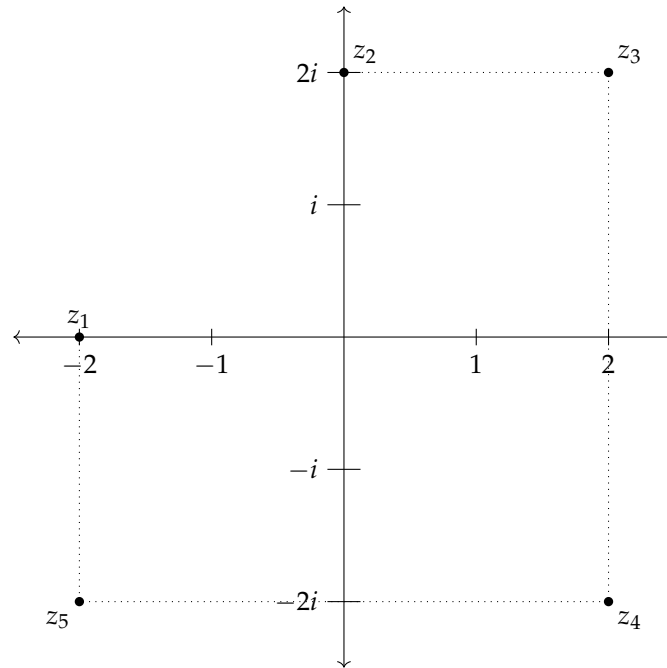


CHAPITRE 1

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.1Exercice 1.2

Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes des quatre sommets d'un parallélogramme. Alors

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$$

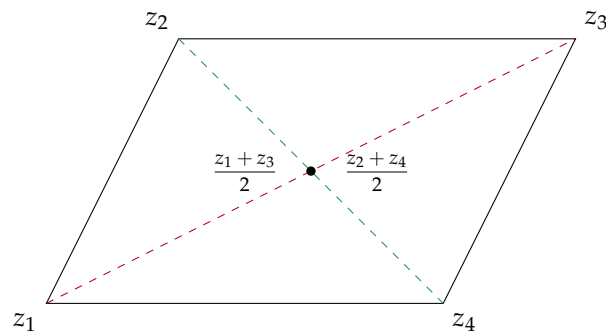
Donc

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4$$

Donc

$$\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2}$$

Donc les diagonales $[z_1 z_3]$ et $[z_2 z_4]$ du parallélogramme se coupent en leur milieu.



Exercice 1.3

$$1. \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}.$$

$$2. \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i.$$

$$3. (1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

$$4. \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + 3\frac{1}{4}\frac{i\sqrt{3}}{2} - 3\frac{1}{2}\frac{3}{4} - \frac{i3\sqrt{3}}{8} = -1.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \end{array}$$

Exercice 1.4

$$1. z + 2i = iz - 1 \iff z(1-i) = -1-2i \iff z = -\frac{1+2i}{1-i} = \frac{1-3i}{2}.$$

$$2. (3+2i)(z-1) = i \iff z-1 = \frac{i}{3+2i} \iff z = \frac{3+i}{3+2i} = \frac{15+3i}{13}.$$

$$3. (2-i)z + 1 = (3+2i)z - i \iff (1+3i)z = 1+i \iff z = \frac{1+i}{1+3i} = \frac{2-i}{5}.$$

$$4. (4-2i)z^2 = (1+5i)z \iff z = 0 \text{ ou } z = \frac{1+5i}{4-2i} = \frac{-3+11i}{10}.$$

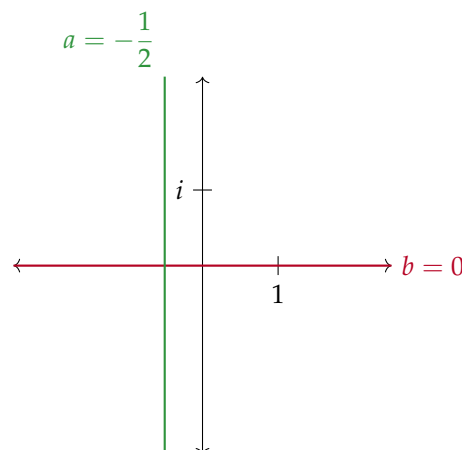
Exercice 1.5

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Les points d'affixes } z, z^2 \text{ et } z^4 \text{ sont alignés} &\iff z = z^2 \text{ ou } \frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \\ &\iff z = 0 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } \frac{(z^2 - z)(z^2 + z)}{z^2 - z} = z^2 + z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On note $z = a + ib$. Alors

$$\begin{aligned} z^2 + z \in \mathbb{R} &\iff (a+ib)^2 + a+ib \in \mathbb{R} \\ &\iff a^2 - b^2 + 2iab + a + ib \in \mathbb{R} \\ &\iff 2ab + b = 0 \\ &\iff b = 0 \text{ ou } a = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Exercice 1.6

$$1. z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\bar{z}. \quad z^3 = -1.$$

$$2. z^4 = (z^2)^2 = (-\bar{z})^2 = \bar{z}^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad z^5 = z^2 z^3 = -z^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad z^6 = (z^3)^2 = 1.$$

$$3. z^5 z = z z^5 = z^6 = 1 \text{ donc } z^{-1} = z^5.$$

$$4. (1 + i\sqrt{3})^5 = 32z^5 = 16 - 16i\sqrt{3}.$$

$$5. \begin{aligned} &\bullet (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5 = 16 + 16i\sqrt{3} + 16 - 16i\sqrt{3} = 32. \\ &\bullet (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5 = 16 + 16i\sqrt{3} - 16 + 16i\sqrt{3} = 32i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Exercice 1.7

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $|1 + iz| = |1 - iz|$. Alors

$$|1 - b + ia| = |1 + b - ia|$$

Donc

$$\sqrt{(1-b)^2 + a^2} = \sqrt{(1+b)^2 + a^2}$$

Donc

$$(1-b)^2 = (1+b)^2$$

Donc

$$1 - 2b + b^2 = 1 + 2b + b^2$$

Donc $b = -b$, donc $b = 0$. Ainsi $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.8

1. Soient z et w deux nombres complexes. Alors

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\ &= (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z-w)(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2 \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$

2. Soient z_1, z_2, z_3 et z_4 les affixes des quatre sommets d'un parallélogramme. On note

$$z = z_2 - z_1$$

$$w = z_4 - z_1$$

Alors la somme des carrés des côtés vaut $2|z|^2 + 2|w|^2$. De plus

$$z + w = z_2 - z_1 + z_4 - z_1 = z_3 - z_1$$

$$z - w = z_2 - z_1 - z_4 + z_1 = z_2 - z_4$$

Donc la somme des carrés des diagonales vaut $|z+w|^2 + |z-w|^2$. On conclut grâce à la première question.

Exercice 1.9

$$\sum_{k=0}^7 (1+i)^k = \frac{1 - (1+i)^8}{1 - (1+i)} = \frac{1-16}{i} = -15i.$$

Exercice 1.10

En développant, on obtient

$$\begin{aligned}
 (1-z)S_n &= \sum_{k=0}^n (kz^k - kz^{k+1}) = z - z^2 + 2z^2 - 2z^3 + 3z^3 - 3z^4 + \cdots + nz^n - nz^{n+1} \\
 &= z + (-z^2 + 2z^2) + (-2z^3 + 3z^3) + \cdots + (-(n-1)z^n + nz^n) - nz^{n+1} \\
 &= \sum_{k=1}^n z^k - nz^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n z^k - nz^{n+1} - 1 \\
 &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - nz^{n+1} - 1 \\
 &= \frac{1-z^{n+1} - nz^{n+1}(1-z) - (1-z)}{1-z} \\
 &= \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{1-z}
 \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{(1-z)^2}$$

Exercice 1.11

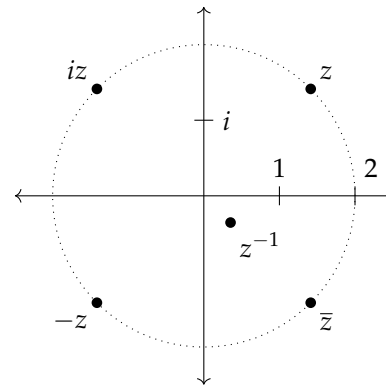
$$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\bar{z} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$-z = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$iz = 2e^{-i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

**Exercice 1.12**

1. $1 = e^{i0}$.

2. $-1 = e^{i\pi}$.

3. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

4. $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

5. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

6. $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

7. $-1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

8. $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercise 1.13

$$\begin{aligned}
\cos^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5 \\
&= \frac{1}{32} \left(e^{i5x} + 5e^{i3x} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} + e^{-i5x} \right) \\
&= \frac{1}{32} \left((e^{i5x} + e^{-i5x}) + 5(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 10(e^{ix} + e^{-ix}) \right) \\
&= \boxed{\frac{1}{16} \left(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x) \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5 \\
&= \frac{1}{32i} \left(e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} - e^{-i5x} \right) \\
&= \frac{1}{32i} \left((e^{i5x} - e^{-i5x}) - 5(e^{i3x} - e^{-i3x}) + 10(e^{ix} - e^{-ix}) \right) \\
&= \boxed{\frac{1}{16} \left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x) \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2(3x) \sin^2(5x) &= \left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{16} \left(e^{i6x} + 2 + e^{-i6x} \right) \left(e^{i10x} - 2 + e^{-i10x} \right) \\
&= -\frac{1}{16} \left(e^{i16x} + 2e^{i10x} + e^{i4x} - 2e^{i6x} - 4 - 2e^{-i6x} + e^{-i4x} + 2e^{-i10x} + e^{-i16x} \right) \\
&= -\frac{1}{16} \left((e^{i16x} + e^{-i16x}) + 2(e^{i10x} + e^{-i10x}) - 2(e^{i6x} + e^{-i6x}) + (e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4 \right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{8} \left(\cos(16x) + 2\cos(10x) - 2\cos(6x) + \cos(4x) - 2 \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) \sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 \\
&= \frac{1}{64} \left(e^{i2x} + 2 + e^{-i2x} \right) \left(e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x} \right) \\
&= \frac{1}{64} \left(e^{i6x} - 4e^{i4x} + 6e^{i2x} - 4 + e^{-i2x} + 2e^{i4x} - 8e^{i2x} + 12 - 8e^{-i2x} + 2e^{-i4x} + e^{i2x} - 4 + 6e^{-i2x} - 4e^{-i4x} + e^{-i6x} \right) \\
&= \frac{1}{64} \left((e^{i6x} + e^{-i6x}) - 2(e^{i4x} + e^{-i4x}) - (e^{i2x} + e^{-i2x}) + 4 \right) \\
&= \boxed{\frac{1}{32} \left(\cos(6x) - 2\cos(4x) - \cos(2x) + 2 \right)}
\end{aligned}$$

Exercice 1.14

On a

$$\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc

$$\cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12) = e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))(\cos(\pi/4) - i \sin(\pi/4))$$

En développant, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \cos(\pi/12) &= \cos(\pi/3) \cos(\pi/4) + \sin(\pi/3) \sin(\pi/4) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin(\pi/12) &= -\sin(\pi/4) \cos(\pi/3) + \sin(\pi/3) \cos(\pi/4) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Exercice 1.15

1. $(1+i)^9 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^9 = \sqrt{2}^9 e^{i\frac{9\pi}{4}} = 16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$
2. $(1-i)^7 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^7 = \sqrt{2}^7 e^{-i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$
3. $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{16\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2.$

Exercice 1.16

1. $1 + e^{ia} = e^{i\frac{a}{2}}(e^{-i\frac{a}{2}} + e^{i\frac{a}{2}}) = 2 \cos\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\frac{a}{2}}.$

Ce nombre est bien sous forme exponentielle car $\cos\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$ lorsque $|a| \leq \pi$.

2. $e^{ia} + e^{ib} = e^{ia}(1 + e^{-(b-a)}) = 2 \cos\left(\frac{b-a}{2}\right) e^{i\frac{b+a}{2}} e^{ia} = 2 \cos\left(\frac{b-a}{2}\right) e^{i\frac{b+a}{2}}.$

Ce nombre est bien sous forme exponentielle car $\cos\left(\frac{b-a}{2}\right) \geq 0$ lorsque $|b-a| \leq \pi$.

Exercice 1.17

1. Soit $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

Par la formule de l'angle moitié (exercice précédent)

$$\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} (e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} e^{i\frac{n}{2}x}$$

Ce qui conclut.

2. On a

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) \quad \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right)$$

Donc

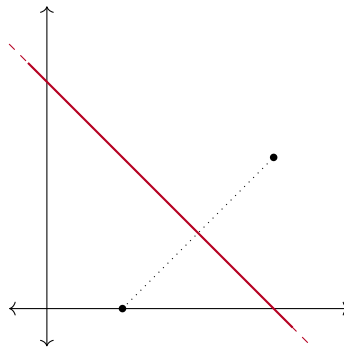
$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} e^{i\frac{n}{2}x} \right) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \cos(\frac{n}{2}x)$$

et

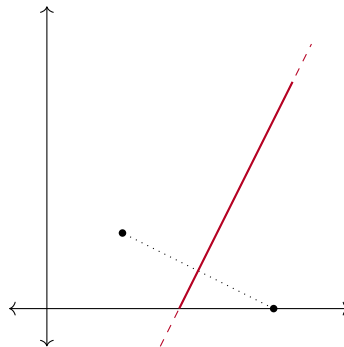
$$\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \operatorname{Im} \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} e^{i\frac{n}{2}x} \right) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \sin(\frac{n}{2}x)$$

Exercice 1.18

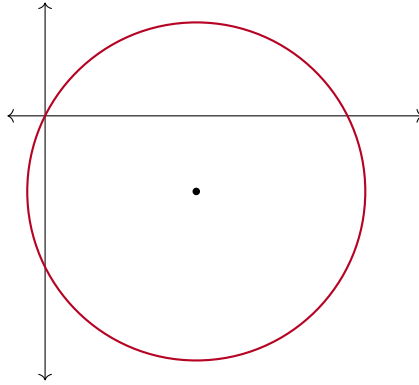
1. $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$. L'ensemble des solutions est la médiatrice du segment reliant les points 1 et $3 + 2i$.



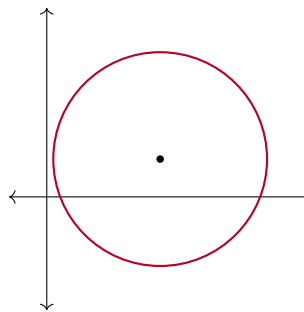
2. $|z - 3| = |z - 1 - i|$. L'ensemble des solutions est la médiatrice du segment reliant les points 3 et $1 + i$.



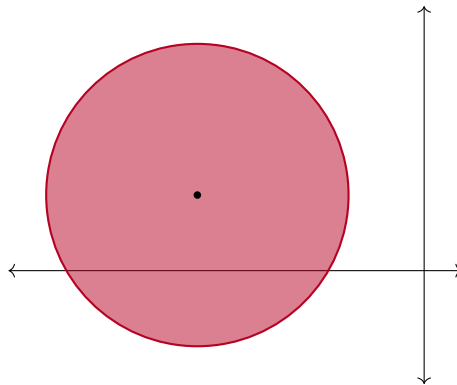
3. $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$. L'ensemble des solutions est le cercle de centre $2 - i$ et de rayon $\sqrt{5}$.



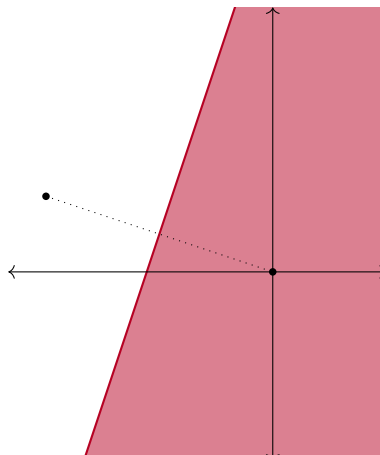
4. $|(1 - i)z - 2 - i| = 2 \iff |z - \frac{2 - i}{1 - i}| = \sqrt{2}$. L'ensemble des solutions est le cercle de centre $\frac{3}{2} + i\frac{1}{2}$ et de rayon $\sqrt{2}$.



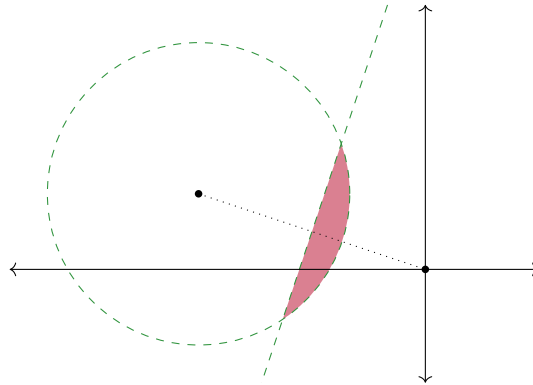
5. $|z + 3 - i| \leq 2$. L'ensemble des solutions est le disque de centre $-3 + i$ et de rayon 2.



6. $|z + 3 - i| \geq |z|$. L'ensemble des solutions est le demi-plan sous la médiatrice du segment reliant les points 0 et $-3 + i$.



7. $|z| < |z + 3 - i| < 2$. L'ensemble des solutions est l'intersection entre le demi-plan sous la médiatrice du segment reliant les points 0 et $-3 + i$ et le disque de centre $-3 + i$ et de rayon 2.



Exercice 1.19

1. Soient a et b deux réels. Alors

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i \overbrace{\arg(a + ib)}^{\theta}}$$

Donc

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\theta)$$

$$b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta)$$

Donc

$$\frac{b}{a} = \tan(\theta)$$

Donc

$$\theta \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pmod{2\pi}$$

2. On a

$$(1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i) = (1 + i + 2i - 2)(1 + 3i) = -10$$

3. On a

$$\arg((1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i)) = \arg(-10) = \pi$$

Or

$$\arg((1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i)) = \arg(1 + i) + \arg(1 + 2i) + \arg(1 + 3i) = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$$

Donc

$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$$

Exercice 1.20

1. On sait que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Donc les racines carrées de i sont $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

2. On cherche a et b tels que $(a + bi)^2 = 5 + 12i$. On a

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

Et

$$|(a + bi)^2| = a^2 + b^2 = |5 + 12i| = 13$$

Donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 5 \\ a^2 + b^2 &= 13 \\ 2ab &= 12 \end{cases}$$

Les racines carrées de $5 + 12i$ sont donc $3 + 2i$ et $-3 - 2i$.

3. On cherche a et b tels que $(a + bi)^2 = 1 + 4\sqrt{5}i$. On a

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 1 + 4\sqrt{5}i$$

et

$$|(a + bi)^2| = a^2 + b^2 = |1 + 4\sqrt{5}i| = 9$$

Donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 9 \\ 2ab = 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Les racines carrées de $1 + 4\sqrt{5}i$ sont donc $\sqrt{5} + 2i$ et $-\sqrt{5} - 2i$.

4. On sait que $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$ sont $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 1.21

1. On calcule le discriminant de l'équation $2z^2 - 6z + 5 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -4$$

Les racines carrées de -4 sont $2i$ et $-2i$, donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{6 + 2i}{4}$$

$$z_2 = \frac{6 - 2i}{4}$$

2. On calcule le discriminant de l'équation $5z^2 + (9 - 7i)z + (2 - 6i) = 0$

$$\Delta = (9 - 7i)^2 - 4 \times 5 \times (2 - 6i) = -8 - 6i$$

Les racines carrées de $-8 - 6i$ sont $1 - 3i$ et $-1 + 3i$, donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-9 + 7i + 1 - 3i}{10} = \frac{-4 + 2i}{5}$$

$$z_2 = \frac{-9 + 7i - 1 + 3i}{10} = -1 + i$$

3. On calcule le discriminant de l'équation $z^2 + (2 + i)z - (1 - 7i) = 0$

$$\Delta = (2 + i)^2 - 4 \times (-1 - 7i) = 7 - 24i$$

Les racines carrées de $7 - 24i$ sont $4 - 3i$ et $-4 + 3i$, donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-2 - i + 4 - 3i}{2} = 1 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-2 - i - 4 + 3i}{2} = -3 + i$$

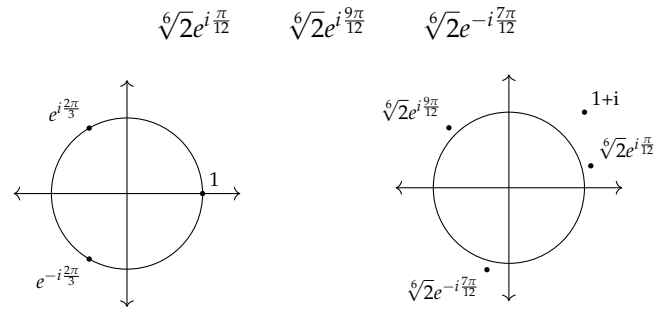
Exercice 1.22

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors

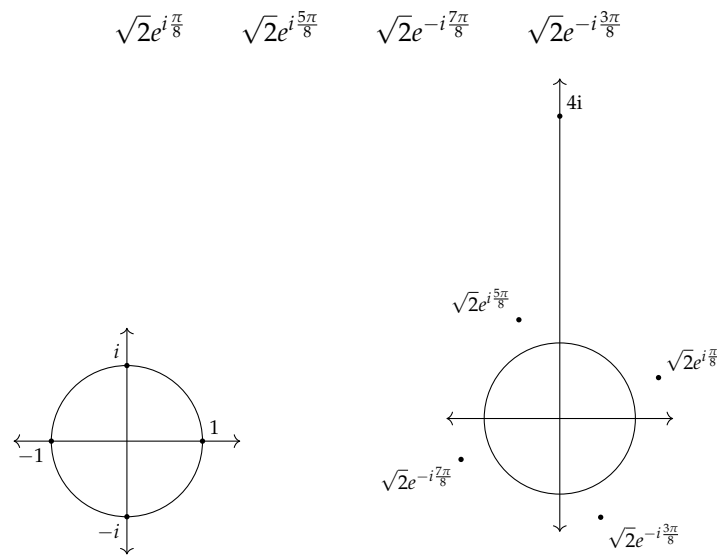
$$\begin{aligned} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont solutions de l'équation } z^2 - sz + p &\iff (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - sz + p \\ &\iff z^2 - z_1z - z_2z + z_1z_2 = z^2 - sz + p \\ &\iff s = z_1 + z_2 \text{ et } p = z_1z_2 \end{aligned}$$

Exercice 1.23

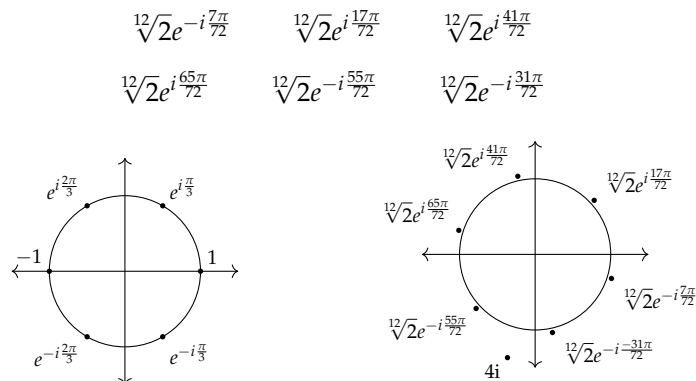
1. On sait que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et que les racines cubiques de l'unité sont $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
Les racines cubiques de $1 + i$ sont donc



2. On sait que $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ et que les racines quatrième de l'unité sont $1, i, -1$ et $-i$.
Les racines quatrième de $4i$ sont donc



3. On sait que $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ et que les racines sixième de l'unité sont $1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Les racines sixième de $\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$ sont donc



Exercice 1.24

1. Soient $\alpha = m + in$ et $\beta = m' + in'$ deux entiers de Gauss. Alors

$$\alpha + \beta = m + in + m' + in' = (m + m') + i(n + n')$$

$$\alpha\beta = (m + in)(m' + in') = (mm' - nn') + i(mn' + m'n)$$

Comme \mathbb{Z} est stable par addition et multiplication¹, $m + m'$, $n + n'$, $mm' - nn'$ et $mn' + m'n$ sont des entiers, donc $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont des entiers de Gauss.

2. Soit $\alpha = m + in$ un entier de Gauss. Alors

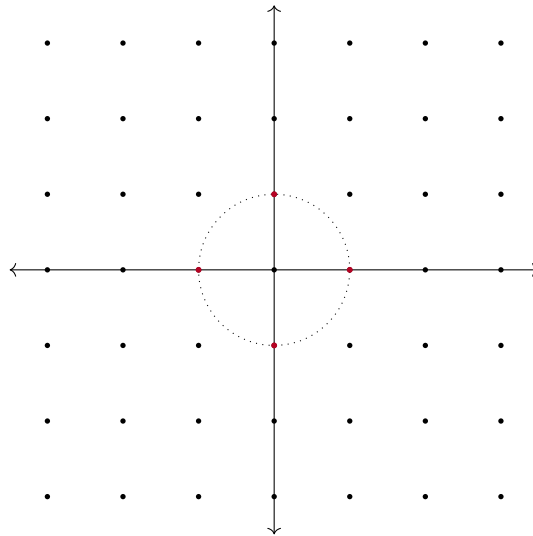
$$|\alpha|^2 = m^2 + n^2$$

On distingue deux cas:

- Soit $\alpha = 0$, alors $|\alpha| = 0$.
- Soit $\alpha \neq 0$, alors soit $m \neq 0$, soit $n \neq 0$, alors $m^2 + n^2 \geq 1$, donc $|\alpha| \geq 1$.

3. On sait que les couples $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$ vérifient $m^2 + n^2 = 1$. Si $|m| \geq 2$ ou $|n| \geq 2$, alors $m^2 + n^2 \geq 4$, donc ces quatres solutions sont les seules.

4. Comme $|\alpha|$ est un entier positif, et que le seul entier positif inversible est 1, on cherche $|\alpha| = 1$. Par la question précédente, on trouve 1, i , -1 et $-i$.

**Exercice 1.25**

1. On a

$$x^3 = 51x + 104 \iff (u + v)^3 = 51(u + v) + 104$$

$$\iff u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 51(u + v) + 104$$

$$\iff u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 51(u + v) + 104$$

2. On suppose que $uv = 17$, alors

$$(X - u^3)(X - v^3) = X^2 - (u^3 + v^3)X + u^3v^3 = X^2 - (u^3 + v^3)X + 4913$$

Or

$$u^3 + v^3 = 51(u + v) + 104 - 3uv(u + v) = 104$$

D'où u^3 et v^3 sont solutions de $X^2 - 104X + 4913$.

¹On dit que \mathbb{Z} est un anneau, tout comme $\mathbb{Z}[i]$.

3. On calcule le discriminant de l'équation $X^2 - 104X + 4913 = 0$

$$\Delta = 104^2 - 4 \times 4913 = -8836$$

Les racines carrées de -8836 sont $94i$ et $-94i$, donc les solutions de l'équation sont

$$X_1 = \frac{104 + 94i}{2} = 52 + 47i$$

$$X_2 = \frac{104 - 94i}{2} = 52 - 47i$$

On cherche $m + ni \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $(m + ni)^3 = 52 + 47i$. Alors

$$|m + ni|^6 = |52 + 47i|^2 = 4913 = 17^3$$

Donc

$$m^2 + n^2 = 17$$

Donc

$$m + ni = 4 + i$$

De même, $52 - 47i = (4 - i)^3$.

4. On calcule

$$(4 + i)(4 - i) = 17$$

Donc par la question 2, une solution de $x^3 = 51x + 104$ est

$$(4 + i) + (4 - i) = 8$$

Exercice 1.26

1. La similitude $z' = z + 3 - i$ est une translation de vecteur $3 - i$.
2. La similitude $z' = 2z + 3$ a pour centre Ω d'affixe -3 , pour angle 0 , et pour rapport 2 .
3. La similitude $z' = iz + 1$ a pour centre Ω d'affixe $\frac{1+i}{2}$, pour angle $\frac{\pi}{2}$, et pour rapport 1 .
4. La similitude $z' = (1 - i)z + 2 + i$ a pour centre Ω d'affixe $1 - 2i$, pour angle $-\frac{\pi}{4}$, et pour rapport $\sqrt{2}$.

Exercice 1.27

Une visualisation de cet exercice est disponible à l'adresse <https://www.geogebra.org/calculator/b7pnhgvy>

1. La similitude

$$z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

a pour centre Ω d'affixe $\omega = 2$, pour angle $\frac{\pi}{6}$, et pour rapport $\frac{2\sqrt{3}}{4}$.

2. On calcule le produit scalaire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'\Omega} \cdot \overrightarrow{M'M} &= \overrightarrow{M'\Omega} \cdot (\overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}) \\ &= \overrightarrow{M'\Omega} \cdot \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{M'\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega M} \\ &= M'\Omega^2 - \overrightarrow{\Omega M'} \cdot \overrightarrow{\Omega M} \\ &= M'\Omega^2 - \Omega M' \times \Omega M \times \cos(\widehat{M'\Omega M}) \\ &= M'\Omega^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \Omega M'^2 \times \cos(-\pi/6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc l'angle $\widehat{\Omega M' M}$ est rectangle, ce qui conclut.

Exercice 1.28

1. La similitude de centre $\Omega(1, 1)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 a pour forme complexe

$$\begin{aligned} z' &= (z - (1 + i)) \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} + (1 + i) \\ &= 2iz + 3 - i \end{aligned}$$

2. La similitude de centre $\Omega(0, 0)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\sqrt{3}$ a pour forme complexe

$$z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}z$$

3. La similitude de centre $\Omega(1, -2)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $2\sqrt{2}$ a pour forme complexe

$$\begin{aligned} z' &= (z - (1 - 2i)) \times 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} + (1 - 2i) \\ &= (2 + 2i)z - 5 \end{aligned}$$

Exercice 1.29

1. On commence par déterminer la forme complexe de cette similitude, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 + i - (-3 - i)}{1 - 2i} = 2i \\ \beta &= \frac{(-3 - i) - 2i(1 + i)}{1 - 2i} = 1 - i \end{aligned}$$

Donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = 2iz + 1 - i$$

Donc son centre est Ω d'affixe $\frac{1 - i}{1 - 2i} = \frac{3 + i}{5}$, son rapport est 2 et son angle est $\frac{\pi}{2}$.

2. On commence par déterminer la forme complexe de cette similitude, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-1 - 4i - (-4 - i)}{5 - 4i - (-1 - 4i)} = \frac{1 - i}{2} \\ \beta &= \frac{(5 - 4i)(-4 - i) - (-1 - 4i)^2}{5 - 4i - (-1 - 4i)} = \frac{-3 + i}{2} \end{aligned}$$

Donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = \frac{1 + i}{2}z + \frac{3 + i}{2}$$

Donc son centre est Ω d'affixe $\frac{\frac{-3+i}{2}}{1 - \frac{1-i}{2}} = -1 + 2i$, son rapport est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et son angle est $-\frac{\pi}{4}$.

3. On commence par déterminer la forme complexe de cette similitude, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\sqrt{3} + 2i}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

Donc la similitude a pour forme complexe

$$z' = z \times \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \right)$$

Donc son centre est Ω d'affixe 0, son rapport est $|\alpha| = 2$ et son angle est $\arg(\alpha) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}\right) = \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 1.30

On détaille le raisonnement pour la première question, les suivantes se font de la même façon.

1. Soient M et N deux points du plan. Soit Ω un troisième point. Alors

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega N} = \overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}$$

Donc l'homothétie de centre Ω et de rapport k transforme \overrightarrow{MN} en

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = \overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega N} - k\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{MN}$$

La translation de vecteur \vec{u} transforme $\overrightarrow{M'N'}$ en

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M''N''} &= \overrightarrow{M''M'} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'N''} \\ &= -\vec{u} + \overrightarrow{M'N'} + \vec{u} \\ &= \overrightarrow{M'N'} \\ &= k\overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

On constate donc que la composée de ces transformations est

- Dans le cas $k \neq 1$, une homothétie de rapport k .
- Dans le cas $k = 1$, la translation de vecteur \vec{u} .

On dit que l'ensemble des homothétie des translations est un sous-groupe des similitudes.

2. Soient M et N deux points du plan transformés respectivement en M' et N' , puis en M'' et N'' .

Soit z l'affixe du vecteur \overrightarrow{MN} . Alors

$$\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{M'N'} = e^{i\theta}z$$

Donc la composée d'une rotation et d'une translation est

- Une translation si la rotation est d'angle nul;
- Une rotation sinon.

3. Soient M et N deux points du plan transformés respectivement en M' et N' , puis en M'' et N'' .

Soit z l'affixe du vecteur \overrightarrow{MN} . Alors

$$\overrightarrow{M''N''} = k'\overrightarrow{M'N'} = k'kz$$

Donc la composée de deux homothétie est

- Une translation si $k'k = 1$;
- Une homothétie sinon.

4. Soient M et N deux points du plan transformés respectivement en M' et N' , puis en M'' et N'' .

Soit z l'affixe du vecteur \overrightarrow{MN} . Alors

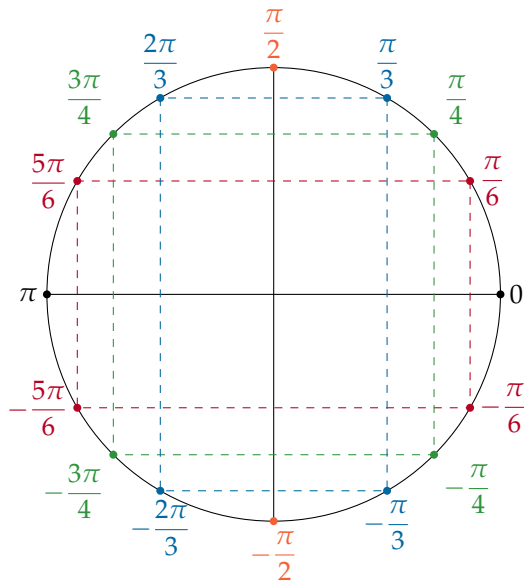
$$\overrightarrow{M''N''} = e^{i\varphi}\overrightarrow{M'N'} = e^{i(\varphi+\theta)}z$$

Donc la composée de deux rotations est

- Une translation si $\varphi + \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$;
- Une rotation sinon.

Exercice 1.31

1. $z' = z + 1 - i$.
2. $z' = 2(z - 1 + i) + 1 - i = 2z - 1 + i$
3. $z' = -z$
4. $z' = -(z - 1 + i) + 1 - i = -z + 2 - 2i$
5. $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$
6. $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 + i) + 1 - i = iz - 2i$
7. $z' = \bar{z}$
8. $z' = \overline{(z + i)} - i = \bar{z} - 2i$
9. $z' = -\bar{z}$
10. $z' = -\overline{(z - 1)} + 1 = -\bar{z} + 2$



θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Transformation	Forme complexe
Translation de vecteur $\vec{u} = a + ib$	$z' = z + a + ib$
Homothétie de centre $\Omega = \omega$ et de rapport k	$z' = k(z - \omega) + \omega$
Symétrie de centre $\Omega = \omega$	$z' = -(z - \omega) + \omega$
Rotation de centre $\Omega = \omega$ et d'angle θ	$e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$
Reflexion verticale par rapport à la droite $y = k$	$z' = \overline{(z - ik)} + ik$
Reflexion horizontale par rapport à la droite $x = k$	$z' = -\overline{(z - k)} + k$