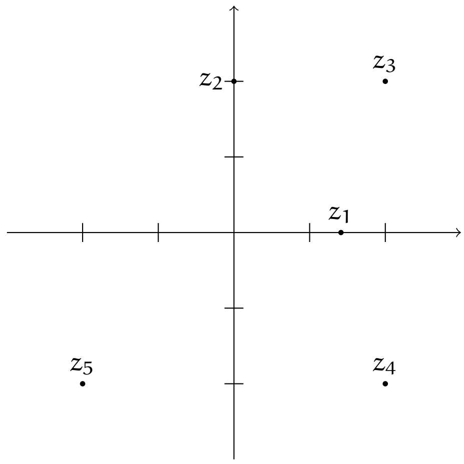
Algèbre et Arithmétique 1

Corrigé

Exercice 1



Exercice 2

(a) $\dfrac{1}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$;

(b) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{1+2\mathrm{i}-1}{2} = 2$;

(c) $(1+\mathrm{i})^4 = ((1+\mathrm{i})^2)^2 = (2\mathrm{i})^2 = -4$;

(d) $\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 3\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{8} - \dfrac{9}{8} + \dfrac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{8} = -1$;

Exercice 3

Soit $z \in \mathbf{C}$, alors

(a) $z + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}z - 1 \iff z(1-\mathrm{i}) = -1 - 2\mathrm{i} \iff z = -\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \boxed{\dfrac{1-3\mathrm{i}}{2}}$;

(b) $(3+2\mathrm{i})(z-1) = \mathrm{i} \iff (3+2\mathrm{i})z = 3+3\mathrm{i} \iff z = \dfrac{3+3\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} = \boxed{\dfrac{15+3\mathrm{i}}{13}}$;

(c) $(2-\mathrm{i})z + 1 = (3+2\mathrm{i})z - \mathrm{i} \iff 1 + \mathrm{i} = (1+3\mathrm{i})z \iff z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} = \boxed{\dfrac{2-\mathrm{i}}{5}}$;

(d) $(4-2\mathrm{i})z^2 = (1+5\mathrm{i})z \iff z = 0 \text{ ou } (4-2\mathrm{i})z = 1+5\mathrm{i} \iff z = 0 \text{ ou } z = \dfrac{1+5\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}} = \boxed{\dfrac{-3+11\mathrm{i}}{10}}$;

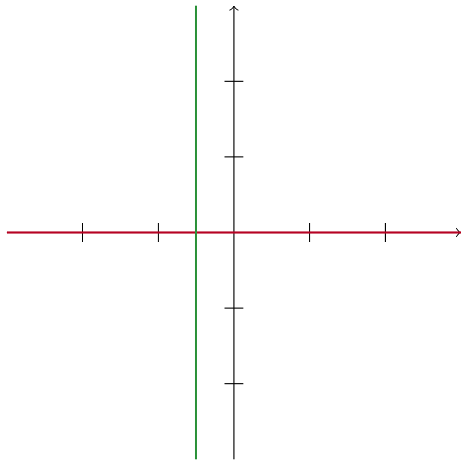
Exercice 4

Soit z un nombre complexe. Soient M_1, M_2 et M_4 les points d'affixes z, z^2 et z^4. Alors

$$\begin{aligned} M_1, M_2 \text{ et } M_4 \text{ sont alignés} &\iff z^2 = z \text{ ou } \frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbf{R} \\ &\iff z \in \{0, 1\} \text{ ou } \frac{(z^2-z)(z^2+z)}{z^2 - z} = z^2 + z \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

On note $z = a + ib$, alors

$$\begin{aligned} z^2 + z \in \mathbf{R} &\iff (a+ib)^2 + a + ib \in \mathbf{R} \\ &\iff a^2 + i2ab - b^2 + a + ib \in \mathbf{R} \\ &\iff 2ab + b = 0 \\ &\iff b = 0 \text{ ou } a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Exercice 5

(a) On a $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z^3 = -1$.

(b) On a donc $z^4 = z^3 z = -z$ et $z^5 = z^3 z^2 = -z^2$ et $z^6 = (z^3)^2 = 1$.

(c) Comme $z^6 = 1$, l'inverse de z est $z^{-1} = z^5$.

(d) On a $1 + i\sqrt{3} = 2z$, donc

$$(1+i\sqrt{3})^5 = (2z)^5 = 32z^5 = -32z^2 = 16 - 16i\sqrt{3}$$

(e) On en déduit

$$(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = 32$$
$$(1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5 = -32i\sqrt{3}$$

Exercice 6

Soit $z = a + ib \in \mathbf{C}$ tel que $|1 + iz| = |1 - iz|$. Alors

$$|1 + i(a+ib)| = |1 - i(a+ib)|$$

Donc

$$|1 - b + ia| = |1 + b - ia|$$

Donc

$$(1-b)^2 + a^2 = (1+b)^2 + a^2$$

Donc

$$1 - 2b + b^2 = 1 + 2b + b^2$$

Donc

$$b = -b$$

Ainsi $b = 0$ et $z \in \mathbf{R}$.

Exercice 7

On a

$$\sum_{k=0}^{7}(1+i)^k = \frac{1-(1+i)^8}{1-(1+i)} = \frac{1-16}{-i} = -15i$$

Exercice 8

Soit $z \in \mathbf{C}$. On a (par le changement d'indice $j = k+1$)

$$\begin{aligned}(1-z)S_n = (1-z)\sum_{k=0}^{n} kz^k &= \sum_{k=0}^{n} kz^k - \sum_{k=0}^{n} kz^{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} kz^k - \sum_{j=1}^{n+1}(j-1)z^j\\ &= \sum_{k=1}^{n} z^k - nz^{n+1}\\ &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - 1 - nz^{n+1}\\ &= \frac{1-z^{n+1}-(1-z)-n(1-z)z^{n+1}}{1-z}\\ &= \frac{nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+z}{1-z}\end{aligned}$$

Ainsi

$$S_n = \frac{nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+z}{1-z}$$

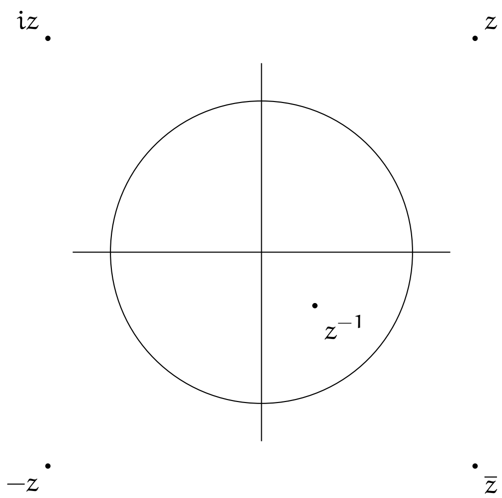
Exercice 9

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$-z = 2e^{i\frac{-3\pi}{4}}$$

$$iz = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$



Exercice 10

(a) $1 = e^{i0}$;

(b) $-1 = e^{i\pi}$;

(c) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$;

(d) $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$;

(e) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

(f) $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

(g) $-1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

(h) $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 11

(a) On a

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= \frac{e^{i3x}+3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-i2x}+e^{-i3x}}{8}\\ &= \frac{(e^{i3x}+e^{-i3x})+3(e^{ix}+e^{-ix})}{8}\\ &= \boxed{\frac{3}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)}\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{e^{i3x}-3e^{i2x}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-i2x}-e^{-i3x}}{-8i}\\ &= \frac{(e^{i3x}-e^{-i3x})-3(e^{ix}-e^{-ix})}{-8i}\\ &= \boxed{\frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(x)}\end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}\sin^2(5x) &= \left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i}\right)^2\\ &= \frac{e^{i10x}-2e^{i5x}e^{-i5x}+e^{-i10x}}{-4}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(10x)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^2(5x) &= \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{1}{2}\cos(3x)\cos(10x)\\ &= \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\cdot\frac{e^{i10x}+e^{-i10x}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i13x}+e^{i7x}+e^{-i7x}+e^{-i13x}}{2}\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{1}{4}\cos(7x)-\frac{1}{4}\cos(13x)}\end{aligned}$$

(d) On a

$$\cos^3(3x) = \frac{3}{4}\cos(3x)+\frac{1}{4}\cos(9x)$$

et

$$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin(2x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\\ &= \frac{\left(e^{i2x}+2+e^{-i2x}\right)\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)}{8i}\\ &= \frac{e^{i4x}+2e^{i2x}+1-1-2e^{-i2x}-e^{-i4x}}{8i}\\ &= \frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{8i}+2\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{8i}\\ &= \frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{4}\sin(4x)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\cos^2(x)\sin(2x)+\cos^3(3x) = \boxed{\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{3}{4}\cos(3x)+\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{4}\cos(9x)}$$

Exercice 12

On a

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc

$$\cos(\pi/12)+i\sin(\pi/12) = e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\cos(\pi/3)+i\sin(\pi 3))(\cos(\pi/4)-i\sin(\pi/4))$$

En développant on obtient

$$\begin{aligned}\cos(\pi/12) &= \cos(\pi/3)\cos(\pi/4)+\sin(\pi/3)\sin(\pi/4)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(\pi/12) &= -\sin(\pi/4)\cos(\pi/3)+\sin(\pi/3)\cos(\pi/4)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Exercice 13

(a) $(1+i)^9 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^9 = 16\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}} = 16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

(b) $(1-i)^7 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^7 = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

(c) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \dfrac{16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2$;

Exercice 14

(a) On a

$$1+e^{ia} = e^{i\frac{a}{2}}\left(e^{-i\frac{a}{2}}+e^{i\frac{a}{2}}\right) = 2e^{i\frac{a}{2}}\frac{e^{i\frac{a}{2}}+e^{-i\frac{a}{2}}}{2} = 2\cos(a/2)e^{i\frac{a}{2}}$$

Ce nombre est bien sous forme exponentielle car $\left|\dfrac{a}{2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos(a/2) \geqslant 0$.

(b) On a

$$e^{ia}+e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{b-a}{2}}+e^{-i\frac{b-a}{2}}\right)=2e^{i\frac{a+b}{2}}\frac{e^{i\frac{b-a}{2}}+e^{-i\frac{b-a}{2}}}{2}=2\cos((b-a)/2)e^{i\frac{a+b}{2}}$$

Ce nombre est bien sous forme exponentielle car $\left|\frac{b-a}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}$ donc $\cos((b-a)/2)\geqslant 0$.

Exercice 15

(a) Soit $x\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\times\frac{2\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}-e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{2}}{2\frac{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}{2}}=e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

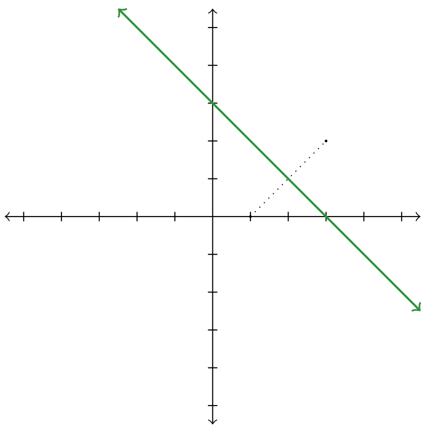
(b) On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(e^{ikx})=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}(e^{ikx})=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

Exercice 16

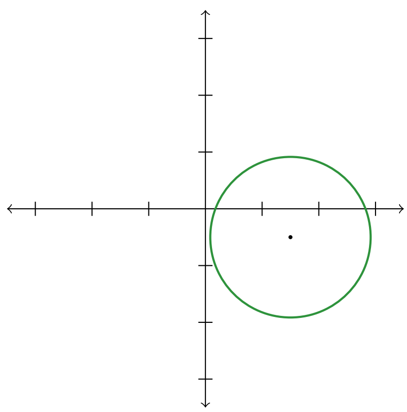
(a) Les points M d'affixe z vérifiant $|z-1|=|z-3-2i|$ forment la médiatrice du segment $[1;3+2i]$.



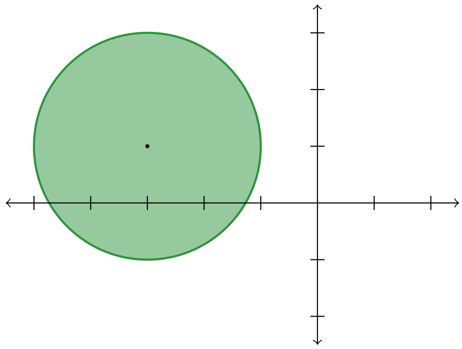
(b) Soit $z\in\mathbf{C}$, alors

$$\left|(1+i)z-2-i\right|=2\iff\left|z-\frac{2+i}{1+i}\right|=\frac{2}{|1+i|}\iff\left|z-\frac{3-i}{2}\right|=\sqrt{2}$$

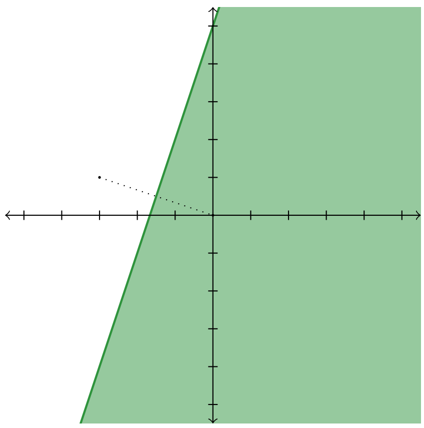
Les points M d'affixe z vérifiant $|(1+i)z-2-i|=2$ forment donc le cercle de centre $O\left(\frac{3-i}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$



(c) Les points M d'affixe z vérifiant $|z-3+i| \leqslant 2$ forment le disque de centre $O(-3+i)$ et de rayon 2



(d) Les points M d'affixe z vérifiant $|z+3-i| \geqslant |z|$ forment le demi-plan sous la médiatrice du segment $[0; -3+i]$



Exercice 17

(a) Soit $a+ib \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = i &\iff a^2-b^2+2abi = i \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2 &=& 0 \\ 2ab &=& 1 \\ a^2+b^2 &=& 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 &=& 1 \\ 2b^2 &=& 1 \\ ab &>& 0 \end{array}\right. \\
&\iff a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi les racines carrées de i sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Soit $a+ib \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = 5+12i &\iff a^2-b^2+2abi = 5+12i \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2 &=& 5 \\ 2ab &=& 12 \\ a^2+b^2 &=& 13 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a^2 &=& 18 \\ 2b^2 &=& 8 \\ ab &>& 0 \end{array}\right. \\
&\iff a = \pm 3, \quad b = \pm 2
\end{aligned}$$

Ainsi les racines carrées de $5+12i$ sont $3+2i$ et $-3-2i$.

(c) Soit $a+ib \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = 1+4\sqrt{5}i &\iff a^2-b^2+2abi = 1+4\sqrt{5}i \\
&\iff \begin{cases} a^2-b^2 &= 1 \\ 2ab &= 4\sqrt{5} \\ a^2+b^2 &= 9 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a^2 &= 10 \\ 2b^2 &= 8 \\ ab &> 0 \end{cases} \\
&\iff a = \pm\sqrt{5}, \quad b = \pm 2
\end{aligned}$$

Ainsi les racines carrées de $1+4\sqrt{5}i$ sont $\sqrt{5}+2i$ et $-\sqrt{5}-2i$.

(d) Soit $a+ib \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}
(a+ib)^2 = 1+i\sqrt{3} &\iff a^2-b^2+2abi = 1+i\sqrt{3} \\
&\iff \begin{cases} a^2-b^2 &= 1 \\ 2ab &= \sqrt{3} \\ a^2+b^2 &= 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a^2 &= 3 \\ 2b^2 &= 1 \\ ab &> 0 \end{cases} \\
&\iff a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi les racines carrées de $1+i\sqrt{3}$ sont $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 18

(a) On calcule le discriminant de l'equation:

$$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4-4 = 0$$

L'équation a donc une racine réelle double

$$z_0 = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

(b) On calcule le discriminant de l'équation:

$$\Delta = (1+i)^2 - 4\cdot 1\cdot i = 2i-4i = -2i$$

On calcule une racine carrée de $\Delta = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on trouve

$$\delta = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1-i$$

Les solutions sont alors

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-(1+i)-\delta}{2} = -i \\
z_2 &= \frac{-(1+i)+\delta}{2} = -1
\end{aligned}$$

(c) On calcule le discriminant de l'équation:

$$\Delta = (2i)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -8$$

On calcule une racine carrée de $\Delta = -8$, on trouve

$$\delta = 2\sqrt{2}i$$

Les solutions sont alors

$$z_1 = \frac{-2i-\delta}{2} = -(1+\sqrt{2})i$$
$$z_2 = \frac{-2i+\delta}{2} = -(1-\sqrt{2})i$$

(d) On calcule le discriminant de l'équation:

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot(1+i)\cdot i = 8-4i = 4(2-i)$$

On calcule une racine carrée de $\Delta = 8-4i$, pour cela on résout un système. Soit $a+bi \in \mathbf{C}$ alors

$$\begin{aligned}(a+ib)^2 = 2-i &\iff a^2-b^2+2abi = 2-i \\ &\iff \begin{cases} a^2-b^2 &= 2 \\ 2ab &= -1 \\ a^2+b^2 &= \sqrt{5}\end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a^2 &= 2+\sqrt{5} \\ 2b^2 &= \sqrt{5}-2 \\ ab &< 0\end{cases} \\ &\iff a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}, \quad b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\end{aligned}$$

Une racine de Δ est donc

$$\delta = 2\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\right)$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-2-\delta}{2(1+i)} = \frac{-1-\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}}{1+i}$$

$$z_2 = \frac{-2+\delta}{2(1+i)} = \frac{-1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}}{1+i}$$

Question (d) de substitution: $z^2 - 4z + 7 + 4i = 0$:
On calcule le discriminant de l'équation:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(7+4i) = 16-28-16i = -12-12i$$

On calcule une racine carrée de $\Delta = -12-16i$, pour cela on résout un système. Soit $a+bi \in \mathbf{C}$, alors

$$\begin{aligned}(a+ib)^2 = -12-16i &\iff a^2-b^2+2abi = -12-16i \\ &\iff \begin{cases} a^2-b^2 &= -12 \\ 2ab &= -16 \\ a^2+b^2 &= 20\end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a^2 &= 8 \\ 2b^2 &= 32 \\ ab &< 0\end{cases} \\ &\iff a = \pm 2, \quad b = \mp 4\end{aligned}$$

Une racine de Δ est donc

$$\delta = 2-4i$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{4+\delta}{2} = \frac{4+2-4i}{2} = 3-2i$$

$$z_2 = \frac{4-\delta}{2} = \frac{4-2+4i}{2} = 1+2i$$

Exercice 19

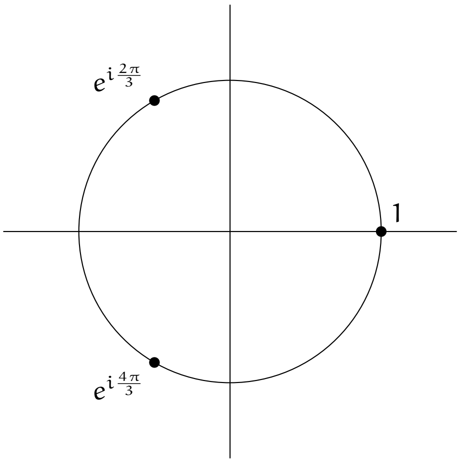
Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. Alors

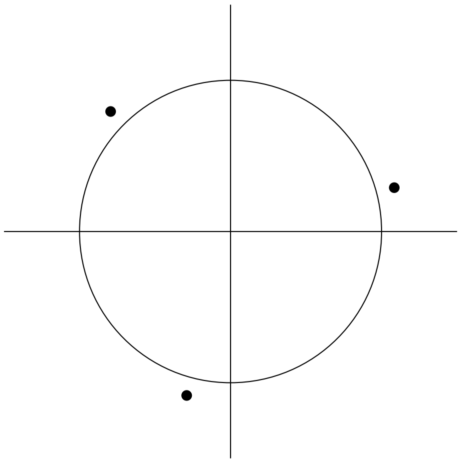
$$\begin{aligned} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de } z^2 - sz + p = 0 &\iff z^2 - sz + p = (z-z_1)(z-z_2) \\ &\iff z^2 - sz + p = z^2 - z_1 z - z_2 z + z_1 z_2 \\ &\iff s = z_1 + z_2 \text{ et } p = z_1 z_2 \end{aligned}$$

Exercice 20

(a) Les racines 3^e de l'unité sont 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Une racine 3^e de $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$. Ainsi, les 3 racines 3^e de $1+i$ sont:

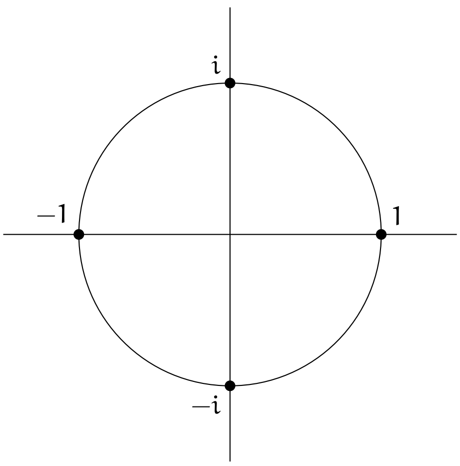
$$1 \times \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$
$$e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

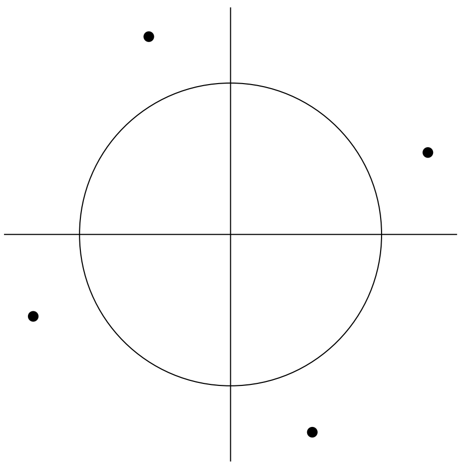




(b) Les racines 4^e de l'unité sont 1, i, -1 et $-i$. Une racine 4^e de $4i$ est $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$. Ainsi, les 4 racines 4^e de $4i$ sont:

$$1 \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$$
$$i \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}$$
$$-1 \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{8}}$$
$$-i \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{8}}$$



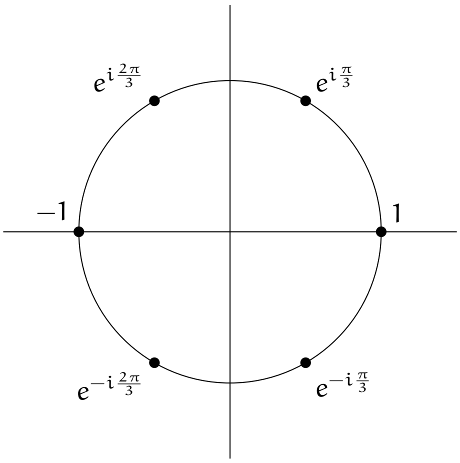


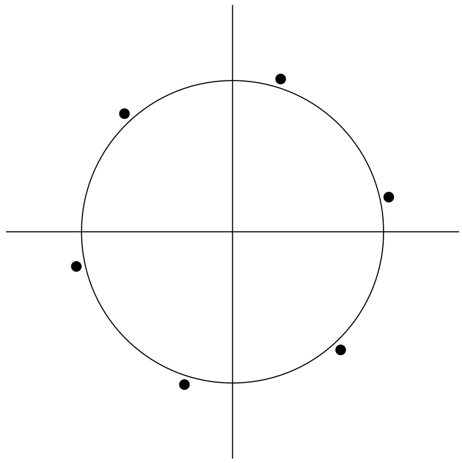
(c) Les racines 6^e de l'unité sont 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, -1, $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. De plus

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

Une racine 6^e de ce nombre est $\sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}}$. Ainsi, les 6 racines 6^e de $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ sont

$$\begin{aligned}
1 \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} &= \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} \\
e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} &= \sqrt[12]{2}e^{i\frac{17\pi}{72}} \\
e^{i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} &= \sqrt[12]{2}e^{i\frac{41\pi}{72}} \\
-1 \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} &= \sqrt[12]{2}e^{i\frac{65\pi}{72}} \\
e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} &= \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{55\pi}{72}} \\
e^{-i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{7\pi}{72}} &= \sqrt[12]{2}e^{-i\frac{31\pi}{72}}
\end{aligned}$$





Exercice 21

On dispose des formules suivantes pour le calcul des invariants d'une similitude $z' = \alpha z + \beta$:

$$\omega = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad \alpha \neq 1$$

$$k = |\alpha| \qquad \theta = \arg(\alpha)$$

Le point Ω d'affixe ω est le *centre* de la similitude (i.e. son unique point fixe), k est son *rapport* et θ son *angle*.

(a) La similitude $z' = z + 3 - i$ est une translation de vecteur $(3, -1)$.

(b) La similitude $z' = 2z + 3$ a pour centre le point Ω d'affixe $\dfrac{3}{1-2} = -3$, pour angle $\arg(2) = 0$ et pour rapport $|2| = 2$.

(c) La similitude $z' = iz + 1$ a pour centre le point Ω d'affixe $\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{2}$, pour angle $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ et pour rapport $|i| = 1$.

(d) La similitude $z' = (1-i)z + 2 + i$ a pour centre le point Ω d'affixe $\dfrac{2+i}{1-(1-i)} = \dfrac{2+i}{i} = 1 - 2i$, pour angle $\arg(1-i) = -\dfrac{\pi}{4}$ et pour rapport $|1-i| = \sqrt{2}$.

Exercice 23

Soient $k \in \mathbf{R}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $\omega \in \mathbf{C}$. La similitude directe de centre Ω d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k a pour forme complexe

$$z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

(a) On a $\omega = 1 + i$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $k = 2$, donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - (1+i)) + 1 + i = 2iz + 3 - i$$

(b) On a $\omega = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ et $k = \sqrt{3}$, donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}\right)z$$

(c) On a $\omega = 1 - 2i$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ et $k = 2\sqrt{2}$, donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (1-2i)) + 1 - 2i = (2+2i)z - 5$$