathcal{A}} h_X$ existe dans $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$ par complétude.

Théorème 5.1.5

Pour une petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, $\coprod_{X\in\mathcal{A}} h_X$ est un générateur projectif de $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$.

Démonstration

Par le lemme de Yoneda, pour $F \in \mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$,

$$\mathrm{Hom}(h_X, F) \simeq F(X) = \mathbf{eval}_X(F)$$

Ainsi, puisque la transformation naturelle $\coprod_{X\in\mathcal{A}} h_X \to F$ est définie par ses composantes $(h_X \to F)_X$, on obtient

$$h_{\coprod_{X\in\mathcal{A}} h_X} \simeq \prod_{X\in\mathcal{A}} \mathbf{eval}_X$$

Puisque ce dernier foncteur est exact et fidèle, $\coprod_{X\in\mathcal{A}} h_X$ est un générateur projectif de $\mathrm{Add}(\mathcal{A},\mathbf{Ab})$.

Définition 5.1.6 (Catégorie AB5)

Une catégorie abélienne complète et raisonnable $\mathcal{A}$ est dite AB5 lorsque, pour chaque famille ordonnée de sous-objets (S_i) de tout objet A, et tout sous-objet S de A,

$$S \cap \bigcup_i S_i = \bigcup_i S \cap S_i$$

$\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ admettant un générateur projectif, elle est raisonnable.

Théorème 5.1.7

$\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est une catégorie AB5.

Démonstration

Soit (F_i) une famille totalement ordonnée de sous-foncteurs d'un foncteur F. Puisque les monomorphismes de $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ sont définis composante par composante, les intersections (et réunions) le sont également, on a donc

$$(\cup F_i)(X) = \cup F_i(X)$$
$$(\cap F_i)(X) = \cap F_i(X)$$

Ainsi, pour tout sous-foncteur G de F,

$$(G \cap \bigcup F_i)(X) = G(X) \cap \bigcup F_i(X) = \bigcup G(X) \cap F_i(X) = \bigcup (G \cap F_i)(X)$$

donc $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est une catégorie AB5.

Puisque les foncteurs h_X sont dans $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$, on peut restreindre les valeurs des plongements de Yoneda à variable abélienne à $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$.

Théorème 5.1.8

Le plongement de Yoneda contravariant $h_- : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ transforme les suites exactes à droite en suites exactes à gauche.

Démonstration

Soit $A \to B \to C \to 0$ une suite exate à droite de $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. On sait que

$$h_0 \to h_C \to h_B \to h_A$$

est exacte à gauche si et seulement si son évaluation

$$h_0(X) \to h_C(X) \to h_B(X) \to h_A(X) = h^X(0) \to h^X(C) \to h^X(B) \to h^X(A)$$

est exacte à gauche en tout objet, puisque h^X transforme les suites exactes à droite en suites exactes à gauche, h_- en fait de même.

On rappelle que le Lemme de Yoneda assure que h_- et h^- sont pleinement fidèles.

5.2 Enveloppe injective

Définition 5.2.1 (Section, rétraction)

Un monomorphisme f inversible à gauche (donc tel qu'il existe g tel que $g \circ f = \mathrm{id}$) est appelé section, ou est dit rétractable.
Duellement, un épimorphisme g inversible à droite est appelé rétraction, ou dit sécable.

Remarque

Si f est une section, alors son inverse à gauche est une rétraction, et duellement.

Définition 5.2.2 (Extension, extension triviale)

Dans le contexte des catégorie abéliennes, un monomorphisme $X \to Y$ est appelé extension de X.
Une extension est dite triviale si elle est rétractable.

Théorème 5.2.3

Une extension $X \to Y$ est triviale si et seulement si il existe Z tel que $Y = X \oplus Z$ et $X \to Y = X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Z$

Démonstration

Sens direct : Soit $K = \ker(Y \to X)$ et $Z = \operatorname{coker}(X \to Y)$. On applique le lemme 3×3 à

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Puisque $K \to Z = K \to Y \to Z$, ces deux morphismes sont des isomorphismes donc il existe $Z \to K$ tel que $K \to Y \to Z \to K = K \to Y \to K = \mathrm{id}$.
Puisque K et Z sont isomorphes, on a que $X \to Y \to Z$ et $Z \to Y \to X$ sont exactes. Ainsi, $Y = X \oplus Z$ et $X \to Y = X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Z$.

Sens réciproque : On a $X \xrightarrow{\iota_X} X \oplus Z \xrightarrow{\pi_X} = \mathrm{id}$

Lemme 5.2.4

Un objet I est injectif si et seulement si il n'admet que des extensions triviales.

Démonstration

Sens direct : Soit $I \to E$ une extension, alors par le théorème dual de 4.2.2, il existe un morphisme $E \to I$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & E \arrow[dl, dashed] \\
I &
\end{tikzcd}$$

Donc E est une extension triviale.

Sens réciproque : Soient $I \leftarrow A \to B$ des morphismes avec $A \to B$ un monomorphisme. Ces morphismes admettent une somme amalgamée

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
I \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Puisque $A \to B$ est un monomorphisme, $I \to S$ également, donc c'est une extension, triviale par hypothèse, on a donc par commutativité le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\
I &
\end{tikzcd}$$

Donc I est injectif.

Définition 5.2.5 (Extension essentielle)

Une extension $X \to Y$ est dite essentielle lorsque, pour tout autre extension non nulle $Z \to Y$, l'intersection de leurs images est non nulle.

Lemme 5.2.6

Une extension $X \to Y$ est essentielle si et seulement si, pour tout $Y \to Z$ tel que $X \to Y \to Z$ est un monomorphisme, $Y \to Z$ en est un.

Démonstration

Sens direct : Supposons par l'absurde que $Y \to Z$ ne soit pas un monomorphisme. Alors son noyau non nul $K \to Y$ est une extension. Par hypothèse $X \to Y$ et $K \to Y$ contiennent une extension non nulle $I \to Y$ et le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr] & \\ I \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y \\ & K \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Puisque $K \to Y \to Z = 0$, $I \to K \to Y \to Z = 0 = I \to X \to Y \to Z$. Mais $X \to Y \to Z$ et $I \to X$ sont des monomorphismes donc $I = 0$, ce qui contredit notre hypothèse.
Donc $Y \to Z$ est un monomorphisme.

Sens réciproque : Supposons par l'absurde que $A \to Y$ est une extension non nulle d'intersection nulle avec $X \to Y$. Soit $C = \mathrm{coker}(A \to Y)$ et $K = \ker(X \to Y \to C)$. Comme $K \to X \to Y$ est un monomorphisme, il est égal à son image. Donc $K \to X \to Y \to C = 0$ donc $K \to X \to Y$ se factorise par le noyau de $Y \to C$, donc par A.
Donc $K \to Y$ se factorise par X et par A, donc par leur intersection nulle. Donc $X \to Y \to C$ est un monomorphisme. Donc $Y \to C$ est un monomorphisme et un épimorphisme, donc un isomorphisme, donc $A = 0$.

Lemme 5.2.7

Une extension essentielle d'une extension essentielle est essentielle.

Démonstration

Soient $W \to X$ et $X \to Y$ deux extensions essentielles, soit $Y \to Z$ tel que $W \to X \to Y \to Z$ soit un monomorphisme, puisque $W \to X$ est essentielle, $X \to Y \to Z$ est un monomorphisme, puisque $X \to Y$ est essentielle, $Y \to Z$ est un monomorphisme, donc $W \to X \to Y$ est essentielle.

Théorème 5.2.8

Soient $X \to Y$ une extension essentielle dans une catégorie AB5 et (Y_i) une famille ordonnée de sous-objets de Y contenant X. Si chaque Y_i est une extension essentielle de X, alors leur union en est une.

Démonstration

Par définition des catégories AB5, pour toute extension non nulle $A \to \bigcup Y_i$,

$$A \cap \bigcup Y_i = \bigcup A \cap Y_i = 0$$

donc $\bigcup Y_i$ est une extension essentielle.

Théorème 5.2.9

Dans une catégorie AB5, un objet est injectif si et seulement si il ne possède aucune extension essentielle propre.

Démonstration

Sens direct : Par le dual du théorème 4.2.2, les extensions propres essentielles d'un injectif sont triviales, et le lemme 5.2.3 définit une injection d'intersection nulle avec ces extensions. Ainsi, aucune extension propre n'est essentielle.

Sens réciproque : Soit I sans extension propre essentielle et $I \to E$ une extension. On veut montrer que $I \to E$ est triviale.
Posons $\mathcal{F}$ l'ensemble partiellement ordonné des sous-objets de E qui d'intersection nulle avec $I \to E$. Pour toute sous-famille totalement ordonnée (X_i) de $\mathcal{F}$, par définition des catégories AB5,

$$I \cap \bigcup X_i = \bigcup I \cap X_i = 0$$

Donc $\bigcup X_i \in \mathcal{F}$. Le lemme de Zorn assure que $\mathcal{F}$ admet un élément maximum M. On considère donc maintenant la famille des quotients associés à $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$, et son élément maximum M^*.
Soit $Q \in \mathcal{F}^*$, par construction $\ker(E \to Q) \to E$ est d'intersection nulle avec $I \to E$ donc $E \to Q$ est un monomorphisme et $I \to E \to Q$ est un monomorphisme. Soit $E \to R$ un morphisme tel que $I \to E \to R$ soit un monomorphisme. Alors son noyau K est nul et se factorise par le noyau K' de $E \to R$. Tout sous-objet $S \to E$ contenu dans l'intersection de I et K' vérifie Donc

$$0 = S \to K' \to E \to R = S \to I \to E \to R$$

Donc S est contenu dans K, mais $K = 0$ donc $S = 0$ donc $Q \in \mathcal{F}^*$ si et seulement si $I \to E \to Q$ est un monomorphisme.
On a donc une extension $I \to E \to M^*$. Supposons qu'on ait un monomorphisme $I \to E \to M^* \to Y$, alors $Y \in \mathcal{F}^*$. Puisque la co-image agit comme identité sur les quotients, $E \to Y$ est contenu dans $E \to M^*$. Par minimalité de M^*, $Y \to M^*$ est un monomorphisme, donc $I \to E \to M^*$ est une extension essentielle, mais comme il n'y a pas d'extension essentielle propre, $I \simeq M^*$.
Ainsi $I \to E$ est une extension triviale et I est injectif.

Définition 5.2.10 (Enveloppe injective)

Une enveloppe injective est une extension essentielle injective.

Théorème 5.2.11

Dans une catégorie AB5, pour un ensemble ordonné I et une famille de monomorphismes $(E_i \to E_j)_{i<j}$ telle que, pour $i < j < h$,

$$E_i \to E_j \to E_h = E_i \to E_h$$

il existe E et $(E_i \to E)_i$ tels que, pour $i < j$,

$$E_i \to E_j \to E = E_i \to E$$

Démonstration

On pose $S = \coprod_I E_i$ et $(E_i \xrightarrow{\iota_i} S)$. On définit également, pour $j \in I$, $h_j : S \to S$ tel que

$$E_i \to S \xrightarrow{h_j} S = \begin{cases} E_i \to E_j \to S & \text{si } i < j \\ E_i \to S & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $S \xrightarrow{h} E$ le co-noyau de $\bigcup_I \ker(h_j)$ (on note que $(\ker(h_j))_j$ est totalement ordonnée car $S \xrightarrow{h_{j'}} S = S \xrightarrow{h_j} S \xrightarrow{h_{j'}} S$), la démonstration précédente implique que $E_i \to S \xrightarrow{h} E$ est un monomorphisme si et seulement si

$$\mathrm{im}(E_i \to S) \cap \bigcup_I \ker(h_j) = 0$$

C'est bien le cas par définition des catégories AB5 et puisque chaque $h_j \circ \iota_i$ est un monomorphisme.

Remarque

On désigne également E comme la co-limite filtrée de la famille (E_i). On désigne duellement la limite co-filtrée.
On a également une caractérisation des catégories AB5, ce sont des catégories abéliennes admettant toutes les co-limites filtrées (et duellement toutes les limites co-filtrées).

Lemme 5.2.12

Ab admet $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ comme co-générateur.

Démonstration

Soit G un groupe abélien, soit $g \neq 0$ dans G. On pose

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\langle g \rangle} & : & \langle g \rangle \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ & & kg \mapsto \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } |g| = \infty \\ \frac{k}{n} & \text{si } |g| = n \end{cases} \end{array}$$

On considère l'ensemble partiellement ordonné $\{(H, \phi_H)\}$ avec $\langle g \rangle \leq H \leq G$ et

$$(H, \phi_H) \leq (H', \phi_{H'}) \iff H \leq H' \text{ et } \phi_H = \phi_{H'}|_H$$

Chaque sous-ensemble totalement ordonné $\{(H_i, \phi_{H_i})\}$ admet un majorant de la forme $(\cup H_i, \phi_{\cup H_i})$, donc par le lemme de Zorn, il y a un élément maximal (M, ϕ_M). Montrons que $G = M$.
Supposons par l'absurde que $G \neq M$, soit $x \in G \setminus M$. On pose

$$\begin{array}{rcl} \phi_{M+\langle x \rangle} & : & M + \langle x \rangle \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ & & x \mapsto \begin{cases} \phi_M(nx) & \text{si } M \cap \langle x \rangle = \langle nx \rangle \\ -\phi_M(0) & \text{si } M \cap \langle x \rangle = \{0\} \end{cases} \end{array}$$

On a construit une extension de ϕ_M, ce qui contredit sa maximalité, donc $M = G$. On a donc bien définit $\phi_g : G \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $\phi_g(g) \neq 0$.

Soit $\alpha : G \rightarrow H$ non nul. Il existe donc $g \in G$ tel que $h = \alpha(g) \neq 0$.
Par ce qui précède, il existe $\phi_H : H \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $\phi_H(h) \neq 0$.
Puisque $h^{\mathbf{Q}/\mathbf{Z}}[\alpha]$ envoie ϕ_H sur $\phi_H \circ \alpha$, et puisque $\phi_H(\alpha(h)) \neq 0$, $h^{\mathbf{Q}/\mathbf{Z}}[\alpha] \neq 0$.
Ainsi, $h^{\mathbf{Q}/\mathbf{Z}}$ est un foncteur additif non nul pour un paramètre non nul. Donc $h^{\mathbf{Q}/\mathbf{Z}}$ est fidèle, donc $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ co-génère $\mathbf{Ab}$.

Théorème 5.2.13

Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$, $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ admet un co-générateur.

Démonstration

Soit $X \in \mathcal{A}$. On pose le foncteur additif

$$\begin{array}{rcl} C_X^* & : & \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab} \\ & & Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \end{array}$$

Pour $F \in \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ et $0 \neq g \in F(X)$, par la preuve du lemme précédent, il existe un morphisme $\beta : F(X) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $\beta(g) \neq 0$. On pose alors, pour $Y \in \mathcal{A}$

$$\begin{array}{rcl} \phi_{X,Y} & : & F(Y) \rightarrow C_X^*(Y) \\ & & y \mapsto [\gamma \mapsto \beta(F[\gamma](y))] \end{array}$$

Puisque, pour $g \in F(X)$, $\phi_{X,X}(g) = [\mathrm{id}_X \mapsto \beta(g) \neq 0]$, $\phi_{X,X} \neq 0$.
On pose alors $C^* = \prod_{X \in \mathcal{A}} C_X^*$ et ϕ l'unique morphisme tel que

$$F \xrightarrow{\phi} C^* \xrightarrow{\pi_X} C_X^* = F \xrightarrow{\phi_X} C_X^*$$

On voit que $\phi \neq 0$. On a donc associé à chaque foncteur additif F un morphisme $\phi : F \rightarrow C^*$.

Soit $\tau : F \rightarrow G$ non nul, alors il existe g dans un certain $F(X)$ tel que $h = \tau_X(g) \neq 0$. Par ce qui précède, on a un morphisme $\phi : G \rightarrow C^*$ tel que $\phi_X(h) \neq 0$, donc $\phi \circ \tau \neq 0$.
Puisque $h^{C^*}[\tau]$ agit sur $\phi \in \mathrm{Nat}(G, C^*)$ en lui associant $\phi \circ \tau$, $h^{C^*}[\tau] \neq 0$.
h^{C^*} est donc un foncteur additif préservant les morphismes non nuls, il est fidèle. Donc C^* co-génère $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$.

Par l'axiome du choix, on peut définir pour chaque catégorie AB5 une fonction E qui associe à chaque objet une de ses extensions essentielles propres, si aucune n'existe, l'objet est donc injectif et est associé à lui-même.

Par récurrence on définit $E^{n+1} = E \circ E^n$ et, pour un ordinal limite α, on définit E^α comme associant l'extension minimale commune à tous les E^n pour $n < \alpha$. Le théorème 5.2.11 assure que cet objet existe et on remarque que la suite $(E^n(X))_n$ devient stationnaire si et seulement si elle atteint une enveloppe injective de X.

Théorème 5.2.14

Dans une catégorie AB5 admettant un générateur G et un co-générateur C, tout objet admet une enveloppe injective.

Démonstration

Soit X un objet, soit $X \to E$ une extension essentielle. Par propriété du co-générateur, pour chaque $G \xrightarrow{x} X$ tel que $G \xrightarrow{x} X \to E \neq 0$, il existe $E \xrightarrow{f(x)} C$ tel que

$$G \xrightarrow{x} X \to E \xrightarrow{f(x)} C \neq 0$$

Soit $X \to E \xrightarrow{y} C^{\mathrm{Hom}(G,X)}$ tel que

$$E \xrightarrow{y} C^{\mathrm{Hom}(G,X)} \xrightarrow{\pi_x} C = f(x)$$

Montrons que y est un monomorphisme.
Supposons qu'il n'en soit pas un, soit $K \to X$ son noyau non nul. Par propriété du générateur, il existe $G \to K$ tel que $z = G \to K \to X \neq 0$. Cependant, on a alors

$$G \to K \to X \to E \xrightarrow{y} C^{\mathrm{Hom}(G,X)} \xrightarrow{\pi_z} C = G \xrightarrow{z} X \to E \xrightarrow{f(z)} C \neq 0$$

Mais $K \to X \to E \xrightarrow{y} C^{\mathrm{Hom}(G,X)} = 0$ par définition du noyau.
Donc $X \to E \xrightarrow{y} C^{\mathrm{Hom}(G,X)}$ est un monomorphisme, donc y également, puisque $X \to E$ est une extension essentielle.
Ainsi, toute extension essentielle de X est isomorphe à un sous-objet de $C^{\mathrm{Hom}(G,X)}$.

Comme les catégories AB5 sont raisonnables, la famille des sous-objets de $C^{\mathrm{Hom}(G,X)}$ forme un ensemble, donc il existe un ordinal Ω plus grand que la cardinalité de cet ensemble, donc la suite $(E^n(X))$ est nécessairement stationnaire à partir de Ω, donc X admet une enveloppe injective.

Remarque

De telles catégories (AB5 admettant un générateur et un co-générateur) sont appelées catégories de Grothendieck.

Corollaire 5.2.15

$\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est une catégorie de Grothendieck.

Tout objet de $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ admet une enveloppe injective.

Démonstration

Les théorèmes 5.1.5, 5.1.7 et 5.2.13 assurent que $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est une catégorie AB5 admettant un générateur et un co-générateur.

Chapitre 6

Le théorème de plongement

Dans ce dernier chapitre, on démontre finalement le théorème de plongement de Freyd-Mitchell.

6.1 Foncteurs monos

Lemme 6.1.1

Soit I un objet injectif de $\mathrm{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab})$. Alors I est exact à droite.

Démonstration

Soit $X \to Y \to Z \to 0$ une suite exacte à droite. Par le théorème 5.1.8, la suite

$$h_0 \to h_Z \to h_Y \to h_X$$

est exact à gauche. Puisque I est injectif,, la suite

$$\mathrm{Hom}(h_X, I) \to \mathrm{Hom}(h_Y, I) \to \mathrm{Hom}(h_Z, I) \to 0$$

est exact à droite. Le lemme de Yoneda assure alors que $\mathrm{Hom}(h_X, I) \simeq I(X)$, donc la suite

$$I(X) \to I(Y) \to I(Z) \to 0$$

est exacte et I est exact à droite.

Définition 6.1.2 (Foncteur mono)

Un foncteur est dit mono lorsqu'il préserve les monomorphismes.

On remarque que les foncteurs mono injectifs sont exacts.

Lemme 6.1.3 (Lemme essentiel)

Soit $M \to E$ une extension essentielle dans $\mathrm{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab})$. Si M est mono, alors E également.

Démonstration

Supposons que E ne soit pas mono, alors il existe un monomorphisme $A \xrightarrow{m} B$ dans $\mathcal{B}$ tel que $E(A) \xrightarrow{E[m]} E(B)$ ne soit pas un monomorphisme de $\mathbf{Ab}$. Il existe donc x non nul dans $E(A)$ tel que $E[m](x) \neq 0$. On considère le sous-foncteur $F \to E$ définit par

$$F(Y) = \{y \in E(Y) \mid \exists A \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{B},\ E[f](x) = y\}$$

Pour $X \to Y$, on a $E[X \to Y](F(X)) \subset F(Y)$ donc on peut définir $F[X \to Y]$ par restriction, on voit alors que F est un foncteur à valeurs dans $\mathbf{Ens}$.

- Puisque $E[0](x) = 0$, $0 \in F(Y)$;
- Pour $a \in Y$, avec $E[f](x) = a$ et $b \in Y$ avec $E[g](x) = b$,

$$E[f+g](x) = E[f](x) + E[g](x) = a + b$$

Donc $a+b \in F(Y)$

- Pour $a \in Y$, avec $E[f](x) = a$,

$$E[-f](x) = -E[f](x) = -a$$

Donc $-a \in F(Y)$.

Donc F est à valeurs dans **Ab**.
Puisque $x \in F(A) \subset E(A)$, F n'est pas nul. Comme $M \subset E$ est essentielle, $M \cap F \neq 0$ et, pour un certain X, $F(X) \cap M(X) \neq 0$. Soit y dans cette intersection. Il existe $A \to X$ tel que $E[A \to X](x) = y$, on considère alors la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ X \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

Puisque $A \to B$ est un monomorphisme, $X \to P$ en est également un. Puisque M est mono, $M[X \to P](y) \neq 0$ et, comme $M \to E$ est une transformation naturelle, on a

$$0 \neq E[X \to P](y) = E[A \to X \to P](x) = E[A \to B \to P](x) = 0$$

Ainsi, E doit être mono.

Corollaire 6.1.4

Dans $\mathrm{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab})$, un objet est sous-objet d'un foncteur exact si et seulement si il est mono.

Démonstration

Sens direct : Soit $M \xrightarrow{\alpha} E$ un sous-objet d'un foncteur exact. Soit $X \to Y$ un monomorphisme. Puisque E est exact, $E[X \to Y]$ est un monomorphisme. Comme α est un monomorphisme, chaque composante α_X est un monomorphisme, on a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d] & E(X) \arrow[d] \\ M(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & E(Y) \end{tikzcd}$$

Comme $M(X) \to M(Y) \xrightarrow{\alpha_Y} E(Y) = M(X) \xrightarrow{\alpha_X} E(X) \to E(Y)$ est un monomorphisme, $M[X \to Y]$ en est un, donc M est mono.

Sens réciproque : Comme $\mathrm{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab})$ est une catégorie de Grothendieck, un foncteur mono a une enveloppe injective $M \to E$. Par le théorème précédent, E est mono. Par le lemme 6.1.1, E est exact à droite et préserve les monomorphismes, donc est exact.

Lemme 6.1.5

Si $\mathcal{B}$ est une petite catégorie abélienne, alors $\coprod_{X \in \mathcal{B}} h_X$ est un foncteur mono.

Démonstration

Soit $A \xrightarrow{m} B$ un monomorphisme, $m_X = h_X[m]$ est un monomorphisme par exactitude à gauche. On pose $\mu = \prod_{X \in \mathcal{B}} h_X[m]$.
Comme, dans **Ab**, les éléments d'un co-produits sont définis comme les éléments du produit direct avec au plus un nombre fini de composante non nulle, pour $k \in \ker(\mu)$, de la forme (k_X), on a

$$0 = \mu((k_X)) = (m_X(k_X))$$

Comme chaque m_X est un monomorphisme, $k_X = 0$ pour tout X, donc $\ker(\mu) = 0$ et $\coprod_{X \in \mathcal{B}} h_X$ est un foncteur mono.

Lemme 6.1.6

Si $\mathcal{B}$ est une petite catégorie abélienne, alors $\coprod_{X \in \mathcal{B}} h_X$ est fidèle.

Démonstration

Soit $A \xrightarrow{f} B$ non nul. Le morphisme induit $\mathrm{Hom}(A, A) \to \mathrm{Hom}(A, B)$ envoie id sur $f \neq 0$. Donc $\coprod_{X \in \mathcal{B}} h_X[f]$ a au moins une composante non nulle et est donc non nul.
Puisque $\coprod_{X \in \mathcal{B}} h_X$ préserve les morphismes non nuls, il est fidèle.

Théorème 6.1.7

Toute petite catégorie abélienne est très abélienne.

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{B}$, il existe un foncteur exact et fidèle $\mathcal{B} \to \mathbf{Ab}$.

Démonstration

L'enveloppe injective E du foncteur $\coprod_{X \in \mathcal{B}} h_X$ est exacte car $\coprod_{X \in \mathcal{B}} h_X$ est mono (corollaire 6.1.4), et est fidèle car c'est une extension d'un foncteur fidèle.

Proposition 6.1.8

La sous-catégorie pleine des foncteurs monos de $\mathrm{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab})$ admet toutes les extension essentielles, les sous-objets et les produits.

Démonstration

- Par le lemme 6.1.3, l'extension essentielle d'un foncteur mono est mono.
- Pour un sous-foncteur $F \to M$ d'un foncteur mono, puisque $F \to M$ est un monomorphisme, chaque $F(X) \to M(X)$ en est un. Pour un monomorphisme $X \to Y$, on a donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d] & M(X) \arrow[d] \\ F(Y) \arrow[r] & M(Y) \end{tikzcd}$$

  et $F(X) \to F(Y) \to M(Y) = F(X) \to M(X) \to M(Y)$ est un monomorphisme.
  On a alors que $F[X \to Y]$ est un monomorphisme donc F est mono.
- On montre que le produit de deux foncteurs monos est mono de la même façon que dans 6.1.5.

6.2 Réflexions, torsions

Au regard de la dernière proposition de la section précédente, on définit des objets monos de façon plus générale.

Définition 6.2.1 (Objet mono)

Soit $\mathcal{B}$ une catégorie AB5 avec des enveloppes injectives. Soit $\mathcal{M}$ une sous-catégorie pleine admettant les sous-objets, les produits et les extensions essentielles.
Les objets de $\mathcal{M}$ sont dit mono.

Lemme 6.2.2

Pour tout $A \in \mathcal{B}$, il existe un quotient maximal $A \to M(A)$ dans $\mathcal{M}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{F}$ la famille des quotients monos de A, on pose $M(A) = \mathrm{coim}(A \to \prod_{X \in \mathcal{F}} X)$. Par propriété de la co-image, il existe un unique monomorphisme $M(A) \to \prod_{X \in \mathcal{F}} X$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} M(A) \arrow[dr] & \\ A \arrow[u] \arrow[r] & \prod_{X \in \mathcal{F}} X \end{tikzcd}$$

Ainsi, $M(A) \to \prod_{X \in \mathcal{F}} X$ est un sous-objet d'un objet de $\mathcal{M}$, donc $M(A) \in \mathcal{M}$.
Il reste à montrer que $M(A)$ est maximal.
Soit $A \to Q$ un autre quotient, on a $M(A) \to \prod_{X \in \mathcal{F}} X \xrightarrow{\pi} Q$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & M(A) \arrow[dd] \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & Q \end{tikzcd}$$

Donc $M(A)$ contient Q, et est donc maximal.

Définition 6.2.3

$M(B)$ est appelé <u>réflexions de B</u>.

Lemme 6.2.4

Soient $A \in \mathcal{B}$, $M \in \mathcal{M}$ et $A \to M$, il existe un unique morphisme $M(A) \to M$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & M(A) \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

Démonstration

Soit $A \to C$ la co-image de $A \to M$. Par propriété de la co-image, il y a un unique monomorphisme $C \to M$, donc $C \in \mathcal{M}$. Par maximalité de $M(A)$, il y a un morphisme $M(A) \to C$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & M(A) \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd}$$

$C \to M$ est tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & C \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

En composant ces deux diagrammes, on obtient bien $M(A) \to M = M(A) \to C \to M$, dont l'unicité est assurée par le fait que $A \to M(A)$ soit un épimorphisme.

Corollaire 6.2.5

$M : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ est un foncteur additif.

Démonstration

Pour $A \in \mathcal{B}$, $M[\mathrm{id}_A] = \mathrm{id}_{M(A)}$ car le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M(A) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ A \arrow[r] & M(A) \end{tikzcd}$$

Soit $A \to B \to C$ un morphisme de $\mathcal{B}$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ M(A) \arrow[r] & M(B) \arrow[r] & M(C) \end{tikzcd}$$

avec des morphismes uniques $M(A) \to M(B)$ et $M(B) \to M(C)$, donc $M[B \to C] \circ M[A \to B] = M[A \to B \to C]$. Donc M est bien un foncteur.

Soit $A \to B \to M(B)$ un morphisme de $\mathcal{B}$, par le lemme précédent, il existe un unique morphisme $M(A) \to M(B)$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & M(A) \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & M(B) \end{tikzcd}$$

Cette unicité force M à être additif, puisque pour $x, y : A \rightrightarrows B$, on a

$$M[x+y] \circ \alpha = \beta \circ (x+y) = \beta \circ x + \beta \circ y = M[x] \circ \alpha + M[y] \circ \alpha = (M[x] + M[y]) \circ \alpha$$

et par unicité, $M[x+y] = M[x] + M[y]$.

Définition 6.2.6 (Torsion)

Un objet $T \in \mathcal{B}$ est un objet de torsion (ou simplement une torsion) lorsque, pour tout $M \in \mathcal{M}$, $\mathrm{Hom}(T, M) = 0$.

Lemme 6.2.7

Un objet T est une torsion si et seulement si $M(T) = 0$.

Démonstration

Sens direct : Puisque $\mathrm{Hom}(T, M(T)) = 0$, l'épimorphisme $T \to M(T)$ est nul, et $M(T)$ est donc nécessairement nul.

Sens réciproque : Par le lemme 6.2.3, si $M(T) = 0$, alors $T \to M$ est forcément nul pour tout $M \in \mathcal{M}$, donc T est une torsion.

Lemme 6.2.8

$K = \ker(A \to M(A))$ est le plus grande sous-objet de torsion de A.

Démonstration

Soit $T \to A$ un sous-objet de torsion de A, par le lemme 6.2.3, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & M(T) \arrow[d] \\ A \arrow[r] & M(A) \end{tikzcd}$$

Puisque $M(T) = 0$, $T \to A \to M(A) = 0$ et T se factorise par K, donc si K est une torsion, alors c'est le plus grand sous-objet de torsion de A.

Soient $B \in \mathcal{M}$, un morphisme $K \to B$ et la suite exacte $0 \to K \to A \to M(A) \to 0$. Comme $B \in \mathcal{M}$, son enveloppe injective E l'est également, par injectivité, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

et par le lemme 6.2.3, on a $M(A) \to E$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & M(A) \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\ & B \arrow[r] & E & & \end{tikzcd}$$

Puisque $0 = K \to A \to M(A) \to E = K \to B \to E$, et comme $B \to E$ est un monomorphisme, $K \to B = 0$, et K est une torsion.

6.3 Sous-objets purs

Notation

Pour un sous-objet $A \to B$, on note $B \to B/A$ le quotient associé.

Définition 6.3.1 (Sous-objet pur)

Un sous-objet $A \to M$ de $\mathcal{M}$ est dit pur si la suite exacte $0 \to A \to M \to M/A \to 0$ est dans $\mathcal{M}$, donc si M/A est mono.

Définition 6.3.2 (Objet absolument pur)

Un objet mono est dit absolument pur si, vu comme sous-objet de n'importe quel autre objet, il est pur.

Lemme 6.3.3

Les objets mono injectifs sont absolument purs.

Démonstration

Soit E un injectif de $\mathcal{M}$ et $E \to M$ un sous-objet de $\mathcal{M}$. Par définition de l'injectivité, il y a un morphisme $M \to E$ tel que $E \to M \to E = \mathrm{id}_E$, donc $E \to M$ est triviale. On a donc $E \to M = E \xrightarrow{\imath_E} E \oplus \mathrm{coker}(E \to M)$, et $M/E \to M$ est un sous-objet, donc $M/E \in \mathcal{M}$. Donc E est absolument pur.

Lemme 6.3.4

Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte dans $\mathcal{B}$ avec A et C dans $\mathcal{M}$, alors $B \in \mathcal{M}$.

Démonstration

Soit $A \to E$ une enveloppe injective. Puisque $\mathcal{M}$ admet les extensions essentielles, $E \in \mathcal{M}$. Puisque $A \to B$ est un monomorphisme, par injectivité de E, il existe $B \to E$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & E \end{tikzcd}$$

On considère donc le morphisme induit $B \to E \oplus C$. Puisque $E \oplus C \in \mathcal{M}$, il suffit de prouver que $B \to E \oplus C$ est un monomorphisme.

Soient $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ tels que $X \xrightarrow{f} B \to E \oplus C = X \xrightarrow{g} B \to E \oplus C$. Alors $X \xrightarrow{f-g} B \to E \oplus C = 0$, donc

$$X \xrightarrow{f-g} B \xrightarrow{C} = X \xrightarrow{f-g} B \to E \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C = 0$$

et $X \xrightarrow{f-g} B$ se factorise par $A \to B$.

Cependant, $0 = X \xrightarrow{f-g} B \to E \oplus C \to E = X \to A \to E$, mais $A \to E$ est un monomorphisme, donc $X \to A = 0$, donc $f - g = 0$, donc $B \to E \oplus C$ est un monomorphisme.

Donc $B \in \mathcal{M}$.

Lemme 6.3.5

Un sous-objet pur d'un objet absolument pur est absolument pur.

Démonstration

Soit A un objet absolument pur et $P \to A$ un sous-objet pur de A. Soit $P \to M$ un monomorphisme. On considère la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ M \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

qui nous donne le diagramme commutatif exact suivant

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/P \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R/M \arrow[r] & 0 \\ & M/P \arrow[d] & R/A \arrow[d] & & \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Comme $P \to M \to R \to R/M = 0 = P \to A \to R \to R/M$, par la propriété des co-noyaux, $A \to A/P$ se factorise par $A \to R \to R/M$.

Par définition d'une somme amalgamée, puisque $0 = P \to A \to A/P = P \to M \xrightarrow{0} A/P$, $M \to R \to A/P = 0$ et par propriété du co-noyau, il existe $R/M \to A/P$ tel que

$$R \to R/M \to A/P = R \to A/P$$

Montrons que $A/P \to R/M$ et $R/M \to A/P$ définissent un isomorphisme.

On considère le morphisme $0 = P \to A \to A/P \to R/M \to A/P$, il se factorise par son co-noyau, mais l'unicité de cette factorisation impose que $A/P \to R/M \to A/P = \mathrm{id}$.

Un argument similaire impose que $R/M \to A/P \to R/M = \mathrm{id}$. On a bien un isomorphisme et la suite $0 \to A/P \to R/M \to 0$ est exacte.

Similairement, on définit un isomorphisme $M/P \to R/A$ et on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A/P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R/M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M/P \arrow[r] \arrow[d] & R/A \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Comme P est pur, $A/P \simeq R/M$ est mono. Comme M est mono, par le lemme 6.3.4, R est mono. Comme A est absolument pur, $R/A \simeq M/P$ est mono. Donc P est absolument pur.

Lemme 6.3.6

Un sous-objet $M \to L$ d'un foncteur exact à gauche dans $\mathrm{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab})$ est pur si et seulement s'il est exact à gauche.

Démonstration

Soit $M \in \mathrm{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab})$ un sous-objet d'un foncteur exact à gauche L, on pose $C = \mathrm{coker}(M \to L)$. La suite $0 \to M \to L \to C \to 0$ est exacte dans $\mathrm{Add}(\mathcal{B}, \mathbf{Ab})$. Soit $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ une suite exacte dans $\mathcal{B}$. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & M(X) \arrow[r] \arrow[d] & M(Y) \arrow[r] \arrow[d] & M(Z) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & L(X) \arrow[r] \arrow[d] & L(Y) \arrow[r] \arrow[d] & L(Z) \\
0 \arrow[r] & C(X) \arrow[r] \arrow[d] & C(Y) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

La commutativité est obtenue par définition des transformations naturelles, la ligne du milieu est exact par exactitude de L, les colonnes sont exactes par exactitude du foncteur **eval**. Le lemme 3.6.7 assure donc que la première ligne est exacte si et seulement si la dernière l'est, donc si et seulement si C est mono. Donc $M \to L$ est pure si et seulement si M est exact à gauche.

Théorème 6.3.7

Un foncteur mono M est absolument pur si et seulement s'il est exact à gauche.

Démonstration

M est un sous-objet de son enveloppe injective E. E est absolument pure, exact à droite et préserve les monomorphismes. Ceci assure que E est exact, et en particulier à gauche.
Si M est absolument pur, alors $M \to E$ est pur et le lemme précédent nous assure que M est exact à gauche.
Si M est exact à gauche, comme c'est un sous-objet de son enveloppe injective E. Comme E est un foncteur exact à gauche, il est pur. Le lemme 6.3.5 assure que M est absolument pur.

Définition 6.3.8

Soit $\mathcal{B}$ une catégorie AB5 avec des enveloppes injectives. Soit $\mathcal{M}$ une sous-catégorie pleine admettant les sous-objets, les produits et les extensions essentielles. On note $\mathcal{L}$ la sous-catégorie pleine des objets absolument purs de $\mathcal{M}$.

Définition 6.3.9 (Réflexion dans $\mathcal{L}$)

Pour $M \in \mathcal{M}$ et $R \in \mathcal{L}$, on dit que $M \to R$ est une réflexion de M dans $\mathcal{L}$ lorsque, pour chaque $L \in \mathcal{L}$, il existe $R \to L$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[d] \\
M \arrow[ur] \arrow[r] & L
\end{tikzcd}$$

Théorème 6.3.10 (Théorème de reconnaissance)

Si la suite $0 \to M \to R \to T \to 0$ est exacte dans $\mathcal{B}$ avec M mono, R abolument pur et T une torsion, alors $M \to R$ est une réflexion de M dans $\mathcal{L}$.

Démonstration

Soit $M \to L$ avec $L \in \mathcal{L}$. On considère sont enveloppe injective E, et le co-noyau de cette enveloppe $C = \mathrm{coker}(L \to E)$. On forme alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & E \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$R \to E$ existe par injectivité de E et $T \to C$ existe par propriété de co-noyau de T puisque $M \to R \to E \to C = M \to L \to E \to C = 0$.

Par le lemme essentiel (6.1.3), E est mono, puisque L est absolument pur, C est mono. Comme T est une torsion, $\mathrm{Hom}(T,C) = 0$ et $T \to C = 0$. On considère donc $C' = \mathrm{coker}(R \to E)$. Puisque $0 = R \to T \to C = R \to E \to C$, on a un morphisme $C' \to C$ tel que $E \to C = E \to C' \to C$. L'image I de $R \to E$ est telle que $0 = I \to E \to C' \to C = I \to E \to C$, donc $I \to E$ est contenue dans $L \to E$ et on obtient un morphisme $R \to L = R \to I \to L$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[d] \\
M \arrow[ur] \arrow[r] & L
\end{tikzcd}$$

Si ce morphisme n'était pas unique, alors on aurait f et g tels que $M \to R \xrightarrow{f-g} L = 0$. Par propriété de co-noyau de T, $R \to T \to L = R \xrightarrow{f-g} L$, mais comme T est une torsion, $T \to L = 0$, donc $f - g = 0$ et $R \to L$ est unique, donc $M \to R$ est bien la réflexion de M dans $\mathcal{L}$.

Théorème 6.3.11 (Théorème de construction)

Pour tout $M \in \mathcal{M}$, il existe un monomorphisme $M \to R$ qui est une réflexion de M dans $\mathcal{L}$.

Démonstration

On considère l'enveloppe injective $M \to E$, son co-noyau C et l'objet mono $M(C)$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & M(C) \arrow[r] \arrow[d] & M(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

avec des lignes exactes. Par le lemme 6.2.8, $T = \ker(C \to M(C))$ est une torsion et $0 \to T \to C \to M(C) \to 0$ est exacte. On pose $R = \ker(E \to M(C))$, alors $0 \to R \to E \to M(C) \to 0$ est exacte. Puisque $0 = R \to E \to M(C) = R \to E \to C \to M(C)$, $R \to E \to C$ se factorise par le noyau $T \to C$. Puisque $M \to E \to M(C) = M \to E \to C \to M(C) = 0$, $M \to E$ se factorise par $R \to E$ et le diagramme suivant, dont les colonnes et les deux dernières lignes sont exactes, commute

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & M(C) \arrow[r] \arrow[d] & M(C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Le lemme 3×3 assure alors que $0 \to M \to R \to T \to 0$ est exacte. Comme $M(C) \in \mathcal{M}$ par définition, $R \to E$ est pure, donc E est absolument pure, donc R également. Comme $M \in \mathcal{M}$ et comme T est une torsion, le théorème de reconnaissance assure que $M \to R$ est bien une réflexion de M dans $\mathcal{L}$.

Par une preuve identique à celle du corollaire 6.2.5, on obtient

Corollaire 6.3.12

$R : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$, qui associe à tout objet sa réflexion dans $\mathcal{L}$, est un foncteur additif.

Lemme 6.3.13

Un objet L est dans $\mathcal{L}$ si et seulement si $L \simeq R(L)$.

Démonstration

Sens direct : En posant $R(L) = R$ et T comme dans la preuve du théorème de construction, comme L est absolument pur, $T \in \mathcal{M}$, donc T a une enveloppe injective $T \to E$, mais alors $T \to E = 0$, comme c'est un monomorphisme, il est nul, donc $T = 0$.
Dans le théorème de construction, on a donc $0 \to L \to R \to 0$ exacte, donc $L \simeq R(L)$.

Sens réciproque : Si $L \simeq R(L)$, comme $R(L)$ est absolument pur, L également.

Théorème 6.3.14

$\mathcal{L}$ est une catégorie abélienne et tout objet y admet une enveloppe injective.

Démonstration

- Le foncteur nul fait office d'objet nul.
- Pour X et Y dans $\mathcal{L}$, comme R est additif, il préserve les sommes directes et $R(X \oplus Y) = R(X) \oplus R(Y)$. Par le lemme précédent, $R(X \oplus Y) = R(X) \oplus R(Y) \simeq X \oplus Y$, donc $X \oplus Y \in \mathcal{L}$.

- Soit $X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{B}$-noyau $K \to X$. Comme $\mathcal{M}$ admet les sous-objets, $K \in \mathcal{M}$ et le lemme assure que $K \in \mathcal{L}$. Donc K est le $\mathcal{L}$-noyau de $X \to Y$.
- Pour $X \to Y$ dans $\mathcal{L}$, de $\mathcal{B}$-co-noyau $Y \to C$, on considère le morphisme $Y \to C \to M(C) \to R(M(C))$, montrons que c'est le $\mathcal{L}$-co-noyau de $X \to Y$. Par propriété de co-noyau, on a $X \to Y \to C \to M(C) \to R(M(C)) = 0$. Supposons qu'il existe un autre morphisme $X \to Y \to A = 0$, alors $Y \to A$ se factorise uniquement par $Y \to C$. Par définition des réflexions, on a un unique morphisme $M(C) \to A$ et $R(M(C)) \to A$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[rr] \arrow[dr] & & M(C) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Y \arrow[ur] \arrow[rr] & & A & & R(M(C)) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

  Donc $Y \to C \to M(C) \to R(M(C))$ est le $\mathcal{L}$-co-noyau de $X \to Y$.
- Soient $X \to Y$ un monomorphisme de $\mathcal{L}$ et C sont $\mathcal{B}$-co-noyau. Par absolue pureté $C \in \mathcal{M}$ et par le théorème de construction il existe un monomorphisme $C \xrightarrow{R} (M(C))$. Par le lemme 3.6.5, $X \to Y$ est le $\mathcal{B}$-noyau de $Y \to C \to R(M(C))$ mais comme $X \to Y$ est dans $\mathcal{L}$, c'est le $\mathcal{L}$-noyau de $Y \to C \to R(M(C))$.
- Soit $X \to Y$ un épimorphisme de $\mathcal{L}$. Alors son co-noyau $X \to Y \to C \to M(C) \to R(M(C))$ est tel que $R(M(C)) = 0$. Comme $M(C) \to R(M(C))$ est un monomorphisme, $M(C) = 0$ et C est une torsion.
  Par réciproque, si C est une torsion, alors le $\mathcal{L}$-co-noyau de $X \to Y$ est nul et $X \to Y$ est un épimorphisme.
  Ainsi, $X \to Y$ est un épimorphisme si et seulement si son $\mathcal{B}$-co-noyau est une torsion.
- Soient $X \to Y$ un épimorphisme et $I \to Y$ sa $\mathcal{B}$-image. Comme I est un sous-objet d'un objet absolument pur, $I \in \mathcal{M}$. Soit $Y \to T$ le co-noyau de $X \to Y$, on a alors la suite exacte $0 \to I \to Y \to T \to 0$ dans $\mathcal{B}$. Comme T est une torsion, par le théorème de reconnaissance, $Y = R(I)$. Par propriété de l'image, on a un $\mathcal{B}$-épimorphisme $X \to I$ et il a un $\mathcal{L}$-noyau $K \to X$.

  Le $\mathcal{L}$-co-noyau de $K \to X$ est alors $X \to I \to R(I) = X \xrightarrow{Y}$. Un $\mathcal{L}$-épimorphisme est donc un $\mathcal{L}$-co-noyau.

Ainsi, $\mathcal{L}$ est une catégorie abélienne.

Soit $X \in \mathcal{L}$, on considère sa $\mathcal{B}$-enveloppe injective $X \to E$. Comme $\mathcal{M}$ admet les extensions essentielles, $E \in \mathcal{M}$. Comme les $\mathcal{B}$-noyaux sont des $\mathcal{L}$-noyaux, un $\mathcal{B}$-monomorphisme est un $\mathcal{L}$-monomorphisme, comme $\mathcal{L}$ est pleine, E est injective dans $\mathcal{L}$. En tant que foncteur mono et injectif, E est absolument pur, et comme les monomorphismes de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{L}$ sont identiques, par le lemme 5.2.6, $X \to E$ est une extension essentielle, donc une enveloppe injective dans $\mathcal{L}$.

6.4 Le théorème de plongement de Freyd-Mitchell

Définition 6.4.1

Pour une petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine des foncteurs exacts à gauche dans $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$.

Théorème 6.4.2

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est une catégorie abélienne avec des enveloppes injectives.

Démonstration

On pose $\mathcal{B} = \mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$, alors $\mathcal{M}$ est la sous-catégorie pleine des foncteurs monos, par le théorème 6.3.7 les foncteurs monos sont absolument purs si et seulement s'ils sont exacts à gauche, donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{A})$, le théorème précédent assure alors que c'est bien une catégorie abélienne avec des enveloppes injectives.

Théorème 6.4.3

$\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est complète et admet un co-générateur injectif.

Démonstration

Soit (F_i) une famille de foncteurs de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, chaque F_i préserve les suites exactes à gauche.
Le produit $F = \prod F_i$ dans $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est exact à gauche car, pour une suite exacte à gauche $0 \to X \to Y \to Z$, on a

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) = 0 \to \prod F_i(X) \to \prod F_i(Y) \to \prod F_i(Z)$$

qui est exacte à gauche dans $\mathbf{Ab}$. On montre également que $\coprod F_i$ est exact à gauche, donc $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est complète.
Comme le générateur $\coprod_{X \in \mathcal{A}} h_X$ de $\mathrm{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$ est exact à gauche, il génère également $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.
Puisque tout objet admet une enveloppe injective, le théorème 4.2.10 assure alors que $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ admet un co-générateur injectif.

Comme les foncteurs h_X sont exacts à gauche, le plongement de Yoneda contravariant décrit un foncteur

$$h^- : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$$

Théorème 6.4.4

h^- est exact et pleinement fidèle.

Démonstration

Le lemme de Yoneda assure que h^- est pleinement fidèle. Il reste à montrer qu'il est exact.
Soit $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, on considère la suite

$$0 \to h_Z \to h_Y \to h_X \to 0$$

Soit C le co-générateur injectif de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Par injectivité, h^C est exact et comme C est un co-générateur, h^C est fidèle. Par le corollaire 4.1.10, la suite ci-dessus est exacte si et seulement si

$$0 \to h^C[h_X] \to h^C[h_Y] \to h^C[h_Z] \to 0$$

est exacte, le lemme de Yoneda transforme cette suite en

$$0 \to C(X) \to C(Y) \to C(Z) \to 0$$

Par le lemme 6.1.1, C étant injectif, il est exact à droite, et en tant qu'objet de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, il est exact à gauche, donc les suites ci-dessus sont exactes et le plongement de Yoneda contravariant est exact.

Théorème 6.4.5 (Théorème de plongement de Freyd-Mitchell)

Toute catégorie abélienne est totalement abélienne.

Pour toute petite sous-catégorie pleine et exacte $\mathcal{A}'$ d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur exact et pleinement fidèle $\mathcal{A}' \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Démonstration

Le foncteur d'inclusion d'une petite sous-catégorie pleine et exacte est pleinement fidèle et exact.

Le théorème précédent affirme qu'on dispose d'un foncteur pleinement fidèle et exact de cette petite sous-catégorie dans une catégorie abélienne complète avec un co-générateur injectif, par dualité on dispose également d'un foncteur pleinement fidèle et exact dans une catégorie complète avec un générateur projectif.

Le théorème 4.3.3 affirme alors qu'il existe un foncteur pleinement fidèle de $\mathcal{L}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ dans ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, pour un anneau R.

La composition de ces foncteurs nous donne le résultat voulu.

Corollaire 6.4.6

Pour toute petite catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il existe un anneau R et un foncteur pleinement fidèle et exact $\mathcal{A} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$.

Bibliographie

[1] S. EILENBERG et S. MACLANE : General theory of natural equivalences. Transactions of the American Mathematical Society, 58 :231–294, 1945.

[2] P. FREYD : Abelian Categories : An Introduction to the Theory of Functors. A Harper international edition. Harper & Row, 1964.

[3] Alexandre GROTHENDIECK : Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohuku Mathematical Journal, 9(2) :119–139, 1957.

[4] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA : Categories and Sheaves. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[5] T. LEINSTER : Basic Category Theory. Cambridge University Press, 2014.

[6] S. MACLANE : Categories for the Working Mathematician. Springer, 2nd édition, 1998.