Introduzione e Contesto

Economia, Finanza, Matematica:

- **Economia**: Viene definita come la scienza dell'ottimizzazione di risorse scarse. Questo pone le basi per l'uso di strumenti matematici.
- **Finanza**: È la branca dell'economia che si occupa della gestione della risorsa più liquida, il denaro, nel tempo.
- **Matematica**: È lo strumento utilizzato per creare modelli che descrivono i fenomeni finanziari e aiutano a prendere decisioni razionali.

Il Processo della Matematica Finanziaria:

Viene illustrato il flusso logico: da un problema reale (finanziario) si passa a un modello astratto (matematico), lo si risolve, e si reinterpreta la soluzione per prendere una decisione concreta.

Attività Finanziarie e Incertezza

Attività Finanziaria e Incertezza:

- Un'attività finanziaria è un flusso di pagamenti futuri.
- Le due fonti principali di incertezza sono:
  - **Incertezza sul valore**: Non sapere quanto si riceverà.
  - **Incertezza sullo scadenzario**: Non sapere quando si riceverà.
- Vengono forniti esempi chiari: le azioni hanno incertezza sul valore, le polizze vita sullo scadenzario, i derivati su entrambi.

Focus del Corso:

- Viene specificato che la prima parte del corso (fino a metà novembre) si concentrerà su **attività finanziarie certe**: flussi di pagamenti di cui si conoscono sia l'importo sia la data con certezza.
- La seconda parte affronterà l'incertezza. L'obiettivo rimane la gestione del profilo rischio-rendimento.

Valore e Duration di un'Attività Certa

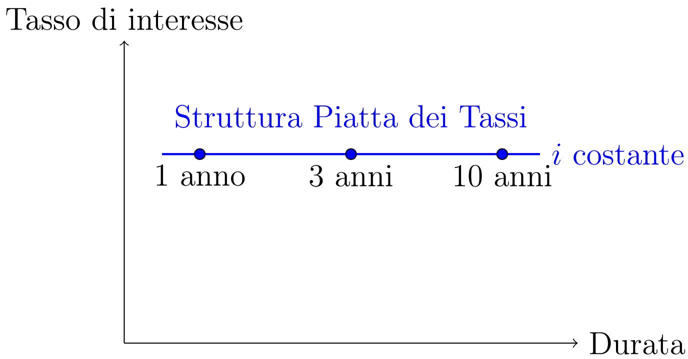
Attività Finanziaria Certa:

Formalizza il concetto: un'attività x è una sequenza di pagamenti certi $x = \{x_1, \ldots, x_m\}$ che avvengono in date certe $\{t_1, \ldots, t_m\}$.

Struttura dei Tassi di Interesse:

- Si introduce un'ipotesi fondamentale: si assume un tasso di interesse annuo composto i per tutte le scadenze (struttura piatta dei tassi).
- **Formula Principale**:
$$p(t, t_k) = (1 + i)^{-(t_k - t)}$$
- **Significato**: Questa formula definisce il **fattore di sconto**. $p(t, t_k)$ rappresenta il prezzo al tempo t di un titolo che paga 1€ alla scadenza t_k. È il valore odierno di 1€ futuro. Dove $i \leq -1$
- **Nella realtà**, il tasso di interesse che una banca ti offre può dipendere dalla durata dell'investimento:
  - **2%** per un vincolo di **1 anno**
  - **2,5%** per un vincolo di **3 anni**
  - **3%** per un vincolo di **10 anni**
- Questa si chiama **curva dei tassi di interesse (Yield Curve)** e può avere varie forme:
  - Crescente (la più comune)
  - Decrescente
  - Piatta
  - Con "gobbe"

  *L'Ipotesi del Corso: Struttura Piatta
- Per poter costruire i modelli e spiegare i concetti fondamentali (come la **duration**), il corso fa un'ipotesi molto forte e comoda:
- **Esiste un unico tasso di interesse** i composto **che vale per qualsiasi durata temporale.**



Cosa Significa Nel Nostro Modello:

- Il rendimento per un investimento di **1 anno** è i
- Il rendimento (annuo) per un investimento di **10 anni** è sempre i
- Il rendimento per **qualsiasi scadenza** è sempre lo stesso i

> **Nota Importante**: Questa è una *semplificazione didattica*. Nella realtà finanziaria, la curva dei tassi raramente è piatta, ma comprendere il caso semplificato è essenziale per affrontare successivamente modelli più complessi.

Il Fattore di Sconto: $p(t, t_k)$

Cosa Rappresenta $p(t, t_k)$?

- È il **prezzo** (p), calcolato all'istante t (ad esempio, "oggi"), di un titolo molto speciale.

Questo titolo:

- **Non paga cedole** (interessi periodici)
- Paga semplicemente **1€** alla sua scadenza futura t_k

Per questo motivo viene chiamato **"titolo a cedola nulla unitario"**

L'Interpretazione Pratica

> **Domanda**: "Quanto sei disposto a pagare oggi (t) per ricevere 1€ in futuro (t_k)?"
>
> **Risposta**: $p(t, t_k)$ — ovviamente meno di 1€!

Per questo $p(t, t_k)$ è anche chiamato **fattore di sconto**.

Analisi della Formula

$$p(t, t_k) = (1 + i)^{-(t_k - t)}$$

- i: È l'unico tasso di interesse di riferimento, annuo, che abbiamo ipotizzato esistere nel nostro mercato.
- $(t_k - t)$: È la durata dell'operazione, misurata in anni. È il tempo che intercorre tra oggi (t) e la data del pagamento futuro (t_k).
- $1 + i$: È il **montante** che si ottiene dopo un anno investendo 1€.
- $(1 + i)^{(t_k - t)}$: Questa sarebbe la formula della **capitalizzazione composta**. Ci direbbe a quanto ammonta 1€ investito oggi per $(t_k - t)$ anni.
- $(1 + i)^{-(t_k - t)}$: L'**esponente negativo** inverte l'operazione. Non stiamo capitalizzando verso il futuro, ma stiamo **attualizzando** (scontando) dal futuro al presente.

Importanza del Fattore di Sconto

1. Valore di una Attività Finanzaria certa

Il valore di un'attività finanziaria certa $V(t, x, i)$ all'istante t è definito come:

$$V(t, x, i) = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot (1 + i)^{-(t_k - t)}$$

- **Se** $t < t_k$ (flussi futuri):
  - L'importo x_k viene **scontato** (attualizzato) all'istante t
  - Questi formano il **Valore Residuo**
  - Formula: $x_k \cdot (1 + i)^{-(t_k - t)}$
- **Se** $t > t_k$ (flussi passati):
  - L'importo x_k viene **capitalizzato** (montante) all'istante t
  - Questi formano il **Valore Montante**
  - Formula: $x_k \cdot (1 + i)^{(t - t_k)}$
- **Se** $t = t_k$:
  - Il valore è l'importo x_k stesso
  - Formula: $x_k \cdot (1 + i)^0 = x_k$

  - **Significato**: Questa è la formula del **Valore Attuale** (o prezzo) di un'attività finanziaria. Si ottiene sommando i valori attuali di tutti i singoli pagamenti futuri. Ogni pagamento x_k viene "scontato" (o "attualizzato") al tempo t moltiplicandolo per il rispettivo fattore di sconto.
  - **Collegamento Teorico**: Questo principio, noto come **linearità del prezzo**, afferma che il valore di un portafoglio (il flusso di pagamenti) è la somma dei valori delle sue singole componenti (i singoli pagamenti). La slide 26 spiega che se $t > t_k$ (il pagamento è già avvenuto), il termine $(1+i)^{-(t_k-t)}$ diventa $(1+i)^{t-t_k}$, rappresentando una capitalizzazione anziché un'attualizzazione.

0.0.1 Teorema della linearità del prezzo

Il teorema dei prezzi impliciti, o Teorema di Linearità del Prezzo, afferma che il valore equo (V) di un titolo o di un'attività finanziaria complessa, che genera un flusso futuro di pagamenti certi ($\tilde{x}$), è pari alla somma dei valori equi dei singoli pagamenti che lo compongono.

Il teorema è formalmente identico alla definizione del valore di un'attività finanziaria in un regime dato (come visto nella Lezione 1), ma differisce nel contenuto perché esprime una relazione tra i prezzi di titoli quotati sul mercato.

Formalmente, dato un titolo $\tilde{x}$ con pagamenti futuri certi $\{x_1, \dots, x_m\}$ alle scadenze $\{t_1, \dots, t_m\}$, il suo valore equo all'istante $t \leq t_1$ (ossia il suo prezzo in t compatibile con un mercato perfetto) è:

$$V(t, \tilde{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot p(t, t_k)$$

Dove $p(t, t_k)$ è il prezzo di mercato in t di un Titolo a Cedola Nulla (TCN) unitario con scadenza t_k. Il prezzo di mercato del TCN unitario svolge il ruolo di fattore di sconto di mercato.

Implicazioni principali

1. **Indipendenza dall'Importo (Omogeneità)**: Il valore equo di un importo x_k esigibile in t_k è x_k moltiplicato per il prezzo del TCN unitario, $x_k p(t, t_k)$. Ciò significa che, in un mercato perfetto, se si acquista, ad esempio, 10 volte la quantità di un titolo, il suo valore sarà 10 volte il prezzo del titolo unitario.

2. **Additività (Linearità)**: Il valore equo di un flusso di importi è la somma dei valori equi dei singoli importi. Questa è la proprietà che conferisce il nome al teorema e ne giustifica l'importanza: il valore delle operazioni composte è la somma dei valori delle operazioni semplici che le compongono.

3. **Assenza di Arbitraggio**: La linearità del prezzo è una conseguenza diretta dell'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio in un mercato perfetto (o ideale). Se il prezzo di un'attività complessa non coincidesse con la somma dei prezzi attualizzati dei suoi componenti, sarebbe possibile attuare una strategia che garantisce un guadagno certo a rischio zero (arbitraggio).

In sintesi, il Teorema di Linearità del Prezzo è la pietra angolare per la valutazione coerente dei titoli in un mercato finanziario ideale, garantendo che il prezzo di un pacchetto di flussi monetari sia esattamente pari al costo di acquisto o vendita di tutti i singoli componenti presi separatamente.

Significato del Valore Totale

Il valore totale $V(t, x, i)$ rappresenta il **valore globale** di tutti i movimenti generati dall'operazione finanziaria, considerando:

- I flussi passati, capitalizzati al tempo presente
- I flussi futuri, attualizzati al tempo presente
- Il flusso presente, se esiste

Il Concetto di Equità

Definizione

Un'attività finanziaria si definisce **equa** in t se il suo **Valore Attuale Netto** $W(t, x, i)$ è pari a zero:

$$W(t, x, i) = 0$$

Interpretazione Pratica

Un'operazione finanziaria è **equa** quando il **valore di quanto si deve pagare** coincide esattamente con il **valore di tutto quanto si deve ricevere**, entrambi valutati allo stesso istante t e allo stesso tasso i.

Esempio di Operazione Equa

Consideriamo un prestito:

- **Oggi (t=0)**: Ricevo 1000€ (entrata positiva: +1000)
- **Fra 1 anno (t=1)**: Restituisco 1050€ (uscita negativa: -1050)
- **Tasso** $i = 5\%$

$$W(0, x, 0.05) = 1000 - \frac{1050}{(1 + 0.05)^1} = 1000 - 1000 = 0$$

Risultato: L'operazione è equa perché il valore attuale delle entrate coincide con il valore attuale delle uscite.

Proprietà del Valore

1. **Linearità**: Il valore di un portafoglio è la somma dei valori dei singoli titoli
2. **Omogeneità**: Se tutti i pagamenti vengono moltiplicati per una costante, anche il valore viene moltiplicato per la stessa costante
3. **Additività temporale**: Il valore può essere scomposto in componenti passate e future

2. Base per la Duration e il Rischio

- Tutti i concetti successivi sono derivati matematicamente partendo da questa formula:
  - **Duration**: misura la scadenza media ponderata
  - **Sensibilità ai tassi**: misura quanto il prezzo cambia al variare dei tassi
  - **Immunizzazione**: strategia per proteggersi dal rischio di tasso
- La formula $V(t, x, i) = \sum[x_k \cdot (1 + i)^{-(t_k - t)}]$ è il **mattone fondamentale** di tutta la matematica finanziaria nell'ipotesi di struttura piatta.

Esempio Numerico

Supponiamo:

- Tasso di interesse $i = 5\% = 0.05$
- Scadenza $t_k - t = 2$ anni

$$p(t, t_k) = (1 + 0.05)^{-2} = \frac{1}{(1.05)^2} = \frac{1}{1.1025} \approx 0.9070$$

Interpretazione: Oggi sei disposto a pagare circa **0.907€** per ricevere **1€** tra 2 anni.

Duration di un'Attività Finanziaria Certa:

- Si introduce la **Duration** (o durata finanziaria), un concetto inventato da Frederick Macaulay.
- **Formula Principale**:

$$D(t, x, i) := \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t) \cdot x_k \cdot (1 + i)^{-(t_k - t)}}{\sum_{k=1}^{m} x_k \cdot (1 + i)^{-(t_k - t)}}$$

Assumiamo le seguenti condizioni:

  - Tutti i pagamenti x_k sono **non-negativi**: $x_k \geq 0$ per ogni $k = 1, \ldots, m$
  - L'istante di valutazione t è **precedente** alla prima scadenza: $t < t_1$

- **Significato**:
  - Il denominatore è semplicemente il valore attuale dell'attività $V(t, x, i)$.
  - Il numeratore è una somma in cui ogni scadenza residua $(t_k - t)$ è "pesata" per il valore attuale del pagamento corrispondente $x_k \cdot (1 + i)^{-(t_k - t)}$.
- **Collegamento Teorico**: La duration è la **scadenza media ponderata** dei pagamenti. Non è una media aritmetica semplice delle scadenze, ma una media in cui ogni scadenza pesa di più quanto più è alto il valore attuale del suo pagamento.

La Duration come Scadenza Media:

- Questa slide riesprime la formula per rendere l'interpretazione più intuitiva.
- **Formula Riformulata**:

$$D(t, x) = \sum_{k=1}^{m} w_k(t, x) \cdot (t_k - t)$$

dove

$$w_k(t, x) = \frac{x_k \cdot (1 + i)^{-(t_k - t)}}{V(t, x, i)}$$

- **Significato**: Il termine $w_k(t, x)$ è il **peso** del k-esimo pagamento, definito come il rapporto tra il valore attuale del singolo pagamento e il valore attuale totale dell'attività. La duration è quindi il **tempo medio di attesa** per ricevere i pagamenti, dove l'attesa per ogni pagamento è ponderata in base alla sua importanza economica (il suo valore attuale).

Sezione 4: Proprietà e Applicazioni della Duration

Proprietà Generale della Duration:

- $D(t, x) = D(0, x) - t$: La duration decresce linearmente con il passare del tempo (se i tassi non cambiano).

Limiti (Media Interna): Essendo una media, la Duration è sempre compresa tra la scadenza minima (T_1) e la scadenza massima (T_n) dei flussi di pagamento futuri ($T_1 \leq D \leq T_n$).

- **Omogeneità**: Se tutti gli importi (R_j) di un'attività finanziaria vengono moltiplicati per la stessa costante positiva ($K > 0$), la Duration non cambia.
- **Titoli a Cedola Nulla (ZCB)**: La Duration di un titolo a cedola nulla con scadenza T (dove c'è un solo pagamento) è esattamente pari alla sua vita residua ($T - t$).
- **Duration di Portafoglio**: La Duration di un portafoglio composto da più attività è la media ponderata delle Duration delle singole componenti, dove i pesi sono dati dalla percentuale di valore di ciascuna componente sul valore totale del portafoglio.
- Se tutte le date T_j vengono spostate in avanti di un certo intervallo $\tau > 0$, oppure indietro di un certo $\tau < 0$, anche la Duration diminuisce o aumenta di τ (ovvero $D(t, x) = D(0, x) - t$), purchè il primo flusso avvenga dopo la data di valutazione.
- **Variazione con il Tasso**: A meno che non si tratti di un ZCB (la cui Duration è costante e pari alla scadenza), la Duration di un titolo che produce pagamenti in almeno due epoche future è strettamente decrescente con l'intensità di sconto δ. L'aumento del tasso riduce il peso dei pagamenti più lontani, accorciando la Duration

Duration di un Titolo a Cedola Nulla (Zero-Coupon Bond):

- Per un titolo che ha un solo pagamento C alla scadenza T, la duration è semplicemente la sua vita residua:
$$D(t, x) = T - t$$
È l'esempio più semplice e intuitivo.

Duration di un Titolo a Cedola Fissa:

- La formula è un'applicazione diretta di quella generale. L'interpretazione delle derivate è il punto chiave:
  - $\frac{dD}{dI} < 0$: All'aumentare della cedola (I), la duration diminuisce. Questo perché si ricevono pagamenti più consistenti prima della scadenza, riducendo il "tempo medio" di attesa.
  - $\frac{dD}{dC} > 0$: All'aumentare del valore di rimborso (C), la duration aumenta. Questo perché il peso del pagamento finale, il più lontano nel tempo, diventa maggiore.

Duration di una Rendita:

- Anche qui, è un'applicazione della formula generale. L'interpretazione è che la duration è proporzionale al periodo τ tra i pagamenti. La formula generale per la Duration (D) di una rendita (o portafoglio) che paga importi R_j ai tempi T_j è data dalla media ponderata delle scadenze (T_j):

$$D = \sum_{j=1}^{n} T_j \cdot w_j$$

dove w_j sono i pesi di ciascuna scadenza, definiti come il rapporto tra il valore attuale del flusso di cassa R_j alla scadenza T_j e il valore attuale totale dell'intera rendita $V(\delta)$:

$$w_j = \frac{R_j e^{-\delta T_j}}{V(\delta)}, \quad \text{con} \quad V(\delta) = \sum_{j=1}^{n} R_j e^{-\delta T_j}$$

0.1 Rendite Perpetue a Rata Costante

La Duration per una rendita perpetua a rata costante si ottiene prendendo il limite della durata di una rendita temporanea a rata costante quando il numero di rate n tende all'infinito ($n \to +\infty$).

Applicando il limite all'espressione precedente:

$$D_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} j e^{-\delta j}}{\sum_{h=1}^{n} e^{-\delta h}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(Ia)_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$$

Utilizzando le formule per le rendite perpetue:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} \quad \text{e} \quad (Ia)_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2}$$

otteniamo:

$$D_\infty = \frac{(Ia)_{\overline{\infty}|i}}{a_{\overline{\infty}|i}} = \frac{\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2}}{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i} = \frac{1+i}{i}$$

La formula risultante può quindi essere espressa in varie forme equivalenti:

$$\boxed{D_\infty = \frac{1+i}{i} = 1 + \frac{1}{i} = \frac{1}{d}}$$

dove:

- i è il tasso di interesse effettivo periodale
- $d = \frac{i}{1+i}$ è il tasso di sconto (interesse anticipato)

0.2 Interpretazione e Proprietà

- **Sensibilità al tasso**: La duration di una rendita perpetua ($D_\infty = 1/d$) è indipendente dal numero di rate e dipende solo dal tasso di interesse
- **Relazione con i tassi**: Per tassi di interesse bassi, la duration delle rendite perpetue è molto elevata
- **Limite superiore**: La duration di una rendita temporanea è sempre minore di quella della corrispondente rendita perpetua

- **Andamento**: All'aumentare del numero di rate n, la duration della rendita temporanea converge a quella della rendita perpetua

0.3 Duration di portafoglio

La **formula generale per la duration di portafoglio** si basa sul principio che la duration di un portafoglio è una media ponderata delle duration dei singoli titoli che lo compongono.

Dato un portafoglio x composto da n titoli, dove x_k è il titolo k e α_k è la quota (il numero di unità) investita nel titolo k, la duration del portafoglio $D(0,x)$ è calcolata come:

$$D(0,x) = \sum_{k=1}^{n} D(x_k) \cdot \frac{\alpha_k V(x_k)}{V(x)}$$

Dove:

- $D(x_k)$ è la duration (Macaulay Duration) del singolo titolo x_k
- $V(x_k)$ è il valore attuale (o prezzo) del singolo titolo x_k
- $\alpha_k V(x_k)$ è il valore attuale totale della quota investita nel titolo x_k
- $V(x)$ è il valore attuale totale del portafoglio: $V(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k V(x_k)$

I pesi di portafoglio rappresentano la percentuale del valore totale del portafoglio investita in ciascun titolo. Sono calcolati come rapporto tra il valore investito in un titolo specifico e il valore totale del portafoglio.

0.3.1 Pesi di portafoglio

Dato un portafoglio composto da k titoli, il peso del titolo i-esimo è il rapporto tra il valore attuale di quel titolo diviso per il valore attuale di portafoglio, ovvero la sommatoria dei valori attuali dei singoli titoli:

$$w_i = \frac{\alpha_i V(x_i)}{V(x)} = \frac{\alpha_i V(x_i)}{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j V(x_j)}$$

dove:

- w_i è il peso del titolo i-esimo nel portafoglio
- α_i è il numero di unità del titolo i-esimo detenute
- $V(x_i)$ è il valore di mercato (prezzo) di una unità del titolo i-esimo
- $\alpha_i V(x_i)$ è il valore totale investito nel titolo i-esimo
- $V(x)$ è il valore totale del portafoglio

0.4 Caso particolare: Due Titoli

Per un portafoglio composto da due titoli x_A e x_B, la formula si semplifica in:

$$D(0,x) = D(x_A) \cdot \frac{V_A}{V_A + V_B} + D(x_B) \cdot \frac{V_B}{V_A + V_B}$$

dove $V_A = \alpha_A V(x_A)$ e $V_B = \alpha_B V(x_B)$ sono i valori investiti nei due titoli. I pesi utilizzati sono quindi le percentuali del valore totale del portafoglio investite in ciascuna componente.

0.5 Richiami Teorici: Duration di Macaulay

La duration di un titolo singolo D (nota come **Duration di Macaulay**) è definita come la **media pesata delle scadenze (T_j)** dei flussi di cassa del titolo.

$$D = \sum_{j=1}^{n} T_j \cdot w_j$$

dove i pesi w_j sono calcolati come il rapporto tra il valore attuale (scontato) del flusso di cassa R_j alla scadenza T_j e il valore attuale totale del titolo $V(\delta)$:

$$w_j = \frac{R_j e^{-\delta T_j}}{V(\delta)}, \quad \text{con} \quad V(\delta) = \sum_{j=1}^{n} R_j e^{-\delta T_j}$$

In questo contesto, la duration rappresenta la **durata media finanziaria** del titolo. Per un portafoglio, la duration complessiva è quindi una media ponderata di queste durate finanziarie individuali.

0.6 Interpretazione e Proprietà

- La duration di portafoglio **non è lineare** rispetto al numero di titoli: il peso di ciascun titolo dipende dal suo valore di mercato
- Permette di stimare la **sensibilità del portafoglio** alle variazioni dei tassi di interesse
- È uno strumento fondamentale per l'**immunizzazione finanziaria** dai rischi di tasso
- La formula presuppone che tutti i titoli siano valutati allo stesso tasso di sconto δ

0.7 Esempio Pratico

Consideriamo un portafoglio composto da:

- Titolo A: Duration $D_A = 3$ anni, Valore investito $V_A = 10.000$ €
- Titolo B: Duration $D_B = 7$ anni, Valore investito $V_B = 20.000$ €

La duration del portafoglio è:

$$D_{\text{port}} = 3 \cdot \frac{10.000}{30.000} + 7 \cdot \frac{20.000}{30.000} = 3 \cdot 0.333 + 7 \cdot 0.667 = 1 + 4.667 = 5.667 \text{ anni}$$

Questo esempio mostra come il portafoglio abbia una duration più vicina a quella del titolo B, che ha un peso maggiore nell'investimento totale.

Duration come Misura del Rischio di Tasso e Immunizzazione

Valore in funzione del Tasso quando $t < t_1$:

- La funzione valore di un'attività finanziaria certa (V) (come un'obbligazione o una rendita), specialmente quando valutata prima della prima scadenza e assumendo flussi di cassa non negativi ($x_k \geq 0$), è decrescente e convessa rispetto al tasso di interesse (i o δ) utilizzato per l'attualizzazione. Se i sale, il valore scende, e viceversa.

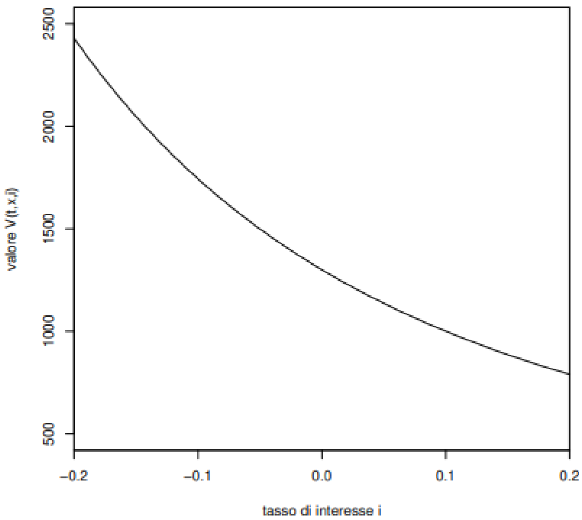


Figura 1: Enter Caption

Il valore di un'attività finanziaria in un istante t è dato dalla somma dei pagamenti futuri, attualizzati a t. Il fattore di attualizzazione (o fattore di sconto) è dato da $v(t, t_k) = (1+i)^{-(t_k - t)}$ nel regime dei tassi annui composti.

- **Aumento del Tasso (i)**: Se il tasso di interesse (i) aumenta, il fattore di sconto $(1+i)^{-(t_k-t)}$ diminuisce.
- **Riduzione del Valore**: Poiché il Valore (V) è la somma dei flussi futuri moltiplicati per i fattori di sconto, se i fattori di sconto diminuiscono, il Valore dell'attività deve diminuire.

In termini economici: un tasso di interesse più alto significa che il costo opportunità del denaro è maggiore. Pertanto, per ottenere una data somma futura, è necessario investire meno oggi, e di conseguenza, il valore attuale dei flussi futuri scende.

Matematicamente, **per un'attività con solo flussi futuri ($t < t_1$), la derivata prima della funzione valore $V(t, x, i)$ rispetto al tasso i è negativa**:

$$\frac{dV(t,x,i)}{di} = -\frac{1}{1+i} D(t,x,i) V(t,x,i).$$

Il fatto che il valore sia decrescente e convesso implica che, se il tasso aumenta, il prezzo diminuisce, ma diminuisce in modo più brusco per valori bassi del tasso.

Nota sulla Convessità: La convessità ($V''(i) > 0$) significa che se si osserva una variazione diminutiva del tasso, essa porta a un aumento del prezzo maggiore della diminuzione di prezzo corrispondente a un aumento del tasso della stessa entità.

Duration come Misura del Rischio di Tasso:

- **Formula Fondamentale**:

$$\frac{dV}{di} = -\frac{1}{1+i} \cdot D(t,x,i) \cdot V(t,x,i)$$

- **Significato**: Questa formula lega la variazione del valore (dV) a una variazione del tasso (di). Ci dice che la **sensibilità** del prezzo di un'attività alle variazioni dei tassi di interesse è direttamente proporzionale alla sua duration. Questa formula implica che la Duration quantifica la sensibilità (rischiosità) del valore di un'attività finanziaria rispetto alle variazioni del tasso di interesse. In termini semplici:

- Maggiore è la Duration, maggiore è la sensibilità del prezzo alle variazioni di tasso.

- A parità di variazione di tasso, un titolo con Duration più alta subirà una variazione di prezzo (in valore assoluto) maggiore.

Gestione del Rischio e Approssimazione di Taylor:

- La formula

$$\Delta V \approx V \cdot \left[1 - \frac{\Delta i}{1+i} \cdot D\right]$$

permette di stimare la variazione di prezzo di un'obbligazione a seguito di una piccola variazione del tasso Δi.L'Approssimazione di Taylor (o sviluppo di Taylor) è uno strumento matematico fondamentale utilizzato in Matematica Finanziaria per stimare il valore di una funzione in un intorno di un punto noto, in particolare per quantificare la variazione del prezzo di un'attività finanziaria al variare del tasso di interesse.Se la variazione del tasso $\Delta\delta$ (o Δi) è considerata "sufficientemente piccola", si può utilizzare l'approssimazione lineare (o al prim'ordine) di Taylor. Questa approssimazione lineare, che utilizza solo la prima derivata della funzione valore (V'), è quella che collega direttamente la Duration alla sensibilità (o rischiosità) del prezzo rispetto ai tassi.

- **Strategia Operativa**:

  - Se si prevede un **rialzo** dei tassi (e quindi un calo dei prezzi), si dovrebbero scegliere investimenti con **duration bassa** per minimizzare le perdite.
  - Se si prevede un **ribasso** dei tassi (e quindi un aumento dei prezzi), si dovrebbero scegliere investimenti con **duration alta** per massimizzare i guadagni.

- L'esempio mostra che con una duration di 3, un aumento dei tassi dell'1% ($\Delta i = 0.01$) causa una perdita di valore di circa il 2.94%.

0.8 Valore in Funzione del Tasso di Interesse: Caso $t > t_1$

Il concetto si riferisce al comportamento del Valore $V(t,x,i)$ di un'attività finanziaria certa (dove x sono i flussi di cassa e i è il tasso di interesse) quando l'istante di valutazione t è successivo alla prima scadenza t_1 dei flussi. Si assume che i flussi di cassa siano non negativi ($x_k \geq 0$).

1. Composizione del Valore

Il Valore di un'attività finanziaria in un istante t è definito dalla somma dei pagamenti futuri attualizzati e dei pagamenti passati capitalizzati. La formula generale del valore è:

$$V(t, x, i) = \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-(t_k - t)}$$

Quando $t > t_1$, l'istante di valutazione t si colloca cronologicamente tra alcune scadenze passate (quelle per cui $t_k < t$, che formano il Valore Montante $M(t)$) e alcune scadenze future (quelle per cui $t_k > t$, che formano il Valore Residuo $V(t)$).

In sintesi:

- I flussi di cassa passati ($t_k < t$) vengono capitalizzati (portati avanti nel tempo) fino all'istante t.
- I flussi di cassa futuri ($t_k > t$) vengono attualizzati (portati indietro nel tempo) fino all'istante t.

2. Comportamento della Funzione Valore per $t > t_1$

Nel caso più semplice, quando la valutazione avviene prima di qualsiasi pagamento ($t < t_1$), la funzione Valore $V(t, x, i)$ è sempre decrescente e convessa rispetto al tasso i.

Tuttavia, quando $t > t_1$ (e in generale, quando t è intermedio rispetto alle scadenze), la funzione $V(t, x, i)$ non è necessariamente sempre decrescente rispetto al tasso i.

Spiegazione della non-monotonia:

1. **Impatto dei Flussi Futuri (Valore Residuo)**: La parte del valore composta dai pagamenti futuri (attualizzati) rimane una funzione decrescente del tasso i. Un aumento di i riduce i fattori di sconto $v(t, t_k) = (1+i)^{-(t_k - t)}$, diminuendo il Valore Residuo.
2. **Impatto dei Flussi Passati (Valore Montante)**: La parte del valore composta dai pagamenti passati (capitalizzati) è una funzione crescente del tasso i. Un aumento di i aumenta i fattori montanti $m(t_k, t) = (1+i)^{t - t_k}$, aumentando il Valore Montante.

Poiché il Valore totale $V(t, x, i)$ è la somma di una componente decrescente (attualizzazione) e di una componente crescente (capitalizzazione) rispetto a i, il risultato complessivo (la derivata di V) può avere un segno variabile.

A causa di questa combinazione di effetti opposti, il grafico della funzione valore $V(t, x, i)$ in funzione di i (o del fattore di sconto v) per $t > t_1$ può non essere più monotonicamente decrescente e può presentare curvature complesse (non è sempre convessa). La variazione di segno della derivata del Valore rispetto al tasso è la ragione per cui la Duration (che è proporzionale alla derivata prima del valore) assume un ruolo cruciale nella gestione del rischio.

In particolare, il problema di stabilire se un portafoglio è immunizzato contro il rischio di tasso (cioè se il suo valore non diminuisce quando i tassi cambiano) dipende proprio da come si compensano l'effetto del rischio di reimpiego (che aumenta con i tassi, influenzando la capitalizzazione) e il rischio di prezzo (che diminuisce con i tassi, influenzando l'attualizzazione).

Nel caso intermedio, un'attività finanziaria (o un portafoglio) può manifestare una mancanza di monotonia del valore rispetto al tasso, rendendo problematica l'applicazione del criterio di scelta basato sul tasso (TIR) e influenzando la stabilità del portafoglio.

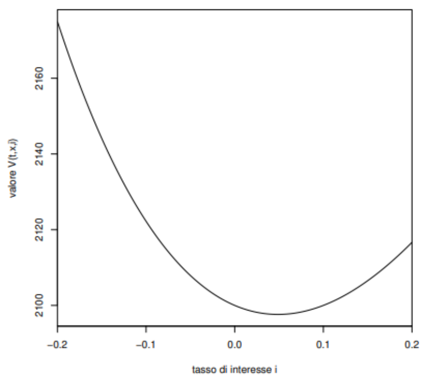


Figura 2: Enter Caption

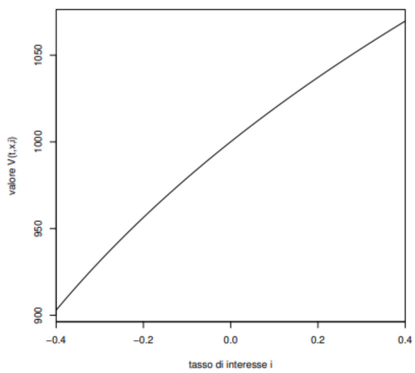


Figura 3: Enter Caption

Duration e Immunizzazione Finanziaria:

- **Formula Principale**: Quando $t = D(0, x, i)$, si ha

$$\frac{dV}{di} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2V}{di^2} > 0$$

- **Significato**: Se si valuta l'attività finanziaria in un istante t pari esattamente alla sua duration iniziale ($D(0, \dots)$), il valore in quel punto è **localmente immune** a piccole variazioni del tasso di interesse. Il punto è un **minimo locale** per la funzione valore.

- **Collegamento Teorico**: Questo è il concetto di **immunizzazione**. Mantenere un investimento per un periodo pari alla sua duration protegge il valore di realizzo finale dalle fluttuazioni dei tassi. Qualsiasi piccola variazione (in aumento o in diminuzione) del tasso di interesse non farà diminuire il valore dell'investimento a quella data.

L'immunizzazione finanziaria è una strategia volta a proteggere il valore di un'attività (o di un portafoglio di attività e passività) da fluttuazioni inattese dei tassi di interesse.

La Duration, definita come la media ponderata delle scadenze residue dei pagamenti, misura la sensibilità (rischiosità) del valore di un'attività finanziaria rispetto alle variazioni del tasso di interesse.

Per un'attività con flussi di cassa non negativi ($x_k \geq 0$) valutata prima della prima scadenza ($t < t_1$), la funzione valore (V) è decrescente e convessa rispetto al tasso (i o δ).

Il meccanismo di immunizzazione sfrutta il fatto che, in un investimento, un cambio del tasso genera due rischi opposti che, se bilanciati, si compensano:

1. **Rischio di Prezzo**: Se il tasso aumenta, il valore attuale dell'attività diminuisce.
2. **Rischio di Reimpiego**: Se il tasso aumenta, i flussi di cassa intermedi che vengono reinvestiti (o capitalizzati) genereranno un montante finale maggiore.

L'immunizzazione si ottiene quando si sceglie un orizzonte temporale di liquidazione o un punto di valutazione in cui questi due effetti si annullano (o quasi), garantendo che il valore finale dell'investimento non scenda sotto la soglia iniziale attesa.

La Duration come "Tempo Ottimo di Smobilizzo"

Un risultato fondamentale stabilisce che la Duration può essere interpretata come il tempo ottimo di smobilizzo degli attivi.

La proposizione chiave afferma che, per un'attività finanziaria con flussi futuri certi e non negativi, se si valuta l'attività all'istante temporale T pari alla sua Duration iniziale, $T = D(0, x, i)$, si ottiene un punto di minimo assoluto per la funzione valore calcolata in quell'istante, $W_A^T(\delta)$.

Questo risultato è formalmente espresso attraverso le condizioni di derivabilità della funzione valore $V(t, x, i)$:

$$\frac{dV(D(0,x,i),x,i)}{di} = 0$$

$$\frac{d^2V(D(0,x,i),x,i)}{di^2} > 0$$

Spiegazione del Risultato Matematico

Queste due condizioni hanno un significato preciso nel calcolo differenziale:

1. **Derivata Prima Uguale a Zero ($V'(i) = 0$)**:
   - **Significato Matematico**: Indica che, quando l'istante di valutazione T coincide con la Duration D, la funzione valore V è stazionaria rispetto al tasso i.
   - **Implicazione Finanziaria**: Un piccolo cambiamento (Δi) nel tasso di interesse causa una variazione di valore ΔV prossima a zero. Il rischio di prezzo e il rischio di reimpiego si bilanciano perfettamente.
2. **Derivata Seconda Maggiore di Zero ($V''(i) > 0$)**:
   - **Significato Matematico**: Indica che la funzione valore, in quel punto stazionario, è convessa.
   - **Implicazione Finanziaria**: Garantisce che il punto stazionario è un minimo locale. Qualsiasi piccola variazione del tasso (Δi) non può far scendere il valore V al di sotto del suo livello iniziale.

In termini della proposizione:

$$V(D(0,x,i),x,i) \leq V(D(0,x,i),x,i+\Delta i)$$

Il valore minimo si verifica proprio al tasso i inizialmente atteso. L'investitore è così immunizzato localmente (per Δi sufficientemente piccoli).

Immunizzazione del Portafoglio (Teorema di Redington)

Il concetto di immunizzazione si estende alla gestione di un bilancio intero, composto da attività (A) e passività (L). L'obiettivo è minimizzare il rischio di tasso sul valore netto del portafoglio, $V(\delta) = V_A(\delta) - V_L(\delta)$.

L'immunizzazione locale è assicurata se il tasso δ è un punto di minimo locale per la funzione $V(\delta)$.

Le condizioni sufficienti (Teorema di Redington) per l'immunizzazione locale sono:

1. **Equilibrio Finanziario ($V(\delta) = 0$)**: Il valore attuale delle attività è uguale al valore attuale delle passività ($V_A = V_L$).

2. **Uguaglianza delle Duration ($V'(\delta) = 0$)**: La Duration delle attività è uguale alla Duration delle passività ($D_A = D_L$).

3. **Convessità Positiva ($V''(\delta) > 0$)**: La Convessità delle attività deve essere maggiore della Convessità delle passività ($C_A > C_L$).

Se queste condizioni sono soddisfatte, il portafoglio è "immunizzato localmente" contro piccoli shift dei tassi.

Immunizzazione Globale (Teorema di Fisher-Weil)

Nel caso specifico in cui il passivo consista in un'unica uscita ad un tempo T, la condizione di immunizzazione si semplifica notevolmente. In questo scenario (e assumendo equilibrio di bilancio $V_A = V_L$), la condizione necessaria e sufficiente per l'immunizzazione è semplicemente l'uguaglianza delle Duration ($D_A = D_L = T$).

In questo caso, l'uguaglianza delle Duration garantisce anche la condizione di convessità ($C_A > C_L$), rendendo il punto di minimo non solo locale ma globale, proteggendo il portafoglio da variazioni di tasso anche "grandi".

Esempio Conclusivo:

- Questo esempio pratico dimostra l'immunizzazione.

- Se un investitore liquida l'asset a una data $t = 2$ (diversa dalla duration $D = 2.76$), il suo valore di liquidazione è esposto al rischio di tasso: 1280€ se i tassi scendono, 1262€ se salgono.

- Se invece l'investitore pianifica di liquidare l'asset alla data della sua duration ($t = 2.76$), il suo valore di liquidazione (1299.836€) è protetto. Sia con un rialzo che con un ribasso dei tassi, il valore finale risulta leggermente superiore (1299.866€ e 1299.847€), confermando che quel punto è un minimo locale e l'investimento è immunizzato.

1. Il Rendimento e i Concetti Fondamentali

Il concetto di **rendimento** (o *return*) è centrale nella valutazione di un'attività finanziaria. In un contesto semplificato a un unico periodo, si distinguono due tipi principali di rendimento:

1. **Rendimento Assoluto** (R_{ass}): È definito come la differenza tra il valore finale dell'attività, $S(T)$, e il suo valore iniziale (prezzo), $S(0)$:

$$R_{ass} := S(T) - S(0)$$

   Il rendimento assoluto cattura il profilo profitti-perdite del titolo: un valore positivo corrisponde a un profitto, mentre un valore negativo corrisponde a una perdita.

2. **Rendimento Relativo o Percentuale** (R): Esprime il rendimento assoluto in percentuale dell'investimento iniziale:

$$R := \frac{S(T) - S(0)}{S(0)} = \frac{R_{ass}}{S(0)}$$

   Questo tipo di rendimento è preferibile per confrontare la performance tra periodi diversi o tra titoli diversi, in quanto standardizza il guadagno rispetto all'investimento iniziale.

In generale, sebbene il prezzo $S(0)$ sia stabilito in modo certo alla data di stipula, il payoff $S(T)$ (l'importo scambiato alla data futura) diventa noto solo alla scadenza, rendendo il payoff e, di conseguenza, il rendimento R variabili aleatorie. L'unica eccezione è costituita dai titoli privi di rischio, per i quali il payoff è certo fin dall'inizio.

0.9 Differenza tra prezzo e payoff

In un'operazione finanziaria elementare, rappresentata dal punto di vista del compratore come $\{-S(0), S(T)\}$, dove $S(0)$ è il prezzo e $S(T)$ è il payoff, la distinzione cruciale riguarda la loro certezza all'atto della stipula.

1. Prezzo ($S(0)$)

- Il prezzo $S(0)$ (o P in altre notazioni) è l'importo che il compratore paga al venditore alla data di stipula (tempo 0).
- Il prezzo è **certo**. Non c'è alcuna incertezza per nessuna delle parti riguardo al valore da scambiare in questa data iniziale.

2. Payoff ($S(T)$)

- Il payoff $S(T)$ (o C, valore facciale o nominale, per un Titolo a Cedola Nulla, TCN) è l'importo che il venditore è tenuto a versare al compratore alla scadenza (tempo T).
- In generale, il payoff è **incerto**. Sia il venditore che il compratore non conoscono, al momento della stipula, l'ammontare preciso che dovrà essere scambiato in questa data futura.

- L'unica eccezione a questa incertezza è costituita dai **titoli privi di rischio** (o *default-free*), per i quali il payoff è certo fin dalla data di stipula del contratto.

Il rendimento assoluto del titolo ($R_{ass} := S(T) - S(0)$) e il rendimento relativo o percentuale ($R := R_{ass}/S(0)$) sono conseguentemente soggetti alla stessa incertezza del payoff $S(T)$.

Introduzione delle Variabili Aleatorie

Poiché, per la maggior parte delle attività finanziarie, il payoff $S(T)$ e il rendimento R non sono noti alla stipula, essi vengono trattati come **variabili aleatorie**.

Incertezza nelle Attività Finanziarie

In generale, un'attività finanziaria è esposta a due fattori fondamentali di incertezza:

1. **Incertezza sul valore dell'attività:** Riguarda l'entità dei pagamenti futuri. Ad esempio, chi acquista un'azione non è certo del valore che l'azione avrà in futuro e del flusso di dividendi che pagherà.

2. **Incertezza sullo scadenzario dell'attività:** Riguarda le date in cui verranno ricevuti i pagamenti. Ad esempio, in un contratto di assicurazione in caso di morte, l'importo è noto, ma la data di pagamento ai beneficiari non lo è.

La branca della Matematica Finanziaria che studia operazioni in cui almeno uno dei due fattori (importo o data) è aleatorio, è nota come **Matematica Finanziaria moderna** o **Finanza Matematica**. La Matematica Finanziaria classica, invece, si occupa principalmente di operazioni finanziarie certe, dove sia gli importi che le date sono noti.

Rappresentazione delle Variabili Aleatorie

Un modo comune di rappresentare una variabile aleatoria X (come il payoff o il rendimento) è specificare un insieme finito di possibili valori futuri accompagnati dalle rispettive probabilità:

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{con probabilità } p_1 \\ x_2 & \text{con probabilità } p_2 \\ \vdots & \\ x_m & \text{con probabilità } p_m \end{cases}$$

Affinché questa rappresentazione sia valida, le singole probabilità p_i devono essere comprese tra 0 e 1, e la loro somma totale deve essere pari a 1. Questo approccio consente di quantificare e gestire l'incertezza associata ai risultati finanziari futuri.

Strumenti Statistici per la Quantificazione del Rischio e Rendimento

Quando si lavora con variabili aleatorie (rendimenti e payoff incerti), sono necessari indicatori per riassumere le loro caratteristiche.

A. Media (Valore Atteso)

La media o valore atteso di una variabile aleatoria X (simbolo $E(X)$) è un indicatore del valore attorno al quale si concentrano i possibili risultati futuri di X. È definita come la somma dei prodotti tra ciascun possibile valore x_i e la sua probabilità p_i:

$$E(X) := \sum_{i=1}^{m} p_i x_i$$

B. Varianza e Deviazione Standard

Questi indicatori misurano la dispersione dei valori futuri di X attorno alla media.

- **Varianza** ($\mathrm{Var}(X)$): È il valore atteso degli scarti quadratici dalla media. Maggiore è la varianza, maggiore è l'incertezza (il rischio) associata al risultato dell'attività:

$$\mathrm{Var}(X) := E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{m} p_i (x_i - E(X))^2$$

- **Deviazione Standard** ($\mathrm{Dev}(X)$): È semplicemente la radice quadrata della varianza. È espressa nella stessa unità di misura della variabile X e della sua media, rendendola più interpretabile come misura di rischio.

C. Covarianza e Correlazione

Quando si gestisce un portafoglio composto da più attività finanziarie, è cruciale capire come le loro performance sono correlate.

- **Covarianza** ($\mathrm{Cov}(X, Y)$): Misura la dipendenza lineare tra due variabili aleatorie X e Y:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = \sum_{i=1}^{m} p_i (x_i - E(X))(y_i - E(Y))$$

  Una covarianza positiva indica che le variabili tendono a muoversi nella stessa direzione; negativa, che si muovono in direzioni opposte.

- **Correlazione** ($\mathrm{Cor}(X, Y)$): È una misura normalizzata della dipendenza lineare, ottenuta dividendo la covarianza per il prodotto delle deviazioni standard. Il valore di correlazione è compreso tra -1 e $+1$.

$$\mathrm{Cor}(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Dev}(X) \cdot \mathrm{Dev}(Y)}$$

0.10 Proprietà notevoli

Per ogni variabile aleatoria X e Y:

- $\mathrm{Var}(X) > 0$ se X non è costante.
- $\mathrm{Var}(X) = 0$ se X è costante.

- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$ e $\mathrm{Cor}(X, Y) = \mathrm{Cor}(Y, X)$
- $-1 \leq \mathrm{Cor}(X, Y) \leq 1$
- $\mathrm{Cor}(X, Y) = 1$ se e solo se $Y = aX$ per qualche $a > 0$
- $\mathrm{Cor}(X, Y) = -1$ se e solo se $Y = aX$ per qualche $a < 0$
- Per ogni variabile aleatoria $X_1, \dots, X_n$ e per ogni numero reale $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(X_i),$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i \alpha_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Portafogli di Titoli e Rischio

Un portafoglio di titoli è un insieme di n titoli, descritto da un vettore $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dove ogni componente α_i rappresenta il numero di unità del titolo i detenute.

- Se $\alpha_i > 0$, si ha una **posizione lunga** (acquisto).
- Se $\alpha_i < 0$, si ha una **posizione corta** (vendita allo scoperto).

Il prezzo (al tempo 0) e il payoff (al tempo T) dell'intero portafoglio, $V_\alpha(0)$ e $V_\alpha(T)$, sono dati dalla somma degli importi individuali ponderati per il numero di unità detenute:

$$V_\alpha(0) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S_i(0)$$

$$V_\alpha(T) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S_i(T)$$

dove $S_i(0)$ e $S_i(T)$ sono rispettivamente il prezzo e il payoff del titolo i-esimo.

Rendimento del Portafoglio

Il rendimento del portafoglio R_α è definito come il rendimento relativo (o percentuale):

$$R_\alpha := \frac{V_\alpha(T) - V_\alpha(0)}{V_\alpha(0)}$$

Il rendimento di un portafoglio può essere espresso come la somma pesata dei rendimenti dei vari titoli R_i presenti nel portafoglio. I pesi w_i sono dati dalla proporzione del prezzo del portafoglio (interpretato come il budget iniziale) investita nel titolo i:

$$R_\alpha = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i, \quad \text{dove} \quad w_i = \frac{\alpha_i S_i(0)}{V_\alpha(0)}$$

È matematicamente cruciale che la somma di questi pesi sia pari a 1: $\sum w_i = 1$. Questo approccio permette di passare dalle unità fisiche detenute (α) alle percentuali del budget investite (w).

Rischio e Rendimento Atteso (Modello Media-Varianza)

L'analisi dei portafogli è fondamentale per il criterio Media-Varianza (Modello di Markowitz).

- Il **Rendimento Atteso** del portafoglio $E(R_w)$ è dato dalla somma pesata dei rendimenti attesi individuali $E(R_i)$.
- La **Varianza** del rendimento del portafoglio $\mathrm{Var}(R_w)$ è la misura del rischio e dipende non solo dalle varianze dei singoli titoli, ma anche dalla covarianza tra i rendimenti dei diversi titoli, permettendo la diversificazione.

L'obiettivo è minimizzare la varianza $\mathrm{Var}(R_w)$ (rischio) per un dato rendimento atteso μ.

Vendite allo Scoperto (Short Selling)

La vendita allo scoperto (*short selling*) è l'operazione che si verifica quando un investitore vende un titolo che in realtà non possiede.

Meccanismo e Scopo

1. **Esecuzione pratica**: L'agente si rivolge a un intermediario finanziario (che possiede il titolo o lo detiene in deposito) e gli ordina di venderlo immediatamente sul mercato a pronti.
2. **Incasso immediato**: Il venditore allo scoperto incassa immediatamente il ricavato della vendita (salvo una piccola parte trattenuta come garanzia).
3. **Obbligo di restituzione**: L'agente si impegna a restituire il titolo in una data futura, il che richiede di ricomprarlo sul mercato in quel momento al prezzo di mercato corrente.
4. **Pagamento degli interessi**: Se il titolo in questione paga interessi (cedole) durante il periodo della vendita allo scoperto, l'agente che ha venduto allo scoperto deve pagare tali interessi all'intermediario, che li verserà al cliente proprietario del titolo.

Le vendite allo scoperto hanno spesso fini speculativi. Si tratta di una scommessa sul fatto che il prezzo del titolo diminuirà. Se il prezzo scende, il venditore acquisterà il titolo in futuro a un prezzo inferiore a quello a cui lo ha venduto inizialmente, realizzando un profitto.

Implicazioni Finanziarie

- **Mercati Perfetti**: L'ipotesi di mercati perfetti (o ideali) include la condizione che le vendite allo scoperto siano ammesse senza limitazioni.
- **Rappresentazione di Portafoglio**: In termini di portafoglio w, si ha una posizione corta se il peso $w_j < 0$ (l'asset j è venduto allo scoperto) o se $w_j > 1$ (un altro asset è stato venduto allo scoperto per investire più del 100% del budget nell'asset j).
- **Titoli Semplici**: La vendita allo scoperto di un titolo a cedola nulla unitario, da restituire a scadenza, è l'operazione opposta rispetto all'acquisto dello stesso titolo: l'agente riceve in 0 il prezzo $v_0(T)$ e paga -1 alla scadenza T.

Vantaggi e Svantaggi

Tra i vantaggi della vendita allo scoperto vi è la possibilità di soddisfare più compratori e la creazione di liquidità per chi vende.

Tuttavia, tra gli svantaggi, un numero eccessivo di vendite allo scoperto potrebbe far crollare il valore del titolo. Per tale ragione, i regolatori e supervisori finanziari possono, in circostanze particolari, limitare o persino proibire questa pratica.

In sintesi, i portafogli di titoli forniscono il quadro per la combinazione di attività (incluse le posizioni corte), e le vendite allo scoperto sono lo strumento attraverso cui i gestori possono assumere posizioni negative sui titoli, fondamentale per determinate strategie di investimento, specialmente quelle che mirano a raggiungere i portafogli ottimali nel modello Media-Varianza, talvolta richiedendo la vendita allo scoperto degli asset più rischiosi.

LEZIONE 5: Come scegliere un portafoglio di titoli

La selezione di un portafoglio richiede la definizione di un obiettivo da ottimizzare e di eventuali vincoli da rispettare. L'obiettivo primario è massimizzare il rendimento, rispettando al contempo un budget d'investimento iniziale $C > 0$.

A. Il Criterio dell'Utilità Attesa

Definizione

Il criterio dell'utilità attesa è un postulato della teoria finanziaria che stabilisce che gli investitori tendono a scegliere gli investimenti che massimizzano la loro utilità attesa. Questa teoria, assiomatizzata negli anni '40 da figure come Oskar Morgenstern e John von Neumann, parte da lavori precedenti di Daniel Bernoulli e Jeremy Bentham.

Problema di Ottimizzazione

L'obiettivo di massimizzazione dell'utilità attesa si formula come:

$$\max \mathbb{M}[u(R_w)]$$

con vincolo: $w \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Componenti della Formula

- $\mathbb{M}$: Rappresenta l'operatore di Valore Atteso (Media)
- u: È la funzione di utilità ($u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
- R_w: Indica il rendimento del portafoglio w, ed è una variabile aleatoria
- w: È il vettore dei pesi di investimento del portafoglio

Critica

Una delle questioni più complesse nell'applicare questo criterio è l'assenza di conoscenza esplicita della propria funzione di utilità (u), senza la quale il problema di scelta del portafoglio non può essere risolto in modo formale.

B. Come Bypassare la Funzione di Utilità

Per risolvere il problema legato alla determinazione della funzione di utilità, si utilizza uno sviluppo di Taylor al second'ordine per approssimare l'utilità attesa del rendimento $\mathbb{M}[u(R_w)]$.

Passando al valore atteso, si ottiene l'approssimazione:

$$\mathbb{M}(u(R_w)) = u(\mathbb{M}(R_w)) + \frac{1}{2}u''(\mathbb{M}(R_w))\mathrm{VAR}(R_w)$$

Componenti e Significato Finanziario

- $\mathbb{M}(R_w)$: Il rendimento atteso del portafoglio. L'agente vuole massimizzare questo termine (guadagno atteso)
- $\mathrm{VAR}(R_w)$: La varianza del rendimento del portafoglio, che misura il rischio
- $u''(\mathbb{M}(R_w))$: La derivata seconda della funzione di utilità valutata nel rendimento atteso

Nella teoria di Morgenstern e von Neumann, la funzione u è sempre strettamente concava, il che significa che $u''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché la derivata seconda è negativa, la varianza è un elemento "non desiderato".

Di conseguenza, per un rendimento atteso $\mathbb{M}(R_w)$ pre-specificato, l'obiettivo di massimizzare l'utilità attesa è equivalente (almeno in seconda approssimazione) a quello di **minimizzare la varianza**. Questo criterio, popolarizzato da Harry Markowitz, ha il vantaggio di non dipendere più esplicitamente dalla funzione di utilità.

C. Il Problema Media-Varianza

Definizione

Il problema media-varianza è un problema di minimizzazione che mira a minimizzare la varianza del rendimento ($\mathrm{VAR}(R_w)$) tra tutti i portafogli che hanno un dato rendimento atteso m e che possono essere acquistati con il budget iniziale.

Problema di Ottimizzazione

$$\min \mathrm{VAR}(R_w)$$

soggetto al vincolo: $w \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, $\mathbb{M}(R_w) = m$.

Interpretazione

L'obiettivo è minimizzare il rischio di un portafoglio, dato un livello target di performance attesa (m). Matematicamente, il problema media-varianza questo è un problema di minimizzazione di una funzione quadratica ($w^\top \Sigma w$) di più variabili reali soggetto a vincoli lineari, dove R_w è una combinazione lineare di variabili aleatorie.

Formule generali (per n titoli)

- **Rendimento Atteso**: $\mathbb{M}(R_w) = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{M}(R_i) = w^\top \mu$
  - w: Vettore dei pesi
  - μ: Vettore dei rendimenti attesi dei singoli titoli
- **Varianza**: $\mathrm{VAR}(R_w) = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \mathrm{COV}(R_i, R_j) = \mathrm{VAR}(R_w) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \mathrm{VAR}(R_i) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^n w_i w_j \mathrm{COV}(R_i, R_j)$
  - Σ: La matrice di varianza-covarianza dei titoli

D. Portafogli Ottimali ed Efficienti

Portafogli Ottimali (m-ottimali)

- **Definizione**: Dato un rendimento atteso $m \in \mathbb{R}$, un portafoglio $w \in \mathbb{R}^n$ è chiamato *m-ottimale* se è una soluzione del problema media-varianza per quel dato m:

$$V(m) := \min \left\{ \mathrm{VAR}(R_w)\,;\, w \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n w_i = 1, \mathbb{M}(R_w) = m \right\}$$

- **Interpretazione**: Un portafoglio è ottimale se, per un livello di rendimento atteso, genera la varianza (rischio) più bassa possibile.

Portafogli Efficienti

- **Definizione**: Un portafoglio $w \in \mathbb{R}^n$ è chiamato *efficiente* se non esiste un altro portafoglio $w' \in \mathbb{R}^n$ tale che:
  1. $\mathbb{M}(R_{w'}) \geq \mathbb{M}(R_w)$ (rendimento atteso maggiore o uguale)
  2. $\mathrm{VAR}(R_{w'}) \leq \mathrm{VAR}(R_w)$ (rischio minore o uguale)
  3. Almeno una delle due disuguaglianze è stretta
- Se un portafoglio P è preferito a Q secondo questi criteri, si dice che P *domina* Q nel senso media-varianza.

Relazione tra Ottimalità ed Efficienza

- Ogni portafoglio efficiente è necessariamente m-ottimale per qualche $m \in \mathbb{R}$.
- Un portafoglio efficiente è ragionevole, nel senso che non è possibile trovare un'altra combinazione di titoli che offra una performance uguale (o migliore) con un rischio inferiore, o lo stesso rischio (o inferiore) con una performance superiore.

E. Il Problema Media-Varianza con Due Titoli

Nel caso semplificato con $n = 2$ titoli, la varianza del rendimento di un generico portafoglio $w = (w_1, w_2)$ si esprime come:

$$\text{VAR}(R_w) = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2$$

Componenti Aggiuntive

- σ_i: Deviazione standard del rendimento del titolo i
- ρ: Coefficiente di correlazione tra i rendimenti dei due titoli

Vincoli

I vincoli del problema media-varianza con due titoli sono: $w_1+w_2 = 1$ e $w_1\mu_1+w_2\mu_2 = m$.

Osservazione chiave

A differenza del caso con $n \geq 3$ titoli rischiosi, nel caso di due titoli i due vincoli lineari ammettono un'unica soluzione. Pertanto, tutti i portafogli che soddisfano il vincolo di rendimento atteso m sono ottimali.

F. La Soluzione del Problema Media-Varianza (Caso n=2)

Per ogni rendimento atteso $m \in \mathbb{R}$, il portafoglio m-ottimale $w(m)$ è unico e i suoi pesi sono dati da:

$$w(m) := (w_1(m), w_2(m)) := \left(\frac{m - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \frac{\mu_1 - m}{\mu_1 - \mu_2}\right)$$

Componenti e Interpretazione

- $w_1(m)$: La percentuale di capitale da investire nel Titolo 1
- $w_2(m)$: La percentuale di capitale da investire nel Titolo 2 (dove $w_2(m) = 1-w_1(m)$)

I pesi di investimento sono funzioni lineari del rendimento atteso target m. A seconda del valore di m, il portafoglio ottimale può prevedere investimenti: corti nel Titolo 1 (se $m < \mu_2$), lunghi in entrambi (se $\mu_2 < m < \mu_1$) o corti nel Titolo 2 (se $m > \mu_1$).

G. La Varianza dei Portafogli Ottimali

Sia nel caso di due titoli sia nel caso generale con n titoli rischiosi, la varianza minima $V(m)$ che può essere raggiunta da un portafoglio ottimale in funzione del suo rendimento atteso m è una funzione quadratica:

$$V(m) = \text{VAR}(R_{w(m)}) = am^2 + bm + c$$

Componenti e Caratteristiche

- $V(m)$: Varianza del portafoglio m-ottimale
- a, b, c: Coefficienti che dipendono dai parametri dei titoli (rendimenti attesi e matrice di varianza-covarianza Σ o, nel caso $n = 2$, da $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$)
- Poiché $a > 0$, questa funzione rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso destra nel piano varianza-media

H. Il Piano Varianza-Media

Definizione

Il piano varianza-media (o media-varianza) è un sistema di coordinate in cui un portafoglio w è identificato dalla coppia $(\text{VAR}(R_w), \mathbb{M}(R_w))$, dove la varianza (rischio) è posta sull'asse delle ascisse (V) e la media (performance) sull'asse delle ordinate (M o m).

Significato del Grafico (Parabola $V(m)$)

1. **Locus dei Portafogli Ottimali**: La funzione $V(m) = am^2 + bm + c$ traccia una parabola (o, in caso di titoli senza rischio, una iperbole o una coppia di semirette nel piano deviazione standard-media). Tutti i portafogli m-ottimali si dispongono su questa curva.
2. **Portafoglio a Varianza Minima (P^*)**: Il vertice di questa parabola si trova nel punto $(V(m^*), m^*)$, dove $m^* = -b/(2a)$. Questo punto rappresenta il portafoglio ottimale con la varianza minima assoluta.
3. **Frontiera Efficiente**: Solo la porzione di curva che si estende dal portafoglio P^* in su (cioè per $\mathbb{M}(R_w) \geq m^*$) è chiamata *Frontiera Efficiente*. I portafogli che giacciono sulla frontiera efficiente sono considerati "ragionevoli".

Illustrazione

Il grafico di $V(m)$ mostra la parabola:

- L'asse orizzontale misura la varianza $V(m)$ (rischio)
- L'asse verticale misura la media m (performance)
- La parte inferiore della parabola è composta da portafogli m-ottimali, ma inefficienti, poiché sarebbe possibile ottenere un rendimento maggiore per lo stesso livello di rischio, o lo stesso rendimento con un rischio inferiore

- La parte superiore, a partire dal vertice P^*, è la Frontiera Efficiente

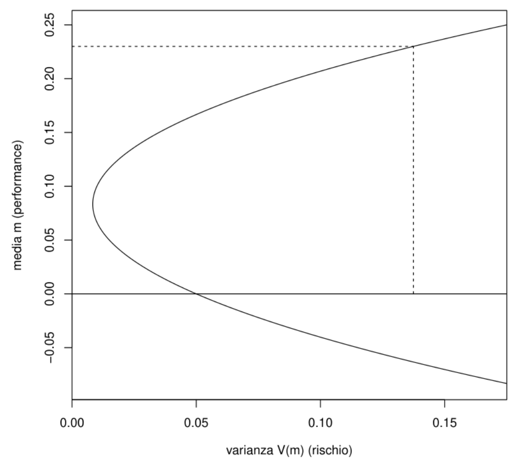


Figura 4: Enter Caption

LEZIONE 6: I portafogli ottimali

Proposizione

Per ogni $m \in \mathbb{R}$ il portafoglio m-ottimale $w(m)$ soddisfa

$$\begin{cases} w_1(m) < 0 & \text{se } m < \mu_2, \\ w_1(m) = 0 & \text{se } m = \mu_2, \\ 0 < w_1(m) < 1 & \text{se } \mu_2 < m < \mu_1, \\ w_1(m) = 1 & \text{se } m = \mu_1, \\ w_1(m) > 1 & \text{se } m > \mu_1. \end{cases}$$

Interpretazione

La posizione ottimale è

$$\begin{cases} (A) \text{ corta nel titolo 1 e lunga nel titolo 2} & \text{se } m < \mu_2, \\ (B) \text{ investita nel solo titolo 2} & \text{se } m = \mu_2, \\ (C) \text{ lunga nel titolo 1 e lunga nel titolo 2} & \text{se } \mu_2 < m < \mu_1, \\ (D) \text{ investita nel solo titolo 1} & \text{se } m = \mu_1, \\ (E) \text{ lunga nel titolo 1 e corta nel titolo 2} & \text{se } m > \mu_1. \end{cases}$$

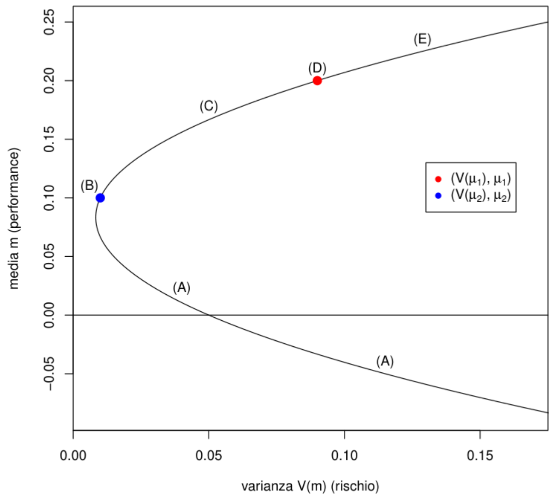


Figura 5: Enter Caption

Rendimento atteso del portafoglio con varianza minima

Proposizione

La funzione $V(m)$ è differenziabile in m e soddisfa

$$V'(m) = 2am + b = 0 \iff m = -\frac{b}{2a}.$$

Il rendimento atteso m^* definito da

$$m^* := -\frac{b}{2a} = -\frac{\mu_1\sigma_2(\rho\sigma_1 - \sigma_2) + \mu_2\sigma_1(\rho\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

è tale per cui per ogni altro m

$$V(m^*) < V(m).$$

Interpretazione

La quantità m^* è il rendimento atteso del portafoglio ottimale con varianza minima. In altre parole, m^* è il rendimento atteso minimo che un investitore dovrebbe richiedere poiché qualunque altro portafoglio ottimale con rendimento atteso inferiore ha necessariamente una varianza maggiore.

Caratterizzazione dei portafogli efficienti

Proposizione

Per ogni portafoglio w le seguenti affermazioni sono equivalenti (ossia si implicano a vicenda):

- w è efficiente;
- w è ottimale e $M(R_w) \geq m^*$.

Interpretazione

Un portafoglio è efficiente se e solo se è ottimale e genera un rendimento atteso sufficientemente alto, ossia pari almeno al rendimento atteso del portafoglio ottimale con varianza minima.

Il piano media-varianza e la frontiera efficiente

La parte in rosso del grafico di $V(m)$ è chiamata frontiera efficiente.

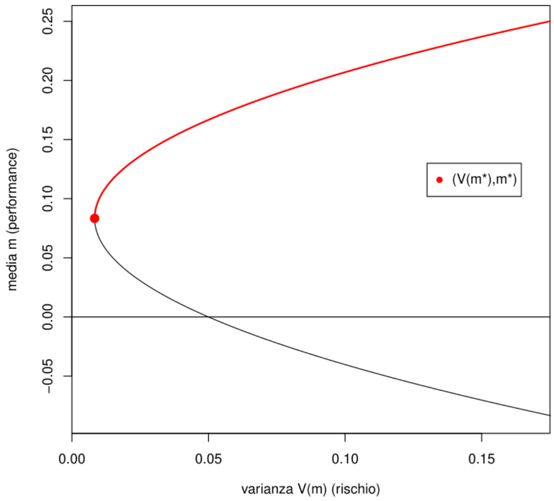


Figura 6: Enter Caption

I due titoli e la frontiera efficiente

Proposizione

Vale sempre $\mu_1 > m^*$. Inoltre

$$\begin{cases} \mu_2 > m^* & \text{se } \rho > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \\ \mu_2 = m^* & \text{se } \rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \\ \mu_2 < m^* & \text{se } \rho < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \end{cases}$$

Interpretazione

Possiamo derivare le seguenti osservazioni:

- se $\rho > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ tutte le opzioni d'investimento (A,B,C,D,E) sono ragionevoli;
- se $\rho = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ solo le opzioni d'investimento (B,C,D,E) sono ragionevoli;
- se $\rho < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ solo le opzioni d'investimento (C,D,E) sono ragionevoli.

Regole d'investimento

La discussione precedente si traduce nelle seguenti **regole d'investimento**:

- se la correlazione è alta (titoli positivamente molto dipendenti) si può essere corti tanto nel titolo più rischioso quanto in quello meno rischioso;
- se la correlazione è bassa o negativa (titoli positivamente poco dipendenti o indipendenti o negativamente dipendenti) si deve essere lunghi nel titolo più rischioso ed eventualmente corti in quello meno rischioso.

LEZIONE 7:Ripasso di algebra matriciale

Matrici

Una matrice $m \times n$ (a m righe e n colonne) è data da una tabella

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

La matrice trasposta di A è la matrice $n \times m$ data da

$$A^T := \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{m,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

Matrici

Come è standard, un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ verrà inteso come matrice $n \times 1$, ossia

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix}.$$

Se vogliamo trasporlo in una matrice $1 \times n$ scriviamo

$$x^\top := (x_1, \ldots, x_n) = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}).$$

Calcolo matriciale

Tre sono le operazioni fondamentali che coinvolgono matrici:

- La somma di due matrici $m \times n\, A$ e B è la matrice $m \times n\, A + B$ che si ottiene sommando le due matrici componente per componente.
- Il prodotto di una matrice $m \times n\, A$ per un numero $r \in \mathbb{R}$ è la matrice $m \times n\, rA$ che si ottiene moltiplicando per il numero tutte le componenti della matrice.

- Il prodotto di una matrice $m \times n$ A e di una matrice $n \times p$ B è la matrice $m \times p$ AB che si ottiene tramite prodotto riga per colonna, ossia per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$
$$AB_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

  Notate che $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Matrici speciali

Una matrice $m \times n$ A è chiamata:

- quadrata se $m = n$;
- simmetrica se è quadrata e $A_{i,j} = A_{j,i}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$;
- definita positiva se è simmetrica e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con almeno una componente non nulla
$$x^\top A x = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j} x_i x_j > 0.$$

Proposizione

Ogni matrice definita positiva $n \times n$ A è invertibile, ossia esiste una matrice A^{-1} $n \times n$ tale che
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$
dove I indica la matrice $n \times n$ tale che per ogni $i, j = 1, \dots, n$ abbiamo $I_{i,j} = 1$ se $i = j$ e $I_{i,j} = 0$ se $i \neq j$. Inoltre, A^{-1} è anch'essa definita positiva.

LEZIONE 8: Il problema media-varianza con un numero generico di titoli

Il problema media-varianza nel caso generale

Consideriamo n titoli con $n \geq 2$. Diveramente dal caso $n = 2$ trattato prima, nell'analisi del problema di scelta del portafoglio con più di due titoli siamo costretti a procedere isolando due casi:

- Caso 1: tutti i titoli sono rischiosi.
- Caso 2: un titolo è privo di rischio.

Caso 1: Il problema media-varianza con soli titoli rischiosi

Caso 1: Il problema media-varianza

Consideriamo n titoli rischiosi con $n \geq 2$ e utilizziamo la notazione seguente:

- $\mu_i := M(R_i)$ per $i = 1, \ldots, n$ e assumiamo che il vettore dei rendimenti attesi contenga almeno due componenti diverse:

$$\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T;$$

- $\sigma_{ij} := \mathrm{COV}(R_i, R_j)$ per $i, j = 1, \ldots, n$ e assumiamo che la matrice di varianza-covarianza (che è simmetrica) sia definita positiva:

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{pmatrix};$$

- $e := (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

L'osservazione fondamentale è che la varianza del rendimento di un generico portafoglio $w \in \mathbb{R}^n$ può essere scritta in forma matriciale come

$$\mathrm{VAR}(R_w) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{COV}(R_i, R_j) w_i w_j = \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{i,j} w_i w_j = w^\top \Sigma w.$$

Osservazione. L'assunzione su Σ garantisce che $\mathrm{VAR}(R_w) > 0$ per ogni portafoglio $w \in \mathbb{R}^n$.

Il problema può essere riscritto per un dato $m \in \mathbb{R}$ come

$$\min w^T \Sigma w$$

soggetto al vincolo

$$w \in \mathbb{R}^n, \quad w^T e = 1, \quad w^T \mu = m.$$

Osservazione. I vincoli si traducono in un sistema di due equazioni lineari in n incognite. Nel caso in cui $n \geq 3$ la soluzione non può essere unica. In altre parole, diversamente dal caso di due titoli, **non tutti i portafogli che rispettano il vincolo sono ottimali**.

Caso 1: La soluzione del problema media-varianza

Proposizione

Per ogni $m \in \mathbb{R}$ esiste un unico portafoglio m-ottimale

$$w(m) := (w_1(m), \ldots, w_n(m))^\top = mk + h$$

dove k e h sono vettori in $\mathbb{R}^n$ che non dipendono da m e sono dati da

$$k := \frac{1}{BC - A^2} \left(C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}e \right), \quad h := \frac{1}{BC - A^2} \left(B\Sigma^{-1}e - A\Sigma^{-1}\mu \right),$$

$$A := e^\top \Sigma^{-1} \mu, \quad B := \mu^\top \Sigma^{-1} \mu, \quad C := e^\top \Sigma^{-1} e.$$

Interpretazione

I pesi del portafoglio ottimale sono tutti funzioni lineari del rendimento atteso target, come nel caso $n = 2$. Rispetto al caso $n = 2$, la forma di queste funzioni è più complessa e non dipende solo dai rendimenti attesi dei vari titoli ma anche dalle loro varianze-covarianze.

Caso 1: La soluzione del problema media-varianza

Dimostrazione

Poiché la funzione da minimizzare è convessa e i vincoli sono lineari, il teorema dei moltiplicatori di Lagrange implica che un portafoglio w^* è m-ottimale se e solo se la funzione "Lagrangiana" del problema definita per $w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ da

$$L(w, \lambda_1, \lambda_2) := w^\top \Sigma w + \lambda_1(m - w^\top \mu) + \lambda_2(1 - w^\top e)$$

soddisfa la seguente proprietà: esistono $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}$ tali che

1. $\frac{\partial L}{\partial w_i}(w^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0$ per $i = 1, \dots, n$;
2. $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(w^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0$ per $i = 1, 2$.

Caso 1: La soluzione del problema media-varianza

Dimostrazione

Per ogni $w^* \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\frac{\partial L}{\partial w_i}(w^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_{i,j} w_j^* - \lambda_1^* \mu_i - \lambda_2^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(w^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = m - (w^*)^\top \mu, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(w^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 1 - (w^*)^\top e.$$

Dimostrazione

In forma matriciale la condizione (L1) è equivalente a

$$\Sigma w^* = \frac{1}{2}\lambda_1^* \mu + \frac{1}{2}\lambda_2^* e.$$

Usando l'invertibilità di Σ possiamo riscrivere (L1) come

$$w^* = \frac{1}{2}\lambda_1^* \Sigma^{-1} \mu + \frac{1}{2}\lambda_2^* \Sigma^{-1} e.$$

0.11 Dimostrazione

Per sostituzione possiamo quindi riscrivere (L2) come

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu^\top \Sigma^{-1}\mu\lambda_1^* + \frac{1}{2}e^\top \Sigma^{-1}\mu\lambda_2^* = m, \\ \frac{1}{2}\mu^\top \Sigma^{-1}e\lambda_1^* + \frac{1}{2}e^\top \Sigma^{-1}e\lambda_2^* = 1. \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}B\lambda_1^* + \frac{1}{2}A\lambda_2^* = m, \\ \frac{1}{2}A\lambda_1^* + \frac{1}{2}C\lambda_2^* = 1. \end{cases}$$

Poiché μ ha almeno due coordinate diverse per assunzione, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica che $BC - A^2 > 0$. Di conseguenza, il sistema ammette una (unica) soluzione data da

$$\lambda_1^* = \frac{2C}{BC - A^2}m - \frac{2A}{BC - A^2}, \quad \lambda_2^* = \frac{2B}{BC - A^2} - \frac{2A}{BC - A^2}m.$$

Dimostrazione

Sostituendo λ_1^* e λ_2^* nella formula di w^* possiamo quindi concludere che esiste un unico portafoglio m-ottimale dato da

$$w^* = \frac{1}{BC - A^2}\left(C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}e\right)m + \frac{1}{BC - A^2}\left(B\Sigma^{-1}e - A\Sigma^{-1}\mu\right).$$

Questo conclude la dimostrazione.

Caso 1: La varianza dei portafogli ottimali

Proposizione

Per ogni $m \in \mathbb{R}$ la varianza del portafoglio m-ottimale è data da

$$V(m) = \mathrm{VAR}(R_{w(m)}) = am^2 + bm + c$$

dove i coefficienti sono dati da

$$a := \frac{C}{BC - A^2} > 0, \quad b := -\frac{2A}{BC - A^2}, \quad c := \frac{B}{BC - A^2}.$$

Interpretazione

La varianza minima è una funzione quadratica del rendimento atteso del portafoglio d'investimento, come nel caso $n = 2$.

LEZIONE 9: Caso 2: Il problema media-varianza con un titolo privo di rischio

Caso 2: Il problema media-varianza

Consideriamo $n-1$ titoli rischiosi e un titolo privo di rischio, per un totale di $n \geq 2$ titoli, e utilizziamo la seguente notazione:

- $\mu_i := M(R_i)$ per $i = 1, \ldots, n-1$ e assumiamo che il vettore dei rendimenti attesi contenga almeno due componenti diverse:

$$\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})^T;$$

- $\sigma_{i,j} := \mathrm{COV}(R_i, R_j)$ per $i, j = 1, \ldots, n-1$ e assumiamo che la matrice di varianza-covarianza (che è simmetrica) sia definita positiva:

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n-1} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \sigma_{n-1,2} & \cdots & \sigma_{n-1,n-1} \end{pmatrix};$$

- $r := M(R_n)$ e R_n è costante (ossia $R_n = r$);
- $e := (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$;
- $e_n := (0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

Caso 2: Il problema media-varianza

L'osservazione fondamentale è che la varianza del rendimento di un generico portafoglio $w \in \mathbb{R}^n$ può essere scritta in forma matriciale come

$$\mathrm{VAR}(R_w) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{COV}(R_i, R_j) w_i w_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} \sigma_{i,j} w_i w_j = \widetilde{w}^T \Sigma \widetilde{w},$$

dove il vettore $\widetilde{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ consiste di tutte le percentuali di capitale investite nei soli titoli rischiosi, ossia è dato da

$$\widetilde{w} := (w_1, \ldots, w_{n-1}).$$

Osservazione. L'assunzione su Σ garantisce che $\mathrm{VAR}(R_w) > 0$ per ogni portafoglio $w \in \mathbb{R}^n$ con almeno una delle prime $n-1$ componenti non nulla.

Caso 2: Il problema media-varianza

Il problema può essere riscritto per un dato $m \in \mathbb{R}$ come

$$\min \widetilde{w}^T \Sigma \widetilde{w}$$

soggetto al vincolo

$$w \in \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{w}^T e + w_n = 1, \quad \widetilde{w}^T \mu + w_n r = m.$$

Notate che la funzione da minimizzare non dipende da w_n e anche il vincolo può essere semplificato scrivendo

$$\widetilde{w} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \widetilde{w}^T(\mu - re) = m - r.$$

Osservazione. I vincoli si traducono in una equazione lineare in $n-1$ incognite. Nel caso in cui $n \geq 3$ la soluzione non può essere unica. In altre parole, come già visto sopra nel caso di soli titoli rischiosi, **non tutti i portafogli che rispettano il vincolo sono ottimali**.

Caso 2: La soluzione del problema media-varianza

Proposizione

Per ogni $m \in \mathbb{R}$ esiste un unico portafoglio m-ottimale

$$w(m) := (w_1(m), \dots, w_n(m))^\top = (m - r)k + h$$

dove k e h sono vettori in $\mathbb{R}^n$ che non dipendono da m e sono dati da

$$\tilde{k} := \frac{1}{B}\Sigma^{-1}(\mu - re), \quad k_n := -\frac{A}{B}, \quad h := e_n,$$

$$A := e^\top \Sigma^{-1}(\mu - re), \quad B := (\mu - re)^\top \Sigma^{-1}(\mu - re).$$

Interpretazione

I pesi del portafoglio ottimale sono tutti funzioni lineari del rendimento atteso target, come nel caso $n = 2$. Rispetto al caso $n = 2$, la forma di queste funzioni è più complessa e non dipende solo dai rendimenti attesi dei vari titoli ma anche dalle loro varianze-covarianze.

Caso 2: La soluzione del problema media-varianza

Dimostrazione

Poiché la funzione da minimizzare è convessa e i vincoli sono lineari, il teorema dei moltiplicatori di Lagrange implica che un portafoglio w^* è m-ottimale se e soltanto se

$$w_n^* = 1 - \widetilde{w}^T e$$

e la funzione "Lagrangiana" definita per $\widetilde{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ da

$$L(\widetilde{w}, \lambda) := \widetilde{w}^T \Sigma \widetilde{w} + \lambda(m - r - \widetilde{w}^T(\mu - re))$$

soddisfa la seguente proprietà: esiste $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che

- (L1) $\frac{\partial L}{\partial \widetilde{w}_i}(\widetilde{w^*}, \lambda^*) = 0$ per $i = 1, \dots, n-1$;
- (L2) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\widetilde{w^*}, \lambda^*) = 0$.

Caso 2: La soluzione del problema media-varianza

Dimostrazione

Per ogni $w^* \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda^* \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\frac{\partial L}{\partial \widetilde{w}_i}(\widetilde{w^*}, \lambda^*) = 2\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{i,j} w_j^* - \lambda^*(\mu_i - r), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\widetilde{w^*}, \lambda^*) = m - r - \widetilde{w^*}^T(\mu - re).$$

Caso 2: La soluzione del problema media-varianza

Dimostrazione

In forma matriciale la condizione (L1) è equivalente a

$$\Sigma\widetilde{w^*} = \frac{1}{2}\lambda^*(\mu - re).$$

Usando l'invertibilità di Σ possiamo riscrivere (L1) come

$$\widetilde{w^*} = \frac{1}{2}\lambda^*\Sigma^{-1}(\mu - re).$$

Caso 2: La soluzione del problema media-varianza

Dimostrazione

Per sostituzione possiamo quindi riscrivere (L2) come

$$\frac{1}{2}\lambda^*(\mu - re)^T\Sigma^{-1}(\mu - re) = m - r.$$

L'equazione è equivalente a

$$\frac{1}{2}B\lambda^* = m - r.$$

Siccome $B > 0$ per l'assunzione su μ e su Σ, l'unica soluzione è

$$\lambda^* = \frac{2(m - r)}{B}.$$

Sostituendo λ^* nella formula di $\widetilde{w}^*$ otteniamo

Caso 2: La soluzione del problema media-varianza

Dimostrazione

Possiamo quindi concludere che esiste un unico portafoglio m-ottimale w^* dato da

$$\widetilde{w}^* = \frac{1}{B}(m - r)\Sigma^{-1}(\mu - re),$$

$$w_n^* = 1 - \widetilde{w}^T e = 1 - \frac{1}{B}(m - r)(\mu - re)^T\Sigma^{-1}e$$

o equivalentemente

$$w_n^* = 1 - \frac{A}{B}(m - r).$$

Questo conclude la dimostrazione.

Caso 2: La varianza dei portafogli ottimali

Proposizione

Per ogni $m \in \mathbb{R}$ la varianza del portafoglio m-ottimale è data da

$$V(m) = \mathrm{VAR}(R_{w(m)}) = am^2 + bm + c = \frac{1}{B}(m-r)^2$$

dove i coefficienti sono dati da

$$a := \frac{1}{B} > 0, \quad b := -\frac{2r}{B}, \quad c := \frac{r^2}{B}.$$

Interpretazione

La varianza minima è una funzione quadratica del rendimento atteso del portafoglio d'investimento, come nel caso $n = 2$.

Caso 2: La deviazione standard dei portafogli ottimali

Proposizione

Per ogni $m \in \mathbb{R}$ la deviazione standard del portafoglio m-ottimale è data da

$$D(m) = \mathrm{DEV}(R_{w(m)}) = \frac{1}{\sqrt{B}}|m-r|.$$

Interpretazione

La deviazione standard minima è una funzione lineare del rendimento atteso del portafoglio d'investimento.

II problema media-varianza con un numero generico di titoli: Considerazioni generali

Il portafoglio ottimale con varianza minima

Proposizione

La funzione $V(m)$ è differenziabile e soddisfa

$$V'(m) = 2am + b = 0 \iff m = -\frac{b}{2a}.$$

Il rendimento atteso m^* definito da

$$m^* := -\frac{b}{2a}$$

è tale per cui per ogni altro $m \in \mathbb{R}$

$$V(m^*) < V(m).$$

Interpretazione

La quantità m^* è il rendimento atteso del portafoglio ottimale con varianza minima. In altre parole, m^* è il rendimento atteso minimo che un investitore dovrebbe richiedere poiché qualunque altro portafoglio ottimale con rendimento atteso inferiore ha necessariamente una varianza maggiore.

Il portafoglio ottimale con varianza minima

Proposizione

La varianza minima soddisfa le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} V(m^*) > 0 & \text{nel Caso 1,} \\ V(m^*) = 0 & \text{nel Caso 2.} \end{cases}$$

Nel Caso 2, abbiamo $m^* = r$.

Interpretazione

La varianza minima è strettamente positiva se tutti i titoli sono rischiosi mentre è nulla se un titolo è privo di rischio. Nel secondo caso, il rendimento atteso minimo che un investitore dovrebbe richiedere coincide con il rendimento del titolo privo di rischio.

Caratterizzazione dei portafogli efficienti

Proposizione

Per ogni portafoglio w le seguenti affermazioni sono equivalenti (ossia si implicano a vicenda):

- w è efficiente;
- w è ottimale e $M(R_w) \geq m^*$.

Interpretazione

Un portafoglio è efficiente se e solo se è ottimale e genera un rendimento atteso sufficientemente alto, ossia pari almeno al rendimento atteso del portafoglio ottimale con varianza minima. La parte in rosso del grafico di $V(m)$ ‘e chiamata frontiera efficiente:

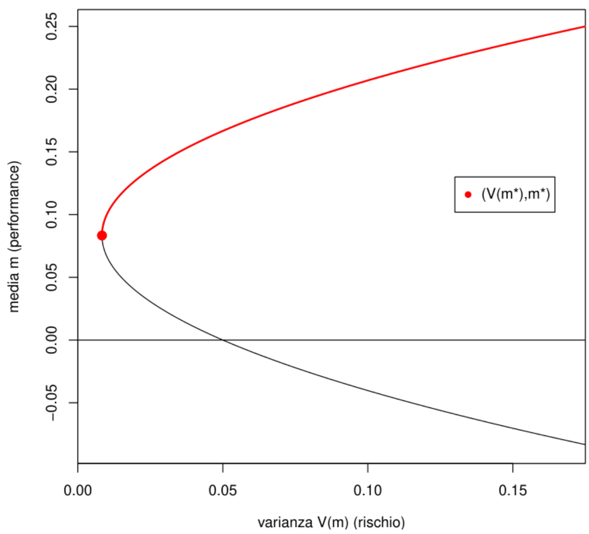


Figura 7: Enter Caption

La frontiera efficiente

Interpretazione

Se identifichiamo un portafoglio con il rendimento atteso e la varianza del suo rendimento, ossia

$$w \approx (\mathrm{VAR}(R_w), M(R_w)),$$

possiamo dire che tutti i possibili portafogli w si dispongono all'interno della parabola. Per ogni livello di rendimento atteso $m \in \mathbb{R}$, il punto corrispondente sulla parabola può quindi essere identificato con il portafoglio a varianza minima tra quelli aventi rendimento atteso pari a m, ossia con l'unico portafoglio m-ottimale.

Tutti i portafogli ottimali sono dunque "portafogli di frontiera" nel grafico. Lo stesso vale, in particolare, per tutti i portafogli efficienti. La parte in rosso del grafico di $D(m)$ 'e chiamata frontiera efficiente:

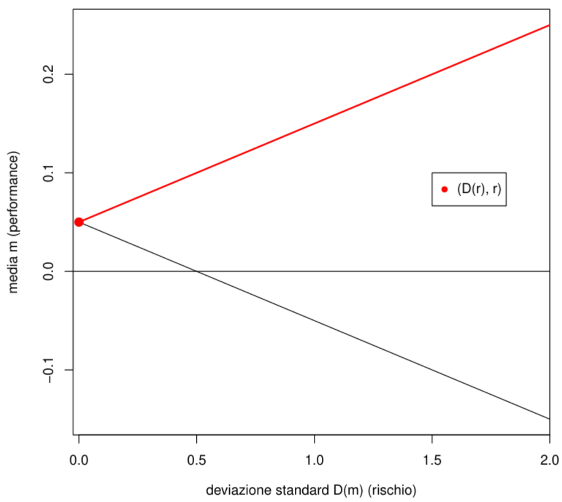


Figura 8: Enter Caption

Separazione in due fondi

Teorema di separazione in due fondi

Per ogni $m \in \mathbb{R}$ e ogni $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tali che $m_1 > m_2 \geq m^*$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$w(m) = \lambda w(m_1) + (1-\lambda) w(m_2).$$

Il parametro λ è unico e dato da

$$\lambda := \frac{m - m_2}{m_1 - m_2}.$$

Interpretazione

Il teorema mostra che ogni portafoglio ottimale $w(m)$ può essere espresso come portafoglio di due portafogli efficienti (i due fondi). I parametri $\lambda \in 1-\lambda$ corrispondono ai pesi di tale macroportafoglio.

I due portafogli $w(m_1)$ e $w(m_2)$ giocano il ruolo del titolo 1 e del titolo 2 incontrati all'inizio del nostro studio! v

LEZIONE 10: Il portafoglio di tangenza: Caso 2

Proposizione. Un portafoglio $w(m)$ consiste di soli titoli rischiosi se e solo se

$$w_n(m) = 1 - \frac{A}{B}(m - r) = 0.$$

Tale portafoglio esiste se e solo se

$$A = \tilde{A} - r\tilde{C} \neq 0,$$

$$\tilde{A} := e^{\Sigma^{-1}\mu}, \quad \tilde{C} := e^{\Sigma^{-1}e}.$$

In tal caso, il suo rendimento atteso è dato da

$$\overline{m} := r + \frac{B}{A}.$$

Inoltre, le seguenti affermazioni sono equivalenti (ossia si implicano a vicenda):

- $w(\overline{m})$ è efficiente;
- $A = \tilde{A} - r\tilde{C} > 0$.

Il portafoglio di tangenza: Caso 2

Interpretazione. Se esiste, il portafoglio $w(\overline{m})$ ha l'ultima componente nulla ed è pertanto concentrato sui soli titoli rischiosi. In particolare,

$$\widetilde{w(\overline{m})} = (w_1(\overline{m}), \ldots, w_{n-1}(\overline{m}))$$

è un portafoglio ottimale (più precisamente l'unico portafoglio $\overline{m}$-ottimale) del problema media-varianza ristretto ai soli titoli rischiosi.

Il portafoglio $w(\overline{m})$ viene chiamato *portafoglio di tangenza* perché la curva che corrisponde al grafico di $V(m)$ è tangente al grafico della funzione

$$\widetilde{V}(m) := \min\left\{VAR(R_w);\, w \in \mathbb{R}^{n-1},\, \sum_{i=1}^{n-1} w_i = 1,\, M(R_w) = m\right\},$$

ossia la retta che corrisponde al grafico di $D(m)$ è tangente al grafico di

$$\widetilde{D}(m) := \sqrt{\widetilde{V}(m)}.$$

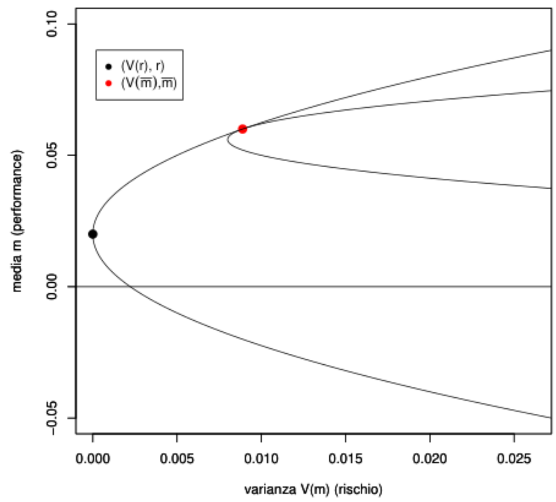


Figura 9: Enter Caption

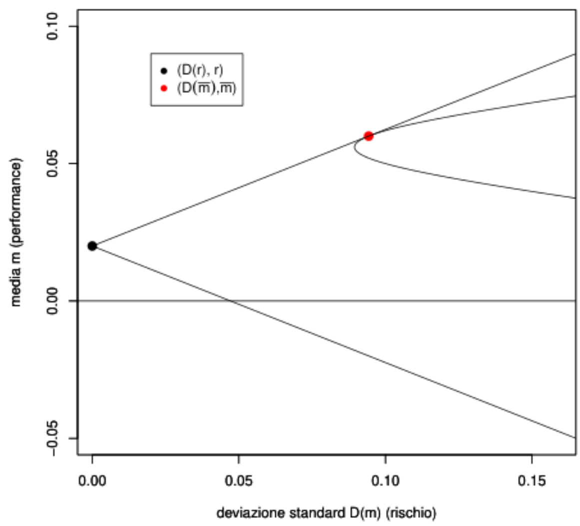


Figura 10: Enter Caption

Scelta dei due fondi: Caso 2

Nel caso in cui $A > 0$, una scelta comune per i due portafogli $w(m_1)$ e $w(m_2)$ nel teorema di separazione in due fondi è quella di prendere

$$m_1 = \overline{m} \implies w(m_1) = w(\overline{m})$$
$$m_2 = r \implies w(m_2) = w(r) = e_n.$$

In questo caso il portafoglio $w(m_1)$ è il portafoglio di tangenza, concentrato sui soli titoli rischiosi, mentre il portafoglio $w(m_2)$ è concentrato sul solo titolo privo di rischio.

Inversione della varianza dei portafogli efficienti

Proposizione. Per ogni $\sigma^2 \geq V(m^*)$ esiste un unico portafoglio efficiente $w(\sigma^2)$ tale che $VAR(R_{w(\sigma^2)}) = \sigma^2$. Il suo rendimento atteso è dato da

$$M(\sigma^2) := M(R_{w(\sigma^2)}) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - \sigma^2)}}{2a}.$$

Premio per il rischio

Proposizione. La funzione $M(\sigma^2)$ è due volte differenziabile e soddisfa

$$M'(\sigma^2) = [b^2 - 4a(c - \sigma^2)]^{-\frac{1}{2}} > 0,$$
$$M''(\sigma^2) = -2a[b^2 - 4a(c - \sigma^2)]^{-\frac{3}{2}} < 0.$$

In aggiunta abbiamo

$$\lim_{\sigma^2 \to V(m^*)^+} M'(\sigma^2) = \infty, \quad \lim_{\sigma^2 \to \infty} M'(\sigma^2) = 0.$$

Interpretazione. La derivata $M'(\sigma^2)$ quantifica il rendimento atteso marginale che si riceve accettando un incremento infinitesimo di varianza nel proprio portafoglio di investimento e può quindi essere interpretata come un premio per il rischio. Tale premio è infinito in corrispondenza del portafoglio con varianza minima e decresce all'aumentare del rischio fino ad azzerarsi all'infinito.

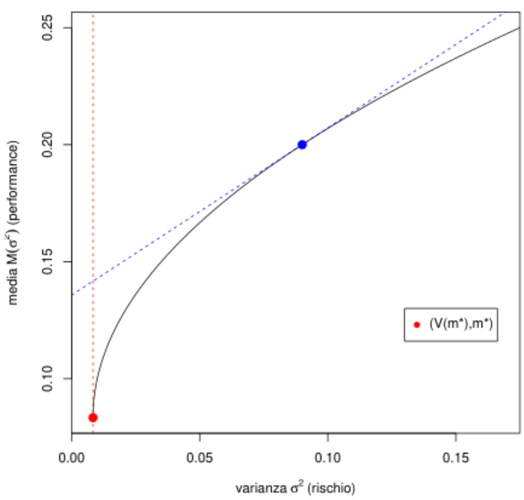


Figura 11: Enter Caption

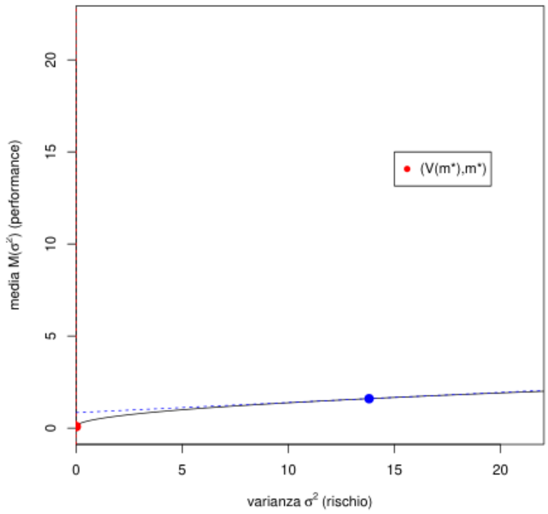


Figura 12: Enter Caption

Inversione della deviazione standard minima: Caso 2

Proposizione. Per ogni $\sigma \geq 0$ esiste un unico portafoglio efficiente $w(\sigma)$ tale che $DEV(R_{w(\sigma)}) = \sigma$. Il suo rendimento atteso è dato da

$$M(\sigma) := M(R_{w(\sigma)}) = r + \sqrt{B}\,\sigma.$$

Premio per il rischio: Caso 2

Proposizione. La funzione $M(\sigma)$ è differenziabile e soddisfa

$$M'(\sigma) = \sqrt{B} = \frac{M(R_w) - r}{DEV(R_w)} > 0$$

per ogni portafoglio efficiente $w \in \mathbb{R}^n$ tale che $M(R_w) > r$.

Interpretazione. La derivata $M'(\sigma)$ quantifica il rendimento atteso marginale che si riceve accettando un incremento infinitesimo di deviazione standard nel proprio portafoglio di investimento e può quindi essere interpretata come un premio per il rischio.

La proposizione mostra che tale premio per il rischio non dipende dal livello di deviazione standard e coincide con la cosiddetta *Sharpe ratio* di un qualunque portafoglio efficiente, che cattura l'eccesso del suo rendimento atteso sul rendimento privo di rischio espresso per unità di rischio.

La funzione $M(\sigma)$ disegna una linea retta sul piano deviazione standard-media:

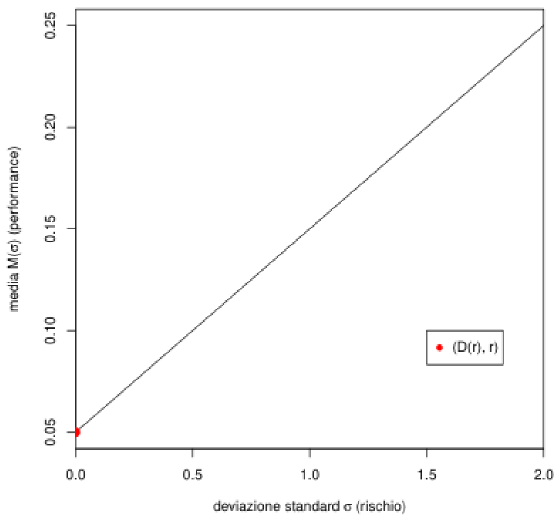


Figura 13: Enter Caption

LEZIONE 11: Un modello per i rendimenti attesi: Caso 2

Proposizione. Per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ e ogni portafoglio efficiente $w \in \mathbb{R}^n$ tale che $M(R_w) > r$ (il portafoglio non è concentrato sul titolo privo di rischio)

$$M(R_i) = r + \frac{\mathrm{COV}(R_i, R_w)}{\mathrm{VAR}(R_w)}(M(R_w) - r).$$

Interpretazione. La relazione ci dice che, dato un portafoglio efficiente, la differenza tra il rendimento atteso di un titolo rischioso e il rendimento privo di rischio è proporzionale alla differenza tra il rendimento atteso del portafoglio e il rendimento privo di rischio tramite un fattore di rischio sistematico che quantifica la dipendenza (lineare) tra il titolo e il portafoglio.

Tale relazione è il punto di partenza del *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*, che postula l'efficienza del cosiddetto portafoglio di mercato (per esempio, un grande indice azionario come l'S&P500).

Un modello per la valutazione dei titoli finanziari: Caso 2

Proposizione. Per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ e ogni portafoglio efficiente $w \in \mathbb{R}^n$ tale che $M(R_w) > r$ (il portafoglio non è concentrato sul titolo privo di rischio)

$$S_i(0) = M\left(\frac{S_i(T)}{1 + r + \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_w)}{\mathrm{VAR}(R_w)}(M(R_w) - r)}\right).$$

Interpretazione. La relazione ci dice che, dato un portafoglio efficiente, il prezzo di un titolo rischioso è pari al valore atteso del suo payoff attualizzato ad un tasso pari alla somma del tasso privo di rischio e di un tasso "artificiale" proporzionale al rischio sistematico che quantifica la dipendenza (lineare) tra il titolo e il portafoglio.

Tale relazione costituisce quindi una formula per la valutazione di un generico titolo finanziario che assomiglia alle formule di prezzaggio che si incontrano nella cosiddetta

Arbitrage Pricing Theory.