2.7 Exercices (1er octobre 2024)

Exercice 2.1 Les propositions suivantes sont elles des tautologies ?

1. $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{Q}$,
2. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow$ non $(\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q})$,
3. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$,
4. (non $\mathcal{P} \Rightarrow$ non $\mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Exercice 2.2 Parmi les propositions suivantes, quelle est la négation de "$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$" ?

1. $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$,
2. non $\mathcal{P} \Rightarrow$ non $\mathcal{Q}$,
3. $\mathcal{P}$ ou non $\mathcal{Q}$,
4. $\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$.

Exercice 2.3

1. Donner une condition suffisante mais pas nécessaire pour qu'un entier naturel soit strictement plus grand que dix.
2. Donner une condition nécessaire mais pas suffisante pour qu'un entier naturel soit (exactement) divisible par six.

Exercice 2.4 Parmi les assertions suivantes relatives à une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quelle est la contraposée de "f croissante $\Rightarrow f(3) \geq f(2)$" ?

1. $f(3) \geq f(2) \Rightarrow f$ croissante,
2. $f(3) < f(2) \Rightarrow f$ pas croissante,
3. f pas croissante $\Rightarrow f(3) < f(2)$.

Exercice 2.5 La proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ est elle vraie ? Qu'en est-il des propositions

$$2 > 1 \Rightarrow 2^2 > 1, \quad 0 > 1 \Rightarrow 0^2 > 1 \quad \text{et} \quad (-2) > 1 \Rightarrow (-2)^2 > 1?$$

Exercice 2.6 Pour chacune des formules suivantes, écrire sa négation et décider (démonstration) si cela a un sens de leur validité respective :

1. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n$,
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
4. $\forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
7. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$,
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

Exercice 2.7 Pour chacune des assertions suivantes relatives à une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, écrire la formule correspondante ainsi que sa négation et donner deux exemples qui satisfont l'assertion ainsi que deux autres qui ne la satisfont pas :

1. f est positive,
2. f est croissante,
3. f est croissante et positive,
4. f prend parfois des valeurs positives,
5. f est strictement positive,
6. f est paire.

Exercice 2.8 Montrer par contraposition les propriétés suivantes :

1. "Un entier naturel dont le carré est pair est automatiquement pair lui même",
2. "Un nombre réel dont le carré vaut deux est toujours strictement inférieur à deux".

Exercice 2.9 Montrer par l'absurde les assertions suivantes :

1. "Zéro est le seul réel positif qui est inférieur à tout réel strictement positif",
2. "La racine carrée de deux n'est pas un nombre entier".

Exercice 2.10 On considère la propriété $\mathcal{P}$:="$2^n > n^2$".

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $\mathcal{P}(n)$?

Exercice 2.11

1. Montrer que si n est un entier naturel tel que $4^n + 5$ est un multiple entier de 3, alors il en va de même de $4^{n+1} + 5$.
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $4^n + 5$ est-il un multiple entier de 3 ?
3. Montrer que si n est un entier naturel tel que $10^n + 7$ est un multiple entier de 9, alors il en va de même de $10^{n+1} + 7$.
4. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le nombre $10^n + 7$ est-il un multiple entier de 9 ?

Exercice 2.12 Montrer par récurrence que pour tout réel positif x et pour tout entier naturel n, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 2.13 Montrer par récurrence que les formules suivantes sont valides pour tout entier naturel n (non nul en ce qui concerne la dernière) :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$,
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$,
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (n \neq 0)$.

Exercice 2.14 Soient E, F, G trois ensembles.

1. Si $E \subset F \cup G$, a-t-on obligatoirement $E \subset F$ ou $E \subset G$?
2. Si $E \cap F \subset G$, a-t-on obligatoirement $E \subset G$ ou $F \subset G$?

Exercice 2.15 Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$ qui se rencontrent (ne sont pas disjointes).

1. Le plus petit élément de $A \cap B$ est-il nécessairement le plus petit élément de A et de B ?
2. Le plus petit élément de $A \cup B$ est-il nécessairement le plus petit élément de A ou de B ?

Exercice 2.16 Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'il existe une partie X de E telle que $A \cup X = B$? Déterminer alors toutes ces parties X.
2. Même question avec $A \cap X = B$.

Exercice 2.17 Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $A \cup B \subset A \cap B \Rightarrow A = B$,
2. $A \cap B^c \neq \emptyset \Rightarrow A \not\subset B$,
3. $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

Exercice 2.18 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $(A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$,
2. $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 2.19 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C.$$

Exercice 2.20 Soient E et F deux ensembles.

1. Un sous-ensemble X de $E \cup F$ est-il toujours de la forme $A \cup B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$?
2. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$ avec $A \subset E$ et $B \subset F$?

Exercice 2.21 Montrer que le disque unité dans $\mathbb{R}^2$ ne peut pas s'écrire comme produit de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.22 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$,
2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{>0}, n \mapsto n + 1$,
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto -n$,
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$,
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$,
6. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$.

Exercice 2.23 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si $g \circ f$ est surjective, f est elle automatiquement surjective ?
2. Si $g \circ f$ est surjective, g est elle automatiquement surjective ?

3. Si $g \circ f$ est injective, f est elle automatiquement injective ?
4. Si $g \circ f$ est injective, g est elle automatiquement injective ?

Exercice 2.24

1. Soient $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$ trois applications telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. A-t-on toujours $g_1 = g_2$? Et si f est injective ? Et si f est surjective ?
2. Soient $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$ trois applications telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. A-t-on toujours $f_1 = f_2$? Et si g est injective ? Et si g est surjective ?

Exercice 2.25 On considère les applications $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies respectivement par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ et dire pour chacune des applications f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$ si elle est injective, surjective ou bijective.

Exercice 2.26 Si $f : E \to E$ est une application et $n \in \mathbb{N}$, on définit f^n par récurrence en posant :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, f^{n+1} = f^n \circ f.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer par récurrence que si f est bijective, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est aussi bijective et que $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

Exercice 2.27

1. Déterminer une bijection entre $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ et $\mathbb{Z}_{\geq 2}$,
2. en déduire une bijection entre $A_1 := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ et $A_2 := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}\}$,
3. montrer que $[0, 1] \smallsetminus A_1 = [0, 1[\smallsetminus A_2$,
4. en déduire une bijection entre $[0, 1]$ et $[0, 1[$.

Exercice 2.28

1. établir une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ (on pourra compter alternativement les nombres positifs et les nombres négatifs).
2. établir une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (on pourra compter les couples en oblique),
3. établir une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ (on pourra sauter les fractions qu'on aura déjà comptées).