



# MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS ESTOCÁSTICOS Y SU INFERENCIA: CASOS SIS Y SEIR

**Andrés Sebastián Ríos Gutiérrez**

Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá  
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística.  
Bogotá D.C. Colombia  
2018

# **MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS ESTOCÁSTICOS Y SU INFERENCIA: CASOS SIS Y SEIR**

**Andrés Sebastián Ríos Gutiérrez**

Trabajo final presentado como requisito para optar al título de:  
Magíster en Ciencias Estadística

Director:  
**Ph.D. Viswanathan Arunachalam**

Líneas de Investigación:  
Análisis Estocástico y Epidemiología

Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá  
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística  
Bogotá D.C. Colombia  
2018

*“(…) Mirar la vida a la cara,  
siempre hay que mirarla a la cara,  
y conocerla por lo que es;  
así podrás conocerla,  
quererla por lo que es  
y luego guardarla dentro”*

*The Hours*

*“Nadie es inmune al miedo”*

*Gabriela Urrutibehety*

*“El único logro es entender  
lo que hago”*

*Lili Salazar*

***A mis padres ¡tan valientes,  
tan humildes y tan sentimentales!  
¡tan trabajadores, tan serenos,  
tan rígidos y tan comprensivos!***

A handwritten signature in dark ink, appearing to read 'Gabriela Urrutibehety', with a stylized flourish at the end.

# Agradecimientos

Al destino llamado Dios, por la vida misma, por la causalidad y por la capacidad del sentir y del corregir.

A mi familia, por su apoyo incondicional, por su fuerza, por su vitalidad, por sus enseñanzas, por las lecciones de vida, por mostrarme el mundo desde su experiencia y por enseñarme con voluntad constante que *“vale la pena vivir”* LS

A mis amigos y a mis mate—amigos por su compañía, por su alegría, por las emociones y por aquellos momentos que ni el tiempo ni la distancia borrarán.

A Jairo Daniel por su constante apoyo moral y académico, además de su ayuda para implementar las simulaciones.

Al profesor Arun por su incondicional apoyo académico, por sus recomendaciones valiosas para la elaboración del presente trabajo, por devolverme la esperanza en el mundo académico tan frío y tan rudo, por mostrarme que primero se es un ser humano y luego se es gran un profesional.

A los integrantes del seminario del grupo de investigación de Procesos Estocásticos, en especial a las profesoras Liliana Blanco y Johanna Garzón, a la profesora Leticia Ramírez del CIMAT, a la profesora Soledad Torres y al profesor Carlos Castillo-Chávez por sus sugerencias y recomendaciones para la elaboración de este trabajo final.

# Resumen

En este trabajo, se presentan dos modelos epidemiológicos con una perturbación aleatoria de los modelos epidemiológicos deterministas de tipo SIS y SEIR. A partir de los modelos presentados se proponen las definiciones de *número reproductivo básico* y de *variable aleatoria reproductiva básica*, estudiándose la relación que tienen ambos. Se estudian cuatro aspectos: existencia y unicidad de la solución (por ejemplo, de la población infectada), extinción, persistencia en la media y existencia de la distribución estacionaria. Finalmente se presentan los resultados de la simulación de los modelos presentados y se propone la estimación de parámetros por el *método de máxima verosimilitud*.

**Palabras clave:** Modelo SIR, modelo SIS, modelo SEIR, modelos epidemiológicos deterministas, modelos epidemiológicos estocásticos, número reproductivo básico, asintóticamente estable, existencia y unicidad, extinción, persistencia en la media, procesos estacionarios, estimación por máxima verosimilitud, Simulaciones por Euler-Maruyama.

# Abstract

In this work, two epidemiological models with a random perturbation of the deterministic epidemiological SIS model and SEIR model are presented. From the presented models, the definitions of basic reproduction model and basic reproduction random variable are proposed, studying the relation that both have. Four aspects are studied: existence and uniqueness of the solution (for example for infected population), extinction, persistence in the mean and existence of stationary distribution. Finally, the presented models are done and the estimation of parameters by maximum likelihood method is proposed.

**Keywords:** SIR model, SIS model, SEIR model, deterministic epidemic models, stochastic epidemic models, basic reproduction number, asintóticamente estable, existence and uniqueness, extinction, persistence in the mean, stationary distribution, Maximum likelihood estimation, Euler Maruyama simulations.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1. Preliminares del análisis estocástico</b>	<b>3</b>
1.1. Conceptos básicos de probabilidad . . . . .	3
1.1.1. Conceptos básicos de vectores aleatorios . . . . .	9
1.2. Conceptos básicos de procesos estocásticos . . . . .	12
1.3. La integral de Itô . . . . .	18
<b>2. Hacia los modelos epidemiológicos estocásticos</b>	<b>29</b>
2.1. Modelos deterministas versus modelos estocásticos . . . . .	29
2.2. Algunos modelos epidemiológicos deterministas . . . . .	31
2.3. Estabilidad y número reproductivo básico . . . . .	40
2.3.1. El número reproductivo básico . . . . .	40
2.3.2. Estabilidad de los modelos epidemiológicos deterministas . . . . .	42
2.4. Hacia los modelos epidemiológicos estocásticos . . . . .	49
2.5. Estabilidad de los modelos estocásticos . . . . .	52
2.6. Sobre las definiciones de $R_0$ para los modelos estocásticos . . . . .	56
2.6.1. La definición de $R_0$ a partir de la integral . . . . .	57
2.6.2. La definición de $R_0$ como una condición suficiente para la estabilidad . . .	59
<b>3. Los modelos SIS y SEIR estocásticos</b>	<b>63</b>
3.1. La existencia y la unicidad de la solución . . . . .	63
3.2. La extinción . . . . .	69
3.3. La persistencia en la media . . . . .	77
3.4. Existencia de la distribución estacionaria . . . . .	82
<b>4. Simulaciones y estimaciones</b>	<b>99</b>
4.1. El método de Euler–Maruyama . . . . .	99
4.2. Simulación de las trayectorias . . . . .	100
4.2.1. La extinción en las simulaciones . . . . .	103
4.2.2. La estabilidad en las simulaciones . . . . .	107
4.3. Estimación de los parámetros . . . . .	116
4.3.1. Estimación de los parámetros para el modelo SIS–estocástico . . . . .	118
4.3.2. Estimación de los parámetros para el modelo SEIR–estocástico . . . . .	122
4.4. Ejemplo de aplicación con datos reales . . . . .	126
<b>Conclusiones</b>	<b>131</b>
<b>Anexo A: Conceptos de análisis matemático</b>	<b>133</b>
<b>Anexo B: Códigos utilizados</b>	<b>137</b>

# Introducción

La *epidemiología* es la rama de la salud pública que se encarga de estudiar el *desarrollo epidémico* y la incidencia de las enfermedades infecciosas en determinadas poblaciones. Se considera como la ciencia básica de la salud pública y por consiguiente es fundamental para el progreso de los países y en el desarrollo social de los mismos. Estudiar el comportamiento de una infección a través del tiempo, partiendo desde sus inicios, es de vital importancia para todas las sociedades, porque permite a los gobiernos crear medidas de choque contra el avance de la enfermedad misma, así como dar mayor importancia al desarrollo de vacunas y tratamientos que retarden los efectos negativos que éstas pueden tener en la población. Recientemente en Colombia hemos visto importantes brotes de enfermedades tropicales como lo son el *Zika* y el *Chikunguya*, así como también de *infecciones endémicas* de nuestra región como lo son el *dengue*, la *leishmaniasis*, etc. A nivel mundial se conoce el reciente brote de la gripe *AH1N1* y el *SARS*, el *ébola*, etc, infecciones que se propagan rápidamente entre los individuos de una población, llegando a ser consideradas como *epidemias mundiales*. Es por ello que el estudio de una epidemia debe ser considerado de gran relevancia para tomar medidas de prevención, cuidado y atención para los pacientes y así mismo predecir qué efectos puede tener la enfermedad y bajo qué criterios ésta se debe considerar como riesgosa.

Una técnica ampliamente utilizada para tales estudios son los *modelos matemáticos* que utilizan las *ecuaciones diferenciales ordinarias*, algunos de ellos son los modelos SIR (por sus siglas, susceptibles, infectados y recuperados), SIS (por sus siglas, susceptibles e infectados) y SEIR (por sus siglas, susceptibles, expuestos, infectados y recuperados). Dichos modelos son de *naturaleza determinista*, es decir, son modelos en los cuales las condiciones iniciales siempre producirán los mismos resultados, es decir, las *gráficas de las funciones* de los diferentes tipos de población no cambiará entre una simulación y otra, en otras palabras no se considera incertidumbre alguna en la modelación. Este tipo de incertidumbre puede darse debido a ciertos factores externos, como por ejemplo, el clima. El clima de determinadas regiones facilita la propagación de algunas enfermedades y es conocido que en época de lluvias aumentan los casos de personas con enfermedades respiratorias agudas.

De la motivación de considerar las *variaciones climáticas*, como *parte fundamental* en el estudio epidemiológico y por consiguiente del modelamiento de las epidemias, es que en este trabajo se presentarán *modelos epidemiológicos estocásticos* con el objetivo de brindar información más completa sobre el comportamiento de una epidemia en cualquier población. Los modelos presentados serán el modelo SIS—estocástico y el modelo SEIR—estocástico.

Una vez propuestos los modelos epidemiológicos estocásticos, se estudiará en cada uno de ellos cuatro aspectos fundamentales: *existencia y unicidad* de las soluciones; *extinción* de la población infectada; *persistencia en la media* de la población infectada, es decir, que en promedio siempre exista población infectada a partir de la hora cero de la enfermedad; y la existencia de *procesos estacionarios*, los cuales tendrán como objetivo ver el estudio *asintótico* de las enfermedades. Las demostraciones presentadas se basan en trabajos previamente realizados, en especial, [Gray], [Liu], [Maki] y [Omari, Lahrouz & Kiouach]. Otros trabajos recientes que utilizan modelos epidemiológicos estocásticos son [Zaman], [Jiang], [Lahrouz] y [Zhou].

En este trabajo también se presentarán los *estimadores* por *máxima verosimilitud* de los parámetros de los modelos epidemiológicos estocásticos propuestos. El enfoque en este trabajo es estimar los parámetros a partir de los datos de la población susceptible e infectada, difiriendo de otro enfoque en el cual las estimaciones son se consultan en la literatura médica o por los organismos de salud, de acuerdo a estudios previos realizados, dependiendo claro está del comportamiento de la enfermedad estudiada. La estimación se hará con ayuda del *método de Euler-Maruyama*, un método comúnmente utilizado para graficar las trayectorias de las ecuaciones diferenciales estocásticas y que en este caso específico nos permitirá llegar a una expresión para la *función de máxima verosimilitud* con una *distribución normal*. Se realiza un ejemplo con datos reales con el propósito de proveer una metodología de análisis bajo estos modelos



# Capítulo 1

## Preliminares del análisis estocástico

En este capítulo se hacen todas las definiciones de teoría de probabilidad, de procesos estocásticos y de integración con respecto al movimiento browniano, las cuáles se utilizarán en los capítulos posteriores para presentar los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico, además se presentan algunas proposiciones, teoremas y suposiciones que se utilizarán en los *capítulos 2 y 3*.

En el segundo capítulo se proponen los *modelos epidemiológicos estocásticos*, dichos modelos utilizan las variables  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  las cuales denotarán el número de personas susceptibles, expuestas, infectadas y recuperadas en un tiempo fijo  $t \geq 0$  (ver *página 32*). Dichas variables en realidad se asumirán como *variables aleatorias* definidas cada una sobre los *números reales* con su respectiva  $\sigma$ -álgebra de Borel. En el *capítulo 4* se estimarán los parámetros de los modelos propuestos en el segundo capítulo, para dicha estimación se utilizará el *método de máxima verosimilitud* el cual consiste en maximizar la *función de verosimilitud* con respecto a los *parámetros* (ver *página 113*) siendo dicha función en realidad una *función de densidad de probabilidad conjunta*, la cual se escribirá en términos de una *función de densidad condicional* (ver *página 113*). Por la naturaleza de los modelos propuestos se tendrá que la *función de densidad conjunta* es la función de densidad de una *distribución normal multivariada*.

En la siguiente sección se definen los conceptos básicos de *procesos estocásticos*. El enfoque de este trabajo está en asegurar que como  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  son variables aleatorias para un tiempo fijo  $t \geq 0$ , entonces las colecciones de variables  $\{S(t), I(t)\}_{t \geq 0}$  (para el modelo SIS-estocástico) y  $\{S(t), E(t), I(t), R(t)\}_{t \geq 0}$  (modelo SEIR-estocástico) son *procesos estocásticos*, los cuales serán *martingalas locales continuas* y *cadenas de Markov de tiempo continuo*.

Los procesos estocásticos  $\{S(t), I(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S(t), E(t), I(t), R(t)\}_{t \geq 0}$  son en realidad *procesos de Itô* y son soluciones de *dos sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas*, definidos sobre el *movimiento browniano*. El teorema central de este trabajo es la *fórmula de Itô*, siendo el teorema utilizado en todas las demostraciones del *capítulo 3* y el *lema 3.2* será utilizando en la *sección 3.4*, por lo que en este capítulo se introducen las *herramientas teóricas* para abordar dicho lema y dicho teorema.

### 1.1. Conceptos básicos de probabilidad

Un *experimento aleatorio* es un experimento en el cual su resultado no puede ser determinado de antemano ([Blanco, pág. 8]). En un experimento aleatorio el conjunto  $\Omega$  denota todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Todos los elementos  $\omega \in \Omega$  se conocen como *puntos muestrales* y  $\Omega$  se llama un *espacio muestral*.

La clase de subconjuntos de un espacio muestral para los cuáles está definida su probabilidad (definición 1.3) tiene la estructura de  $\sigma$ -álgebra ([Blanco, pág. 9]) la cual se define como:

**Definición 1.1.** ([Blanco, pág. 9]) Sea  $\Omega \neq \emptyset$ . Una colección  $\mathfrak{S}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ , si y sólo si

(i)  $\Omega \in \mathfrak{S}$ .

(ii) Si  $A \in \mathfrak{S}$  entonces  $A^c \in \mathfrak{S}$ .

(iii) Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}$  entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{S}$ .

Los elementos de  $\mathfrak{S}$  se llaman **eventos**. La dupla  $(\Omega, \mathfrak{S})$  se conoce como **espacio medible**.

**Ejemplo 1.1.** ([Blanco, pág. 10]) Sea  $\Omega \neq \emptyset$  un conjunto arbitrario. Las colecciones de conjuntos  $\mathfrak{S}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$  y  $\wp(\Omega) := \{A : A \subseteq \Omega\}$  son  $\sigma$ -álgebras sobre  $\Omega$  conocidas como la  $\sigma$ -álgebra **trivial** y la  $\sigma$ -álgebra **total**, respectivamente. ▲

**Ejemplo 1.2.** Sean  $\Omega = \{a, b, c\}$ ,  $\mathfrak{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$  y  $\mathfrak{G} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \Omega\}$ .  $\mathfrak{S}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ , mientras que  $\mathfrak{G}$  no lo es puesto que  $\{a, b\} \notin \mathfrak{G}$ . ▲

En [Blanco, pág. 10] se enuncia que si  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$  son  $\sigma$ -álgebras sobre un mismo espacio muestral  $\Omega$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{S}_i$  es también una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ .

**Ejemplo 1.3.** ([Blanco, pág. 10]) Sean  $\Omega \neq \emptyset$  y  $\mathfrak{C}$  una colección de subconjuntos de  $\Omega$ . Sea

$$\mathcal{M} := \{\mathfrak{S} : \mathfrak{S} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra sobre } \Omega \text{ tal que } \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}\}.$$

La  $\sigma$ -álgebra  $\bigcap_{\mathfrak{S} \in \mathcal{M}} \mathfrak{S}$  se conoce como la  $\sigma$ -álgebra **generada por  $\mathfrak{C}$**  y es denotada por  $\sigma(\mathfrak{C})$ . ▲

**Ejemplo 1.4.** ([Blanco, pág. 10]) Sean  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $C$  un subconjunto no vacío de  $\Omega$  y  $\mathfrak{S}$  una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ .  $\overline{\mathfrak{S}} := \{A \cap C : A \in \mathfrak{S}\}$  es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $C$  llamada la **huella de  $\mathfrak{S}$  sobre  $C$** . ▲

**Definición 1.2.** ([Blanco, pág. 11]) (i) La  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}$  generada por todos los intervalos de la forma  $(-\infty, a]$ , con  $a \in \mathbb{R}$ , se conoce como la  $\sigma$ -álgebra **de Borel** y se denota por  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  se llama un **conjunto boreliano**.

(ii) Sean  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a_i \leq b_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . La  $\sigma$ -álgebra generada por todos los conjuntos de la forma

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i \leq b_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$

se llama  $\sigma$ -álgebra **de Borel** en  $\mathbb{R}^n$  y se nota por  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ .

Si  $D \neq \emptyset$  con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , la huella de  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  sobre  $D$  se denota por  $\mathfrak{B}(D)$ . Cuando se tiene un evento en un espacio muestral se preguntará sobre que la probabilidad del mismo. Para ello necesitamos definir como tal el concepto de *medida de probabilidad* presentado a continuación.

**Definición 1.3.** ([Blanco, pág. 13]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{S})$  un espacio medible y  $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que

(i)  $P(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathfrak{S}$ .

(ii)  $P(\Omega) = 1$ .

(iii) Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}$  son eventos mutuamente excluyentes, es decir,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$  entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

se llama **medida de probabilidad sobre**  $(\Omega, \mathfrak{S})$ . La tripla  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  se llama **espacio de probabilidad**.

**Definición 1.4.** ([Øksendal, pág. 8]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  un espacio de probabilidad,  $A$  y  $B$  elementos de  $\mathfrak{S}$  tal que  $P(A) = 0$  y  $P(B) = 1$ . Se dice entonces que  $A$  es un evento **nulo** y  $B$  es un evento **casi seguro** o de ocurrencia **casi siempre** (c.s.).

En el capítulo 4 se utilizará la que llamaremos la *función de densidad condicional* (páginas 113 y 117), razón por la cual previamente debemos definir el concepto de *probabilidad condicional*. Supongamos que tenemos  $A, B \in \mathfrak{S}$  sobre un *espacio de probabilidad*  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ,  $P(B|A)$  denota la probabilidad de que el evento  $B$  pueda ocurrir “medido bajo la suposición de que un evento  $A$  ha sido observado” ([Blanco, pág. 24]). Formalmente se define la *probabilidad condicional* como

**Definición 1.5.** ([Blanco, pág. 24]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  un espacio de probabilidad,  $A$  y  $B$  elementos de  $\mathfrak{S}$  tal que  $P(A) > 0$ , entonces se define la **probabilidad del evento  $B$  bajo la condición  $A$  como**

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Un evento  $B$  es *independiente* de un evento  $A$  si la ocurrencia del evento  $A$  “no afecta la ocurrencia del evento  $B$ ” ([Blanco, pág. 32]), esto podría interpretarse como  $P(B|A) = P(B)$ . El inconveniente de “definir” la *independencia* de  $A$  y de  $B$  de esta manera está en que sólo es válida cuando  $P(B) > 0$ . Por otra parte, si  $B$  es independiente de  $A$  entonces

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(B)P(A),$$

razón por la cual se define la *independencia de dos eventos* y de una *familia de eventos* como sigue:

**Definición 1.6.** ([Blanco, pág. 32]) Sea  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  un espacio de probabilidad con  $A, B \in \mathfrak{S}$ . Se dice que  $A$  y  $B$  son **independientes**, si y sólo si,  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Una familia de eventos  $\{A_i : i \in I\}$  se dice que es **independiente**, si y sólo si,

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i), \text{ para todo subconjunto finito } J \neq \emptyset \text{ de } I.$$

**Definición 1.7.** ([Jacod, pág. 65]) Sean  $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$  sub  $\sigma$ -álgebras de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}$ , esto es  $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}$  para todo  $i \in I$ . Se dice que  $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$  son **independientes** si para todo subconjunto finito  $J \neq \emptyset$  de  $I$  se cumple que

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i), \text{ para todo } A_i \in \mathfrak{A}_i.$$

Ahora bien cuando se tiene interés en los “valores numéricos que se pueden deducir de los resultados un experimento aleatorio” ([Blanco, pág. 53]), por ejemplo, cuando se quiere determinar el total de los resultados cuando se lanza un dado corriente dos veces consecutivas; se define el concepto de *variable aleatoria*.

**Definición 1.8.** ([Blanco, pág. 53]) (i) Sean  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  un espacio de probabilidad y  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{S}})$  un espacio medible. Sea  $X$  tal que

$$\begin{aligned} X : (\Omega, \mathfrak{F}, P) &\longrightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}) \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

(i) Se dice que  $X$  es una  $\mathfrak{F} - \tilde{\mathfrak{F}}$ -**variable aleatoria** si para todo  $A \in \tilde{\mathfrak{F}}$  se cumple que  $X^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$ .

(ii) Si  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$  entonces  $X$  se conoce como una **variable aleatoria real** sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

Se dice que  $X$  una función  $\mathfrak{F}$ -**medible** bajo la medida  $P$ , si y sólo si,  $X$  es una variable aleatoria real sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

**Ejemplo 1.5.** Supongamos que tenemos interés en saber el número de caras luego de 2 lanzamientos consecutivos de un dado corriente. El espacio muestral corresponde al conjunto

$$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$$

donde  $CC$  denota que cae primero cara y luego vuelve a caer cara y de manera análoga se denotan los otros elementos de  $\Omega$

Sea  $X :=$  “número de caras obtenidas”. Se tienen que la variable aleatoria  $X$  está definida por

$$\begin{aligned} X : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ CC &\rightarrow 2 \\ CS, SC &\rightarrow 1 \\ SS &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad ,$$

$X$  es una variable aleatoria real. ▲

**Ejemplo 1.6.** (i) Sea una enfermedad  $A$  la cual es modelada utilizando el modelo SIS-estocástico (definición dada en la página 34). Bajo este modelo se definen las variables aleatorias:

$$\begin{aligned} S(t) &:= \text{“Número de susceptibles a la enfermedad en el tiempo } t\text{”} \\ I(t) &:= \text{“Número de infectados por la enfermedad en el tiempo } t\text{”} \end{aligned}$$

(ii) Sea una enfermedad  $B$  la cual es modelada utilizando el modelo SEIR-estocástico (definición dada en la página 35). Bajo este modelo se definen  $S(t)$  e  $I(t)$  como en el ítem (i) y las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} E(t) &:= \text{“Número de expuestos a la enfermedad en el tiempo } t\text{”} \\ R(t) &:= \text{“Número de recuperados de la enfermedad en el tiempo } t\text{”} \end{aligned}$$

Las variables  $S(t), E(t), I(t)$  y  $R(t)$  son definidas con más detalle en la páginas 32 y 35, éstas toman valores en el espacio medible  $([0, +\infty), \mathfrak{B}([0, +\infty)))$ . ▲

**Definición 1.9.** Sea  $X : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  una  $\mathfrak{F} - \tilde{\mathfrak{F}}$ -variable aleatoria con  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$  un espacio medible. Por notación se escribe

$$\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \text{ con } B \in \tilde{\mathfrak{F}},$$

la función  $P_X$  definida sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\tilde{\mathfrak{F}}$  por medio de

$$P_X(B) := P(\{X \in B\}) = P(X \in B); \text{ para todo } B \in \tilde{\mathfrak{F}},$$

es una medida de probabilidad sobre  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$  llamada la **distribución** de la variable aleatoria  $X$  ([Blanco, pág. 55]).

**Ejemplo 1.7.** Sean las variables aleatorias  $S(t), I(t), E(t)$  y  $R(t)$  como en el ejemplo 1.6. Tenemos que para cada  $t \geq 0$ ,  $I(t)$  define la distribución dada por:

$$P_{I(t)}(B) := P(I(t) \in B) \text{ para todo } B \in \mathfrak{B}([0, +\infty)),$$

análogamente  $S(t), E(t)$  y  $R(t)$  definen sus distribuciones. ▲

Las siguientes definiciones son enunciadas para definir cuando *variable aleatoria* se dice que tiene *distribución normal estándar*.

**Definición 1.10.** [Blanco, pág.56] Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria real. La **función de distribución** de  $X$ , denotada por  $F_X$ , se define como

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x).$$

**Definición 1.11.** [Blanco, pág.61] Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria real con función de distribución  $F_X$ . Si  $F_X$  es una función escalonada entonces  $X$  es una variable aleatoria de **tipo discreto**, si  $F_X$  es continua se dice que  $X$  es de **tipo continua** y si  $F_X$  se expresa como una combinación lineal de una función escalonada y una función continua entonces se dice que es una variable aleatoria **mixta**.

Como una *variable aleatoria con distribución normal* es de tipo continuo, sólo nos centraremos en ese tipo de distribuciones. Se procede inmediatamente a definir la *función de densidad de probabilidad* a partir de la cual se define una *variable aleatoria con distribución normal*.

**Definición 1.12.** [Blanco, pág.61] Sea  $X$  una variable aleatoria real definida sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .  $X$  es **absolutamente continua** si y sólo si existe una función real no negativa e integrable  $f_X$  tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

la función  $f_X$  se llama la **función de densidad de probabilidad** de la variable aleatoria  $X$ .

Si la variable aleatoria  $X$  es absolutamente continua, entonces para todo  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  se tiene que  $P(X \in B) = \int_B f_X(u) du$ . Se define la *distribución normal* como sigue:

**Definición 1.13.** ([Blanco, pág.144]) Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene **distribución normal** de parámetros  $\mu$  y  $\sigma^2$ , donde  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$  si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]; x \in \mathbb{R}.$$

**Notación:**  $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ . Si  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$  se dice que  $X$  tiene una **distribución normal estándar**.

En el ejemplo 2.2. presentado en el capítulo 2 se utiliza la *distribución exponencial* para modelar un *crecimiento bacteriano*. La definición de una *variable aleatoria* con dicha *distribución* corresponde a:

**Definición 1.14.** ([Rustom, pág.83]) Se dice que una variable aleatoria  $X$  tiene **distribución exponencial** de parámetro  $\lambda$ , donde  $\lambda > 0$  si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ para } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}.$$

Notación:  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

Sea  $X$  una variable aleatoria real con función de distribución  $F_X(\cdot)$ . “Un par de valores que “resuman” en cierta forma” ([Blanco, pág.73]) la información de las propiedades de *tipo probabilístico* de  $X$  son la *esperanza* y la *varianza*. La *esperanza* define un “promedio” de los valores asumidos por  $X$  y la *varianza* “mide” que tanto varían los valores de  $X$  con respecto a su *esperanza* (ver [Blanco, pág.73–74]). Formalmente se define la *esperanza* y la *varianza* como sigue

**Definición 1.15.** [Blanco, pág.74] Sea  $X$  una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

(i) Si  $X$  es una variable aleatoria discreta con valores  $x_1, x_2, \dots$ , se dice que tiene *esperanza* si  $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| P(X = x_i) < +\infty$ , caso en el cual la **esperanza**  $\mathbb{E}(X)$  se define como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(X = x_i).$$

(ii) Si  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad  $f_X$ , se dice que tiene *esperanza* si  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u| f_X(u) du < +\infty$ , caso en el cual la **esperanza**  $\mathbb{E}(X)$  se define como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_X(u) du.$$

(iii) Si  $\mathbb{E}(X^2)$  y  $\mathbb{E}(X)$  existen se define la **varianza** como

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

(iv) Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  tales que  $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$  y  $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$ . Se define la **covarianza** de  $X$  y  $Y$  como

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

(v) Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  tales que  $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$  y  $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$ . Se define el **coeficiente de correlación** de  $X$  y  $Y$  como

$$\rho := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}}.$$

**Ejemplo 1.8.** Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

su *esperanza* está dada por

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} 4ue^{-4u} du = \lim_{b \rightarrow +\infty} 4ue^{-4u} \Big|_0^b + \int_0^{+\infty} e^{-4u} du = \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-4u}}{4} \Big|_0^b = \frac{1}{4}$$

▲

**Ejemplo 1.9.** En [Blanco, pág. 150] se demuestra que si  $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$  entonces  $\mathbb{E}(X) = \mu$  y  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ . ▲

**Definición 1.16.** ([Marín, pág. 3]) Sean  $X$  una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $p$  un entero positivo. Si  $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$  se define  $\mathbb{E}(X^p)$  como el  $p$ -ésimo momento de  $X$ .

**Definición 1.17.** ([Jacod, pág. 52]) Sean  $X$  una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $p$  un entero positivo tal que  $\mathbb{E}(|X|^p)$  existe. Se dice que  $X$  pertenece al **espacio**  $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

**Definición 1.18.** ([Jacod, pág. 142]) Sean  $p$  un entero positivo,  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias reales y  $X$  una variable aleatoria real definidas sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  tal que  $X_n, X \in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se dice que  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en**  $L^p$  a  $X$ , si y sólo si,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

En tal caso se escribe  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X$  en  $L^p$ .

Más adelante, cuando se proponen los *modelos epidemiológicos estocásticos* se utiliza el hecho de que un conjunto *variables aleatorias*  $X_1, \dots, X_n$  son *independientes e igualmente distribuidas* (**iid**) (sección 2.4 pág. 49). Este hecho también se utiliza en el capítulo 4 cuando se proponen los *estimadores de máxima verosimilitud* (páginas 113 y 117).

Se dice que  $X_1, \dots, X_n$  son **idénticamente distribuidas** si todas tienen la misma *distribución*, es decir, todas tienen la misma *función de distribución* (ver [Casela, pág. 139–140 y pág. 207–208]). La independencia se define a partir del concepto de  $\sigma$ -álgebra generada por una variable aleatoria.

**Definición 1.19.** ([Jacod, pág. 65]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad,  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{F}})$  un espacio medible y  $X : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  una variable aleatoria. Se define la  $\sigma$ -álgebra generada por la **variable aleatoria**  $X$  como la  $\sigma$ -álgebra definida por:

$$\sigma(X) := \bigcap_{\mathfrak{G} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra}} \left\{ \mathfrak{G} : X^{-1}(B) \in \mathfrak{G} \text{ para todo } B \in \tilde{\mathfrak{F}} \right\}.$$

Sea  $\mathcal{C}$  una colección de  $\mathfrak{F}$ - $\tilde{\mathfrak{F}}$ -variables aleatorias, se define  $\sigma(\mathcal{C})$  como la  $\sigma$ -álgebra generada por el conjunto  $\cup_{X \in \mathcal{C}} \sigma(X)$ .

**Definición 1.20.** ([Jacod, pág. 65]) Sean los espacios medibles  $(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\mathfrak{F}}_1), \dots, (\tilde{\Omega}_n, \tilde{\mathfrak{F}}_n)$  sobre los cuáles están definidas las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ , respectivamente. Se dice que  $X_1, \dots, X_n$  son **independientes**, si y sólo si, las  $\sigma$ -álgebras  $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$  son independientes.

### 1.1.1. Conceptos básicos de vectores aleatorios

La definición de una *función de densidad de probabilidad conjunta* la utilizaremos al momento de determinar la *función de máxima verosimilitud* para estimar los parámetros de los modelos SIS–estocástico y SEIR–estocástico en el capítulo 4 (ecuaciones 4.4). En particular observaremos que dicha *función de densidad* corresponde a la *función de densidad conjunta* de una *distribución normal multivariada* (páginas 113 y 117).

**Definición 1.21.** ([Blanco, pág. 182]) Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias reales definidas todas sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . La variable aleatoria definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}: \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\longrightarrow \mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

recibe el nombre de **vector aleatorio  $n$ -dimensional**. La medida de probabilidad definida sobre  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  por

$$P_{\mathbf{X}}(B) := P(\mathbf{X} \in B) \text{ para todo } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$$

se llama **distribución del vector aleatorio  $\mathbf{X}$** .

**Ejemplo 1.10.** Sean las variables aleatorias  $S(t), I(t), E(t)$  y  $R(t)$  como en el ejemplo 1.6. En el modelo SIS-estocástico (página 50) el vector aleatorio  $(S(t), I(t))^T$  define, para todo  $t \geq 0$ , la distribución dada por:

$$P_{SIS(t)}(B_1 \times B_2) := P((I(t), S(t)) \in B_1 \times B_2) \text{ para todo } B_1 \times B_2 \in \mathfrak{B}([0, +\infty)^2).$$

Análogamente en el modelo SEIR-estocástico (página 50) el vector aleatorio

$$(S(t), E(t), I(t), R(t))^T$$

define, para todo  $t \geq 0$ , la distribución dada por:

$$\begin{aligned} P_{SEIR(t)}(B) &:= P((S(t), E(t), I(t), R(t)) \in B) \text{ para todo} \\ B &= B_1 \times B_2 \times B_3 \times B_4 \in \mathfrak{B}([0, +\infty)^4). \end{aligned}$$

▲

**Definición 1.22.** ([Blanco, pág. 190]) Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias reales definidas todas sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Se dice que las variables son **conjuntamente continuas** si existe una función  $f$  definida para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , no negativa e integrable tal que

$$P((X_1, \dots, X_n) \in B) = \int \dots \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

para todo  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ . La función  $f$  se denomina la **función de densidad conjunta del vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$** .

De la definición anterior se tiene que:

$$\int \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$$

**Ejemplo 1.11.** ([Blanco, pág. 236]) **La distribución normal multivariada:** Sea

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$$

un vector aleatorio. Se dice que  $X$  tiene una distribución normal multivariada  $n$ -dimensional si para todas las constantes reales  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  se tiene que  $\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$  tiene una distribución normal univariada, posiblemente degenerada cuando  $\alpha_j = 0$  para todo  $j$ .

Los parámetros de un vector aleatorio  $\mathbf{X}$  de dimensión  $n$  con distribución normal multivariada son el **vector de medias** y la **matriz de covarianzas** ([Díaz, pág. 42–43]) definidos respectivamente por



$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

tal que  $\mu_i = \mathbb{E}(X_i)$ ,  $\sigma_i^2 = \mathbb{V}(X_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n$   
y  $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$ ,  $i \neq j$ .

Notación:  $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ . En [Blanco, pág. 240] se demuestra que si  $\Sigma$  es una matriz definida positiva entonces la función de densidad de probabilidad conjunta de  $\mathbf{X}$  está dada por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |\Sigma|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \right],$$

siendo  $|\Sigma|$  el determinante de  $\Sigma$  y  $\Sigma^{-1}$  su matriz inversa. Para el caso particular de la **distribución normal bivariada**, es decir, cuando  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  se tiene que la función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right]$$

siendo  $\rho$  el coeficiente de correlación entre  $X_1$  y  $X_2$ . ▲

El siguiente teorema de [Jacod, pág. 65–66] (en este libro como un corolario), se utilizará más adelante cuando se proponga la función de verosimilitud para el vector conformado por las variables aleatorias  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  para todo  $t \geq 0$ , dependiendo del modelo epidemiológico a trabajar (si SEIR o si SIS) (página 113 y 117).

**Teorema 1.1.** ([Jacod, pág. 69–70]) Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias reales definidas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  con funciones de densidad de probabilidad  $f_X$  y  $f_Y$ , respectivamente. Considérese el vector aleatorio  $(X, Y)$  definido sobre  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$  con función de densidad de probabilidad conjunta  $f(x, y)$ . Se tiene que  $X$  y  $Y$  son independientes, si y sólo si,  $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ .

El teorema anterior implica directamente que dadas  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias definidas sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  son independientes, si y sólo si,  $f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$ , donde  $f(x_1, \dots, x_n)$  es la función de densidad conjunta del vector aleatorio  $(X_1, \dots, X_n)$  y  $f_{X_i}(x_i)$  es la función de densidad de probabilidad de cada variable aleatoria  $X_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . El hecho anterior es utilizado para estimar los parámetros de los modelos SIS–estocástico y SEIR–estocástico (páginas 113 y 117).

Un concepto a definir en esta sección corresponde a la función de densidad condicional, concepto utilizado en las subsecciones 4.3.1 y 4.3.2. para determinar las futuras funciones de verosimilitud.

**Definición 1.23.** ([Blanco, pág. 261]) Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias continuas, definidas sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , con función de densidad de probabilidad conjunta  $f$  y funciones de densidad  $f_X$  y  $f_Y$ , respectivamente. Se define la **función de densidad de probabilidad condicional de  $X$  dado  $Y = y$**  como

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \text{ para todo } y \text{ tal que } f_Y(y) > 0.$$

El concepto de *esperanza condicional dada una  $\sigma$ -álgebra* es utilizado para definir una *martingala*. Es por ello que para finalizar esta sección se hacen las siguientes definiciones:

**Definición 1.24.** Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $B \in \mathfrak{F}$ . Se define la **función indicadora** de  $B$  para todo  $\omega \in \Omega$  como

$$\mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

**Definición 1.25.** ([Blanco, pág. 273]) Sean  $X$  una variable aleatoria real sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,

(i) Si  $B \in \mathfrak{F}$  con  $P(B) > 0$  y  $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_B(\omega)) < +\infty$ , se define la **esperanza condicional de  $X$  dado  $B$**  como

$$\mathbb{E}(X|B) := \frac{\mathbb{E}(X\mathbf{1}_B)}{P(B)}.$$

(ii) Si  $\mathfrak{G}$  es una sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathfrak{F}$  se define la *esperanza condicional de  $X$  dada  $\mathfrak{G}$*  como una variable aleatoria  $\mathfrak{G}$ -medible denotada por  $\mathbb{E}(X|\mathfrak{G})$ , tal que

$$\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{G})]\mathbf{1}_G) = 0, \text{ para todo } G \in \mathfrak{G}.$$

## 1.2. Conceptos básicos de procesos estocásticos

Bajo la *suposición* de que el número de infectados por una enfermedad contagiosa en el tiempo  $t$ , notado como  $I(t)$ , sea una variable aleatoria, entonces  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  es una *colección de variables aleatorias*, la cual en realidad se conoce como un *proceso estocástico*.

**Definición 1.26.** ([Blanco, pág. 315]) Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$ , definidas sobre el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y con valores en un espacio medible  $(S, \mathfrak{S})$ . El conjunto  $T$  es conocido como el **conjunto de índices del proceso** y  $S$  como el **espacio de estados**.

Usualmente  $t$  denotará un *tiempo*, por ejemplo, considérese  $X(t)$  como el número de nacimientos vivos en el tiempo  $t$  en una determinada ciudad. El proceso  $\{X_t\}_{t \in T}$  es el total de nacimientos en la ciudad durante el tiempo  $T$ . Al tomarse  $t$  fijo y un punto muestral  $\omega \in \Omega$ , entonces  $X_t(\omega)$  se puede escribir también como  $X(t, \omega)$ .

**Ejemplo 1.12.** En el modelo *SIS*-estocástico  $\{S(t), I(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico con valores en  $\left([0, +\infty)^2, \mathfrak{B}\left([0, +\infty)^2\right)\right)$  y en el modelo *SEIR*-estocástico  $\{S(t), E(t), I(t), R(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico con valores en  $\left([0, +\infty)^4, \mathfrak{B}\left([0, +\infty)^4\right)\right)$ .

**Definición 1.27.** ([Blanco, pág. 316]) Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y con valores en el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ ,

(i) Si  $T$  es un subconjunto de números naturales, entonces se dice que  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un **proceso de parámetro discreto**.

(ii) Si  $T$  es un intervalo de números reales, entonces  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un **proceso de parámetro continuo**.

(iii) Si  $S$  es un conjunto finito o enumerable, entonces  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un **proceso de estado discreto**.

(iv) Si  $S$  es un conjunto no enumerable, entonces  $\{X_t\}_{t \in T}$  es un **proceso de estado continuo**.

**Definición 1.28.** ([Karatzas, pág. 1]) Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  un proceso estocástico definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y con valores en  $(S, \mathfrak{S})$ . La función  $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$  para un  $\omega \in \Omega$  se llama la **trayectoria** de  $\{X_t\}_{t \in T}$  **asociado a**  $\omega$ .

**Definición 1.29.** ([Shalizi, pág. 35]) Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y con valores en  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ . Se dice que  $\{X_t\}_{t \in T}$  es **continuo**, si y sólo si,  $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$  es una función continua para todo  $\omega \in \Omega$  y todo  $t \geq 0$ .

**Definición 1.30.** ([Karatzas, pág. 3]) Sea un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  con espacio de estados en  $\mathbb{R}^n$ , definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Se tiene que para todo  $\omega \in \Omega$  y todo  $t \in T$  la dupla  $(t, \omega)$  pertenece al conjunto  $[0, +\infty) \times \Omega$ . Para el espacio muestral  $[0, +\infty) \times \Omega$  se define la  $\sigma$ -álgebra producto  $\mathfrak{B}([0, +\infty)) \otimes \mathfrak{F}$  como

$$\mathfrak{B}([0, +\infty)) \otimes \mathfrak{F} := \sigma(\{(B \times A) : B \in \mathfrak{B}([0, +\infty)) \text{ y } A \in \mathfrak{F}\}).$$

**Nota 1.1.** ([Karatzas, pág. 3]) Sea un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  con espacio de estados en  $\mathbb{R}^n$ , definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Para cada  $t \geq 0$  la variable aleatoria  $X_t$  es una función dada por

$$\begin{aligned} X_t : ([0, +\infty) \times \Omega, \mathfrak{B}([0, +\infty)) \otimes \mathfrak{F}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)) \\ (t, \omega) &\longrightarrow X_t(\omega) \end{aligned}.$$

**Definición 1.31.** ([Karatzas, pág. 1]) Sean  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  y  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  como en la nota anterior. Si para todo  $\tilde{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  se tiene que  $X_t^{-1}(\tilde{B}) \in \mathfrak{B}([0, +\infty)) \otimes \mathfrak{F}$  para todo  $t \geq 0$ , se dice que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un **proceso estocástico**  $\mathfrak{F}$ -**medible**.

**Definición 1.32.** ([Karatzas, pág. 3]) Sean  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  una colección  $\sigma$ -álgebras sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico. Se dice que  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  es una **filtración de**  $\mathfrak{F}$  si para todo  $0 \leq s \leq t < +\infty$  se tiene que  $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}$ . Se dice que el proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es  $\mathfrak{F}_t$ -**adaptado** o  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  es adaptado a  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , si y sólo si,  $X_t$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible para todo  $t \geq 0$ .

Más adelante en la página 50 se proponen un modelo epidemiológico estocástico el cual sustituye  $\beta$  el cual será una constante que determina la *tasa de infectividad* (página 32) por  $\beta + \sigma dB(t)$ , donde  $B(t)$  es un *movimiento browniano* en el tiempo  $t \geq 0$ . Para definir el *movimiento browniano* necesitamos las siguientes definiciones previas

**Definición 1.33.** ([Rincón, pág. 5]) Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico real sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  con valores en  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ . Se dice que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  **tiene incrementos independientes** si para cualesquiera  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  las variables aleatorias  $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1} - X_{t_0}$  son independientes.

**Definición 1.34.** ([Rincón, pág. 5]) Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico real sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  con valores en  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ . Se dice que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  **tiene incrementos estacionarios** si para cualesquiera  $s \leq t$  las variables aleatorias  $X_t - X_s$  y  $X_{t+h} - X_{s+h}$  tienen la misma distribución de probabilidad para todo  $h > 0$ .

Un *proceso de Markov* es un *proceso estocástico* en el cual la ocurrencia de un evento en el “presente” no depende de todos los eventos ocurridos durante el “pasado”, sino que únicamente depende de la ocurrencia del pasado “inmediatamente anterior”.

**Definición 1.35.** ([Capasso, pág. 101]) Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  con valores en  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathfrak{F}_t$ -adaptado a una filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ . Se dice que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un **proceso de Markov con respecto a**  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ , si y sólo si, para todo  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  y todo  $s < t$  se tiene que

$$P(X_t \in B | \mathfrak{F}_s) = P(X_t \in B | X_s) \text{ casi siempre.}$$

Seguindo la definición anterior, al considerar  $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  y la filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  definida por  $\mathfrak{F}_t := \sigma(\{X_r : 0 \leq r \leq t\})$ , se tiene que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Markov con respecto a  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  si para todo  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  y todo  $s < t$  se satisface que

$$P(X_t \in B | X_r, 0 \leq r \leq s) = P(X_t \in B | X_s) \text{ casi siempre ([Capasso, pág. 101]).}$$

**Definición 1.36.** ([Capasso, pág. 101–103]) Si en la definición de proceso de Markov tomamos  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con conjunto de estados discreto, decimos que  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una **cadena de Markov de tiempo discreto**. Si  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene conjunto de estados continuo entonces es una **cadena de Markov de tiempo continuo**.

**Ejemplo 1.13.** (i) En el modelo SIS–estocástico,  $\{S(t), I(t)\}_{t \geq 0}$  es una cadena de Markov con respecto a  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  con  $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{B}([0, t]^2)$  para todo  $t \geq 0$  (justificación en la página 113).

(ii) En el modelo SEIR–estocástico,  $\{S(t), E(t), I(t), R(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Markov con respecto a  $\{\mathfrak{G}_t\}_{t \geq 0}$  con  $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{B}([0, t]^4)$  para todo  $t \geq 0$  (justificación en la página 117). ▲

La sección 3.4. tiene como objetivo determinar bajo qué condiciones suficientes los procesos estocásticos del ejemplo anterior tienen *distribución estacionaria*. La siguiente definición se hace para definir una *distribución estacionaria* de un *proceso estocástico*.

**Definición 1.37.** ([Blanco, pág. 300]) Sean  $X, X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias con valores en  $\mathbb{R}^n$ , sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , con funciones de distribución  $F, F_1, F_2, \dots$ , respectivamente. Se dice que la sucesión de variables  $\{X_t\}_{n=1}^{+\infty}$  **converge en distribución a  $X$** , si y sólo si,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x); \text{ para todo } x \text{ punto de continuidad de } F,$$

en tal caso se escribe  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} X$ .

En la definición anterior si bien se considera una *sucesión de variables aleatorias*  $X_1, X_2, \dots$ , también podemos considerar un *proceso estocástico*  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , donde  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  converge en distribución a  $X$ . En tal caso se dice que  $X$  es una *distribución estacionaria* de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , cuya definición está dada por:

**Definición 1.38.** ([Gray, pág. 16 y 17]) Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico y  $X$  una variable aleatoria, ambos definidos en  $\mathbb{R}^n$  y sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Sea  $F_t$  la función de distribución de  $X_t$  para todo  $t \geq 0$  y  $F$  la función de distribución de  $X$ . Se dice que el proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  tiene una **distribución estacionaria**  $X$  (en caso de que ésta exista), si y sólo si,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_t(x) = F(x); \text{ para todo } x \text{ punto de continuidad de } F.$$

Para justificar los modelos epidemiológicos estocásticos propuestos en este trabajo (página 49) se utiliza el *teorema del límite central univariado* enunciado a continuación:

**Teorema 1.2.** ([Blanco, pág. 304]) Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias reales independientes e igualmente distribuidas con media  $\mu$  y varianza finita  $\sigma^2 > 0$ . Sean

$$S_n := \sum_{j=1}^n X_j \text{ y } Y_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Entonces la sucesión de variables aleatorias  $Y_1, Y_2, \dots$  converge en distribución a una variable aleatoria real  $Y$ , donde  $Y$  tiene distribución normal estándar. Esto es,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n \leq x) = \Phi(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

donde  $\Phi(x) := P(Y \leq x)$  con  $Y \sim \mathbf{N}(0, 1)$ .

En el lema 3.2., utilizado para demostrar las condiciones suficientes para la existencia de la distribución estacionaria de los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico, se tiene como condición suficiente el hecho de que el proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es de Markov de tiempo homogéneo, definición que se presentará inmediatamente:

La función  $p(s, x; t, A)$  corresponde a la función que determina la probabilidad de que partiendo del estado  $x$  en el tiempo (parámetro)  $s$ , el proceso estocástico llegue al conjunto  $A$  en el tiempo  $t$ . La definición de dicha función está dada por:

**Definición 1.39.** ([Capasso, pág. 101–103]) Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Markov con respecto a la filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ , con espacio de estados en  $\mathbb{R}^n$  y definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Se define la **función de transición de probabilidad** para todo  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$  como

$$p(s, x; t, B) := P(X_t \in B | X_s = x) \text{ para todo } s < t.$$

Se dice que un proceso de Markov es de tiempo homogéneo si las probabilidades de transición de un estado  $x$  a un conjunto  $B$  en un periodo de tiempo  $t - s$  con  $s < t$  son siempre iguales, es decir:

**Definición 1.40.** ([Capasso, pág. 112]) Un proceso de Markov  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , con las mismas condiciones de la definición anterior, se dice que es **de tiempo homogéneo**, si y sólo si, para todo  $s, t$  con  $0 < s < t$

(i) la función  $p(s, x; t, B)$  depende únicamente de  $t - s$  y

(ii) para todo  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y todo  $u \geq 0$ , se satisface que

$$p(s, x; t, B) = p(s + u, x; t + u, B) \text{ casi siempre.}$$

De la definición anterior se tiene que si  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Markov real de tiempo homogéneo entonces para todo  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y todo  $u \geq 0$  se tiene que

$$p(s, x; t, B) = p(0, x; t - s, B) \text{ casi siempre,}$$

para todo  $s, t$  con  $0 < s < t$  ([Capasso, pág. 112]).

**Suposición 1.1.** En este trabajo se asumirá que los procesos  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  para el modelo SIS-estocástico y los procesos  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $\{E(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  y  $\{R(t)\}_{t \geq 0}$  para el modelo SEIR-estocástico son todos procesos de Markov de tiempo homogéneo.

**Definición 1.41.** Sea  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una cadena de Markov de tiempo homogéneo, con conjunto de estados  $S$  y definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Como  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es de tiempo homogéneo, entonces tomando  $m$  y  $m+1$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , se tienen las siguientes probabilidades

$$p_{i,j} := P(X_{m+1} = j | X_m = i) = p(m, i; m+1, j) = p(0, i; 1, j), \text{ para todo } i, j \in S,$$

las cuáles (si están definidas) se llaman **probabilidades de transición** ([Blanco, pág. 319]).

**Notación 1.1.** Siguiendo la notación de [Blanco, pág. 319], en una cadena de Markov de tiempo homogéneo  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con conjunto de estados  $S$ , se escribe la probabilidad de ir del estado  $i$  al estado  $j$  en  $n$  pasos desde el tiempo 0 como

$$p_{i,j}^{(n)} := P(X_{m+n} = j | X_m = i) = p(0, i; n, j), \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ y todo } i, j \in S.$$

Si  $n = 0$  entonces

$$p_{i,j}^{(0)} := P(X_m = j | X_m = i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Para demostrar la existencia de una distribución estacionaria de los procesos estocásticos  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  en el modelo SIS-estocástico e  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  en el modelo SEIR-estocástico se utilizará el lema 3.2., donde se tiene la hipótesis de que los procesos son regulares. Un proceso es regular cuando a partir de cierto “número de pasos” (período de tiempo),  $n$ , las probabilidades de ir de cualquier estado a otro son siempre positivas ([Rincón, pág. 86]). La definición corresponde a:

**Definición 1.42.** (i) ([Blanco, pág. 319 y 320]) En una cadena de Markov de tiempo homogéneo  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con conjunto de estados  $S$ :

La matriz  $P_{ij}^{(n)} := (p_{i,j}^{(n)})$  se llama la **matriz de transición en  $n$  pasos**.

Si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que todas las entradas de la matriz  $P_{ij}^{(n)}$  son positivas se dice que la cadena  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es **regular**.

(ii) Una cadena de Markov de tiempo homogéneo  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  con conjunto de estados  $\mathbb{R}^n$  se dice que es **regular**, si y sólo si, existen  $s, t > 0$  tales que  $t - s > 0$  y para los cuáles la función de transición de probabilidad,  $p(0, x; t - s, B)$ , es positiva para todo  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Suposición 1.2.** Los procesos de Markov  $\{S(t), I(t)\}_{t \geq 0}$  para el modelo SIS-estocástico y  $\{S(t), E(t), I(t), R(t)\}_{t \geq 0}$  para el modelo SEIR-estocástico son procesos regulares.

En la demostración de la existencia de la solución de los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico se utilizan los términos  $\tau_*^{SIS}$  y  $\tau_*^{SEIR}$ , además en la demostración de la existencia de procesos estacionarios en ambos modelos se define un término notado como  $\tau$ ; los cuáles son en realidad *tiempos de paro*, definición presentada a continuación:

**Definición 1.43.** ([Ho Choe, pág. 102–103] y [Rincón, pág. 202]) Sean  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}$  sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $\tau$  una variable aleatoria con valores en  $[0, +\infty)$ . Se dice que  $\tau$  es un **tiempo de paro** con respecto a la filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ , si y sólo si,  $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$  para todo  $t \geq 0$ .

En la demostración de la existencia de la solución de los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico se utilizan los términos  $\tau_e^{SIS}$  y  $\tau_e^{SEIR}$ , los cuales son conocidos como *tiempos de explosión*. La definición un tiempo de explosión corresponde a:

**Definición 1.44.** ([Rossi, pág. 1]) Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  tal que  $X$  es adaptado a una filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\mathfrak{F}$ .  $\tau^e$  definido por

$$\tau^e := \min\{t : X_t(\omega) = +\infty, \text{ para casi todo } \omega \in \Omega\}$$

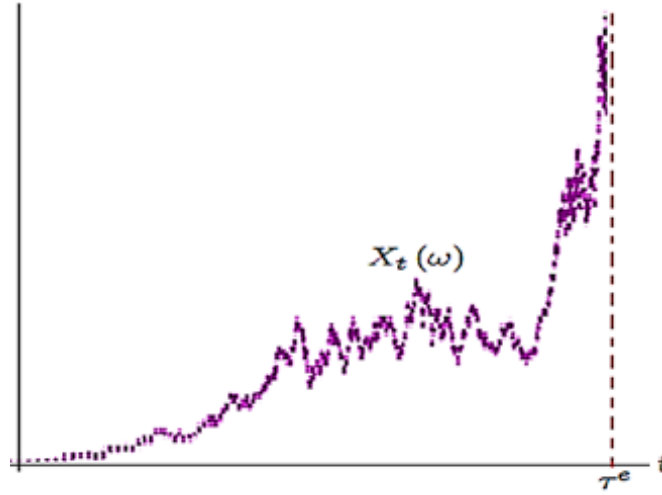
es conocido como un **tiempo de explosión** con respecto a  $X$ .

La siguiente proposición será utilizada en la demostración del teorema 3.1.

**Proposición 1.1.** ([Chang, pág. 48] y [Klebaner, pág. 242]) Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  tal que  $X$  es adaptado a una filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\mathfrak{F}$ . Sean  $\tau$  una variable aleatoria tal que  $\tau(\omega) = a$  con  $a > 0$  para todo  $\omega \in \Omega$  y  $\tau_e$  un tiempo de explosión con respecto a  $X$ , entonces  $\tau_e$  y  $\tau$  son ambos tiempos de paro con respecto a la filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

*Demostración:* [Chang, pág. 48]. ■

Gráficamente un *tiempo de explosión*  $\tau_e$  se observará como en la siguiente figura



(1.a)

Se define lo que es una *martingala* para luego definir lo que es una *martingala local*, siendo ésta una de las condiciones suficientes de la *ley fuerte de los grandes números* para martingalas. Además, en el lema 3.2. se necesita que el *proceso estocástico* sea una *martingala local*. Este lema es utilizado para demostrar la *extinción* en los modelos SIS—estocástico y SEIR—estocástico (página 81).

**Definición 1.45.** ([Capasso, pág. 91]) Sean  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$ . Se dice que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -**martingala**, si y sólo si, cumple las siguientes condiciones:

- (i)  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es  $\mathfrak{F}_t$ -adaptado
- (ii)  $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$  para todo  $t \geq 0$ .
- (iii)  $\mathbb{E}(X_t | \mathfrak{F}_s) = X_s$  para todo  $s \leq t$ .

Para la siguiente definición se utiliza la notación de que  $r \wedge s := \min\{r, s\}$ .

**Definición 1.46.** ([Capasso, pág. 99]) Sean  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$ . Se dice que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es una **martingala local** con respecto a  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ , si y sólo si, existe una sucesión de tiempos de paro  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , todos con respecto a  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ , tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

- (i)  $\tau_n < \tau_{n+1}$  casi siempre,
- (ii)  $P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = +\infty\right) = 1$  y

(iii)  $\{X_{t \wedge \tau_n}\}_{t \geq 0}$  es una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -martingala.

La sucesión de tiempos de paro  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se conoce como una **secuencia de localización**.

Una martingala local  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es continua, si y sólo si, todas las trayectorias del proceso son funciones continuas (definición 1.28.).

**Definición 1.47.** Sean  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  y  $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$  dos procesos estocásticos sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , tal que  $X_t, Y_t \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  para todo  $t \geq 0$ . Se define el **producto interno** en  $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  como  $\langle X, X \rangle_t := \mathbb{E}(X_t^2)$  y  $\langle X, Y \rangle_t := \mathbb{E}(X_t Y_t)$ .

El siguiente teorema se conoce como la *ley fuerte de los grandes números para martingalas locales*. Este teorema se utiliza para demostrar la *persistencia en la media* de ambos modelos y la *proposición 3.2.* donde se muestra la *media* y la *varianza* de la *distribución estacionaria* del modelo SIS-estocástico.

**Teorema 1.3.** ([Mao, pág. 12]) Sea  $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$  una martingala local continua con valores en los reales y sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , tal que  $M_0 = 0$  casi siempre, entonces

- (i) si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle M, M \rangle_t = +\infty$  c.s. implica que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_t}{\langle M, M \rangle_t} = 0$  c.s. y
- (ii) si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle M, M \rangle_t}{t} = 0$  c.s. implica que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_t}{t} = 0$  c.s.

### 1.3. La integral de Itô

En el capítulo 2 página 50 se presentan los modelos epidemiológicos SIS-estocástico y SEIR-estocástico. Por lo que se dijo en la sección anterior, dichos modelos presentan un cambio en la *tasa de infectividad* (ver página 49), escribiéndose como  $\beta + \sigma dB(t)$ , donde  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es un *movimiento browniano*. En la página 50 se muestra que las ecuaciones de los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico son en realidad *ecuaciones diferenciales estocásticas* con un diferencial  $dB(t)$  (*diferencial del movimiento browniano*). La *definición formal* corresponde a

**Definición 1.48.** ([Karatzas, pág. 47]) Sea  $B = \{B_t\}_{t \geq 0} = \{B(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso estocástico sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Decimos que  $B$  es un **movimiento Browniano** si

- (i)  $B_0 = B(0) = 0$  casi siempre.
- (ii)  $B$  tiene incrementos independientes y estacionarios.
- (iii) Para todo  $s < t$  con  $s > 0$  se tiene que  $B_t - B_s \sim \mathbf{N}(0, t - s)$ .

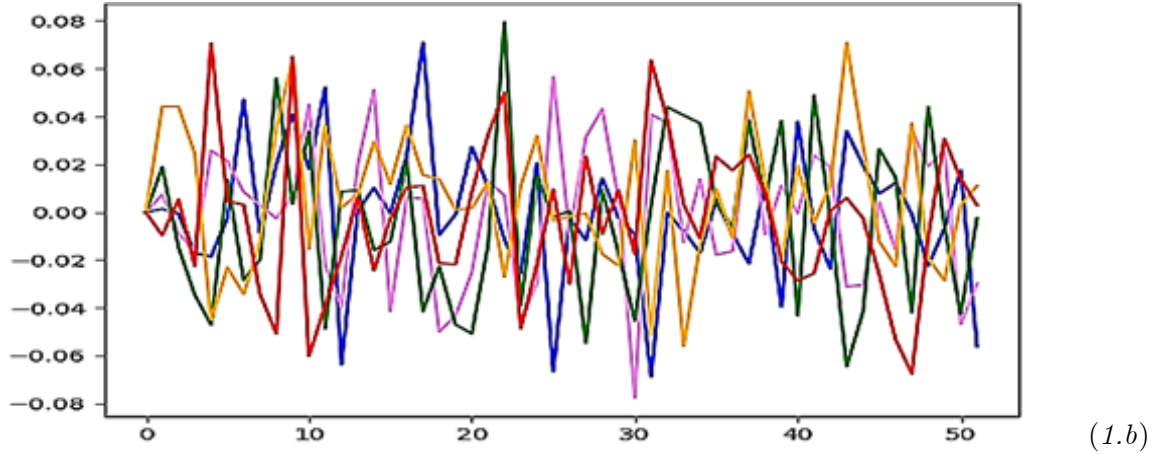
(iv) Las trayectorias del proceso,  $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$  para todo  $t \geq 0$  y todo  $\omega \in \Omega$ , son continuas.

Sea el proceso estocástico  $\{\mathbf{B}(t)\}_{t \geq 0} = \{(B_1(t), \dots, B_m(t))\}_{t \geq 0}$  tal que  $\{B_i(t)\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano y los  $\{B_i(t)\}_{t \geq 0}$ 's son independientes para todo  $i = 1, \dots, m$ , entonces se dice que  $\{\mathbf{B}(t)\}_{t \geq 0}$  es un **movimiento browniano m-dimensional**.

En [Resnick, pág. 489–494] se demuestra la *existencia del movimiento browniano*. Al modelar cinco trayectorias de un movimiento browniano utilizando el método de Euler-Maruyama (ver



capítulo 4) obtuvimos la siguiente gráfica



se observa que si  $\{B_t\}_{t \geq 0} = \{B(t)\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , entonces para cada  $\omega \in \Omega$  se tendrán trayectorias  $(t, \omega) \rightarrow B(t, \omega)$  distintas. Esto quiere decir que el comportamiento del movimiento browniano no es determinista, porque el comportamiento varía conforme varía  $\omega \in \Omega$ .

**Definición 1.49.** ([Øksendal, pág. 25]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad y  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$  tal que

(i) Un movimiento browniano  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  está definido sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

(ii)  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  satisface que  $\mathfrak{F}_t = \sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq t\})$  para todo  $t \geq 0$ .

La filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  se conoce como la **filtración browniana**.

El conjunto de las funciones  $\mathcal{V}(S, T)$  son en realidad las *funciones integrables* con respecto a la *integral de Itô* en el intervalo  $[S, T]$ . Formalmente se definen como

**Definición 1.50.** ([Øksendal, pág. 25]) Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y sea la clase de las funciones  $f$  definidas por

$$f : \begin{array}{ll} [0, +\infty) \times \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) & \longrightarrow f(t, \omega) \end{array} , \quad (1.1)$$

se tiene que  $\{f(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico. Se dice que  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  (más adelante, **funciones integrables en el sentido Itô**) con  $0 < S < T$ , si y sólo si,  $\{f(t)\}_{t \geq 0}$  cumple las siguientes condiciones:

(i)  $(t, \omega) \longrightarrow f(t, \omega)$  es  $\mathfrak{B}([0, +\infty)) \otimes \mathfrak{F}$ -medible para todo  $t \geq 0$  y todo  $\omega \in \Omega$ .

(ii)  $f(t, \omega)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -adaptado.

(iii)  $\mathbb{E} \left[ \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right] < +\infty$  para todo  $\omega \in \Omega$ .

Se define el conjunto de funciones  $\mathcal{V}$  como  $\mathcal{V} := \cap_{T > 0} \mathcal{V}(0, T)$ .

Definimos ahora las *funciones elementales* como sigue

**Definición 1.51.** ([Øksendal, pág. 26]) Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ ,  $\varphi \in \mathcal{V}(S, T)$  y  $t_0, t_1, \dots$  tal que  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Se dice que  $\varphi$  es una **función elemental**, si y sólo si, se escribe de la forma la forma

$$\varphi(t, \omega) = \sum_{j=0}^n e_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

donde  $e_j$  son funciones  $(t, \omega) \longrightarrow e_j(t, \omega)$  tales que,  $e_j$  es  $\mathfrak{F}_{t_j}$ -medible para todo  $j = 0, 1, 2, \dots$  con

$$\mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1})}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}) \\ 0 & \text{si } t \notin [t_j, t_{j+1}) \end{cases}.$$

Toda función  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  se puede *aproximar* por medio de sucesiones de funciones elementales  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . La definición de *aproximación* está dada por

**Definición 1.52.** ([Øksendal, pág. 27]) Sea  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ . Sean una sucesión de funciones  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sobre  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y una función  $f$  tales que  $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots \in \mathcal{V}(S, T)$  y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] = 0,$$

se dice que  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **se aproxima** a  $f$  sobre el intervalo  $[S, T]$ .

Para definir la *integral de Itô* en el intervalo  $[S, T]$  con  $S, T > 0$  para las funciones  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  se define primero para las *funciones elementales*  $\varphi$  como sigue:

**Definición 1.53.** ([Øksendal, pág. 26]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y  $\varphi$  una función elemental. La **integral de Itô** de la función  $\varphi$  en el intervalo  $[S, T]$  con  $0 < S < T$  se define como

$$\int_S^T \varphi(t, \omega) dB(t, \omega) = \sum_{j=0}^n e_j(\omega) [B(t_{j+1}, \omega) - B(t_j, \omega)], \text{ para todo } \omega \in \Omega$$

Para definir la integral de Itô para toda  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  seguimos los *siguientes pasos* (ver [Øksendal, pág. 26]) que en realidad son proposiciones que demuestran que para toda función  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  existe una sucesión de funciones elementales  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $\varphi_n \in \mathcal{V}(S, T)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

**Paso 1.1.** Sea  $g \in \mathcal{V}(S, T)$  acotada y  $g(\cdot, \omega)$  continua para todo  $\omega \in \Omega$ , entonces existe una sucesión de funciones elementales  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}(S, T)$  tal que para todo  $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (g(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

**Paso 1.2.** Sea  $h \in \mathcal{V}(S, T)$  acotada, entonces existe una sucesión de funciones acotadas  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}(S, T)$  y  $g(\cdot, \omega)$  continua para todo  $\omega \in \Omega$  y todo  $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (h(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

**Paso 1.3.** Sea  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  acotada, entonces existe una sucesión de funciones acotadas  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}(S, T)$  tal que para todo  $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (f(t, \omega) - h_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Con los pasos anteriores ya podemos definir la integral de Itô para toda función en  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  como sigue

**Definición 1.54.** ([Øksendal, pág. 27]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y  $\{f(t)\}_{t \geq 0}$  una función tal que  $f \in \mathcal{V}(S, T)$ . La **integral de Itô** de la función  $f$  en el intervalo  $[S, T]$  con  $0 < S < T$  se define para cada  $\omega \in \Omega$  como

$$\int_S^T f(t, \omega) dB(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB(t, \omega) \text{ en } L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$$

donde  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones simples tal que

$$\mathbb{E} \left[ \int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

La siguiente proposición se demuestra a partir de la definición anterior, prueba se puede consultar en [Øksendal, pág. 30]. La propiedad (iii) en particular se utiliza para demostrar la existencia de procesos estacionarios en la sección 3.4.

**Proposición 1.2.** ([Øksendal, pág. 30]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ ,  $f, g \in \mathcal{V}(S, T)$ ,  $0 \leq S < U < T$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces

- (i)  $\int_S^T f(t, \omega) dB(t, \omega) = \int_S^U f(t, \omega) dB(t, \omega) + \int_U^T f(t, \omega) dB(t, \omega)$  para casi todo  $\omega \in \Omega$ .
- (ii)  $\int_S^T [cf + g](t, \omega) dB(t, \omega) = c \int_S^T f(t, \omega) dB(t, \omega) + \int_S^T g(t, \omega) dB(t, \omega)$  para casi todo  $\omega \in \Omega$ .
- (iii)  $\mathbb{E} \left[ \int_S^T f(t) dB(t) \right] = 0$ .
- (iv)  $\int_S^T f(t) dB(t)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible.

(v) **Isometría de Itô:**

$$\left\langle \int_S^T f(t, \omega) dB(t), \int_S^T f(t, \omega) dB(t) \right\rangle := \mathbb{E} \left[ \left( \int_S^T f(t, \omega) dB(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right].$$

**Notación 1.2.** Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y  $f, g \in \mathcal{V}(S, T)$ . El producto interno (definición 1.47.) de las variables aleatorias  $\int_S^T f(t, \omega) dB(t)$  y  $\int_S^T g(t, \omega) dB(t)$  se nota como:

$$\left\langle \int_S^T f(t, \omega) dB(t), \int_S^T g(t, \omega) dB(t) \right\rangle := \mathbb{E} \left[ \int_S^T f(t, \omega) dB(t) \int_S^T g(t, \omega) dB(t) \right],$$

de manera que por la formula de Itô tendremos que

$$\left\langle \int_S^T f(t, \omega) dB(t), \int_S^T f(t, \omega) dB(t) \right\rangle := \mathbb{E} \left[ \int_S^T f^2(t, \omega) dt \right].$$

Al momento de introducirse las *variables aleatorias reproductivas básicas* (página 57) éstas tendrán una distribución normal cuyos parámetros se determinarán con ayuda de la siguiente proposición:

**Proposición 1.3.** ([Klebaner, pág. 393] y [Papani, pág. 15]) Sean  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  un espacio de probabilidad sobre el cual está definida la filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  y  $f \in \mathcal{V}(0, T)$ . Entonces se tiene que  $\int_0^T f(t) dB(t)$  es una variable aleatoria cuya distribución está dada por:

$$\int_0^T f(t) dB(t) \sim \mathbf{N} \left( 0, \int_0^T f^2(t) dt \right).$$

Utilizando la *integral de Itô* se define lo que se conoce como un *proceso de Itô*. Para dicha definición necesitamos definir la *clase de funciones*  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$ , definición similar a la de las funciones del tipo  $\mathcal{V}(S, T)$ , pero *debilitando* las condiciones (i) y (ii) en dicha definición.

**Definición 1.55.** ([Øksendal, pág. 35]) Sean un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$  tal que  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es una  $\mathcal{H}_t$ -martingala y la clase de las funciones  $v$  definidas por

$$v : \begin{array}{ll} [0, +\infty) \times \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) & \longrightarrow v(t, \omega) \end{array} , \quad (1.2)$$

se tiene que  $\{v(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso estocástico. Se dice que  $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$  con  $0 < S < T$ , si y sólo si,  $\{v(t)\}_{t \geq 0}$  cumple las siguientes condiciones:

(i) ([Øksendal, (i) de la definición 3.1.4, pág. 25])  $(t, \omega) \longrightarrow f(t, \omega)$  es  $\mathfrak{B}([0, +\infty)) \otimes \mathfrak{F}$ -medible.

(ii) ([Øksendal, (ii'), pág. 34])  $v(t, \omega)$  es  $\mathcal{H}_t$ -adaptado.

(iii) ([Øksendal, (iii'), pág. 35])  $P \left( \int_S^T v^2(s, \omega) ds < +\infty \right) = 1$ .

Se define el conjunto de funciones  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$  como  $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} := \cap_{T > 0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, T)$ .

En la siguiente proposición se tiene que  $h \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S, T)$  implica que  $h$  es una *martingala local continua*. Esta es una condición suficiente del lema 3.1, con el cual se prueba la *extinción* en los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico (página 66).

**Teorema 1.4.** (i) ([Øksendal, pág. 53]) Sean  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  la filtración browniana y  $g \in \mathcal{V}(0, T)$ . Entonces existe una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -martingala  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  tal que

$$M_t(\omega) = \int_0^t g(r, \omega) dB(r) \text{ para todo } 0 \leq t \leq T, \text{ casi siempre,}$$

luego  $\int_0^t g(r, \omega) dB(r)$  es una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -martingala.

(ii) ([McLeish, pág. 105] & [Bain, pág. 50]) Sean  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$  tal que  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es una  $\mathcal{H}_t$ -martingala y  $h = \{h(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0, T)$ . Entonces existe una  $\{\mathcal{H}_t\}_t$ -martingala local continua  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  tal que

$$X_t(\omega) = \int_0^t h(r, \omega) dB(r) \text{ para todo } 0 \leq t \leq T, \text{ casi siempre,}$$

luego  $\int_0^t h(r, \omega) dB(r)$  es una  $\{\mathcal{H}_t\}_t$ -martingala local.

Necesitamos definir un proceso de Itô para enunciar la fórmula de Itô. Veamos

**Definición 1.56.** ([Øksendal, pág. 44]) Sea  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$  tal que  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es una  $\mathcal{H}_t$ -martingala. Un **proceso de Itô** o una **integral estocástica** es un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  de la forma

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB(s, \omega),$$

tal que

(i)  $v = \{v(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$  y satisface que

$$P\left(\int_0^t v^2(s, \omega) ds < +\infty, \text{ para todo } t \geq 0\right) = 1;$$

(ii)  $u = \{u(t)\}_{t \geq 0}$  es  $\mathcal{H}_t$ -adaptado y

$$P\left(\int_0^t |u(s, \omega)| ds < +\infty, \text{ para todo } t \geq 0\right) = 1.$$

**Nota 1.2.** ([Øksendal, pág. 44]) La notación integral de un proceso de Itô,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB(s, \omega),$$

se puede escribir en notación diferencial como

$$dX(t, \omega) = u(t, \omega) dt + v(t, \omega) dB(t, \omega).$$

**Definición 1.57.** Para el caso multidimensional consideremos el proceso estocástico  $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \geq 0}$  con  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$  para todo  $t \geq 0$ ,  $\{\mathbf{B}(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano  $m$ -dimensional sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t \geq 0}$  una filtración de  $\mathfrak{F}$  tal que  $\{\mathbf{B}(t)\}_{t \geq 0}$  es una  $\mathcal{H}_t$ -martingala. Sea la notación diferencial de  $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \geq 0}$  dada por

$$\begin{cases} dX_1(t) = u_1(t, \omega) dt + v_{11}(t, \omega) dB_1(t, \omega) + \dots + v_{1m}(t, \omega) dB_m(t, \omega) \\ \vdots \\ dX_n(t) = u_n(t, \omega) dt + v_{n1}(t, \omega) dB_1(t, \omega) + \dots + v_{nm}(t, \omega) dB_m(t, \omega) \end{cases}$$

o en forma matricial simplificada

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{u}(t, \omega) dt + \mathbf{v}(t, \omega) d\mathbf{B}(t),$$

tal que

$$\mathbf{u}(t, \omega) = \begin{pmatrix} u_1(t, \omega) \\ \vdots \\ u_n(t, \omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{11}(t, \omega) & \dots & v_{1m}(t, \omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1}(t, \omega) & \dots & v_{nm}(t, \omega) \end{pmatrix} \text{ y } d\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t, \omega) \\ \vdots \\ dB_m(t, \omega) \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{v}(t) = [v_{ij}(t, \omega)]_{n \times m}$  es una matriz  $n \times m$  con  $v_{ij}(t, \omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$  y

$$P\left(\int_0^t v_{ij}^2(s, \omega) ds < +\infty, \text{ para todo } t \geq 0\right) = 1$$

para todo  $i = 1, \dots, n$  y todo  $j = 1, \dots, m$ ,  $u_i(t, \omega)$  Además  $u_i(t, \omega)$  es un proceso  $\mathcal{H}_t$ -adaptado y  $P\left(\int_0^t |u_i(s, \omega)| ds < +\infty, \text{ para todo } t \geq 0\right) = 1$ . para todo  $i = 1, \dots, n$ . Se dice que  $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \geq 0}$  es un **proceso de Itô  $n$ -dimensional**.

**Ejemplo 1.14.** Los procesos estocásticos para el modelo SIS-estocástico,  $\{S(t), I(t)\}_{t \geq 0}$ , y para el modelo SEIR-estocástico,  $\{S(t), E(t), I(t), R(t)\}_{t \geq 0}$ , son procesos de Itô cuya notación diferencial está en la página 50. ▲

Se puede decir que el siguiente teorema es uno de los más importantes para este trabajo, ya que aparece en las demostraciones de todos los teoremas del capítulo 3. Además gracias a la fórmula de Itô se tiene la integración por partes utilizado para definir las variables aleatorias reproductivas básicas de las ecuaciones 2.21, 2.22, 2.23 y 2.24. El enunciado de este importante teorema corresponde a

**Teorema 1.5 (La fórmula de Itô unidimensional).** ([Øksendal, pág. 44 y 46] y [Marín, pág. 13]) Sea  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso de Itô dado por

$$dX(t) = u(t) dt + v(t) dB(t) \quad (1.3)$$

Sea  $V(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ , esto es  $V$  tiene derivadas parciales continuas y diferenciables en  $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ , entonces el proceso estocástico dado por  $Y(t) = V(t, X(t))$  es un proceso de Itô tal que

$$\begin{aligned} dY(t, \omega) = & \left( \frac{\partial V}{\partial t}(t, X(t)) + u(t, \omega) \frac{\partial V}{\partial x}(t, X(t)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} v^2(t, \omega) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, X(t)) \right) dt + v(t, \omega) \frac{\partial V}{\partial x}(t, X(t)) dB(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

En notación integral la ecuación 1.4. está dada por ([Øksendal, pág. 46]):

$$\begin{aligned} V(t, X(t)) = & V(0, x(0)) + \int_0^t \left( \frac{\partial V}{\partial s}(s, X(s)) + u(s, \omega) \frac{\partial V}{\partial x}(s, X(s)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} v^2(s, \omega) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(s, X(s)) \right) ds + \int_0^t v(s, \omega) \frac{\partial V}{\partial x}(s, X(s)) dB(s) \end{aligned} \quad (1.5)$$

ecuación que utilizaremos para determinar la distribución de las variables reproductivas básicas (página 50).

**Notación 1.3.** En [Marín, pág. 13] se nota  $V_t = \frac{\partial V}{\partial t}$ ,  $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$  y  $V_{x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ , notación alternativa que se usará en este trabajo.

En la fórmula de Itô aparece la expresión que conocemos como el operador diferencial, cuya definición corresponde a:

**Definición 1.58.** Sean  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso de Itô dado por la ecuación 1.4. y la función  $g(t, x) \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R})$ . Se define el **operador diferencial**  $\mathcal{L}$  de  $g$  como

$$\mathcal{L}(g(X(t))) := \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) + u(t) \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{1}{2} v^2(t) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t)). \quad (1.6)$$

El *operador diferencial* cobra importancia al momento de demostrar la estabilidad de los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico en los *teoremas 2.5 y 2.6*.

La *fórmula de Itô multidimensional* se utiliza para demostrar los *teoremas de existencia, persistencia en la media, extinción y existencia de procesos estacionarios* para los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico en el *capítulo 3*.

**Teorema 1.6 (La fórmula de Itô multidimensional).** ([Øksendal, pág. 44] y [Marín, pág. 13]) Sea  $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \geq 0}$  un proceso de Itô  $n$ -dimensional como en la definición 1.56., es decir,

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{u}(t, \omega) dt + \mathbf{v}(t, \omega) d\mathbf{B}(t).$$

Sea una función  $V \in C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  tal que

$$\begin{aligned} V : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ (t, \mathbf{X}(t)) &\rightarrow (V_1(t, \mathbf{X}(t)), \dots, V_p(t, \mathbf{X}(t)))^T \end{aligned}$$

entonces el proceso estocástico dado por  $Y(t) = V(t, \mathbf{X}(t))$  es un proceso de Itô tal que

$$\begin{aligned} dV(t, \mathbf{x}) = & (V_t(t, \mathbf{X}(t)) + \mathbf{u}(t, \omega) V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t)) \\ & + \frac{1}{2} \text{tr} [\mathbf{v}^T(t, \omega) V_{\mathbf{x}^2}(t, \mathbf{X}(t)) \mathbf{v}(t, \omega)]) dt + \mathbf{v}(t, \omega) V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t)) d\mathbf{B}(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde

$$\begin{aligned} V_t(t, \mathbf{X}(t)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial V_p}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad V_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{X}(t)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_p}{\partial x_j} \end{pmatrix} y \\ V_{\mathbf{x}^2}(t, \mathbf{X}(t)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 V_p}{\partial x_j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para enunciar el teorema de *integración por partes*, el cual se utiliza en la página 56, se debe definir la *variación cuadrática de una función sobre un movimiento browniano*, veamos:

**Definición 1.59.** ([Øksendal, ejercicio 2.17]) (i) Sean  $B = \{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y un intervalo  $[0, T]$  con una partición dada por  $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  con  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Sean  $\Delta t_i$ ,  $\|\pi\|$  y  $\Delta f(B(t_i))$ , dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} \Delta t_i &:= |t_i - t_{i-1}| \text{ para todo } i = 1, \dots, n, \\ \|\pi\| &:= \max \{|t_i - t_{i-1}| : i = 1, \dots, n\} \text{ y} \\ \Delta f(B(t_i)) &:= f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1})). \end{aligned}$$

Se define la *variación de f asociada a la partición  $\pi$  con respecto a B sobre  $[0, T]$*  como

$$\sum_{i=1}^n (\Delta f(B(t_i)))^2$$

y se define la **variación cuadrática de  $f$  con respecto a  $B$  sobre  $[0, T]$**  como

$$VC(f) := \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\Delta f(B(t_i)))^2.$$

(ii) Una función  $f(s, \omega)$  se dice que es de **variación cuadrática acotada**, si y sólo si,  $VC(f) < +\infty$ .

**Teorema 1.7 (Integración por partes).** ([Øksendal, pág. 46]) Sean  $f(s, \omega)$  una función continua de variación acotada sobre  $[0, t]$  y  $B = \{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , entonces

$$\int_0^t f(s) dB(s) = f(t) B(t) - \int_0^t B(s) df(s), \text{ casi siempre.}$$

Los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico en realidad son *sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas* cuya definición corresponde a

**Definición 1.60.** ([Capasso, pág. 213]) Sean  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  la filtración browniana y  $a(t, x), b(t, x)$  dos funciones reales  $\mathfrak{B}([t_0, T]) \otimes \mathbb{R}$ -medibles para  $0 < t_0 < T$ . Sean  $u_0$  una variable aleatoria real,  $\mathfrak{F}_{u_0}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $u_0$  con  $\mathfrak{F}_{u_0}$  independiente de  $\mathfrak{F}_t$  para todo  $t \geq t_0$  y  $\mathfrak{F}_{u_0, t}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por la unión de los eventos de  $\mathfrak{F}_{u_0}$  y de  $\mathfrak{F}_t$ , para todo  $t \geq t_0$ . El proceso estocástico  $\{u(t)\}_{t \in [t_0, T]}$  es llamado una **solución** (en caso de existir) de la **ecuación diferencial estocástica (EDE)**

$$\begin{aligned} du(t) &= a(t, u(t)) dt + b(t, u(t)) dB(t), \text{ para } t \in [t_0, T], \\ u(t_0) &= u_0 \text{ casi siempre,} \end{aligned}$$

si y sólo si, para todo  $t \in [t_0, T]$

(i)  $u(t)$  es  $\mathfrak{F}_{u_0, t}$ -medible,

(ii)  $|a(t, u(t))|^{1/2}, b(t, u(t)) \in C^1([t_0, T] \times \mathbb{R})$  y

(iii)  $u(t)$  está dado por  $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, u(s)) ds + \int_{t_0}^t b(s, u(s)) dB(s)$ .

Las funciones  $a$  y  $b$  se llaman los **coeficientes de la EDE**.

Análogamente el proceso estocástico  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t \in [t_0, T]}$  con  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  con  $t \in [t_0, T]$ , es una **solución** (en caso de existir) del **sistema de EDE**

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t)) dt + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t)) d\mathbf{B}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ casi siempre,}$$

donde  $\{\mathbf{B}(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))$  y  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$  son como en la definición de proceso de Itô  $n$ -dimensional; si y sólo si,  $\mathbf{x}(t)$  es  $\mathfrak{F}_{\mathbf{x}_0, t}$ -medible,  $|u_i(t, \mathbf{x}(t))|^{1/2}, v_{ij}(t, \mathbf{x}(t)) \in C^1([t_0, T] \times \mathbb{R})$  para todo  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  y

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^t u_i(s, \mathbf{x}(s)) ds + \sum_{j=1}^m \left( \int_{t_0}^t v_{ij}(s, \mathbf{x}(s)) dB_j(s) \right), \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

De la definición anterior tenemos que si  $|a(t, u(t))|^{1/2}, b(t, u(t)) \in C^1([t_0, T] \times \mathbb{R})$  entonces las integrales dadas por  $\int_{t_0}^t a(s, u(s)) ds$  y  $\int_{t_0}^t b(s, u(s)) dB(s)$  están definidas. Esto para que la solución de la EDE,  $u(t)$ , esté bien definida.



**Ejemplo 1.15.** Las ecuaciones (2.22) y (2.23) son las ecuaciones diferenciales estocásticas para los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico, respectivamente. Éstas EDE están definidas para un movimiento browniano  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Al ser (2.22) y (2.23) dos EDE entonces sus coeficientes son todos  $\mathfrak{B}([0, +\infty)) \otimes \mathbb{R}$ -medibles.

En el teorema 3.1. se demuestra que las soluciones de los sistemas (2.22) y (2.23) existen, siendo éstas los procesos estocásticos  $\{S(t), I(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S(t), E(t), I(t), R(t)\}_{t \geq 0}$ , respectivamente.

En el lema 3.2. se utiliza la hipótesis de que el dominio  $U$  tiene frontera regular. Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Markov de tiempo homogéneo con conjunto de estados  $S$  continuo sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  con valores en  $\mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{F}_t$ -adaptado a una filtración  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  de  $\mathfrak{F}$ . La función de transición de probabilidad en el periodo de tiempo  $t$  desde el estado  $x_0$  hasta el conjunto  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ , está dada por

$$p(0, x_0; t, B) = P(X(t) \in B | X(0) = x_0) = \int_B P(X(t) = x | X(0) = x_0) dx.$$

En [Capasso, pág. 263] se utiliza la siguiente notación para la función  $P(X(t) = x | X(0) = x_0)$ :

$$f(x_0; x, t) := P(X(t) = x | X(0) = x_0),$$

Si  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Markov de tiempo homogéneo con valores en  $\mathbb{R}$ , se define para el intervalo  $[\alpha, \beta]$ :

**Definición 1.61.** ([Capasso, pág. 263]) (i) Un punto de frontera  $\alpha$  es un **accesible** desde  $(\alpha, \beta)$ , si y sólo, si para todo  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  y para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $t > 0$  tal que

$$\int_{\alpha - \varepsilon}^{\alpha + \varepsilon} f(x_0; y, t) dy > 0.$$

(ii) Un punto interior  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  es **accesible** desde el punto de frontera  $\alpha$ , si y sólo, si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un tiempo  $t > 0$  tal que

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(\alpha; y, t) dy > 0.$$

**Definición 1.62.** ([Capasso, pág. 264]) Se dice que  $\alpha$  es un **punto de frontera regular**, si y sólo si,  $\alpha$  es accesible desde  $(\alpha, \beta)$  y para todo  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  se tiene que  $x_0$  es accesible desde el punto frontera  $\alpha$ . Si  $\beta$  es también un punto de frontera regular se dice  $\{\alpha, \beta\}$  es una **frontera regular**.

Si  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  toma valores en  $\mathbb{R}^n$  entonces la función de transición de probabilidad en el periodo de tiempo  $t$  desde el estado  $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n}) \in \mathbb{R}^n$  hasta el conjunto  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , está dada por

$$p(0, x_0; t, B) = P(X(t) \in B | X(0) = x_0) = \int \dots \int_B P(X(t) = (x_1, \dots, x_n) | X(0) = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n})) dx_1 \dots dx_n.$$

Se utiliza la siguiente notación para la función  $P(X(t) = x | X(0) = x_0)$  con  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$f((x_{0_1}, \dots, x_{0_n}); (x_1, \dots, x_n), t) := P(X(t) = (x_1, \dots, x_n) | X(0) = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n})),$$

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Markov de tiempo homogéneo con valores en  $\mathbb{R}^n$ , se define para un conjunto cerrado  $C$  y para  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \partial C$ :

**Definición 1.63.** ([Capasso, pág. 263]) (i) Un punto de frontera  $\alpha$  es un **accesible** desde  $\text{Int}(C)$ , si y sólo si, para todo  $x_0 \in \text{Int}(C)$  y para toda vecindad  $V_\alpha$  de  $x_0$  existe  $t > 0$  tal que

$$\int \dots \int_{V_\alpha} f((x_{0_1}, \dots, x_{0_n}); (y_1, \dots, y_n), t) dy_1 \dots dy_n > 0.$$

(ii) Un punto  $x_0 \in \text{Int}(C)$  es **accesible** desde el punto de frontera  $\alpha$ , si y sólo si, para toda vecindad  $V_{x_0}$  existe un tiempo  $t > 0$  tal que

$$\int \dots \int_{V_{x_0}} f((\alpha_1, \dots, \alpha_n); (y_1, \dots, y_n), t) dy_1 \dots dy_n > 0.$$

**Definición 1.64.** ([Capasso, pág. 264]) Se dice que  $\alpha$  es un **punto de frontera regular**, si y sólo si,  $\alpha$  es accesible desde  $\text{Int}C$  y para todo  $x_0 \in \text{Int}C$  se tiene que  $x_0$  es accesible desde  $\alpha$ . Si para todo  $\beta \in \partial C$ ,  $\beta$  es un punto de frontera regular, se dice que  $\partial C$  es una **frontera regular**.

A *grosso modo* una frontera es regular cuando la probabilidad de que todo estado de  $\text{Int}C$  “alcance” cualquier estado de  $\partial C$  es siempre positiva y la probabilidad de que todo estado de  $\partial C$  “alcance” cualquier estado de  $\text{Int}C$  también es positiva.

La definición de *accesible* y de *frontera regular* no se utilizan en este trabajo salvo para enunciar el lema 3.2. Para aplicar dicho lema en los teorema 3.6 y 3.7 es necesario que el proceso estocástico  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  en los modelos *SIS-estocástico* y *SEIR-estocástico* tenga *frontera regular* para algunos de sus subconjuntos, razón por la cual se enuncian las suposiciones 3.1 y 3.2 (ver páginas 82 y 88).

## Capítulo 2

# Hacia los modelos epidemiológicos estocásticos

En este capítulo se introduce el estudio del *modelamiento matemático epidemiológico*. Primero se comparan los *modelos deterministas* con los *modelos estocásticos*, mostrándose las ventajas de los modelos *estocásticos* sobre los *deterministas*. Luego se presentan los *modelos deterministas* de tipo SIS, SIR, SEIR y SEIS. Se explicará cómo funcionan tales modelos y se definirá *el número reproductivo básico*, que denotará el número de nuevos infectados por un individuo infeccioso cuando la población es completamente susceptible. Para construir matemáticamente el número reproductivo básico se utilizará el *enfoque vía integral* de [Heffernan, Pág. 282-284]. Se hace un estudio detallado de la *estabilidad* de los modelos deterministas de tipo SIR, SIS y SEIR, demostrándose las *condiciones suficientes* para tener *estabilidad asintótica* de la *condición inicial*.

Una vez se tienen generalidades de los *modelos epidemiológicos deterministas* se determinarán algunos *modelos epidemiológicos estocásticos*, los que llamaremos el modelo SIR-estocástico, el modelo SIS-estocástico y el modelo SEIR-estocástico. Estos modelos estudiarán *globalmente* el comportamiento de los diferentes tipos de población (infecciosos, recuperados, susceptibles) utilizando el *movimiento browniano*. Cabe resaltar que hay otras versiones estocásticas de los modelos SIR, SIS y SEIR, sin utilizar *movimiento browniano*, por ejemplo, en [Gordillo]. Con la definición de dichos modelos se estudia la *estabilidad* de los mismos, determinando las condiciones suficientes para la *estabilidad asintótica* de la *condición inicial*.

En la última parte de este capítulo se definirá el *número reproductivo básico* y la *variable reproductiva básica* para los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico. Al calcular la *integral del número reproductivo básico*, para los modelos SIS y SEIR estocásticos, se encuentra que dichos valores son *variables aleatorias* cuya *esperanza* corresponde a los número reproductivos básicos para los modelos deterministas de tipo SIS y SEIR. Esta definición, sin embargo, es poco útil ya que en los capítulos posteriores se presentan condiciones numéricas suficientes para la extinción, la persistencia en la media, la existencia de distribución estacionaria y las simulaciones de los modelos. Es por ello que se exploran condiciones numéricas suficientes para tener la estabilidad asintótica en los modelos SIS y SEIR estocásticos, dadas sus condiciones iniciales. Bajo este enfoque se define el número reproductivo básico para el modelo SIS-estocástico y SEIR-estocástico.

### 2.1. Modelos deterministas versus modelos estocásticos

En la *sección 2.2.* se definirán algunos *modelos epidemiológicos matemáticos* que involucran el uso de *ecuaciones diferenciales ordinarias* siendo dichos modelos *deterministas*. En [Anderson]

se define un *modelo determinista* como aquel modelo donde su *futuro* está completamente determinado por su *presente* y por su *pasado* mientras que un *modelo estocástico* es aquel donde a pesar de que tengamos conocimientos de un estado del sistema (del *presente* y del *pasado*) no podemos *determinar* con *exactitud* cuál es su valor en el *futuro*. En un *modelo estocástico*, sin embargo, es adecuado determinar el *conjunto de eventos futuros* los cuáles pueden ocurrir con mayor *probabilidad* o también determinar el “futuro esperado” (el “futuro promedio”). Veamos los siguientes ejemplos

**Ejemplo 2.1.** ([Anderson, pág. 3] y [Wehrly, pág. 29]) Un modelo determinista de crecimiento bacteriano

Consideremos  $x(t)$  como el número de bacterias en el tiempo  $t$ , la tasa de nacimiento de las bacterias igual a  $1/3$  bacterias/hora y la tasa de muerte igual a  $1/5$  bacterias/hora. Se tiene que la razón del número de bacterias con respecto al tiempo está dado por

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) x(t) \text{ y } x(0) = x_0,$$

la solución de este sistema está determinado por la función  $x(t) = x_0 e^{(\frac{1}{3} - \frac{1}{5})t}$ . Dicha solución nos permite conocer el futuro exacto del crecimiento de dicha bacteria con sólo calcular  $x(t_1)$  para un tiempo futuro  $t_1$ . De esta manera el modelo dado es determinista. ▲

**Ejemplo 2.2.** ([Anderson, pág. 4] y [Wehrly, pág. 30-32]) Un modelo estocástico de crecimiento bacteriano

Siguiendo el ejemplo del modelo anterior, considérese que el crecimiento bacteriano utiliza la hipótesis realista de que el tiempo que tarda cada bacteria en dividirse para formar una nueva bacteria<sup>1</sup> es de aproximadamente 3 horas<sup>2</sup>. Si consideramos las variables aleatorias  $T_1$  como el periodo tiempo en que se divide una bacteria por primera vez,  $T_2$  como el periodo de tiempo entre la primera y la segunda división, etc. ([Rincón, pág. 125]), entonces  $\tau_n = T_1 + \dots + T_n$  es el tiempo que toma a una bacteria dividirse  $n$  veces y  $\lambda(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}$  para  $t \geq 0$  es el número de divisiones que han ocurrido entre el instante 0 y el instante  $t$ . Al saberse que una bacteria tarda en promedio 3 horas para dividirse, se modela  $T_1, \dots, T_n$  como variables aleatorias iid con distribución exponencial de parámetro 3, es decir,  $T_1, \dots, T_n \sim \text{Exp}(3)$ . En la literatura el proceso estocástico  $\{\lambda(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson de parámetro 3 ([Rincón, pág. 125]).

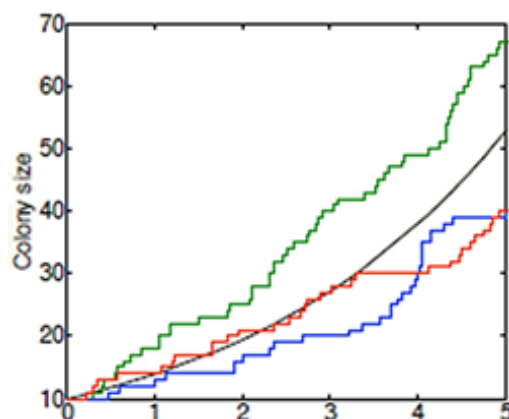
El total de nuevas bacterias en el tiempo  $t$  corresponde al número de divisiones de una bacteria ocurridas en el intervalo  $[0, t]$  (modelado por  $\lambda(t)$ ) multiplicado por el número de bacterias en el tiempo  $t$  (determinado por  $x(t)$ ), es decir,  $\lambda(t)x(t)$ . De manera análoga, si una bacteria fallece cada 5 horas, entonces  $Q_n$  es el periodo de tiempo en que muere la  $n-1$  bacteria y la  $n$  bacteria,  $\pi_n = Q_1 + \dots + Q_n$  es el tiempo en el que  $n$  bacterias mueren y  $\mu(t) := \max\{n : \pi_n \leq t\}$  es el número de bacterias muertas en el periodo de 0 a  $t$ . Análogamente que para las divisiones,  $Q_1, \dots, Q_n \sim \text{Exp}(5)$  y nuevamente  $\{\lambda(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson de parámetro 5 y  $\mu(t)x(t)$  es el número de bacterias fallecidas de un total de  $x(t)$  bacterias. Así

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\lambda(t) - \mu(t)) x(t) \text{ y } x(0) = x_0,$$

<sup>1</sup>Se suponen que las bacterias se reproducen por *mitosis*.

<sup>2</sup>Por *aproximadamente* en este ejemplo se entiende que la bacteria no se divide *exáctamente* en 3 horas, sino que se divide en promedio cada 3 horas.

es el modelo estocástico para determinar el crecimiento bacteriano. En [Anderson, pág. 5] se muestra la siguiente figura de la solución del sistema determinista presentado en el ejemplo anterior (en negro) frente a tres realizaciones diferentes del modelo estocástico presentado en este ejemplo (verde, rojo y azul).



(2.a)

De acuerdo con el gráfico en el modelo estocástico tenemos varias realizaciones, es decir, no conocemos la realización para el futuro, en contraste con el modelo determinista. ▲

En el ejemplo anterior se observa que tanto el *modelo determinista* como el *estocástico* modelan una misma situación, es más *realista* considerar un *modelo estocástico*, ya que este modelo no considera un *único pronóstico* (para el futuro), sino que considera un conjunto de *posibles pronósticos*. El *enfoque* para los modelos estocásticos es determinar los *pronósticos más probables*.

Otra consideración importante para tomar un modelo estocástico es considerar las posibles discrepancias<sup>3</sup> de los datos. De acuerdo con [Gelman, pág. 188] “los datos a menudo se ajustan de manera determinista; es decir, los resultados observados se modelan como exactamente predecibles a partir de un pequeño conjunto de parámetros. Sin embargo, su *estado conceptual*<sup>4</sup> es poco claro, dadas las inevitables *discrepancias* entre el modelo y los datos. Además, el *exceso de ajuste*<sup>5</sup> puede hacer que las tasas de error sean subestimadas”, por lo cual es necesario presentar un modelo que plantee las *posibles discrepancias* en sus hipótesis. En el ejemplo anterior tales discrepancias están dadas por el tiempo que requiere la bacteria para llegar a dividirse, aspecto que no se considera en el modelo determinista.

## 2.2. Algunos modelos epidemiológicos deterministas

En 1927 Kermack y McKendrick presentan el primer *modelo epidemiológico matemático* que involucra el uso de *ecuaciones diferenciales ordinarias* en la publicación [Kermack] el cual se conocerá como el *modelo SIR*. Las hipótesis bajo las cuáles se utiliza este modelo está en considerar que la población se divide en tres categorías: los individuos **susceptibles**, los individuos **infectados** que también son **infecciosos** (al estar en contacto con un susceptible pueden

<sup>3</sup>Las *posibles discrepancias* se refieren a no contemplar errores en la toma de los datos, también a las perturbaciones biológicas o climáticas que afectan el valor de los mismos, etc.

<sup>4</sup>Por *estado conceptual* se entenderá como el análisis de los resultados que se obtienen utilizando el modelo propuesto. En éstos análisis no se tienen en cuenta las discrepancias entre el modelo y los datos.

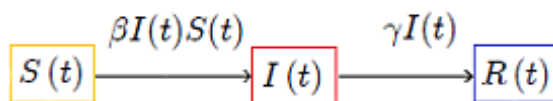
<sup>5</sup>Al *modelarse matemáticamente* una enfermedad, una dinámica poblacional, etc. se *ajustan* los datos a un modelo y partir de éste ajuste se sacan conclusiones. Hay un *exceso de ajuste* cuando las *hipótesis del modelo* no consideran algunos aspectos relevantes, por ejemplo, biológicos.

propagar la enfermedad) y los individuos **removibles**, siendo las tres categorías *mutuamente excluyentes*<sup>6</sup> entre sí sobre una población que es considerada *cerrada*, es decir, la población total,  $N$ , bajo éste modelo *permanece constante*, esto es,

$$I(t) + S(t) + R(t) = N, \text{ para todo } t \geq 0, \quad (2.1)$$

donde  $S(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  denotan el número de *individuos susceptibles*, *infectados* y *removibles* en el tiempo  $t$ . Los **individuos susceptibles** son aquellos que están propensos a contagiarse de una enfermedad al tener *contacto infeccioso* con los **individuos infectados**, quienes no sólo contagian la enfermedad sino que también presentan *sintomatología* y afectar su *calidad de vida* a causa de la misma. Los **individuos removibles** son aquellos que dejan de ser infectados, es decir; aquellos individuos que fallecen a causa de la enfermedad, que son aislados por sus síntomas o que desarrollan inmunidad frente a la enfermedad (ya sea por *tratamiento médico* o por *inmunidad* desarrollada por el mismo paciente) ([Galindo, pág. 239]).

Otra hipótesis del modelo está en considerar el siguiente *flujo en la población*: un individuo es susceptible hasta que está en contacto con un *individuo infeccioso* quien lo contagia de la enfermedad, una vez pasa esto, el individuo quien era *susceptible* pasa a ser un *individuo infectado*. Luego un *individuo infectado* recibiendo o no tratamiento médico pasa a ser un *individuo removible*. Una población que cumpla este *flujo* bajo determinada enfermedad es una **población del tipo SIR**. Gráficamente tendremos que el *diagrama de flujo* de la enfermedad está dado por



donde  $\beta$  y  $1/\gamma$  son respectivamente la **tasa de infectividad** y el **tiempo de remoción**. La *tasa de infectividad* se expresa en términos de *número de personas/unidad de tiempo*, por ejemplo, si en el año 2003 hubo 15 personas infectadas entonces la tasa de infectividad será de 15 *personas/año* o de 1,25 *personas/mes* o de 0,041666 *personas/día*. Si tenemos en el tiempo  $t$ ,  $S(t)$  personas susceptibles e  $I(t)$  personas infectadas entonces tendremos  $\beta I(t)S(t)$  nuevos infectados (por los  $I(t)$  infectados de un total de  $S(t)$  susceptibles) por unidad de tiempo, por consiguiente, el cambio de susceptibles por unidad de tiempo ( $dS(t)/dt$ ) corresponde a  $-\beta I(t)S(t)$  y el cambio de infectados por unidad de tiempo ( $dI(t)/dt$ ) corresponde a los nuevos infectados  $\beta I(t)S(t)$  menos los individuos recuperados de los  $I(t)$  infectados por unidad de tiempo.

Por otra parte, al ser  $1/\gamma$  un tiempo entonces tendremos que  $\gamma$  es en realidad una *tasa*, por ejemplo, si suponemos que en promedio una persona tarda 25 días en recuperarse de la varicela entonces  $1/\gamma = 25$  *días por persona* ( $=$  *días/persona*) y por consiguiente  $\gamma = 0,04$  *personas/día*. Al tener  $I(t)$  personas infectadas entonces tendremos que  $\gamma I(t)$  serán los nuevos *removibles* por unidad de tiempo, por consiguiente  $dI(t)/dt = \beta I(t)S(t) - \gamma I(t)$  y el cambio de los *removibles* por unidad de tiempo ( $dR(t)/dt$ ) corresponde a  $\gamma I(t)$ .

De esta manera tenemos que un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)* adecuado

<sup>6</sup>Por *mutuamente excluyentes* se entiende que los individuos sólo forman parte de un grupo de población, es decir, si son infecciosos no pueden ni estar recuperados ni ser susceptibles nuevamente a la enfermedad.

para modelar una población del tipo SIR bajo una enfermedad está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta I(t)S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) \ , \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

presentado por Kermack y McKendrick originalmente, siendo este el **modelo SIR** ([Galindo, pág. 240]).

Sin embargo, el *modelo SIR* tiene una *limitante*: no diferencia a los *individuos recuperados* de los individuos que *fallecidos* a causa de la enfermedad. Es por ello que se considera el **modelo SIR con demografía**, donde  $R(t)$  denotará el número de *individuos recuperados*<sup>7</sup> en el tiempo  $t$ , es decir, aquellos pacientes que desarrollaron *inmunidad* frente a la enfermedad ya sea por *tratamiento médico* o por acción del *sistema inmunológico* del paciente. De esta manera, en este modelo los *removibles* son considerados en dos categorías: los *recuperados* y los *individuos removidos*<sup>8</sup> los cuáles son aquellos que no se pueden enfermar más por causas distintas a la *recuperación de la enfermedad*, ya sea por *fallecimiento* (a causa de la enfermedad o por otras causas), por *emigración*, etc ([Bastin, pág. 11]).

En el modelo *SIR con demografía*,  $B$  representa la **tasa de influencia**, es decir, el *número promedio de nuevos susceptibles por unidad de tiempo (inmigración de susceptibles)* ([Liu, pág. 155–156]). Por ejemplo, si nacen en 2008, 35 bebés y llegan a la zona de la epidemia 40 personas en el mismo año suponiéndose además que no se tiene más *ingreso de población*, entonces  $B = 75$  *personas/año* ([Liu, pág. 155–156] y [Broek, pág. 453]). Como  $B$  es una constante por un ser *promedio*, entonces podemos reescribir  $B = \eta N$ , donde  $N$  es el *número inicial de susceptibles* y  $\eta$  es una *constante por unidad de tiempo* llamada la **tasa de inmigración** ([Bastin, pág. 11]). Cabe resaltar que en el modelo *SIR con demografía*  $1/\gamma$  ya no es el *tiempo de remoción*, sino el *tiempo de recuperación*.

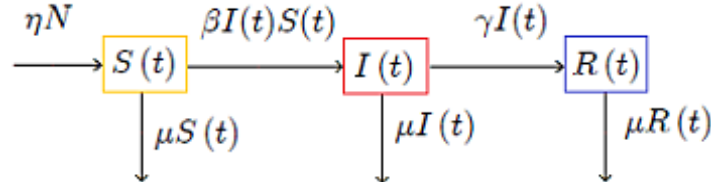
Se considera además que  $\mu$  es la **tasa de emigración** ([Bastin, pág. 11]) en la cual considera únicamente los *individuos removidos*. Por ejemplo, si fallecen en 2003, 30 individuos entonces  $\mu = 30$  *personas/año*, siendo esta tasa de todas las causas de mortalidad (accidentes de tránsito, a causa de la epidemia y de otras enfermedades, etc.) como también de *emigración*. En la literatura ([Bastin], [Lloyd]) se le conoce a este modelo también como el **modelo SIR con nacimientos y muertes**, aclarándose que por *nacimientos* se refiere a la *inmigración* y por *muertes* a la *emigración*. Del mismo modo la *tasa de nacimientos* es la misma *tasa de inmigración* y la *tasa de defunciones* es la *tasa de emigración* ([Bastin, pág. 11], [Lloyd, pág. 29]). El sistema de EDO del *modelo SIR con nacimientos y muertes* corresponde a

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \eta N - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \ , \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

siendo su *diagrama de flujo* dado por

<sup>7</sup>En el modelo propuesto por Kermack y McKendrick  $R(t)$  son los *individuos removibles*, mientras que en el *modelo SIR con demografía*  $R(t)$  denota únicamente a los *individuos recuperados* de la enfermedad.

<sup>8</sup>No confundir con *removibles*. *Removibles* incluyen a *recuperados*, mientras que *removidos* no.



Si queremos que en este modelo se cumpla la condición de la *ecuación (2.1)* se hace necesario que la *tasa de nacimientos* sea igual a la *tasa de defunciones*, es decir,  $\eta = \mu$ . En caso contrario tendremos que la población total por cada tiempo  $t$ ,  $N(t)$ , es una *función no constante*, por lo que escribimos:

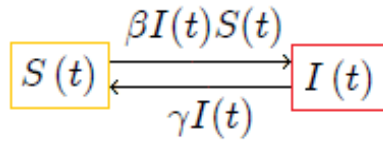
$$I(t) + S(t) + R(t) = N(t), \text{ para todo } t \geq 0, \quad (2.4)$$

Hasta el momento sólo hemos considerado enfermedades con *población del tipo SIR*, sin embargo, algunas enfermedades de transmisión sexual como la sífilis<sup>9</sup> no tienen una población del tipo SIR. En estas enfermedades se tiene que una persona al contagiarse de la enfermedad (por contacto directo con otro infeccioso) pasa a ser un individuo infectado, una vez éste individuo recibe tratamiento y se “cura”, no desarrolla inmunidad (por al menos algún tiempo) frente a la misma, es decir, el individuo vuelve a ser un susceptible. Una población que frente a una epidemia tenga el comportamiento anteriormente descrito es una ***población del tipo SIS***.

Un modelo matemático para las poblaciones del tipo SIS es el ***modelo SIS*** ([Hethcote, pág. 180]), el cual es similar al modelo SIR, salvo porque los individuos *removibles* (individuos que no transmiten la enfermedad),  $\gamma I(t)$ , pasan al grupo de susceptibles. Cabe aclarar que en este modelo no se consideran las *muertes* debido a la enfermedad, ya que un *individuo fallecido* no puede ser *susceptible*. El siguiente sistema de EDO es el modelo SIS

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta I(t)S(t) + \gamma I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) \end{aligned}, \quad (2.5)$$

el diagrama de flujo para este modelo está dado por



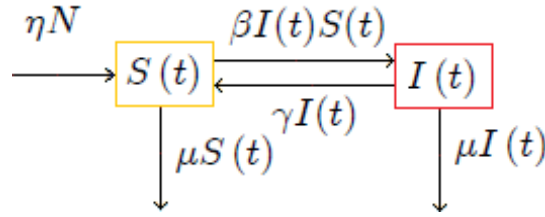
bajo la hipótesis de *inmigración y emigración* (incluidas las muertes provocadas por la enfermedad), tendremos el correspondiente ***modelo SIS con nacimientos y muertes*** cuyas EDO corresponden a

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \eta N + \gamma I(t) - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \end{aligned}, \quad (2.6)$$

cuyo *diagrama de flujo* corresponde a

<sup>9</sup>Según [OMS] un paciente puede llegar a la *etapa tardía* de la sífilis después de mínimo 5 años, por lo que el *tiempo de fallecimiento* a causa de la enfermedad es *bastante prolongado*, por esta razón usualmente se desprecia la *tasa de muertes* debido a esta enfermedad en el modelamiento matemático.





Hasta el momento los modelos epidemiológicos tomados no consideran un grupo particular de población: los **individuos expuestos**; los cuales son aquellos que son *contagiados* del virus o de la bacteria al tener *contacto infeccioso* con un *individuo infectado*, pero no pueden *contagiar* (transmitir el virus o la bacteria) a algún otro *individuo susceptible*. Es de aclarar que los *individuos expuestos* sí pueden tener *síntomas* de la enfermedad a diferencia de los **individuos latentes** ([Cabrera]) los cuáles no presentan *síntomas*. Esto quiere decir que toda *persona latente* es también *expuesta*. Por ejemplo, cuando una persona contagiada con el virus del VIH tiene *carga viral*<sup>10</sup> *significativamente baja*, ésta persona no puede transmitir el virus a una *persona susceptible*, por lo tanto la persona con VIH es *latente* si no presenta *síntomas* o es *expuesta* si *presenta* o no *síntomas*. Una vez aumenta su carga viral pasa a ser un *individuo infectado* si puede transmitir el virus a otra *persona susceptible*. Si se tuviera una cura para el SIDA, el *infectado* pasaría a ser *recuperado* una vez este paciente haya adquirido *inmunidad* (por lo menos temporal) frente a la enfermedad.

La población descrita en el párrafo anterior es una **población del tipo SEIR** y el modelo matemático utilizado para tales enfermedades es un **modelo SEIR** ([Korobe, pág. 78-79]), donde se tiene un **tiempo promedio de incubación**  $1/v$  el cual es el tiempo donde el virus, la bacteria o el parásito (*agente infeccioso*) tarda en convertir a un paciente *expuesto* en un *paciente infectado* (tomando como inicio el momento en el cual el paciente adquirió el *agente infeccioso*). En el ejemplo del SIDA, el tiempo en el cual un *paciente* pasa de tener 0 células CD4 a tener 350 células CD4 es el *tiempo de incubación* del VIH, puesto que con más de 350 células CD4 (en fluidos como sangre, semen) el paciente puede transmitir el virus a una *persona susceptible*, es decir, el paciente es *infectado*<sup>11</sup>. Si su carga es de 0 hasta 350 células CD4 entonces el paciente es *expuesto* ya que no transmite el virus a ningún *susceptible*. Cabe aclarar que en el *tiempo de incubación* el *individuo expuesto* no puede transmitir la enfermedad.

Si por ejemplo en promedio se tiene que una persona se pasa de ser expuesto a infectado en 3 días desde que adquiere un virus dado, es decir,  $1/v = 3 \text{ días/persona}$  entonces  $v = 0,33333 \text{ personas/día}$  siendo esta una tasa conocida como la **tasa de incubación**. El número de expuestos en el tiempo  $t$  se escribe como  $E(t)$ .

Ahora,  $vE(t)$  denota el número de personas expuestas por unidad de tiempo que pueden transmitir el virus, puesto que ha pasado el tiempo  $1/v$  suficiente para la incubación del *agente infeccioso*. En otras palabras,  $vE(t)$  es el total de *expuestos* que pasan a ser *infectados*. Por otra parte,  $\beta I(t)S(t)$  es total de  $S(t)$  susceptibles que adquieren el agente infeccioso al tener contacto con  $I(t)$  infectados. Como se necesita un tiempo de  $1/v$  para que estas nuevas personas con el *agente infeccioso* lleguen a poder *infectar* a algún *susceptible*<sup>12</sup>, entonces  $\beta I(t)S(t)$  es el total de *nuevos expuestos*. Razonando de manera análoga al *modelo SIR* se tiene el *sistema*

<sup>10</sup> “Carga viral es la cuantificación de la infección producida por un virus” “La carga viral es el término empleado para referirse a la cantidad de VIH en la sangre”. Tomado de: [www.aidsmap.com/Carga-viral/page/2296568/](http://www.aidsmap.com/Carga-viral/page/2296568/)

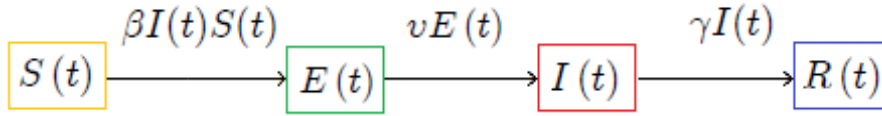
<sup>11</sup> Información tomada de <http://www.aidsmap.com/Carga-viral/page/2296568/>

<sup>12</sup> El tiempo  $1/v$  no ha pasado ya que el *primer contacto* entre pacientes *susceptibles* y pacientes *infectados* es el tiempo cero.

EDO para el *modelo SEIR* dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta I(t)S(t) \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \nu E(t) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= \nu E(t) - \gamma I(t) \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t)
 \end{aligned}
 \quad , \tag{2.7}$$

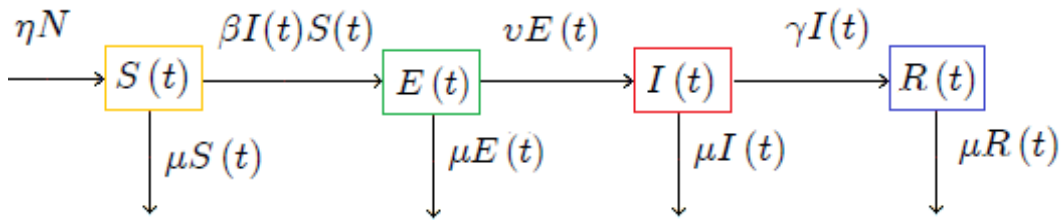
el diagrama de flujo para este modelo está dado por



bajo la hipótesis de que se tienen *inmigración* y *emigración* (incluidas las muertes a causa de la enfermedad), tendremos el correspondiente **modelo SEIR con nacimientos y muertes** cuyas EDO corresponden a

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= \eta N - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \nu E(t) - \mu E(t) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= \nu E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t)
 \end{aligned}
 \quad , \tag{2.8}$$

donde tenemos que el diagrama de flujo está dado por



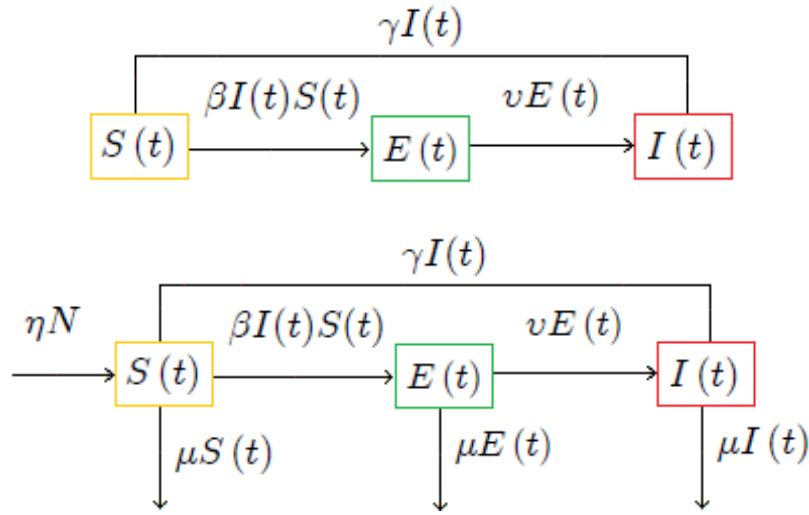
La **población del tipo SEIS** es análoga a las poblaciones del *tipo SEIR*, sin embargo, como ocurre con las poblaciones del *tipo SIS*, en éstas poblaciones los individuos infectados no desarrollan *inmunidad* (por lo menos temporal) frente a la enfermedad, sino que una vez reciben tratamiento médico y se “curan” pasan a ser *individuos* nuevamente *susceptibles*. El *sistema de EDO* que representa dicho modelo corresponde a

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta I(t)S(t) + \gamma I(t) \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - \nu E(t) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= \nu E(t) - \gamma I(t)
 \end{aligned}
 \quad , \tag{2.9}$$

siendo este el **modelo SEIS** ([Cao, pág. 5]). El **modelo SEIS con nacimientos y muertes** está dado por

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \eta N + \gamma I(t) - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \beta I(t)S(t) - v E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= v E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t)\end{aligned}\quad , \quad (2.10)$$

los diagramas de flujo de los *modelos SEIS* y *SEIS con nacimientos y muertes* son los siguientes, respectivamente



Existen más modelos matemáticos los cuales involucran el uso de EDO. Tales modelos son el *modelo MSIR*, el *modelo MSEIR* y el *modelo MSIS* ([Shulgin, pág. 1128]), donde consideran el grupo  $M$  que corresponde a la *población con inmunidad pasiva* que son aquellos individuos que nacen con inmunidad frente a la enfermedad pero que pierden esta inmunidad en determinada etapa de su vida. Por ejemplo, los bebés recién nacidos y durante sus primeros meses de vida no son propensos a infectarse con *difteria*, sin embargo, esta inmunidad se puede perder después de los dos años de vida si la persona no está *vacunada* ([Salleras, pág. 693]).

Todos los modelos estudiados en la presente sección modelan únicamente la *dinámica de la población*, sin embargo, enfermedades como la *malaria*, el *dengue*, el *zika*, entre otras, son transmitidas a través de la picadura de un animal (en este caso mosquito) el cual tiene el agente contagioso (virus, bacteria o parásito) llamado *vector*, que provoca la enfermedad. Para modelar tales epidemias es insuficiente considerar los modelos hasta el momento estudiados, por lo que se deben considerar los *modelos epidemiológicos en enfermedades transmitidas por vectores* (nombre dado en [Basáñez]).

En la *sección 2.1* se estudiaron las diferencias entre los *modelos deterministas* y los *modelos estocásticos*. Además se estudió la motivación para hacer *modelación estocástica*, por ejemplo, para determinar número de individuos de una población. En esta sección (y como su título lo indica) los *modelos epidemiológicos* descritos son *deterministas* como se explicará en el siguiente ejemplo:

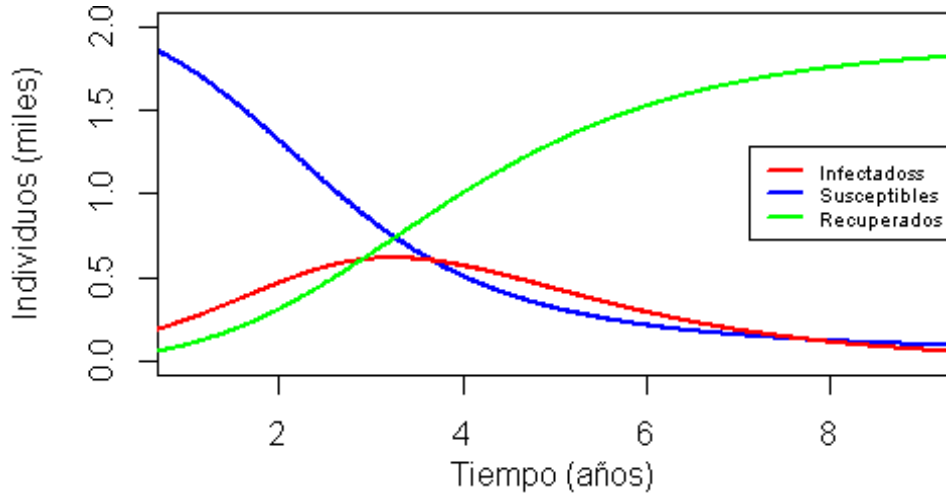
**Ejemplo 2.3.** *Los modelos epidemiológicos estocásticos de esta sección son deterministas:*

*En el caso específico del modelo SIS con nacimientos y muertes tenemos que la población infectada está determinada por la siguiente función* (referencia [Gray, pág. 2]).

$$I(t) = \begin{cases} \left[ \frac{\beta}{\beta N - \mu - \gamma} \left( 1 - l(t) + \frac{l(t)}{I(0)} \right) \right]^{-1} & , \text{ si } \frac{\eta \beta N}{\mu(\mu + \gamma)} \neq 1 \\ \left[ \beta t + \frac{1}{I(0)} \right]^{-1} & , \text{ si } \frac{\eta \beta N}{\mu(\mu + \gamma)} = 1 \end{cases}$$

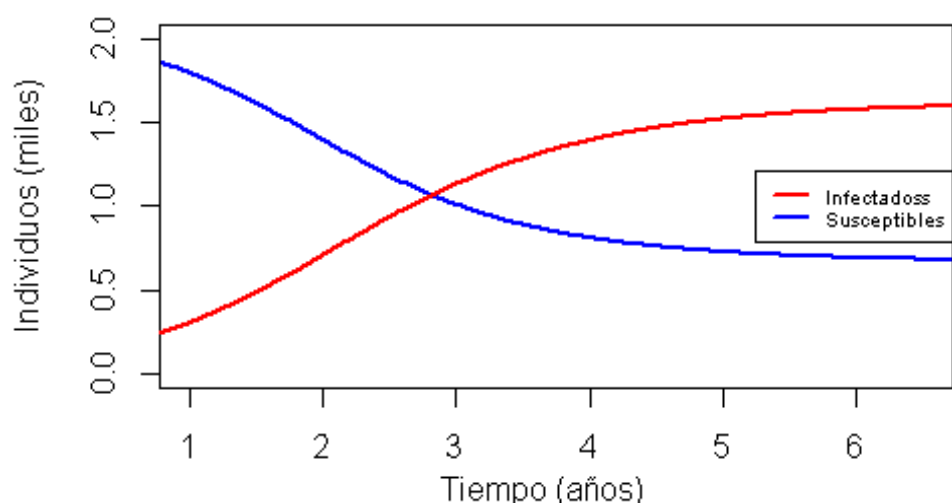
donde  $l(t) = \exp \{ -(\beta N - \mu - \gamma)t \}$ . De esta manera si se quiere conocer el número de infectados en el tiempo  $t_1$  basta calcular  $I(t_1)$ , de manera que el futuro en el modelo está completamente determinado por la anterior ecuación. De hecho todos los modelos epidemiológicos de la sección 2.2 tienen soluciones determinísticas a pesar de que éstas no siempre se puedan escribir explícitamente como se hizo con el modelo SIS. En tales casos se utilizan métodos numéricos de EDO para determinar el comportamiento de las respectivas soluciones, trabajo realizado para las gráficas 2.b, 2.c y 2.d utilizando el método de Newton.

Al representar gráficamente el número de individuos susceptibles, infectados y recuperados en el modelo SIR con nacimientos y muertes se obtiene la figura 2.b. Los parámetros (tasas) tomados son  $\eta = 0$ ,  $\beta = 0,8$ ,  $\mu = 0$  y  $\gamma = 0,6$ , y las condiciones iniciales son  $S(0) = 2$ ,  $I(0) = 0,1$  y  $R(0) = 0$ . Se observa que la población susceptible es decreciente, mientras que la población infectada crece hasta tener un máximo de infectados y luego decrece hasta tender a cero. La población recuperada es siempre creciente.



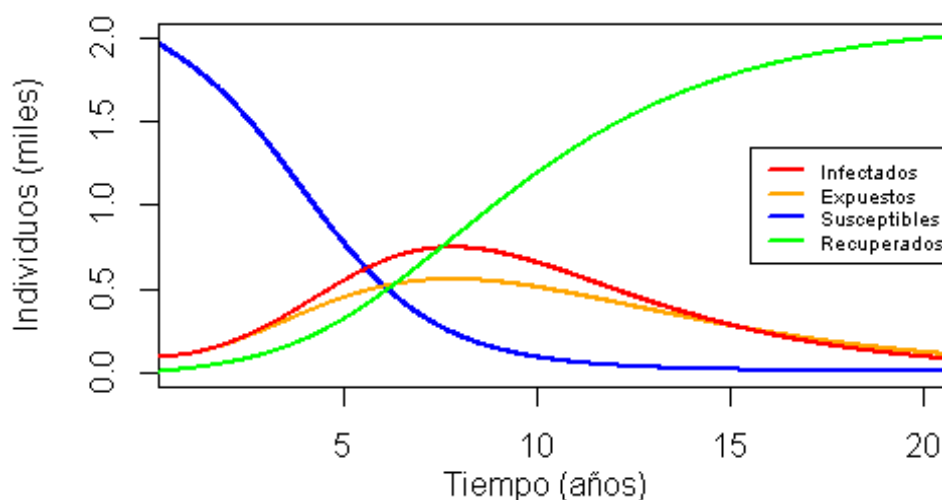
(2.b)

En la figura 2.c. se muestra la gráfica del número de susceptibles e infectados en el modelo SIS con nacimientos y muertes con parámetros  $\eta = 0$ ,  $\beta = 0,8$ ,  $\mu = 0$  y  $\gamma = 0,6$ , y con condiciones iniciales son  $S(0) = 2$  e  $I(0) = 0,1$ . De acuerdo con el gráfico se observa que la población susceptible es decreciente mientras que la población infectada es creciente, incluso a partir de cierto tiempo es mayor el número de infectados que de susceptibles.



(2.c)

En la figura 2.d. se muestra la gráfica del número de susceptibles, expuestos, infectados y recuperados en el modelo SEIR con nacimientos y muertes con parámetros  $\eta = 0$ ,  $\beta = 0,8$ ,  $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0,25$  y  $v = 0,6$ , y con condiciones iniciales son  $S(0) = 2$ ,  $E(0) = 0,3$ ,  $I(0) = 0,1$  y  $R(0) = 0$ . De acuerdo con el gráfico se observa que la población susceptible es siempre decreciente, la población expuesta es creciente hasta tener una población máxima y luego es decreciente al igual que la población infectada, sin embargo, bajo los parámetros del modelo la población infectada es mayor que la expuesta durante los primeros 15 años de la epidemia. La población recuperada es siempre creciente.



(2.d)

De acuerdo con las gráficas presentadas en este ejemplo, los modelos SIS, SIR y SEIR con nacimientos y muertes son deterministas puesto que sólo presentan una línea por cada población (susceptibles, expuestos, infectados o recuperados), es decir, basta conocer los parámetros de los modelos para conocer el futuro de los mismos. ▲

En los gráficas de los modelos SIS, SIR y SEIR con nacimientos y muertes se observa que en cada uno las funciones  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  son continuas y no se anulan a menos que  $t \rightarrow +\infty$ . Más adelante, para utilizar la proposición 3.1 en la demostración de la existencia de las soluciones de los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico es necesario que dichas

funciones sean *Lipschitz localmente continuas* (definición A.8), razón por la cual se hace la siguiente *suposición*:

**Suposición 2.1.** *En los modelos SIS, SIR y SEIR con nacimientos y muertes las funciones  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  son Lipschitz localmente continuas. Además  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t) \neq 0$  para todo  $t \geq 0$ .*

## 2.3. Estabilidad y número reproductivo básico

En esta sección se define y se calcula el *número reproductivo básico* para los modelos *SEIR* y *SIS* con nacimientos y muertes. Luego se estudia las condiciones suficiente para tener la *estabilidad asintótica* dadas las *condiciones iniciales* y finalmente se explica la relación entre *número reproductivo básico* y *estabilidad asintótica* de las *condiciones iniciales* en un *modelo epidemiológico determinista*.

### 2.3.1. El número reproductivo básico

Para todo *modelo epidemiológico matemático* definimos el *número reproductivo básico* como el *número promedio de infecciones secundarias* que ocurre cuando un *individuo infectado* es introducido en una *población completamente susceptible* (referencia [Pereda, pág. 13-14]). Para calcular el *número reproductivo básico*, en un *modelo determinista*, vamos a utilizar el *método de la integral*. Existe otro enfoque para dicho cálculo el cual es utilizando el conocido método de la “*matriz de la siguiente generación*” (en inglés *next generation method*) explicado detenidamente en [Heffernan, Pág. 283-284]. Definimos el *número reproductivo básico* como

**Definición 2.1.** *El número reproductivo básico de un modelo matemático epidemiológico, notado como  $R_0$ , está dado por*

$$R_0 := \int_0^{+\infty} b(a) F(a) da, \quad (2.11)$$

donde  $b(a)$  es el *número promedio de nuevos individuos infectados* (de una *población completamente susceptible*) por un *individuo infectado* si éste *permanece infeccioso* durante un tiempo  $a$  y  $F(a)$  es la *probabilidad de que un nuevo infectado continúe infectando* durante el tiempo  $a$ .

**Ejemplo 2.4.** ([Pereda, pág. 16-17]) *El número reproductivo básico los modelos SIR y SIS con nacimientos y muertes:*

Para el *modelo SIR* con nacimientos y muertes consideremos la función como  $P(a) :=$  “*número de infectados que permanecen infectados desde el tiempo 0 hasta el tiempo  $a$* ”. Tenemos que el *número de individuos que dejan de ser infectados* corresponde únicamente a aquellos individuos que durante el *intervalo de tiempo  $[0, a]$*  pasaron de *ser infectados a ser recuperados o a ser fallecidos*, por consiguiente

$$\frac{dP(a)}{da} = -(\mu + \gamma) P(a),$$

ésta EDO tiene su solución dada por

$$P(a) = P(0) e^{-(\mu+\gamma)a},$$

donde  $P(0)$  representa el *número de infectados iniciales*, es decir, aquellos infectados que entran a una *población completamente susceptible*. Nótese que  $P(a)$  es igual a  $P(0)$  multiplicado por la *probabilidad de que un individuo permanezca infectado desde el instante inicial hasta el tiempo  $a$* . Así se tiene que  $e^{-(\mu+\gamma)a}$  corresponde a esta última probabilidad, es decir,

$$F(a) = e^{-(\mu+\gamma)a}.$$

Por otra parte, si un individuo infeccioso,  $I(0) = 1$ , ingresa a una población completamente susceptible,  $S(0) = N$ , entonces tendremos  $\beta N$  nuevos infectados por unidad de tiempo, es decir, sin importar cuanto tiempo a pase esperamos siempre tener  $\beta N$  nuevos infectados. De esta manera

$$b(a) = \beta N,$$

siempre y cuando  $\eta = \mu$ , por consiguiente el número reproductivo básico para el modelo SIR está dado por:

$$R_0^{SIR} := \int_0^{+\infty} \beta N e^{-(\mu+\gamma)a} da = \frac{\beta N}{(\mu + \gamma)}. \quad (2.12)$$

De manera análoga tenemos para el modelo SIS que  $F(a) = e^{-(\mu+\gamma)a}$  y  $b(a) = \beta N$ , luego su número reproductivo básico,  $R_0^{SIS}$ , es el mismo que el del modelo SIR.

Si la tasa de mortalidad es distinta a la tasa de natalidad,  $\frac{\eta}{\mu}$  representa el número de nuevos individuos susceptibles sobre el número de fallecidos, es decir, la fracción de población sobreviviente. De esta forma,  $\frac{\eta}{\mu}N$  será la población sobreviviente en un tiempo  $t > 0$ , en ausencia de infectados (en el mismo tiempo), dada una población inicial completamente susceptible,  $N$  ( $S(0) = N$ ) (corolario 3.1.). Así  $b(a) = \frac{\eta}{\mu}\beta N$  y los correspondientes números reproductivos básicos, para los modelos SIR y SIS con nacimientos y muertes, corresponden respectivamente a:

$$R_0^{SIS} = R_0^{SIR} = \frac{\eta\beta N}{\mu(\mu + \gamma)}.$$

▲

**Ejemplo 2.5.** El número reproductivo básico los modelos SEIR y SEIS con nacimientos y muertes:

Para el modelo SEIR con nacimientos y muertes definimos la función  $P(a) =$  “número de expuestos que pasan a ser infectados y permanecen infectados desde el tiempo 0 hasta el tiempo  $a$ ”. Notemos primero que el número de individuos por unidad de tiempo que dejan de ser expuestos en el intervalo  $[0, a]$  son aquellos que fallecieron o que superaron el tiempo de incubación de la enfermedad y ahora son infecciosos, es decir,  $(\mu + \nu)P(a)$ . De este grupo de individuos tenemos que aquellos que se recuperan o fallecen son los individuos que no permanecerán infectados durante el intervalo de tiempo  $[0, a]$ , es decir,  $(\mu + \nu)(\mu + \gamma)P(a)$  individuos por unidad de tiempo. El resto de individuos o bien continúan siendo expuestos o bien son ya individuos infectados que permanecen infectados en  $[0, a]$ , de manera que

$$\frac{dP(a)}{da} = -(\mu + \nu)(\mu + \gamma)P(a) \therefore P(a) = P(0)e^{-(\mu+\nu)(\mu+\gamma)a},$$

dado que inicialmente necesitamos que por lo menos un individuo esté infectado (o uno expuesto que se vuelva infectado) para tener epidemia en la población, entonces  $P(0)$  en realidad es el número de infectados iniciales y  $P(a)$  es el número de infectados que permanecen infectados en el intervalo  $[0, a]$ .  $P(a)$  son aquellos infectados iniciales,  $P(0)$ , multiplicado por la probabilidad de que efectivamente sigan siendo infectados en el intervalo  $[0, a]$ , por consiguiente,  $e^{-(\mu+\nu)(\mu+\gamma)a}$  corresponde a la probabilidad de los individuos inicialmente infectados continúen siéndolo desde 0 hasta  $a$ , es decir,

$$F(a) = e^{-(\mu+v)(\mu+\gamma)a}.$$

Por otra parte, si un individuo infeccioso,  $I(0) = 1$ , ingresa a una población completamente susceptible,  $S(0) = N$ , entonces tendremos que  $\beta N$  son los nuevos expuestos por unidad de tiempo, es decir, sin importar cuanto tiempo a pase esperamos siempre tener  $\beta N$  nuevos expuestos. Ahora de esta población expuesta se tendrán en total  $v\beta N$  infectados por unidad de tiempo, es decir,

$$b(a) = v\beta N,$$

cuando la tasa de mortalidad es la misma que la tasa de natalidad. En caso contrario por el corolario 3.2 tenemos que

$$b(a) = \frac{\eta}{\mu} v\beta N,$$

de esta forma el número reproductivo básico para el modelo SEIR con nacimientos y muertes corresponde a

$$R_0^{SEIR} := \int_0^{+\infty} \frac{\eta}{\mu} v\beta N e^{-(\mu+v)(\mu+\gamma)a} da = \frac{\eta}{\mu} \frac{v\beta N}{(\mu+v)(\mu+\gamma)}. \quad (2.13)$$

▲

En [Heffernan, Pág. 283] y [Holland, Pág. 4-5] se calcula  $R_0^{SEIR}$  utilizando las *matrices de la siguiente generación* método no estudiando en el presente trabajo, sin embargo, el valor dado allá coincide con el cálculo presentado en el ejemplo anterior, los cuáles son originales.

Razonando de manera análoga tendremos que para el modelo SEIS con nacimientos y muertes se tiene que  $R_0^{SEIS} = R_0^{SEIR}$ .

### 2.3.2. Estabilidad de los modelos epidemiológicos deterministas

El enfoque utilizado en esta sección está basado en [Al Hokayem, pág. 1–4]. Las definiciones de *estabilidad* y de *estabilidad asintótica* se hacen sobre un *punto de equilibrio*, definición presentada a continuación.

**Definición 2.2.** ([Al Hokayem, pág. 1]) (i) Sea una ecuación diferencial ordinaria

$$dx(t)/dt = f(x(t)), \text{ definida para todo } t \geq t_0,$$

tal que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función localmente Lipschitz (definición A8). Se dice que  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  es un **punto de equilibrio**, si y sólo si,  $f(\hat{x}) = 0$ .

(ii) Sea un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en dado por

$$\dot{X}(t) = f(X(t)), \text{ para todo } t \geq t_0,$$

o en notación matricial,

$$\begin{pmatrix} dX_1(t)/dt \\ \vdots \\ dX_n(t)/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_1(t), \dots, X_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(X_1(t), \dots, X_n(t)) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$



tal que  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función localmente Lipschitz (definición A.8) para todo  $i = 1, \dots, n$ . Se dice que  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  es un **punto de equilibrio**, si y sólo si,  $f(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}_n$ , donde  $\mathbf{0}_n$  es una matriz de ceros de tamaño  $n \times 1$ .

Supongamos que existe un punto de equilibrio  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  de la ecuación diferencial ordinaria  $\dot{X}(t) = f(X(t))$ . En caso de que  $\hat{\mathbf{x}}$  no sea el *primer punto del sistema*, es decir,  $\hat{\mathbf{x}} \neq X(t_0)$  se puede hacer el cambio de variable  $\xi(t) = X(t) - \hat{\mathbf{x}}$  y obtener que  $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t) + \hat{\mathbf{x}}) = f(X(t))$ , caso para el cual se estudia la estabilidad con respecto al punto  $\xi(t_0)$  (ver [Al Hokayem, pág. 1–2]), razón por la cual se define *estabilidad* y *estabilidad asintótica* únicamente para el punto  $X(t_0)$  como sigue

**Definición 2.3.** [Al Hokayem, pág. 2] El punto de equilibrio  $X(t_0)$  del sistema de EDO (2.25) es

(i) **Estable**, si y sólo si, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|X(t_0)\| < \delta \text{ implica que } \|X(t)\| < \epsilon \text{ para todo } t > t_0;$$

(ii) **Asintóticamente estable**, si y sólo si, es estable y podemos escoger  $\delta > 0$  tal que

$$\|X(t_0)\| < \delta \text{ implica que } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0.$$

Intuitivamente el punto  $X(t_0)$  es *estable* si las soluciones que empiezan *suficientemente cerca* de la trayectoria que inicia en  $X(t_0)$  ( $\|X(t_0)\| < \delta$ ) permanecen *suficientemente cerca* a dicha trayectoria para cualquier valor  $t \geq t_0$  ( $\|X(t)\| < \epsilon$ ), es decir, si una solución empieza cerca de  $X(t_0)$  esta solución nunca se alejará lo suficiente de la trayectoria  $X(t)$ . El punto es *asintóticamente estable* si para soluciones que inician cerca de la trayectoria con origen en  $X(t_0)$ , éstas llegan a converger a dicha trayectoria. De acuerdo con [Aranda, pág. 19]: “en lenguaje usual la posición de equilibrio de un objeto o la trayectoria de un móvil se dice estable si un pequeño cambio de sus condiciones iniciales modifica poco su evolución desde ese instante”.

Para demostrar la *estabilidad* sobre un sistema de EDO se va a utilizar las llamadas *funciones de Liapunov*.

**Definición 2.4.** ([Al Hokayem, pág. 2]) (i) Sean  $\dot{X}(t) = f(X(t))$  un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias definido para todo  $t \geq 0$  y  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable. Se define la **razón de V con respecto a**  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  como

$$\begin{aligned} \dot{V}(X(t)) &:= \frac{dV(X(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial X_i} \frac{dX_i(t)}{dt} \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial X_1} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial X_n} \right) \frac{dX(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

(ii) Sean  $\dot{X}(t) = f(X(t))$  un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias definido para todo  $t \geq 0$  y  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y con primeras derivadas continuas tal que

$$\begin{aligned} V(X(0)) &= 0 \\ V(X(t)) &> 0 \text{ para todo } t > 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

se dice que  $V$  es una **función de Liapunov** con respecto al sistema  $\dot{X}(t) = f(X(t))$ .

**Notación 2.1.** Como la función  $V(X(t))$  es una función compuesta de  $V$  y de  $X$ , la cual depende de  $t$ , entonces simplemente se escribirá como  $V(X(t)) = V(t)$ .

El sistema de EDO (2.25) con estado inicial  $X(0)$  sigue la trayectoria  $X(t)$  para todo  $t \geq 0$ . Una *función de Liapunov*  $V(X(t)) = V(t)$  intuitivamente corresponde a una colección de curvas de nivel  $V^{(a)} = \{X(t) : V(X(t)) = a\}$  para todo  $a > 0$ . Cada curva  $V^{(a)}$  define una *región de Liapunov*, la cual puede o no *acotar* a  $X(t)$ . Supongamos que una vez la curva  $X(t)$  “entra” a una *región de Liapunov* para  $V^{(a)}$  en el punto  $X(t_1)$ , la curva ya no podrá “salir de ella”, es decir,  $X(t)$  está *acotada* por  $V^{(a)}$  para todo  $t \geq t_1$  ( $X(t)$  está “dentro” de  $V^{(a)}$  para todo  $t > t_1$ ). De esta forma, a medida que crece el tiempo,  $X(t)$  queda *acotada* por *regiones de Liapunov* mucho más pequeñas. Al tomar la curva de nivel  $V^{(s)}$  tal que  $s \rightarrow 0$ , es decir  $t \rightarrow +\infty$ , tendremos que la región de Liapunov es lo *suficientemente pequeña* para *acotar* a  $X(t)$  haciendo que  $X(t)$  esté *muy cercano a cero* (cuando  $t \rightarrow +\infty$ ), de manera que ésta tienda a cero y así demostrando la *estabilidad* de  $X(0)$ .

Si  $X(0)$  es *estable* entonces  $X(t)$  estará “adentro” de  $V^{(a)}$  a medida que  $a$  decrece y el valor de  $t$  aumenta, es decir; para valores más grandes de  $t$ ,  $V^{(b)} \subsetneq V^{(a)}$  para todo  $a \geq b$  siendo  $\{V^{(a)} : a > 0\}$  una *colección decreciente de conjuntos con respecto a  $t$* . Para que  $\{V^{(a)} : a > 0\}$  sea *decreciente* es necesario que  $V(\cdot)$  sea una *función estrictamente decreciente*, es decir, para todo  $t_1 > t_2$  se tiene  $V(X(t_1)) < V(X(t_2))$ , por consiguiente, la derivada debe ser negativa, esto es  $\dot{V}(X(t)) < 0$  ([Al Hokayem, pág. 1-3]). Bajo esta condición se garantiza la *estabilidad asintótica*. El siguiente teorema enuncia este hecho

**Teorema 2.1.** [Al Hokayem, pág. 4] Sean  $X(0)$  un punto de equilibrio del sistema (2.15) (caso contrario se hace el cambio de variable  $\xi(t) = X(t) - \hat{\mathbf{x}}$ , tal que  $\hat{\mathbf{x}}$  es un punto de equilibrio) definido para todo  $t \geq 0$  y  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Liapunov de dicho sistema

(i) Si  $V$  satisface que

$$\dot{V}(X(t)) \leq 0 \text{ para todo } t \geq t, \quad (2.17)$$

entonces  $X(0)$  es estable.

(ii) Si  $V$  satisface (i) y adicionalmente

$$\dot{V}(X(t)) < 0 \text{ para todo } t \geq 0, \quad (2.18)$$

entonces  $X(0)$  es asintóticamente estable.

*Demostración:* [Al Hokayem, pág. 4].

A continuación estudiaremos las condiciones suficientes para las cuáles las *condiciones iniciales* (puntos iniciales) de los modelos *SIR*, *SIS*, *SEIR* y *SEIS* son *asintóticamente estables*. Antes de ello se define el *punto de equilibrio libre de enfermedad* de un modelo matemático epidemiológico. Este *punto* corresponde a aquel donde la enfermedad no está presente en la población, es decir, cuando  $I(t) = 0$  y  $E(t) = 0$ , para los modelos considerados en este trabajo.

**Definición 2.5.** ([Morris, pág. 123]) Sean un modelo epidemiológico determinista dado por un sistema EDO como en la ecuación (2.25) y un punto de equilibrio  $\hat{\mathbf{x}} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$  de dicho sistema. Se dice que  $\hat{\mathbf{x}}$  es un **punto de equilibrio libre de enfermedad (ELE)**, si y sólo si, todas las componentes de la población con presencia del agente infeccioso<sup>13</sup> son iguales a cero.

**Ejemplo 2.6.** Los puntos de equilibrio libre de enfermedad de los modelos *SIS*, *SIR* y *SEIR* con nacimientos y muertes son respectivamente  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$ ,  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0\right)$  y  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$ .

<sup>13</sup>Para el modelo *SIS* con nacimientos y muertes la componente  $I(t)$  y para el modelo *SEIR* con nacimientos y muertes las componentes  $E(t)$  e  $I(t)$ .

Para el caso concreto de los *modelos SIR, SIS y SEIR con nacimientos y muertes* (teorema 2.2 y teorema 2.3) tenemos el siguiente teorema referente a las *estabilidades*. La demostración se hará con base en [Lahrouz, pág. 61–62] utilizando *funciones de Lyapunov* adecuadas.

**Teorema 2.2.** *Los puntos  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0\right)$  y  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  son asintóticamente estables en los modelos (i) SIR y (ii) SIS con nacimientos y muertes, respectivamente, si el número reproductivo básico de cada uno es menor que 1.*

*Demostración:* (i) Supongamos primero que la *tasa de influencia* es la misma que la *tasa de mortalidad*. Consideremos la función dada por

$$V(S(t), I(t), R(t)) := \lambda_1 (N - S(t))^2 + \lambda_2 \frac{1}{2} I^2(t) + \lambda_3 \frac{1}{2} R^2(t),$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  son constantes que serán escogidas adecuadamente más adelante.

Nótese que  $V(S(t), I(t), R(t)) > 0$  para todo  $t > 0$  y  $V(N, 0, 0) = 0$ , además como  $S(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  son funciones continuas para todo  $t \geq 0$  (suposición 2.1), entonces  $V(S(t), I(t), R(t))$  es también continua. Adicionalmente

$$\frac{\partial V}{\partial S} = -2(N - S(t)), \quad \frac{\partial V}{\partial I} = I(t) \text{ y } \frac{\partial V}{\partial R} = R(t),$$

son funciones continuas, entonces  $V$  es una función de Liapunov del el *sistema EDO* (2.3) cuyo valor de  $\dot{V}(X(t))$  está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(X(t)) &= \left( \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial V}{\partial I}, \frac{\partial V}{\partial R} \right) \frac{dX(t)}{dt} \\ &= \begin{pmatrix} -2\lambda_1(N - S(t)) & \lambda_2 I(t) & \lambda_3 R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dS(t)}{dt} & \frac{dI(t)}{dt} & \frac{dR(t)}{dt} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} -2\lambda_1(N - S(t)), & \lambda_2 I(t), & \lambda_3 R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta N - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) \\ \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \gamma I(t) - \mu R(t) \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 2[-\eta N + \beta I(t)S(t) + \mu S(t)](N - S(t)) \\ &\quad + \lambda_2 [\beta S(t) - (\gamma + \mu)] I^2(t) + \lambda_3 [\gamma I(t)R(t) - \mu R^2(t)] \\ &\leq \lambda_1 2[-\eta N + \beta NI(t) + \mu S(t)](N - S(t)) \\ &\quad + \lambda_2 [\beta N - (\gamma + \mu)] I^2(t) + \lambda_3 [\gamma I(t)R(t) - \mu R^2(t)] \\ &= \lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t) + \lambda_3 c(t) \end{aligned}$$

donde,

$$a(t) = 2[-\eta N + \beta NI(t) + \mu S(t)](N - S(t)) \leq 2[-\eta + \beta N^2 + \mu N] N = \kappa,$$

$$b(t) = [\beta N - (\gamma + \mu)] I^2(t),$$

$$c(t) = \gamma I(t)R(t) - \mu R^2(t) \leq \gamma N^2 - \mu \inf_{t \geq 0} \{R^2(t)\} = \iota,$$

como  $R_0^{SIR} < 1$ , si y sólo si,  $\beta N - \gamma - \mu < 0$  (de la ecuación 2.18) entonces

$$(\beta N - \gamma - \mu) I^2(t) = b(t) < 0.$$

Por otra parte observemos que

(i) Si  $a(t) < 0$  y  $c(t) < 0$  para todo  $t \geq 0$  entonces tomando  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  cualesquiera observamos que

$$\dot{V}(t) \leq \lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t) + \lambda_3 c(t) < 0, \forall t \geq 0.$$

(ii) Si  $a(t) > 0$  para algún  $t \geq 0$  y  $c(t) < 0$  para todo  $t \geq 0$  entonces tomando  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tal que  $\lambda_1 \kappa < -\lambda_2 \inf_{t \geq 0} \{b(t)\} - \lambda_3 \inf_{t \geq 0} \{c(t)\}$  observamos que

$$\dot{V}(t) \leq \lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t) + \lambda_3 c(t) < \lambda_1 \kappa + \lambda_2 \inf_{t \geq 0} \{b(t)\} + \lambda_3 \inf_{t \geq 0} \{c(t)\} < 0, \forall t \geq 0,$$

(iii) Si  $a(t) < 0$  para todo  $t \geq 0$  y  $c(t) > 0$  para algún  $t \geq 0$  entonces tomando  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tal que  $\lambda_3 \iota < -\lambda_2 \inf_{t \geq 0} \{b(t)\} - \lambda_1 \inf_{t \geq 0} \{a(t)\}$  observamos que

$$\dot{V}(t) \leq \lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t) + \lambda_3 c(t) < \lambda_1 \inf_{t \geq 0} \{a(t)\} + \lambda_2 \inf_{t \geq 0} \{b(t)\} + \lambda_3 \iota < 0, \forall t \geq 0,$$

(iv) Si  $a(t), c(t) > 0$  para algún  $t \geq 0$  entonces tomando  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tal que

$$\lambda_3 \iota + \lambda_1 \kappa < -\lambda_2 \inf_{t \geq 0} \{b(t)\}$$

observamos que

$$\dot{V}(t) \leq \lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t) + \lambda_3 c(t) < \lambda_1 \kappa + \lambda_2 \inf_{t \geq 0} \{b(t)\} + \lambda_3 \iota < 0, \forall t \geq 0,$$

de manera que siempre podemos escoger  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tal que  $\dot{V}(X(t)) < 0$ , así por el *teorema 2.1*. tenemos que el punto  $(N, 0, 0)^T$  es *asintóticamente estable* en el *modelo SIR con nacimientos y muertes*. Si  $\mu \neq \eta$  se reemplaza  $N$  por  $\frac{\eta}{\mu}N$  en la función de Liapunov definida y se sigue la prueba realizada anteriormente notando que si  $\eta > \mu$  entonces  $S(t) \leq \frac{\eta}{\mu}N$  para todo  $t \geq 0$  y si  $\mu > \eta$  entonces  $S(t) \leq \max_{t \geq 0} S(t)$  para todo  $t \geq 0$ .

(ii) Se procede de manera análoga al ítem (i) tomando la función  $H$  dada por

$$H(S(t), E(t), I(t), R(t)) := (N - S(t))^2 + \frac{1}{2}I^2(t).$$

■

El punto inicial  $(N, I(0))$  donde  $I(0) \geq 1$  es un *punto inicial* mucho más *realista*, esto por el hecho de que para tener una epidemia en una población es necesario que el número de infectados iniciales sea por lo menos 1. Para demostrar que este punto es asintóticamente estable en el modelo SIR, con nacimientos y muertes, basta con considerar la función dada por

$$V(S(t), I(t), R(t)) = \lambda_1 (N - S(t))^2 + \lambda_2 \frac{1}{2} (I(t) - I(0))^2 + \lambda_3 \frac{1}{2} R^2(t),$$

esta es una función de Liapunov debido a que  $S(t), I(t)$  y  $R(t)$  son continuas para todo  $t \geq 0$ .

En el modelo SIS con nacimientos y muertes se tiene que si  $R_0^{SIS} \geq 1$ , entonces el *punto de equilibrio*  $(\frac{\eta}{\mu}N, 0)$  no es *asintóticamente estable*. Análogamente si  $R_0^{SEIR} \geq 1$ , entonces  $(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0)$  no es *asintóticamente estable* en el modelo SEIR con nacimientos y muertes.

Para hacer una escritura más corta en el siguiente teorema abusaremos de la notación escribiendo  $S(t), E(t), I(t), R(t)$  como  $S, E, I, R$ , respectivamente.

**Teorema 2.3.** *El punto  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$  es asintóticamente estable en el modelo SEIR con nacimientos y muertes, si el número reproductivo básico es menor que 1,  $\beta N < (\mu + \gamma)$  y  $v + \mu > 1$ .*

*Demostración:* Supongamos que  $\mu = \eta$ . Consideremos la función dada por

$$W(S(t), E(t), I(t), R(t)) = \lambda_1 (N - S)^2 + \lambda_2 \left( vEI + v^2 \frac{1}{2} E^2 + (\mu + v) \frac{1}{2} I^2 \right) + \frac{1}{2} \lambda_3 R^2,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  son constantes que serán escogidas adecuadamente más adelante. Claramente  $W(S(t), E(t), I(t), R(t)) > 0$  para todo  $t > 0$  y  $W(N, 0, 0, 0) = 0$ . Como  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  son continuas (suposición 2.1) y

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial S(t)} &= -2\lambda_1 (N - S), \quad \frac{\partial W}{\partial E(t)} = \lambda_2 (v^2 E + vI), \\ \frac{\partial W}{\partial I(t)} &= \lambda_2 (vE + (\mu + v)I) \text{ y } \frac{\partial W}{\partial R(t)} = \lambda_4 R \end{aligned}$$

son también continuas, entonces  $V$  es una función de Lyapunov. Notemos que

$$\begin{aligned} \dot{W}(X(t)) &= \left( \frac{\partial W}{\partial S(t)}, \frac{\partial W}{\partial E(t)}, \frac{\partial W}{\partial I(t)}, \frac{\partial W}{\partial R(t)} \right) \frac{dX(t)}{dt} \\ &= \begin{pmatrix} -2\lambda_1 (N - S) \\ \lambda_2 (v^2 E + vI) \\ \lambda_2 (vE + (\mu + v)I) \\ \lambda_4 R \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \eta N - \beta IS - \mu S \\ \beta IS - vE - \mu E \\ vE - \gamma I - \mu I \\ \gamma I - \mu R \end{pmatrix} \\ &= -2\lambda_1 (N - S) (\eta N - \beta IS - \mu S) + \lambda_2 (v^2 E + vI) (\beta IS - vE - \mu E) \\ &\quad + \lambda_2 (vE + (\mu + v)I) (vE - \gamma I - \mu I) + \lambda_4 R (\gamma I - \mu R) \\ &= -2\lambda_1 (N - S) (\eta N - \beta IS - \mu S) + \lambda_2 (v^2 \beta SEI - v^2 (v + \mu) E^2 \\ &\quad v \beta SI^2 - v (v + \mu) EI + v^2 E^2 - v (\gamma + \mu) EI + v (\mu + v) EI \\ &\quad - (\gamma + \mu) (\mu + v) I^2) + \lambda_4 (\gamma RI - \mu R^2) \\ &= 2\lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t) + \lambda_4 c(t), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} a(t) &= (N - S) (-\eta N + \beta IS + \mu S) \leq N (\beta N^2 + \mu N - \eta) = \kappa \\ b(t) &= [v^2 \beta N - v (\gamma + \mu)] EI + (v^2 - v^2 (v + \mu)) E^2 + [v \beta N - (\gamma + \mu) (\mu + v)] I^2 \\ &\leq [2v^2 \beta N - v (\gamma + \mu) + v^2 - v^2 (v + \mu) - (\gamma + \mu) (\mu + v)] N^2 \\ c(t) &= \gamma RI - \mu R^2 \leq \gamma N^2 - \mu \inf_{t \geq 0} \{R^2\} = \iota \end{aligned}$$

Notemos que

(i) como  $v + \mu > 1$  observamos que  $v^2 - v^2 (v + \mu) < v^2 - v^2 = 0$  entonces

$$(v^2 - v^2 (v + \mu)) E^2 < 0$$

(ii) puesto que  $v\beta N < (\mu + \gamma)$  entonces  $v^2\beta N - v(\mu + \gamma) = v(v\beta N - (\mu + \gamma)) < 0$ , por consiguiente  $(v\beta N - v(\mu + \gamma))EI < 0$

(iii) como  $R_0^{SEIR} < 1$  entonces  $v\beta N - (\mu + \gamma)(\mu + v) < 0$  de manera que

$$(v\beta N - (\mu + \gamma)(\mu + v))I^2(t) < 0,$$

por (i), (ii) y (iii) tenemos que  $\lambda_2 b(t) < 0$ . De manera análoga a como se realizó en la demostración del teorema anterior podemos escoger valores adecuados  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  tal que  $\dot{W}(t) < 0$  así por el *teorema 2.1*. tenemos que el punto  $(N, 0, 0, 0)^T$  en el *modelo SEIR es asintóticamente estable*. Si  $\mu \neq \eta$  se reemplaza  $N$  por  $\frac{\eta}{\mu}N$  en la función de Liapunov definida y se sigue la prueba realizada anteriormente notando que si  $\eta > \mu$  entonces  $S(t) \leq \frac{\eta}{\mu}N$  para todo  $t \geq 0$  y si  $\mu > \eta$  entonces  $S(t) \leq \max_{t \geq 0} S(t)$  para todo  $t \geq 0$ . ■

El punto inicial  $(N, E(0), 0)$  donde  $E(0) \geq 1$  o el punto inicial  $(N, 0, I(0), 0)$  son dos condiciones iniciales mucho más realistas, esto por el hecho de que para tener una epidemia en una población debemos tener por lo menos un infectado o en su defecto un expuesto que desarrolle más adelante la infección. Para demostrar que estos puntos son asintóticamente estables en el modelo SEIR con nacimientos y muertes basta con considerar las funciones de Liapunov dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} W(S(t), E(t), I(t), R(t)) = & \lambda_1(N - S)^2 + \lambda_2 \left( vEI + v^2 \frac{1}{2} (E - E_0)^2 + (\mu + v) \frac{1}{2} I^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \lambda_3 R^2 \text{ y} \\ W(S(t), E(t), I(t), R(t)) = & \lambda_1(N - S)^2 + \lambda_2 \left( vEI + v^2 \frac{1}{2} E^2 + (\mu + v) \frac{1}{2} (I - I_0)^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \lambda_3 R^2, \end{aligned}$$

las cuáles son funciones de Liapunov puesto que  $S(t), I(t), E(t)$  y  $R(t)$  son funciones continuas para todo  $t \geq 0$ .

Notemos que en los *teoremas (2.2) y (2.3)*, las *condiciones numéricas*  $R_0^{SIS} < 1$  y  $R_0^{SEIR} < 1$  son *condiciones suficientes* para que los puntos  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  y  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$  sean *asintóticamente estables* en los *modelos SIS y SEIR con nacimientos y muertes*, respectivamente. De hecho,  $R_0^{SIS}$  y  $R_0^{SEIR}$  son **los valores máximos** (en función de los parámetros) donde se tiene la *estabilidad asintótica* de  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  y  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$ , respectivamente. Esto es, si  $R_0^{SIS} = 1$  y  $R_0^{SEIR} = 1$ , entonces  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  y  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$  ya **no son asintóticamente estables**. El siguiente diagrama ilustra esta relación:

Estabilidad asintótica para el modelo SIS	$R_0^{SIS} < 1 \implies \left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right) \text{ es asintóticamente estable}$ $R_0^{SIS} \geq 1 \implies \left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right) \text{ no es asintóticamente estable}$
Estabilidad asintótica para el modelo SEIR	$R_0^{SEIR} < 1, v + \mu > 1$ $\text{y } \beta N < \mu + \gamma \implies \left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right) \text{ es asintóticamente estable}$ $R_0^{SEIR} \geq 1, v + \mu > 1$ $\text{y } \beta N < \mu + \gamma \implies \left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right) \text{ no es asintóticamente estable}$

(2.b)

## 2.4. Hacia los modelos epidemiológicos estocásticos

En los modelos que se presentarán en este trabajo se plantean las *variaciones climáticas* (por ejemplo, las *fluctuaciones en la temperatura*) y demás *variables ambientales* como un factor que modifica la *tasa de infectividad* ( $\beta$ ) de la epidemia, siendo ésta una discrepancia que no se tiene en cuenta en los *modelos epidemiológicos deterministas*. Es adecuado considerar tales *variaciones* puesto que de acuerdo con [Sturrock, pág. 1] “se ha demostrado que las fluctuaciones en la temperatura y en el clima modifican la *tasa de infectividad*”. A partir de los *modelos deterministas* construiremos lo que conoceremos como **modelos epidemiológicos estocásticos**.

Recordemos que  $\beta$  es *tasa de infectividad*, es decir, el número de personas infectadas por unidad de tiempo, por consiguiente  $\beta dt$  denota el **número de personas infectadas durante el periodo**  $dt$ . Para ilustrar lo anterior notemos por ejemplo que si  $\beta = 0,5$  *personas infectadas/hora* y  $dt = 1$  *hora* entonces  $\beta dt = 0,5$  *personas infectadas en 1 hora*. Tomando  $\beta$  como la *variable aleatoria real* que toma valor constante  $\beta$ , entonces tomando  $dt \rightarrow 0$  se tiene que  $\beta dt \rightarrow 0$ , así

$$\mathbb{E}(\beta dt) = \beta dt \rightarrow 0 \text{ y } \mathbb{V}(\beta dt) = 0. \quad (2.19)$$

Bajo la hipótesis de que *el número de personas infectadas durante el período*  $dt$  *bajo perturbaciones* debido a las *variaciones climáticas y ambientales*, lo cual notaremos por  $\tilde{\beta} dt$ , vamos a asumirla como una *variable aleatoria* con media  $\beta dt$ . Definiendo la *variable aleatoria*  $\beta_i$  como *el número de personas durante en el intervalo*  $\left[t + \left(\frac{i-1}{n}\right)T, t + \frac{i}{n}T\right)$  para todo  $i = 1, \dots, n$  con  $T > t \geq 0$ . Supongamos además que las variables aleatorias  $\{\beta_i\}_{i=1}^n$  son *independientes e igualmente distribuidas*, es decir, conforman una *muestra aleatoria simple*<sup>14</sup> la cual es una *hipótesis* frecuentemente utilizada en *estadística* ([Casela, pág. 139–140 y pág. 207–208]).

Por el *teorema del límite central* cuando  $n \rightarrow +\infty$  se tiene que el *número total de personas infectadas en el intervalo*  $[t, T)$ , denotado por  $\beta_{t,T}$  e igual a  $\beta_1 + \dots + \beta_n$ , tiene una *distribución normal de parámetros*  $n\mu_0$  y  $n\sigma_0^2$ , donde  $\mu_0$  y  $\sigma_0^2$  corresponden respectivamente a la *media* y a la *varianza* de cada *variable aleatoria*  $\beta_i$  ([Gray, pág. 4–5]). Si se toma el *número promedio de infectados durante el periodo*  $[t, T)$ , denotado por  $\bar{\beta} = \frac{1}{n}\beta_{t,T}$ , se tiene que la distribución de ésta

<sup>14</sup>Al tomarse una serie de datos, en *estadística* se asume que *cada dato representa una variable aleatoria*. Se dice que un conjunto de datos es una *muestra aleatoria simple* si la probabilidad de escoger un dato (un individuo para tomar el dato) es la misma para todo el conjunto de datos y si la escogencia de los mismo es independiente el uno del otro ([Casela, pág. 139–140 y pág. 207–208]).

variable aleatoria es normal de parámetros  $\mu_0$  y  $\sigma_0^2/n$ . Tomando  $dt = [t, T)$  entonces  $\bar{\beta} \approx \tilde{\beta}dt$ , por consiguiente, se puede considerar que la variable aleatoria  $\tilde{\beta}dt$  tiene una distribución normal.

Para tener la condición (2.11) y la normalidad del número de infectados durante el periodo  $dt$  bajo perturbaciones (párrafo anterior), podemos escribir dicha variable como

$$\tilde{\beta}dt := \beta + \sigma B(t),$$

donde  $\beta$  y  $\sigma$  son constantes positivas que denotan respectivamente la *tasa de infectividad determinista*, la cual es la misma  $\beta$  de los modelos epidemiológicos de la sección 2.1. y  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano. La razón de considerar  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  como un movimiento browniano está en conservar la condición 2.19. Notemos que el diferencial de  $\beta + \sigma B(t)$  está dado por

$$d(\beta + \sigma B(t)) = \beta dt + \sigma dB(t), \quad (2.20)$$

el cual corresponde al número de personas infectadas durante  $dt$ , población que varía de acuerdo a la constante  $\sigma$  y al valor del diferencial del movimiento browniano  $dB(t)$ . Como

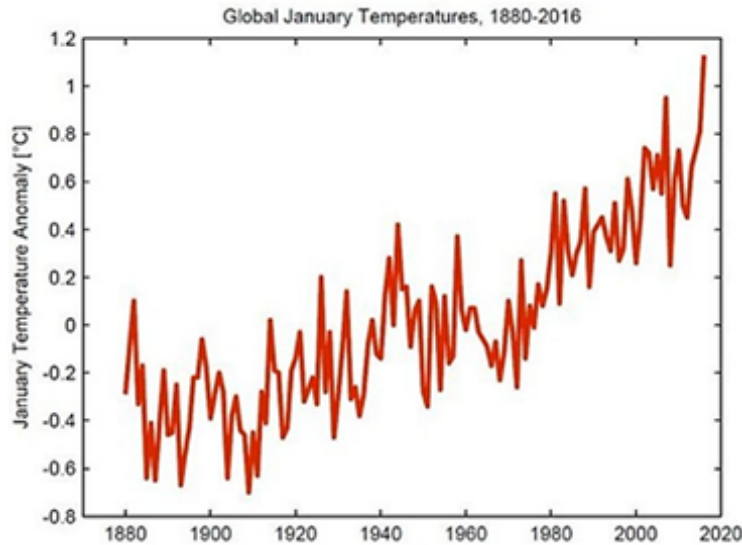
$$B(T) - B(t) \sim \mathbf{N}(0, T - t),$$

entonces  $dB(t) \sim \mathbf{N}(0, dt)$  (tomando  $dt = [t, T)$ ), por lo tanto cuando  $dt \rightarrow 0$  entonces

$$\mathbb{E}(\beta dt + \sigma dB(t)) = \beta dt \rightarrow 0 \text{ y } \mathbb{V}(\beta dt + \sigma dB(t)) = \sigma^2 dt \rightarrow 0,$$

obteniéndose la condición 2.11. En la ecuación  $\beta dt + \sigma dB(t)$ ,  $\beta$  se denomina la constante de la **componente determinista** y  $\sigma$  la constante de la **componente estocástica**.

En el siguiente gráfico tomado del [El Mundo], el cual corresponde a la temperatura global entre 1880 y 2016, se tiene que la *temperatura* (también las *variaciones climáticas*) se puede modelar utilizando un *movimiento browniano*<sup>15</sup>, puesto que dicho movimiento presenta “muchos alti-bajos” como se observa en la figura (1.b).



<sup>15</sup>El movimiento browniano al ser “muy variable” es utilizado para modelar aquellas funciones que presentan muchos máximos y mínimos y que no se pueden modelar fácilmente utilizando polinomios, como en este caso se observa con la temperatura.



Reemplazando  $\tilde{\beta}dt$  por  $\beta dt + \sigma dB(t)$  en la *sistema EDO* del *modelo SIR con nacimientos y muertes*, se tiene el siguiente *sistema EDE*:

$$\begin{cases} dS(t) = (\eta N - \beta I(t)S(t) - \mu S(t)) dt - \sigma I(t)S(t)dB(t) \\ dI(t) = (\beta I(t)S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t)) dt + \sigma I(t)S(t)dB(t) \\ dR(t) = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases}, \quad (2.21)$$

el cual conoceremos como el *modelo SIR-estocástico con nacimientos y muertes* o simplemente el **modelo SIR-estocástico**. En este modelo  $\sigma B(t)$  representa aquellas condiciones que afectarán a todos los individuos, como lo son las *variaciones climáticas*, la *contaminación*, etc. En este modelo se considera que sólo la *tasa de infectividad* se ve afectada por las *variaciones*, razón por la cual la *población recuperada* no tiene *componente estocástica*.

Análogamente a partir de los respectivos modelos deterministas construimos los modelos **SIS-estocástico**, **SEIR-estocástico** y **SEIS-estocástico** cuyos sistemas de *ecuaciones diferenciales estocásticas* (EDE) están dados respectivamente por

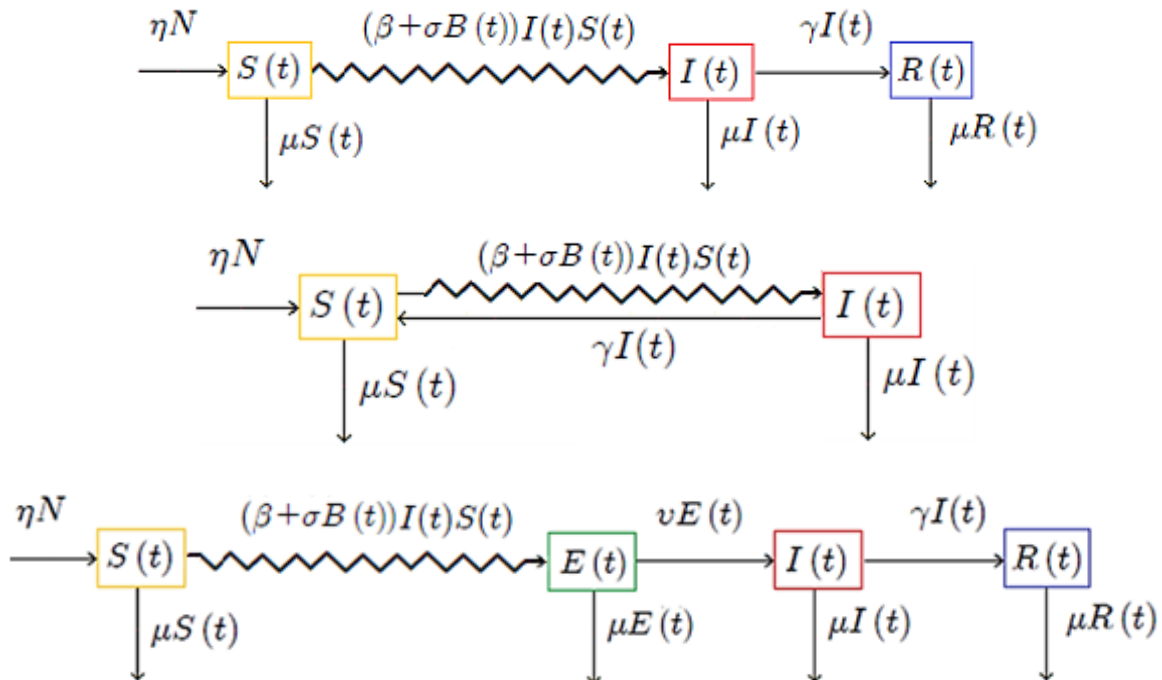
$$\begin{cases} dS(t) = (\eta N + \gamma I(t) - \beta I(t)S(t) - \mu S(t)) dt - \sigma I(t)S(t)dB(t) \\ dI(t) = (\beta I(t)S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t)) dt + \sigma I(t)S(t)dB(t) \end{cases}, \quad (2.22)$$

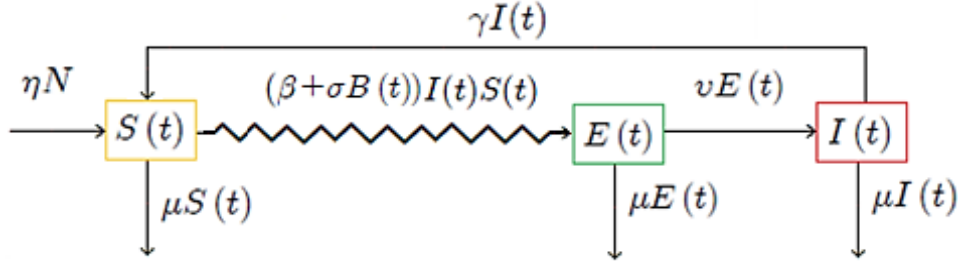
$$\begin{cases} dS(t) = (\eta N - \beta I(t)S(t) - \mu S(t)) dt - \sigma I(t)S(t)dB(t) \\ dE(t) = (\beta I(t)S(t) - v E(t) - \mu E(t)) dt + \sigma I(t)S(t)dB(t) \\ dI(t) = (v E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t)) dt \\ dR(t) = (\gamma I(t) - \mu R(t)) dt \end{cases} \quad y \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} dS(t) = (\eta N - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) + \gamma I(t)) dt - \sigma I(t)S(t)dB(t) \\ dE(t) = (\beta I(t)S(t) - v E(t) - \mu E(t)) dt + \sigma I(t)S(t)dB(t) \\ dI(t) = (v E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t)) dt \end{cases}. \quad (2.24)$$

En los modelos estocásticos acá trabajados se considera que únicamente la *tasa de infectividad* se ve afectada por las *variaciones climáticas o ambientales*, razón por la cual las ecuaciones de  $dR(t)$  (en los modelos SIR-estocástico y SEIR-estocástico) y de  $dI(t)$  (en los modelos SEIR-estocástico y SEIS-estocástico) no tienen *componente estocástica*.

Los siguientes son los *diagramas de flujo* propuestos para los modelos *SIR-estocástico*, *SIS-estocástico*, *SEIR-estocástico* y *SEIR-estocástico*, respectivamente:





Los *diagramas de flujo* para los *modelos epidemiológicos estocásticos* se interpretan de la misma manera que como se interpretan los *diagramas de flujo* para los *modelos deterministas*, salvo porque en estos modelos se considera que el paso de los *individuos susceptibles* a los *infectados* (en los *modelos SIS* y *SIR-estocásticos*) y el paso de los *individuos susceptibles* a los *expuestos* (en los *modelos SEIR* y *SEIS-estocásticos*) presenta *perturbaciones* determinadas por las *variaciones climáticas o ambientales* y modeladas por “ $\sigma B(t)$ ”. En general, en un *modelo compartimental* cuando se tenga *perturbaciones* entre el flujo de dos *compartimientos*, se puede representar la correspondiente flecha como ‘ $\rightsquigarrow$ ’.

Al hacerse las *simulaciones* de las funciones  $S(t)$  e  $I(t)$  del sistema EDE del modelo *SIS-estocástico* (página 97, capítulo 4) y de las funciones  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  del sistema EDE del modelo *SEIR-estocástico* (página 98, capítulo 4) y suponiendo que todas las *funciones existen* (hecho a demostrar en el teorema 3.1.) se observa que todas son *funciones continuas* en los respectivos *modelos estocásticos*, por lo que se realiza la siguiente *suposición*:

**Suposición 2.2.** Las funciones  $S(t)$  e  $I(t)$  en el modelo *SIS-estocástico* y las funciones  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  en el modelo *SEIR-estocástico* son todas *funciones continuas*.

Siguiendo la definición de una *solución de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas* (definición 1.60) para los sistemas EDE (2.22) y (2.23) se hace la siguiente *nota* para aclarar sobre el espacio de probabilidad y el movimiento browniano en ambos modelos.

**Nota 2.1.** Sean  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano definido sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  (el cual está determinado por los individuos susceptibles e infectados por una enfermedad) con su respectiva filtración browniana  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$ . Sean el sistema EDE (2.22) con condición inicial  $(S(0), I(0))$  y  $\{\mathfrak{F}_{(S(0), I(0)), t}\}_{t \geq 0}$  la filtración dada en la definición 1.60. Decimos en este caso que  $(S(t), I(t))$  es la solución del sistema (2.22), si y sólo si, se cumplen (i), (ii) y (iii) de la definición 1.60. Análogamente, para el sistema (2.23) con condición inicial  $(S(0), E(0), I(0), R(0))$  y  $\{\mathfrak{F}_{(S(0), E(0), I(0), R(0)), t}\}_{t \geq 0}$  como en la definición 1.60, se define la solución  $(S(t), E(t), I(t), R(t))$  para el modelo *SEIR-estocástico*.

## 2.5. Estabilidad de los modelos estocásticos

En los sistemas de EDE se define *punto de equilibrio* como sigue:

**Definición 2.6.** [Lahrouz, pág. 65] Sea el sistema EDE dado por

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), t \geq 0 \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

tal que  $f, g$  son funciones localmente Lipschitz de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$  (definición A.8). Se dice que  $\hat{x} = X(t_1) \in \mathbb{R}^n$  para algún  $t_1 \geq 0$ , es un **punto de equilibrio** del sistema EDE, si y sólo si,  $f(t_1, \hat{x}) = 0$ .

Análogo a un sistema EDO si  $\hat{x} \neq X(0)$ , al hacer la sustitución  $\xi(t) = X(t) - \hat{x}$  (página 43) se obtiene el sistema EDE

$$d\xi(t) = f(t, \xi(t) + \hat{\mathbf{x}}) dt + g(t, \xi(t) + \hat{\mathbf{x}}) dB(t),$$

para el cual  $\xi(0)$  es un *punto de equilibrio*. De esta forma se define la estabilidad, la estabilidad asintótica y la estabilidad asintótica de un *sistema EDE* como sigue:

**Definición 2.7.** [Lahrouz, pág. 65] Sea el sistema EDE dado por la ecuación (2.29) con  $X(0)$  su punto de equilibrio. Se dice que  $X(0)$  es

(i) **Estable en probabilidad**, si y sólo si, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|X(0)\| < \delta$  entonces

$$P\left(\sup_{t \geq 0} \|X(t)\| \geq \epsilon\right) = 0;$$

(ii) **Asintóticamente estable**, si y sólo si, es estable en probabilidad y existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|X(0)\| < \delta$  entonces

$$P\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0\right) = 1;$$

(iii) **Globalmente asintóticamente estable**, si y sólo si, es estable en probabilidad y para todo  $X(0) \in \mathbb{R}^n$

$$P\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0\right) = 1.$$

De la definición anterior se tiene que si  $X(0)$  es *globalmente asintóticamente estable* entonces es *asintóticamente estable*.

Para demostrar que un *sistema de EDE* es *asintóticamente estable* se puede utilizar nuevamente una *función de Liapunov* adecuada. En sistemas de EDE la definición de **función de Liapunov** es la misma que para los *sistemas de EDO* (definición 2.4).

Utilizando una función de Liapunov adecuada y la definición de  $\mathcal{L}(V(X(t)))$  (definición 1.57) vamos a dar una condición suficiente para tener la *estabilidad asintótica* de  $X(0)$  en el modelo SIS—estocástico y SEIR—estocástico utilizando el siguiente teorema enunciado en [Lu, pág. 3679] y cuya prueba se hace en [Mao].

**Teorema 2.4.** Sea  $X(0)$  el punto de origen del sistema (2.29). Sea  $V(X(t))$  una función de Liapunov, es decir,  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y con primeras derivadas continuas tal que  $V(X(0)) = 0$  y  $V(X(t)) > 0$  para todo  $t \geq 0$

(i) Si  $\mathcal{L}(V(X(t))) \leq 0$  para todo  $t \geq 0$ , entonces  $X(0)$  es *estocásticamente estable*.

(ii) Si  $V$  satisface (i) y adicionalmente  $\mathcal{L}(V(X(t))) < 0$ , entonces  $X(t)$  es *asintóticamente estable*.

A continuación estudiaremos bajo qué *condiciones numéricas* los modelos SIS—estocástico es *asintóticamente estable*, enunciándose el siguiente teorema. Su demostración se realizará con base en [Omari, Pág. 61 y 62] y [Lahrouz, pág. 66-67].

**Teorema 2.5.** Si la condición de que

$$0 < \beta \frac{\eta N}{\mu} < \gamma + \mu - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2} \quad (2.26)$$

se satisface entonces el punto inicial  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  para el modelo SIS-estocástico es asintóticamente estable.

*Demostración:* Supongamos que  $\eta = \mu$ . Consideremos la función dada por

$$V(S(t), I(t)) := \lambda_1 (N - S(t))^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 I^2(t),$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  son constantes que escogeremos más adelante adecuadamente. Claramente  $V(S(t), I(t)) > 0$  para todo  $t > 0$  y  $V(N, 0) = 0$ , además  $S(t)$  e  $I(t)$  son funciones continuas (suposición 2.1), por tanto  $V$  es una función de Liapunov.

Reescribiendo el sistema EDE del modelo SIS-estocástico en forma matricial,

$$dx(t) = f(t, x(t)) dt + g(t, x(t)) dB(t),$$

con  $x(t) := (S(t), I(t))$ , se tiene que  $f$  y  $g$  están dadas por:

$$\begin{aligned} [f(t, x(t))]^T &:= \begin{pmatrix} \mu N - \beta S(t) I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t), & \beta S(t) I(t) - (\mu + \gamma) I(t) \end{pmatrix} \\ \text{y } [g(t, x(t))]^T &:= \begin{pmatrix} -\sigma S(t) I(t), & \sigma S(t) I(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular  $\mathcal{L}(V(t))$  de dicho sistema EDE observemos que

$$\begin{aligned} [f(t, x(t))]^T \frac{\partial V}{\partial x} &= \begin{pmatrix} \eta - \beta S(t) I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t) \\ \beta S(t) I(t) - (\mu + \gamma) I(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2\lambda_1 (N - S(t)) \\ \lambda_2 I(t) \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 [-\eta + \beta S(t) I(t) - \gamma I(t) + \mu S(t)] (N - S(t)) \\ &\quad + \lambda_2 [\beta S(t) - (\mu + \gamma)] I^2(t) \\ &\leq 2\lambda_1 [-\eta + \beta N I(t) - \gamma I(t) + \mu S(t)] (N - S(t)) \\ &\quad + \lambda_2 [\beta N - (\mu + \gamma)] I^2(t) \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [g(t, x(t))]^T \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x(t)) &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) I^2(t) \begin{pmatrix} -1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) I^2(t) \begin{pmatrix} -2\lambda_1, & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \sigma^2 S^2(t) I^2(t) + \frac{1}{2} \lambda_2 \sigma^2 S^2(t) I^2(t) \leq \lambda_1 \sigma^2 N^2 I^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda_2 \sigma^2 N^2 I^2(t) \end{aligned}$$

Por consiguiente tendremos que

$$\mathcal{L}(V(t)) \leq 2\lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t)$$

para  $a(t)$  y  $b(t)$  dados respectivamente por

$$\begin{aligned} a(t) &= [-\eta + \beta N I(t) - \gamma I(t) + \mu S(t)] (N - S(t)) + \sigma^2 S^2(t) I^2(t) \\ \text{y } b(t) &= \left( \beta N - (\mu + \gamma) + \frac{\sigma^2 N^2}{2} \right) I^2(t) \leq \left( \beta N - (\mu + \gamma) + \frac{\sigma^2 N^2}{2} \right) \inf_{t \geq 0} \{I^2(t)\} = \iota \end{aligned}$$

notemos que como  $I(t) \leq N$ ,  $-I(t) \leq -\inf_{t \geq 0} I(t)$  y  $N - S(t) \leq N$  para todo  $t \geq 0$ , entonces

$$a(t) \leq \left[ -\eta + \beta N^2 - \gamma \inf_{t \geq 0} \{I(t)\} + \mu S(t) \right] N + \sigma^2 S^2(t) N^2 = \kappa,$$

por la condición 2.26. tenemos que  $\beta N - (\gamma + \mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 N^2 < 0$  luego  $\lambda_2 b(t) < 0$ . Si  $a(t) \leq 0$  para todo  $t \geq 0$  entonces tomando  $\lambda_1, \lambda_2 = 1$  vemos que  $\mathcal{L}(V(t)) < 2a(t) + b(t) < 0$ . Si  $a(t) > 0$ , para algún  $t \geq 0$ , tomando  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tal que  $2\lambda_1\kappa < -\lambda_2\iota$  observamos que

$$\mathcal{L}(V(t)) \leq 2\lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t) < 2\lambda_1\kappa + \lambda_2\iota < 0,$$

demostrando así por el *teorema 2.4.* que el punto  $(N, 0)^T$  es asintóticamente estable en el modelo SIS–estocástico. Si  $\mu \neq \eta$  se reemplaza  $N$  por  $\frac{\eta}{\mu}N$  en la función de Liapunov definida y se sigue la prueba realizada anteriormente notando que si  $\eta > \mu$  entonces  $S(t) \leq \frac{\eta}{\mu}N$  para todo  $t \geq 0$  y si  $\mu > \eta$  entonces  $S(t) \leq \max_{t \geq 0} S(t)$  para todo  $t \geq 0$ . ■

A continuación estudiaremos bajo qué *condiciones numéricas* los modelos SEIR–estocástico es *asintóticamente estable*, enunciándose el siguiente teorema. Su demostración se realizará con base en [Omari, Pág. 61 y 62] y [Lahrouz, págs. 66-67].

**Teorema 2.6.** *Si la condición de que*

$$0 < v\beta \frac{\eta N}{\mu} < (\gamma + \mu)(v + \mu) - \frac{\sigma^2 v^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2}, \quad (2.27)$$

*$\beta N < (\mu + \gamma)$  y  $v + \mu > 1$  se satisface entonces el punto de equilibrio inicial  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$  para el modelo SEIR–estocástico es asintóticamente estable.*

*Demostración:* Supongamos que  $\eta = \mu$ . Consideremos la función dada por

$$W(S(t), E(t), I(t), R(t)) := \lambda_1 (N - S)^2 + \lambda_2 \left( vEI + v^2 \frac{1}{2} E^2 + (\mu + v) \frac{1}{2} I^2 \right) + \frac{1}{2} \lambda_3 R^2,$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$  son constantes que escogeremos más adelante adecuadamente. Claramente  $V(S(t), E(t), I(t), R(t)) > 0$  para todo  $t > 0$  y  $V(N, 0, 0, 0) = 0$ , además  $S(t), E(t), I(t)$  y  $R(t)$  son funciones continuas (*suposición 2.1*), por lo tanto  $V$  es una función de Liapunov.

Reescribiendo el sistema EDE del modelo SIS–estocástico en forma matricial,

$$dx(t) = f(t, x(t)) dt + g(t, x(t)) dB(t),$$

con  $x(t) := (S(t), E(t), I(t), R(t))$ , se tiene que  $f$  y  $g$  están dadas por:

$$\begin{aligned} f^T &= [f(t, x(t))]^T := (\eta - \beta SI - \mu S, \beta SI - (v + \mu)E, vE - (\mu + \gamma)I, \gamma I - \mu R) \\ \text{y } g^T &= [g(t, x(t))]^T := (-\sigma S(t)I(t), \sigma S(t)I(t), 0, 0). \end{aligned}$$

Para calcular  $\mathcal{L}(V(t))$  de dicho sistema EDE observemos que

$$\begin{aligned} f^T \frac{\partial W}{\partial x} &= \left( \eta - \beta SI - \mu S, \beta SI - (v + \mu)E, vE - (\mu + \gamma)I, \gamma I - \mu R \right) A \\ &= -2\lambda_1 (N - S)(\eta - \beta IS - \mu S) + \lambda_2 \left( [v^2 \beta N - v(\gamma + \mu)] EI \right. \\ &\quad \left. + (v^2 - v^2(v + \mu)) E^2 + [v\beta N - (\gamma + \mu)(\mu + v)] I^2 \right) + \lambda_3 (\gamma RI - \mu R^2) \end{aligned}$$

donde

$$A = \left( -2\lambda_1 (N - S), \lambda_2 (v^2 E + vI), \lambda_2 (vE + (\mu + v)I), \lambda_3 R \right)^T,$$

por otra parte,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}g^T \frac{\partial V}{\partial x} g &= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 I^2 \begin{pmatrix} -1, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 v^2 & \lambda_2 v & 0 \\ 0 & \lambda_2 v & \lambda_2 (\mu + v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 I^2 \begin{pmatrix} -2\lambda_1, & \lambda_2 v^2, & \lambda_2 v, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T \\
&= \lambda_1 \sigma^2 S^2 I^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 v^2 \sigma^2 S^2 I^2 \leq \lambda_1 \sigma^2 N^2 I^2 + \lambda_2 \frac{1}{2}v^2 \sigma^2 N^2 I^2.
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que

$$\mathcal{L}(V(t)) = f^T \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}g^T \frac{\partial V}{\partial x} g \leq \lambda_1 a(t) + \lambda_2 b(t) + \lambda_3 c(t),$$

donde

$$\begin{aligned}
a(t) &= 2(N - S)(-\eta + \beta IS + \mu S) + \sigma^2 N^2 I^2 \leq 2N(-\eta + \beta N^2 + \mu N) + \sigma^2 N^4 = \kappa, \\
b(t) &= (v^2 \beta N - v(v + \mu))EI + (v^2 - v^2(v + \mu))E^2 \\
&\quad + \left( v\beta N - (\mu + \gamma)(\mu + v) + \frac{1}{2}v^2 \sigma^2 N^2 I^2 \right), \\
c(t) &= \gamma IR - \mu R^2 \leq \gamma N^2 - \mu \inf_{t \geq 0} \{R^2\},
\end{aligned}$$

Notemos que

(i) como  $v + \mu > 1$  observamos que  $v^2 - v^2(v + \mu) < v^2 - v^2 = 0$  entonces

$$(v^2 - v^2(v + \mu))E^2 < 0$$

(ii) puesto que  $v\beta N < (\mu + \gamma)$  entonces  $v^2 \beta N - v(\mu + \gamma) = v(v\beta N - (\mu + \gamma)) < 0$ , por consiguiente  $(v\beta N - v(\mu + \gamma))EI < 0$

(iii) por la condición (2.27) tendremos que

$$\left( v\beta N - (\mu + \gamma)(\mu + v) + \frac{1}{2}v^2 \sigma^2 N^2 \right) I^2(t) < 0,$$

por (i), (ii) y (iii) tenemos que  $\lambda_2 b(t) < 0$ . De manera análoga a como se realizó en la demostración del *teorema 2.2* podemos escoger valores adecuados  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tal que  $\mathcal{L}(W(t)) < 0$  así por el *teorema 2.4*. tenemos que el punto  $(N, 0, 0, 0)^T$  en el *modelo SEIR-estocástico es asintóticamente estable*. Si  $\mu \neq \eta$  se reemplaza  $N$  por  $\frac{\eta}{\mu}N$  en la función de Liapunov definida y se sigue la prueba realizada anteriormente notando que si  $\eta > \mu$  entonces  $S(t) \leq \frac{\eta}{\mu}N$  para todo  $t \geq 0$  y si  $\mu > \eta$  entonces  $S(t) \leq \max_{t \geq 0} S(t)$  para todo  $t \geq 0$ . ■

En la siguiente *sección* se busca definir  $R_0$  para los *modelos epidemiológicos estocásticos* propuestos en este trabajo.

## 2.6. Sobre las definiciones de $R_0$ para los modelos estocásticos

Para definir  $R_0$  en los *modelos epidemiológicos estocásticos* propuestos en este trabajo se utilizarán dos enfoques: la *definición vía integral* y la definición como una *condición suficiente de la estabilidad del punto de equilibrio inicial*.

### 2.6.1. La definición de $R_0$ a partir de la integral

Una forma de definir  $R_0$  para los *modelos epidemiológicos estocásticos* con sistemas de EDE dados por (2.21), (2.22), (2.23) y (2.24) es utilizando la integral dada en la ecuación (2.11). A continuación se presenta dicho enfoque donde los cálculos presentados son completamente originales.

Como primer caso consideraremos que la *tasa de natalidad* es la misma que la *tasa de mortalidad* y por consiguiente el total de la población es el mismo con respecto al tiempo. En el caso del *modelo SIR–estocástico* si un individuo infeccioso que permanece infeccioso hasta el tiempo  $a$ ,  $I(0) = 1$ , ingresa a una población completamente susceptible,  $S(0) = N$ , entonces tendremos  $(\beta + \sigma B(a))N$  nuevos individuos infectados por unidad de tiempo. De esta manera tendremos que para el modelo SIR–estocástico su *número reproductivo básico* está dado por

$$\begin{aligned} R_{0,e}^{SIR} &:= \int_0^{+\infty} (\beta + \sigma B(a)) N e^{-(\mu+\gamma)a} da = \int_0^{+\infty} \beta N e^{-(\mu+\gamma)a} da + \sigma \int_0^{+\infty} B(a) N e^{-(\mu+\gamma)a} da \\ &= \frac{\beta N}{(\mu + \gamma)} + \sigma N \int_0^{+\infty} B(a) e^{-(\mu+\gamma)a} da, \end{aligned}$$

tomando  $x = B(t)$  y  $f(t, x) = x e^{-(\mu+\gamma)t}$  (notación 1.2.) observamos que

$$f_t(t, x) = -(\mu + \gamma) x e^{-(\mu+\gamma)t}, \quad f_x(t, x) = e^{-(\mu+\gamma)t} \text{ y } f_{x^2}(t, x) = 0,$$

así por *integración por partes*

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} B(l) e^{-(\mu+\gamma)l} = B(0) - (\mu + \gamma) \int_0^{+\infty} B(a) e^{-(\mu+\gamma)a} da + \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+\gamma)a} dB(a),$$

como  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano entonces  $B(0) = 0$ , por consiguiente

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\mu+\gamma)a}}{\mu + \gamma} dB(a) - \frac{1}{\mu + \gamma} \lim_{l \rightarrow +\infty} B(l) e^{-(\mu+\gamma)l} = \int_0^{+\infty} B(a) e^{-(\mu+\gamma)a} da,$$

sin embargo, si  $\int_0^l B(a) e^{-(\mu+\gamma)a} da$  está definida cuando  $l \rightarrow +\infty$  entonces por la *proposición 1.3.* tal integral es en realidad una *variable aleatoria* tal que

$$\int_0^{+\infty} B(a) e^{-(\mu+\gamma)a} da \sim \mathbf{N} \left( -\frac{1}{\mu + \gamma} \lim_{l \rightarrow +\infty} B(l) e^{-(\mu+\gamma)l}, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2(\mu+\gamma)a}}{(\mu + \gamma)^2} da \right).$$

La *ley del logaritmo iterado* ([Øksendal, teorema 5.1.2, pág. 66]) afirma que

$$\limsup_{l \rightarrow +\infty} \frac{B(l)}{\sqrt{2l \log \log l}} = 1 \text{ casi siempre}$$

de manera que

$$0 \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} B(l) e^{-(\mu+\gamma)l} \leq \limsup_{l \rightarrow +\infty} \frac{B(l) \sqrt{2l \log \log l} e^{-(\mu+\gamma)l}}{\sqrt{2l \log \log l}} = \limsup_{l \rightarrow +\infty} \sqrt{2l \log \log l} e^{-(\mu+\gamma)l} \text{ c.s.}$$

observemos que

$$0 \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \sqrt{2l \log \log l} e^{-(\mu+\gamma)l} \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \sqrt{2l \log l} e^{-(\mu+\gamma)l} \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \sqrt{2l} e^{-(\mu+\gamma)l},$$

donde vemos que por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sqrt{2} l e^{-(\mu+\gamma)l} = \sqrt{2} \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{l}{\frac{1}{e^{-(\mu+\gamma)l}}} = \sqrt{2} \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\mu + \gamma) \frac{e^{-(\mu+\gamma)l}}{e^{-2(\mu+\gamma)l}}} = 0,$$

así tenemos que

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sqrt{2l \log \log t} e^{-(\mu+\gamma)l} = 0,$$

por consiguiente

$$0 \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} B(l) e^{-(\mu+\gamma)l} \leq \limsup_{l \rightarrow +\infty} \sqrt{2l \log \log t} e^{-(\mu+\gamma)l} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sqrt{2l \log \log t} e^{-(\mu+\gamma)l} = 0 \text{ c.s.},$$

es decir,  $-\frac{1}{\mu+\gamma} \lim_{l \rightarrow +\infty} B(l) e^{-(\mu+\gamma)l} = 0$  c.s. Por otra parte, notemos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2(\mu+\gamma)a}}{(\mu + \gamma)^2} da = \lim_{l \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-2(\mu+\gamma)a}}{2(\mu + \gamma)^3} \Big|_0^l = \frac{1}{2(\mu + \gamma)^3}.$$

De esta manera  $R_{0,e}^{SIR}$  es una *variable aleatoria con distribución normal*, cuyos parámetros están dados por:

$$R_{0,e}^{SIR} \sim \mathbf{N} \left( \frac{\beta N}{(\mu + \gamma)}, \frac{\sigma^2 N^2}{2(\mu + \gamma)^3} \right), \quad (2.28)$$

de esta manera se hace la siguiente definición:

**Definición 2.8.** Se define la *variable aleatoria reproductiva básica* del modelo SIR-estocástico (sin nacimientos ni muertes) a la variable aleatoria  $R_{0,e}^{SIR}$ .

Nótese que la *media* de  $R_{0,e}^{SIR}$  coincide con  $R_0^{SIR}$ . Para el caso más general, es decir, cuando  $\mu \neq \eta$ , tendremos que la *variable aleatoria reproductiva básica* es la misma  $R_{0,e}^{SIR}$  pero esta vez sustituimos  $N$  por  $\frac{\eta}{\mu} N$ .

De manera análoga tendremos que para los modelos SIS-estocástico, SEIR-estocástico y SEIS-estocástico se definen las *variables aleatorias reproductivas básicas* como sigue

**Definición 2.9.** Las *variables aleatorias reproductivas básicas* de los modelos SIS-estocástico, SEIR-estocástico y SEIS-estocástico están definidos respectivamente por:

$$R_{0,e}^{SIS} \sim \mathbf{N} \left( R_0^{SIS}, \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2 (\mu + \gamma)^3} \right), \quad (2.29)$$

$$R_{0,e}^{SEIR} \sim \mathbf{N} \left( R_0^{SEIR}, \frac{\eta^2 v^2 \sigma^2 N^2}{2\mu^2 ((\mu + v) (\mu + \gamma))^3} \right) \text{ y} \quad (2.30)$$

$$R_{0,e}^{SEIS} \sim \mathbf{N} \left( R_0^{SEIS}, \frac{\eta^2 v^2 \sigma^2 N^2}{2\mu^2 ((\mu + v) (\mu + \gamma))^3} \right). \quad (2.31)$$

Dado que las tasas de los modelos son *siempre positivas*, entonces las *variables aleatorias*  $R_{0,e}^{SIR}$ ,  $R_{0,e}^{SIS}$ ,  $R_{0,e}^{SEIR}$  y  $R_{0,e}^{SEIS}$  están *definidas* para cualquier modelo SIR, SIS, SEIR y SEIS que se vaya a considerar.

En el capítulo 3 de este trabajo se presentan los resultados referentes a la *extinción, persistencia en la media y existencia de procesos estacionarios*. Las *hipótesis* de éstos resultados son de *tipo numérico*, es decir, se establece bajo qué *condiciones* de los *parámetros*  $(\eta, \mu, \sigma, \beta, v)$  y



$\gamma$ ) se tiene la *extinción de la enfermedad*, la *persistencia* de la misma y si existe al menos *proceso estacionario*. En la literatura<sup>16</sup> usualmente éstas condiciones se presentan en términos del *número reproductivo básico*, razón por la cual se conservará dicho enfoque en este trabajo y se definirá un *número reproductivo básico* para los *modelos epidemiológicos estocásticos* propuestos.

Si bien ya se posee una *variable reproductiva básica* una desventaja de ésta es no “formar parte” de las *condiciones suficientes* de la *estabilidad*, teoremas enunciados y demostrados en la sección anterior. Las *condiciones* para la *estabilidad* son de *tipo numérico* en función de  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $v$ ,  $\gamma$  y ningún momento de *tipo aleatorio* (en términos de *variables aleatorias*), razón por la cual se debe tener un *número reproductivo básico* para los *modelos estocásticos*. El primer intento para definir tal valor ha sido *vía integral*, sin embargo, bajo este método no se tiene un *número*, por consiguiente se procede a definir  $R_0$  como una *condición suficiente* de la *estabilidad asintótica*, enfoque abordado en la siguiente *subsección*:

### 2.6.2. La definición de $R_0$ como una condición suficiente para la estabilidad

En la *sección 2.5* se mostraron las *condiciones suficientes* bajo las cuáles los *valores iniciales*  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  y  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$  son *asintóticamente estables* en los *modelos SIS-estocástico* y *SEIR-estocástico*. Si se repite el *diagrama (2.b)*, pero esta vez para el modelo SIS-estocástico se obtiene el *diagrama (2.c)*

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Estabilidad} \\ \text{asintótica} \\ \text{para el modelo} \\ \text{SIS-estocástico} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} R_{0,E}^{SIS} < 1 \end{array}} \implies \boxed{\begin{array}{c} \left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right) \text{ es} \\ \text{asintóticamente} \\ \text{estable} \end{array}} \quad (2.c)$$

donde el valor de  $R_{0,E}^{SIS}$  es el **menor número** que implica que  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  es *asintóticamente estable* y se conocerá como el *número reproductivo básico* del modelo SIS-estocástico. La *hipótesis* del *teorema (2.5)* está dada por

$$0 < \beta \frac{\eta N}{\mu} < \gamma + \mu - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2},$$

si y sólo si,

$$0 < \frac{\beta \eta N}{\mu(\gamma + \mu)} + \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)} < 1,$$

siendo ésta una *condición suficiente* para tener la *estabilidad asintótica* de  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  en el modelo SIS-estocástico. De esta forma tendremos que una *primera*<sup>17</sup> *definición del número reproductivo básico* para el modelo SIS-estocástico está dada por

$$\tilde{R}_{0,E}^{SIS} := \frac{\beta \eta N}{\mu(\gamma + \mu)} + \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)}.$$

<sup>16</sup>Por ejemplo en [Broek], [Cantó], [Gray], [Has'minskii], [Jiang], [Lahrouz], [Lu], [Omari], [Ospina], [Tornatore] y [Zhou]

<sup>17</sup>Se dice una *primera* porque en el *capítulo 4* al hacer las *simulaciones de las trayectorias*  $S(t)$  e  $I(t)$  del modelo SIS-estocástico se encuentra que la *estabilidad asintótica* está determinada por una cantidad  $R_{0,E}^{SIS}$  menor que  $\tilde{R}_{0,E}^{SIS}$ .

sin embargo, al hacer las *simulaciones de las trayectorias* de  $S(t)$  y de  $I(t)$  (sección 4.2.2, capítulo 4, conjetura 4.1) se puede determinar que bajo la siguiente *condición numérica*<sup>18</sup>

$$0 < \beta N < \frac{\beta \eta N}{\mu(\gamma + \mu)} + \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)},$$

es decir,

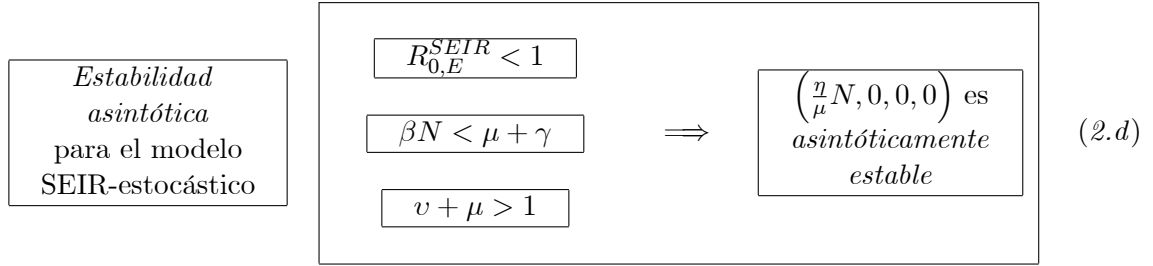
$$\widehat{R}_{0,E}^{SIS} := \frac{\beta \eta N}{\mu(\gamma + \mu)} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)} < 1$$

el punto  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  es *asintóticamente estable* en modelo *SIS-estocástico*. Como  $\widehat{R}_{0,E}^{SIS} < \widetilde{R}_{0,E}^{SIS}$ , entonces se define el *número reproductivo básico* para el modelo *SIS-estocástico* como:

**Definición 2.10.** *El número reproductivo básico del modelo SIS-estocástico está definido por:*

$$R_{0,E}^{SIS} := \widehat{R}_{0,E}^{SIS} = \frac{\beta \eta N}{\mu(\gamma + \mu)} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)}. \quad (2.32)$$

Para el modelo *SEIR-estocástico* al repetir el diagrama (2.b) se obtiene el diagrama (2.d)



donde  $R_{0,E}^{SEIR}$  es el **menor número** que implica que  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$  es *asintóticamente estable* y se conocerá como el *número reproductivo básico* para el modelo *SEIR-estocástico*. La primera hipótesis del teorema (2.6) (de donde se tomará el valor de  $R_{0,E}^{SEIR}$ ) está dada por

$$0 < v\beta \frac{\eta N}{\mu} < (\mu + \gamma)(\mu + v) + \frac{v^2 \sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2},$$

si y sólo si,

$$0 < \frac{v\beta \eta N}{\mu(\gamma + \mu)(v + \mu)} + \frac{v^2 \sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)(v + \mu)} < 1,$$

siendo una *condición suficiente* para tener la *estabilidad asintótica* de  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$  en el modelo *SEIR-estocástico*. De esta forma tendremos que una *primera*<sup>19</sup> *definición del número reproductivo básico* para el modelo *SEIR-estocástico* está dada por

$$\widetilde{R}_{0,E}^{SEIR} := \frac{v\beta \eta N}{\mu(\gamma + \mu)(v + \mu)} + \frac{v^2 \sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)(v + \mu)},$$

<sup>18</sup>Esta condición es sugerida en [Tornatore, pág. 114-115] para el modelo *SIR-estocástico*. En dicho documento no se especifica con qué base o bajo qué criterio se hace tal sugerencia.

<sup>19</sup>Al hacer las *simulaciones de las trayectorias*  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  del modelo *SEIR-estocástico* se encuentra que la *estabilidad asintótica* está determinada por una cantidad  $R_{0,E}^{SEIR}$  menor que  $\widetilde{R}_{0,E}^{SEIR}$ .

sin embargo, al hacer las *simulaciones de las trayectorias* de  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  (sección 4.2.2, capítulo 4) se puede determinar que bajo la siguiente *condición numérica*

$$\widehat{R}_{0,E}^{SEIR} := \frac{v\eta\beta N}{\mu(\gamma + \mu)(v + \mu)} - \frac{v^2\sigma^2\eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)(v + \mu)} < 1,$$

el punto  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)$  es *asintóticamente estable* en modelo *SEIR-estocástico*.

Como  $\widetilde{R}_{0,E}^{SEIR} > \widehat{R}_{0,E}^{SEIR}$ , entonces la definición del *número reproductivo básico* para el modelo *SEIR-estocástico* corresponde a:

**Definición 2.11.** *El número reproductivo básico del modelo SEIR-estocástico está definido por:*

$$R_{0,E}^{SEIR} = \widehat{R}_{0,E}^{SEIR} = \frac{v\eta\beta N}{\mu(\gamma + \mu)(v + \mu)} - \frac{v^2\sigma^2\eta^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)(v + \mu)}. \quad (2.33)$$

Notemos que de las definiciones de *variable aleatoria reproductiva básica* y de *número reproductivo básico* para los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico se tienen las siguientes desigualdades:

$$R_{0,E}^{SIS} \leq \mathbb{E}[R_{0,e}^{SIS}] = R_0^{SIS} \leq \widetilde{R}_{0,E}^{SIS}, \quad (2.34)$$

$$R_{0,E}^{SEIR} \leq \mathbb{E}[R_{0,e}^{SEIR}] = R_0^{SEIR} \leq \widetilde{R}_{0,E}^{SEIR}. \quad (2.35)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & P\left(R_{0,E}^{SEIR} \leq R_{0,e}^{SEIR} \leq \widetilde{R}_{0,E}^{SEIR}\right) \\ &= P\left(\frac{R_{0,E}^{SEIR} - \mathbb{E}[R_{0,e}^{SIS}]}{\sqrt{\mathbb{V}[R_{0,e}^{SIS}]}} \leq \frac{R_{0,e}^{SEIR} - \mathbb{E}[R_{0,e}^{SIS}]}{\sqrt{\mathbb{V}[R_{0,e}^{SIS}]}} \leq \frac{\widetilde{R}_{0,E}^{SEIR} - \mathbb{E}[R_{0,e}^{SIS}]}{\sqrt{\mathbb{V}[R_{0,e}^{SIS}]}}\right) \\ &= P\left(-\frac{\sigma\eta N\sqrt{\mu + \gamma}}{\sqrt{2}\mu} \leq Z \leq \frac{\sigma\eta N\sqrt{\mu + \gamma}}{\sqrt{2}\mu}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sigma\eta N\sqrt{\mu + \gamma}}{\sqrt{2}\mu}\right) - 1, \end{aligned}$$

donde  $\Phi(x)$  es la *función de distribución* de la *variable aleatoria* con  $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La probabilidad dada por

$$P\left(R_{0,E}^{SEIR} \leq R_{0,e}^{SEIR} \leq \widetilde{R}_{0,E}^{SEIR}\right),$$

está definida siempre y cuando

$$0 \leq 2\Phi\left(\frac{\sigma\eta N\sqrt{\mu + \gamma}}{\sqrt{2}\mu}\right) - 1 \leq 1,$$

es decir,

$$\frac{1}{2} \leq \Phi\left(\frac{\sigma\eta N\sqrt{\mu + \gamma}}{\sqrt{2}\mu}\right) \leq 1,$$

la desigualdad anterior se tiene, si y sólo si,  $\sigma\eta N_{\mu}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mu+\gamma}{2}} \geq 0$ , es decir,  $\eta, \gamma \geq 0$  y la *tasa de mortalidad*,  $\mu$ , sea mayor que cero.

Por otra parte, si  $\mu$  tiende a infinito ( $\mu \rightarrow +\infty$ ) entonces  $\sigma\eta N_{\mu}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mu+\gamma}{2}}$  tiende a infinito, por lo tanto,  $\Phi\left(\sigma\eta N_{\mu}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mu+\gamma}{2}}\right)$  tiende a uno y así  $P\left(R_{0,E}^{SEIR} \leq R_{0,e}^{SEIR} \leq \tilde{R}_{0,E}^{SEIR}\right)$  tiende a cero. Esto quiere decir que entre mayor sea la *tasa de mortalidad* menor es la probabilidad de que la variable aleatoria reproductiva básica tome valores entre  $R_{0,E}^{SEIR}$  y  $\tilde{R}_{0,E}^{SEIR}$ .

## Capítulo 3

# Los modelos SIS y SEIR estocásticos

En este capítulo se demostrará que efectivamente los *modelos epidemiológicos estocásticos SIS* y *SEIR* tienen solución, a pesar de no tenerse una *ecuación explícita* para las mismas. Además se verificará bajo qué condiciones ambos modelos se *extinguen*, es decir, bajo qué condiciones la población infectada tiende a desaparecer. Una vez se conoce la existencia, la pregunta será bajo qué condiciones la *población promedio infectada* será mayor que cero, problema que llamaremos *persistencia en la media*. Este problema es importante porque determina bajo qué *condiciones suficientes* hay *prevalencia* de la epidemia para un tiempo *suficientemente grande*. Finalmente para determinar si existe o no un *comportamiento asintótico*<sup>1</sup>, el cual estará determinado por la existencia de una *distribución estacionaria*.

### 3.1. La existencia y la unicidad de la solución

El primer aspecto fundamental antes de empezar a analizar un modelo epidemiológico, en este caso estocástico, es determinar si efectivamente éste tiene alguna solución positiva, es decir, determinar si para todo tiempo  $t \geq 0$  existe población susceptible, infectada, expuesta o recuperada, habiendo siempre individuos en alguno de los grupos. En el caso particular de los modelos epidemiológicos estocásticos, dado que utilizamos el movimiento browniano (en la *componente aleatoria*), se hace necesario determinar si existe *casi seguramente* la solución, es decir, que la probabilidad de tener individuos susceptibles, recuperados, expuestos o infectados (dependiendo del modelo), en cualquier instante de tiempo, sea siempre uno. Los *teoremas 3.1 y 3.2* corresponden, respectivamente, a la existencia y a la unicidad de la solución para los modelos SIS y SEIR estocásticos. Las demostraciones se harán con base en [Gray, pág. 6–7] y [Liu, pág. 157–158].

En la demostración de la *existencia* de las *soluciones* de ambos *modelos estocásticos* se *asume* las EDE definidas por los *modelos SIS-estocástico* y *SEIR-estocástico* tienen *coeficientes Lipschitz localmente continuos* (definición A.8). Se utiliza además la siguiente proposición:

**Proposición 3.1.** ([Mao, pág. 250]) Sean  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  la filtración browniana y  $u(t, \omega), b(t, \omega)$  dos funciones Lipschitz localmente continuas. Sea una EDE dada por

$$dX(t, \omega) = u(t, \omega) dt + v(t, \omega) dB(t, \omega),$$

entonces existe un tiempo de explosión  $\tau_e > 0$  (definición 1.44) con respecto a la filtración  $\{\mathfrak{F}_{x(0),t}\}_{t \geq 0}$  (como en la definición 1.60) tal que la EDE tiene una única solución para todo  $t \in [0, \tau_e)$ .

---

<sup>1</sup>Por *comportamiento asintótico* se entenderá por *comportamiento para un tiempo infinito*.

*Demostración:* [Fernandez, pág. 6]. ■

De acuerdo con la *nota 2.1*, los modelos *SIS-estocástico* y *SEIR-estocástico* se considerará  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un *movimiento browniano* sobre  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , determinado por las *poblaciones* que tenga cada *enfermedad*,  $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \geq 0}$  como la *filtración browniana* y las *filtraciones*  $\{\mathfrak{S}_{(S(0), I(0)), t}\}_{t \geq 0}$  y  $\{\mathfrak{S}_{(S(0), E(0), I(0), R(0)), t}\}_{t \geq 0}$  dadas en la *nota 2.1*.

**Teorema 3.1 (existencia de la solución para el modelo SIS-estocástico y para el modelo SEIR-estocástico).** *Sea  $I(0) \in (0, N)$  entonces existe  $I(t) \in (0, N)$  para todo  $t \geq 0$  tal que  $P(I(t) \in (0, N), \text{ para todo } t \geq 0) = 1$  en los modelos (i) SIS-estocástico y (ii) SEIR-estocástico.*

*Demostración:* (i) De la *suposición 2.1*. se tiene que los *coeficientes de las ecuaciones diferenciales estocásticas* de los modelos *SIS-estocástico* son *Lipschitz localmente continuos*, entonces para algún valor inicial  $(S(0), I(0)) \in (\mathbb{R}^+)^2$  existe una *única solución*  $(S(t), I(t))$  para todo  $t \in [0, \tau_e^{SIS})$  donde  $\tau_e^{SIS}$  es un *tiempo de explosión* con respecto a  $\{\mathfrak{S}_{(S(0), I(0)), t}\}_{t \geq 0}$ , luego  $I(t, \omega) \rightarrow +\infty$  para casi todo  $\omega \in \Omega$  cuando  $t \rightarrow \tau_e^{SIS}$ .

Para demostrar la existencia de una *solución global*, basta con demostrar que  $\tau_e^{SIS} = +\infty$  con *probabilidad uno*, es decir, existe una solución  $(S(t), I(t))$  *casi seguramente* para todo  $t \in [0, +\infty)$  (suponiendo  $\tau_e^{SIS} = +\infty$ ). Para probar lo anterior vamos a definir  $\tau_*^{SIS}$  como sigue

$$\tau_*^{SIS} := \inf \{t \in [0, \tau_e^{SIS}] : S(t) \leq 0 \text{ ó } I(t) \leq 0\}.$$

Dado que todo  $t \in [0, \tau_e^{SIS}]$  son *tiempos de paro*<sup>2</sup> (*proposición 1.1*) con respecto a la filtración  $\{\mathfrak{S}_{(S(0), I(0)), t}\}_{t \geq 0}$  podemos reescribir el conjunto  $\{\omega \in \Omega : \tau_*^{SIS}(\omega) \leq t\}$  para todo  $t \geq 0$  como

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : \tau_*^{SIS}(\omega) \leq t\} &= \bigcup_{0 \leq \tau \leq \tau_e^{SIS}} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t \text{ tal que } S(t) \leq 0 \text{ ó } I(t) \leq 0\} \\ &= \bigcup_{\substack{0 \leq \tau \leq \tau_e^{SIS} \\ \tau \in \mathbb{Q}}} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \cap \{\omega \in \Omega : S(t) \leq 0 \text{ ó } I(t) \leq 0\}, \end{aligned}$$

observemos que  $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathfrak{S}_{(S(0), I(0)), t}$  para todo  $t \geq 0$  (por ser todos los  $\tau$  tiempos de paro) y  $\{\omega \in \Omega : S(t) \leq 0 \text{ ó } I(t) \leq 0\} \in \mathfrak{S}_{(S(0), I(0)), t}$  (de la *nota 2.1*.  $(S(t), I(t))$  es  $\mathfrak{S}_{(S(0), I(0)), t}$ -medible), entonces  $\tau_*^{SIS}$  es un  $\mathfrak{S}_{(S(0), I(0)), t}$ -tiempo de paro.

Por la definición de  $\tau_*^{SIS}$  tenemos que  $\tau_*^{SIS} < \tau_e^{SIS}$ . La demostración se hace **por contradicción** suponiendo que  $\tau_*^{SIS} < +\infty$  *casi siempre*, es decir, existe  $+\infty > T_1 > 0$  tal que

$$P(\tau_*^{SIS} < T_1) = 1.$$

Definamos la función

$$V : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (S(t), I(t)) & \longrightarrow & \ln(S(t)I(t)) \end{array}.$$

Sea  $X(t) := (S(t), I(t))^T$ , notemos que usando la notación del *teorema 1.6*

$$V_t(X(t)) = 0, V_X(X(t)) = \left( \frac{1}{S(t)}, \frac{1}{I(t)} \right) \text{ y } V_{X^2}(X(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{S^2(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I^2(t)} \end{pmatrix}$$

---

<sup>2</sup>Esto teniendo en cuenta que toda *constante* es un *tiempo de paro* y todo *tiempo de explosión* es un *tiempo de paro*.

De acuerdo con el modelo SIS–estocástico, tomando

$$f(X(t)) := \begin{pmatrix} \eta N - \beta S(t) I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t) \\ \beta S(t) I(t) - (\mu + \gamma) I(t) \end{pmatrix}^T \text{ y}$$

$$g(X(t)) := \begin{pmatrix} -\sigma S(t) I(t), & \sigma S(t) I(t) \end{pmatrix}^T,$$

Como  $S(t)$  e  $I(t)$  están bien definidos para el sistema EDE (2.22) en  $[0, \tau_e^{SIS}]$  entonces dichos procesos son *procesos de Itô*, por lo utilizaremos la *fórmula de Itô*<sup>3</sup> para calcular  $dV(S(t) I(t))$  con  $V(S(t), I(t)) = \ln S(t) I(t)$ . Para ello notemos que

$$\begin{aligned} \cdot \quad V_X(X(t)) f(X(t)) &= \left( \frac{1}{S(t)}, \frac{1}{I(t)} \right) f(X(t)) \\ &= \frac{\eta N}{S(t)} - \beta I(t) + \gamma \frac{I(t)}{S(t)} - \mu + \beta S(t) - (\mu + \gamma), \\ \cdot \quad \frac{1}{2} \text{tr} [g^T(X(t)) V_{X^2}(X(t)) g(X(t))] &= \frac{1}{2} g^T(X(t)) \begin{pmatrix} -\frac{1}{S^2(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I^2(t)} \end{pmatrix} g(X(t)) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma S(t)}{I(t)}, -\frac{\sigma S(t)}{I(t)} \right) g(X(t)) = -\frac{\sigma^2}{2} (S^2(t) + I^2(t)), \\ \cdot \quad V_X(X(t)) g(X(t)) &= \left( \frac{1}{S(t)}, \frac{1}{I(t)} \right) g(X(t)) = -\sigma I(t) + \sigma S(t), \end{aligned}$$

de manera que  $\ln S(t) I(t)$  es un *proceso de Itô* (teorema 1.5) y  $d \ln(S(t) I(t))$  está dado por

$$\begin{aligned} d \ln(S(t) I(t)) &= \\ &= \left( \frac{\eta N}{S(t)} - \beta (I(t) - S(t)) + \gamma \frac{I(t)}{S(t)} - 2\mu - \gamma - \frac{\sigma^2}{2} (S^2(t) + I^2(t)) \right) dt + \sigma h(t) dB(t) \\ &\geq \left( \beta (S(t) - I(t)) - 2\mu - \gamma - \frac{\sigma^2}{2} (S^2(t) + I^2(t)) \right) dt + \sigma h(t) dB(t), \end{aligned}$$

donde  $h(t) = S(t) - I(t)$ . Al considerar la función

$$\xi(S(t), I(t)) := \beta (S(t) - I(t)) - \frac{\sigma^2}{2} (S^2(t) + I^2(t)) - (2\mu + \gamma),$$

tendremos que

$$d \ln(S(t) I(t)) \geq \xi(S(t), I(t)) dt + \sigma h(t) dB(t),$$

por consiguiente

$$\ln(S(t) I(t)) \geq \ln(S(0) I(0)) + \int_0^t \xi(S(u), I(u)) du + \sigma \int_0^t h(u) dB(u). \quad (3.1)$$

Por definición de  $\tau_*^{SIS}$  es claro que  $I(\tau_*^{SIS}) \leq 0$  o  $S(\tau_*^{SIS}) \leq 0$  de manera que

---

<sup>3</sup> $\ln(S(t) I(t))$  es una *función continua* con *derivadas parciales continuas* considerando que  $S(t)$  e  $I(t)$  son *continuas distintas de cero para todo  $t \geq 0$*  (suposición 2.1).

$$\lim_{t \rightarrow \tau_*^{SIS}} \ln(S(t)I(t)) \leq \lim_{t \rightarrow 0} \ln(t) = -\infty,$$

sin embargo, como  $\ln(S(0)I(0))$  es *finito* (partiendo del caso extremo en el cual  $I(0) = 1$  y  $S(0) = N - 1$ ),  $\sigma \int_0^t h(t) dB(u)$  está definida en  $[0, \tau_e^{SIS})$  (por ser  $\ln(S(t)I(t))$  un *proceso de Itô*) y  $\int_0^t \xi(S(u), I(u)) du$  está definida en  $[0, \tau_e^{SIS})$  (por ser  $\xi(S(u), I(u))$  una función continua), entonces se tiene que

$$-\infty \geq \ln(S(0)I(0)) + \lim_{t \rightarrow \tau_*^{SIS}} \int_0^t \xi(S(u), I(u)) du + \sigma \lim_{t \rightarrow \tau_*^{SIS}} \int_0^t h(t) dB(u) > -\infty, \quad (3.2)$$

siendo esta una contradicción ( $\rightarrow \leftarrow$ ) obtenida de suponer que  $\tau_*^{SIS} < +\infty$ , por tanto  $\tau_*^{SIS} = +\infty$  con probabilidad uno y así  $(S(t), I(t))$  existe para todo  $t \in [0, +\infty)$  probándose la *existencia de la solución global*. La *unicidad* se tiene puesto que en la *proposición 3.1* se tiene como *consecuencia* que la *solución es única* en  $[0, \tau_e]$ , es decir,  $(S(t), I(t))$  es una *única solución* para todo  $t \in [0, +\infty)$ .

(ii) Dado que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales estocásticas de los modelos *SEIR-estocástico* son *localmente Lipschitzianos continuos* (suposición 2.1), entonces para algún valor inicial  $(S(0), I(0), E(0)) \in (\mathbb{R}^+)^3$  existe una única solución  $(S(t), I(t), E(t))$  para todo  $t$  en el intervalo  $[0, \tau_e^{SEIR})$  donde  $\tau_e^{SEIR}$  es un *tiempo de explosión* con respecto a la *filtración*  $\{\mathfrak{F}_{(S(0), E(0), I(0), R(0)), t}\}_{t \geq 0}$ , es decir,  $I(\omega, t) \rightarrow +\infty$  para casi todo  $\omega \in \Omega$  cuando  $t \rightarrow \tau_e^{SEIR}$ .

Para demostrar la existencia de una *solución global* basta con demostrar que  $\tau_e^{SEIR} = +\infty$  *casi siempre*, es decir,  $(S(t), I(t), E(t))$  está definida para todo  $t \in [0, +\infty)$  bajo el hecho de que  $\tau_e^{SEIR} = +\infty$ . Para probar lo anterior vamos a definir  $\tau_*^{SEIR}$  como sigue

$$\tau_*^{SEIR} := \inf \{t \in [0, \tau_e^{SEIR}] : S(t) \leq 0, E(t) \leq 0 \text{ ó } I(t) \leq 0\},$$

se puede probar que  $\tau_*^{SEIR}$  es un *tiempo de paro* de manera similar como se hizo en (i) para ver que  $\tau_*^{SIS}$  es un *tiempo de paro*.

Por la definición de  $\tau_*^{SEIR}$  tenemos que  $\tau_*^{SEIR} < \tau_e^{SEIR}$ . Al suponer **por contradicción** que  $\tau_*^{SEIR} < +\infty$  entonces  $\tau_*^{SEIR}$  es *finito* con *probabilidad uno*, es decir, existe  $T_2 > 0$  finita tal que

$$P(\tau_*^{SEIR} < T_2) = 1.$$

Definamos la función

$$W : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+)^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (S(t), E(t), I(t))^T & \longrightarrow & \ln(S(t)E(t)I(t)) \end{array}.$$

De acuerdo con el modelo SEIR-estocástico, tomando

$$X(t) = (S(t), E(t), I(t))^T, g(X(t)) = \sigma S(t)I(t) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \text{ y}$$

$$f(X(t)) = \begin{pmatrix} \eta N - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \beta S(t)I(t) - (v + \mu)E(t) \\ vE(t) - (\gamma + \mu)I(t) \end{pmatrix},$$

utilizaremos la *fórmula de Itô* para calcular  $dW(S(t)E(t)I(t))$  con



$$W(S(t), E(t), I(t)) = \ln[S(t) E(t) I(t)] \quad (4).$$

Como  $S(t)$ ,  $E(t)$  e  $I(t)$  están bien definidos para el sistema EDE (2.23) en  $[0, \tau_e^{SIS})$  entonces dichos procesos son procesos de Itô, por lo utilizaremos la fórmula de Itô para calcular  $dW(S(t), E(t), I(t))$  como sigue

$$\begin{aligned} W_X(X(t)) f(X(t)) &= \left( \frac{1}{S(t)}, \frac{1}{E(t)}, \frac{1}{I(t)} \right) f(X(t)) \\ &= \frac{\eta N}{S(t)} - \beta I(t) + \frac{\beta S(t) I(t)}{E(t)} + v \frac{E(t)}{I(t)} - 3\mu - v - \gamma, \\ W_X(X(t)) g(X(t)) &= \left( \frac{1}{S(t)}, \frac{1}{E(t)}, \frac{1}{I(t)} \right) g(X(t)) = \sigma \left( -I(t) + \frac{S(t) I(t)}{E(t)} \right), \\ \frac{1}{2} \text{tr} [g^T(X(t)) W_{X^2}(X(t)) g(X(t))] \\ &= \left( \frac{\sigma I(t)}{2S(t)}, -\frac{\sigma S(t) I(t)}{2E^2(t)}, 0 \right) g(X(t)) = -\frac{\sigma^2}{2} \left( I^2(t) + \frac{S^2(t) I^2(t)}{E^2(t)} \right), \end{aligned}$$

donde

$$W_{X^2}(X(t)) = \begin{pmatrix} -1/S^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & -1/E^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & -1/I^2(t) \end{pmatrix}$$

de manera que  $\ln(S(t) E(t) I(t))$  es un proceso de Itô (teorema 1.5) y  $d \ln(S(t) E(t) I(t))$  está dado por

$$\begin{aligned} d \ln(S(t) E(t) I(t)) &= \left( k(t) + \frac{\beta S(t) I(t)}{E(t)} + v \frac{E(t)}{I(t)} - \frac{\sigma^2}{2} \left( I^2(t) + \frac{S^2(t) I^2(t)}{E^2(t)} \right) \right) dt \\ &\quad + \sigma j(t) dB(t) \\ &= \left( k(t) + \frac{S(t) I(t)}{E(t)} \left( \beta - \frac{\sigma^2 S(t) I(t)}{2E(t)} \right) + v \frac{E(t)}{I(t)} - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} \right) dt \\ &\quad + \sigma j(t) dB(t) \end{aligned}$$

donde

$$k(t) = \frac{\eta N}{S(t)} - \beta I(t) - 3\mu - v - \gamma \text{ y } j(t) = \frac{S(t) I(t)}{E(t)} - I(t).$$

Supongamos primero que la población es constante. Vamos a considerar dos casos:

*Caso 1:*  $0 < E(t) < 1$ , si y sólo si,  $1/E(t) > 1$ , por consiguiente tendremos que

---

<sup>4</sup> $\ln(S(t) E(t) I(t))$  es una función continua con derivadas parciales continuas considerando que  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  son continuas distintas de cero para todo  $t \geq 0$  (suposición 2.1).

$$\begin{aligned}
d \ln (S(t) E(t) I(t)) &\geq \left( k(t) + \frac{S(t) I(t)}{2E(t)} (2\beta N E(t) - \sigma^2 S(t) I(t)) - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} \right) dt \\
&\quad + \sigma j(t) dB(t) \\
&\stackrel{5}{\geq} \left( k(t) + \frac{S(t) I(t)}{2N} (2\beta N E(t) - \sigma^2 S(t) I(t)) - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} \right) dt \\
&\quad + \sigma j(t) dB(t).
\end{aligned}$$

Caso 2:  $1 \leq E(t) \leq N$ , si y sólo si,  $-1 \leq -1/E(t)$  ( $-1 \leq -1/E^2(t)$ ), por consiguiente

$$\begin{aligned}
d \ln (S(t) E(t) I(t)) &\geq \left( k(t) - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} - \frac{\sigma^2 S^2(t) I^2(t)}{2E(t)} \right) dt + \sigma j(t) dB(t) \\
&\stackrel{6}{\geq} \left( k(t) - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} - \frac{\sigma^2 S^2(t) I^2(t)}{2N} \right) dt + \sigma j(t) dB(t)
\end{aligned}$$

Definamos ahora las funciones

$$\begin{aligned}
\psi(S(t), E(t), I(t)) &:= k(t) + \min\{u(t), z(t)\} \text{ y} \\
\vartheta(S(t), E(t), I(t)) &= \sigma(-I(t) + S(t) I(t)),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{S(t) I(t)}{E(t)} \left( \beta - \frac{\sigma^2 S(t) I(t)}{2E(t)} \right) + \frac{vE(t)}{I(t)} - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} \text{ y} \\
z(t) &= -\frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} - \frac{\sigma^2 S^2(t) I^2(t)}{2N},
\end{aligned}$$

de manera de que

$$d \ln (S(t) E(t) I(t)) \geq \psi(S(t), E(t), I(t)) + \sigma j(t) dB(t),$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
\ln [S(t) E(t) I(t)] &\geq \ln (S(0) E(0) I(0)) + \int_0^t \psi(S(u), E(u), I(u)) du \\
&\quad + \sigma \int_0^t j(u) dB(u),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Por definición de  $\tau_*^{SEIR}$  es claro que  $I(\tau_*^{SEIR}) \leq 0$ ,  $S(\tau_*^{SEIR}) \leq 0$  o  $E(\tau_*^{SEIR}) \leq 0$  de manera que

$$\lim_{t \rightarrow \tau_*^{SEIR}} \ln [S(t) E(t) I(t)] \leq \lim_{t \rightarrow 0} \ln (t) = -\infty,$$

<sup>5</sup>Como  $E(t) \leq N$  entonces  $1/E(t) \geq 1/N$  para todo  $t \geq 0$ , siempre y cuando  $\mu = \eta$ . En caso de que  $\eta > \mu$ , entonces la población inicial susceptible  $N$  es menor que  $\frac{\eta}{\mu}N$ , por consiguiente,  $1/E(t) \geq 1/\frac{\eta}{\mu}N$  para todo  $t \geq 0$ . Finalmente, si  $\mu > \eta$  entonces  $\frac{\eta}{\mu}N < N$ , de manera que para todo  $t \geq 0$  se tiene que  $1/E(t) \geq 1/m$ , donde  $m = \max_{t \geq 0} E(t)$ .

<sup>6</sup>La misma nota de pie de página anterior.

Observemos que

- (a)  $\ln(S(0)E(0)I(0))$  es finito o  $-\infty$  (partiendo del caso extremo en el cual  $I(0) = 0$ ,  $E(0) = 1$  y  $S(0) = N - 1$ ),  
 (b)  $\sigma \int_0^t j(t) dB(u)$  está definida en  $[0, \tau_e^{SEIR})$ , por ser  $\ln(S(t)E(t)I(t))$  un *proceso de Itô* y  
 (c)  $\sigma \int_0^t \psi(S(u), E(u), I(u)) du$  está definida en  $[0, \tau_e^{SEIR})$ , puesto que  $S(t)$ ,  $E(t)$  e  $I(u)$  son *continuas* no nulas (*suposición 2.1.*), además  $\psi(S(t), E(t), I(t))$  presenta a lo sumo un *punto de discontinuidad* en  $E(t) = 1$ , por consiguiente  $\psi(S(t), E(t), I(t))$  es integrable ([Rudin, teorema 6.10, pág. 126]).

Por (a), (b) y (c) se tiene que el valor del lado derecho de la desigualdad (3.3) para  $t \rightarrow \tau_*^{SEIR}$  está dado por

$$\begin{aligned} -\infty \geq & \ln(S(0)E(0)I(0)) + \lim_{t \rightarrow \tau_*^{SEIR}} \int_0^t \psi(S(u), E(u), I(u)) du \\ & + \sigma \lim_{t \rightarrow \tau_*^{SEIR}} \int_0^t j(t) dB(u) > -\infty, \end{aligned} \quad (3.4)$$

siendo esta una contradicción ( $\rightarrow \leftarrow$ ), la cual se obtiene de suponer que  $\tau_*^{SEIR} < +\infty$ , por tanto  $\tau_*^{SEIR} = +\infty$  y así  $(S(t), E(t), I(t))$  existe para todo  $t \in [0, +\infty)$  probándose la *existencia de la solución global*. La *unicidad* se tiene puesto que en la *proposición 3.1* se tiene como *consecuencia* que la *solución es única* en  $[0, \tau_e)$ , es decir,  $(S(t), E(t), I(t), R(t))$  es una *única solución* para todo  $t \in [0, +\infty)$ .

Si  $\mu < \eta$  se hace la misma demostración utilizando que  $E(t) \leq \frac{\eta}{\mu} N$  para todo  $t \geq 0$  y si  $\mu > \eta$  se utiliza que  $E(t) \leq m$  para todo  $t \geq 0$ , donde  $m = \max_{t \geq 0} E(t)$ . ■

Con la existencia de la solución para los modelos SIS—estocástico y SEIR—estocástico nos podemos preguntar cómo se puede encontrar la solución de ambos sistemas. Un método estaría centrado en resolver *analíticamente* tales sistemas de ecuaciones, sin embargo, aún conociendo los parámetros no es un camino viable por la posible dificultad de los correspondientes análisis. Otra forma de abordar el problema consiste en estudiar *numéricamente* el problema utilizando *métodos numéricos estocásticos*. Las simulaciones a las soluciones de algunos modelos SIS—estocástico y SEIR—estocástico, se presentan en la *sección 4.2*.

Al tener *soluciones* los *sistemas EDE* (2.22) y (2.23) se tiene que  $S(t)$  e  $I(t)$  en el modelo *SIS—estocástico* y  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  en el modelo *SEIR—estocástico* son *procesos de Itô* (*ejemplo 1.15*), razón por la cual es posible utilizar la fórmula de Ito en las secciones 2.2, 2.3 y 2.4 de este capítulo.

### 3.2. La extinción

Se dice que un modelo epidemiológico estocástico **tiene extinción** si la población infectada tiende a cero en un tiempo suficientemente grande casi siempre, es decir, si

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0, \text{ casi siempre.}$$

En esta sección se presentan los teoremas con las condiciones suficientes para que los modelos SIS—estocástico y SEIR—estocástico tengan extinción, para ello se utilizará el *lema 3.1* enunciado inmediatamente.

**Lema 3.1.** ([Liu, pág. 158]) Sean  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ,  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  la filtración browniana y  $\{M(t)\}_{t \geq 0}$  una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -martingala local continua con  $M(0) = 0$  casi siempre. Entonces para todo  $\delta > 1$  y para cualesquiera  $v_n, \tau_n$  sucesiones positivas existe  $\eta(\omega) \in \mathbb{Z}^+$  para casi todo  $\omega \in \Omega$  tal que

$$\sigma \int_0^t M(u) dB(u) \leq \frac{1}{2} v_n \langle M(t), M(t) \rangle + \frac{\delta \ln n}{v_n}, \text{ para todo } t \text{ con } 0 \leq t \leq \tau_n \text{ y todo } n \geq \eta(\omega).^7$$

*Demostración*/: [Mao, pág. 158]. ■

La demostración de los siguientes dos teoremas se basa en [Liu, pág. 158] la cual se realiza para un *modelo SIR-estocástico*.

**Teorema 3.2 (extinción del modelo SIS-estocástico).** Sea  $(S(t), I(t))$  la solución al modelo SIS-estocástico con valor inicial  $(S(0), I(0))$ . Se tiene que

- (i)  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} < \frac{\beta}{2\sigma^2} - (\mu + \gamma)$  casi siempre.
- (ii) Si  $\frac{\beta}{2\sigma^2} < (\mu + \gamma)$  entonces el modelo SIS-estocástico tiene extinción y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\eta}{\mu} N$ .

*Demostración*: (i) Tenemos que el diferencial de  $I(t)$  para el modelo SIS-estocástico está dado por

$$dI(t) = (\beta S(t) I(t) - (\mu + \gamma) I(t)) dt + \sigma S(t) I(t) dB(t).$$

Aplicando la *fórmula de Itô*  $\ln I(t)$ , la cual es una función continua y derivable para todo  $t \geq 0$  (*suposición 2.1*) vamos a tener que

$$d \ln I(t) = \left( \beta S(t) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} S^2(t) \right) dt + \sigma S(t) dB(t).$$

De esta forma podemos escribir  $\ln I(t)$  como sigue

$$\ln I(t) = \ln I(0) + \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} S^2(u) \right) du + \sigma \int_0^t S(u) dB(u). \quad (3.5)$$

Sea  $M(t) := \sigma \int_0^t S(u) dB(u)$ . Como la integral dada por  $M(t)$  está bien definida, por ser  $S(t)$  continua<sup>8</sup> para todo  $t \geq 0$ , entonces  $S(\cdot) \in \mathcal{V}(0, +\infty)$  implicando que  $M(t)$  es una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -martingala local continua ( $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  es la *filtración browniana*) por el *teorema 1.4*, tal que  $M(0) = 0$  c.s. Por la *isometría de Itô*

$$\langle M(t), M(t) \rangle = \sigma^2 \int_0^t S^2(u) du,$$

por el *lema* anterior vamos a tener que para todo  $\delta > 1$  y para cualesquiera  $v_n, \tau_n$  sucesiones positivas, existe  $\eta(\omega) \in \mathbb{Z}^+$  para casi todo  $\omega \in \Omega$  tal que

$$\sigma \int_0^t S(u) dB(u) \leq \frac{1}{2} v_n \langle M(t), M(t) \rangle + \frac{\delta \ln n}{v_n}, \text{ para todo } t \text{ con } 0 \leq t \leq \tau_n \text{ y todo } n \geq \eta(\omega).$$

<sup>7</sup>La notación  $\langle \cdot \rangle$  de *producto interno* se aclara en la *notación 1.2*.

<sup>8</sup>Como  $S(t) \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  (*condición (ii)* de la *definición 1.60*) entonces se garantiza que  $\int_0^t S(u) dB(u)$  está definida para todo  $t \geq 0$ .

Tomando  $\delta = 2$ ,  $v_n = v > 0$  y  $\tau_n = n$  tendremos que para casi todo  $\omega \in \Omega$

$$\sigma \int_0^t S(u) dB(u) \leq \frac{v}{2} \langle M(t), M(t) \rangle + \frac{2 \ln n}{v}, \text{ para todo } t \text{ con } 0 \leq t \leq n \text{ y todo } n \geq \eta(\omega),$$

por la ecuación (3.5) se tendrá que

$$\begin{aligned} \ln I(t) \leq & \ln I(0) + \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} S^2(u) \right) du \\ & + \frac{v}{2} \langle M(t), M(t) \rangle + \frac{2 \ln n}{v}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

para todo  $t$  con  $0 \leq t \leq n$  y todo  $n \geq \eta(\omega)$ . Por la desigualdad (3.6) observamos que

$$\begin{aligned} \ln I(t) & \leq \ln I(0) + \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} S^2(u) \right) du + \frac{\sigma^2 v}{2} \int_0^t S^2(u) du + \frac{2 \ln n}{v} \\ & = \ln I(0) + \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} S^2(u) + \frac{\sigma^2 v}{2} S^2(u) \right) du + \frac{2 \ln n}{v} \\ \ln I(t) & \leq \ln I(0) + \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} (1-v) S^2(u) \right) du + \frac{2 \ln n}{v}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tomando  $0 < v < 1$  observamos que

$$\begin{aligned} 0 & > -\frac{\sigma^2}{2} (1-v) \left( S(u) - \frac{\beta}{\sigma^2 (1-v)} \right)^2 \\ & = -\frac{\sigma^2}{2} (1-v) \left( S^2(u) - \frac{2\beta S(u)}{\sigma^2 (1-v)} + \frac{\beta^2}{\sigma^4 (1-v)^2} \right) \\ & = -\frac{\sigma^2}{2} (1-v) S^2(u) + \beta S(u) - \frac{\beta^2}{2\sigma^2 (1-v)}, \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\frac{\beta^2}{2\sigma^2 (1-v)} > -\frac{\sigma^2}{2} (1-v) S^2(u) + \beta S(u), \quad (3.8)$$

de las desigualdades (3.7) y (3.8) se tiene que para todo  $t$  tal que  $0 \leq t \leq n$ , todo  $n \geq \eta(\omega)$  y casi todo  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \ln I(t) & < \ln I(0) + \int_0^t \left( -(\mu + \gamma) + \frac{\beta^2}{2\sigma^2 (1-v)} \right) du + \frac{2 \ln n}{v} \\ & = \ln I(0) + \left( -(\mu + \gamma) + \frac{\beta^2}{2\sigma^2 (1-v)} \right) t + \frac{2 \ln n}{v} \end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{\ln I(t)}{t} < \frac{\ln I(0)}{t} + \frac{\beta^2}{2\sigma^2 (1-v)} - (\mu + \gamma) + \frac{2 \ln n}{vt},$$

tomando  $t \rightarrow +\infty$  y por consiguiente  $n \rightarrow +\infty$  tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} < \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln I(0)}{t} + \frac{\beta^2}{2\sigma^2 (1-v)} - (\mu + \gamma) \right) + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln n}{vt},$$

para casi todo  $\omega \in \Omega$ . Tomando  $n$  tal que  $n-1 \leq t < n$  observamos de la regla de L'Hôpital

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln n}{vt} < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln n}{v(n-1)} = 0,$$

además  $\frac{1}{t} \ln I(0) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , por consiguiente

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} < \frac{\beta^2}{2\sigma^2(1-v)} - (\mu + \gamma),$$

como  $v > 0$  es una constante arbitraria menor que 1 entonces podemos tomar  $v$  tendiendo a cero, de manera que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} < \frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (\mu + \gamma) \text{ para casi todo } \omega \in \Omega.$$

(ii) Bajo el supuesto de que  $\beta^2 / (2\sigma^2) < (\mu + \gamma)$  vamos a tener que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} < \frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (\mu + \gamma) < 0,$$

Notemos que como  $\exp(\cdot)$  es una *función continua* entonces

$$\exp \left[ \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} \right] = \limsup_{t \rightarrow +\infty} [\exp \ln I^{1/t}(t)] = \limsup_{t \rightarrow +\infty} t \sqrt[t]{I(t)} < 0,$$

Consideremos la *sucesión*  $\{I^{1/n}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , la cual es *convergente* por el *criterio de la raíz*<sup>9</sup> ([Rudin, pág. 65-66]), es decir,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) = a$ , para algún  $-\infty < a < +\infty$ . Supongamos que  $a \neq 0$ , de esta forma:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln a}{t} = 0,$$

lo cual es una contradicción puesto que  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} < 0$ . De esta forma, necesariamente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) = 0$  y como  $I(t)$  es una *función continua* (*suposición 2.1*) entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ , el decir, se tiene la extinción del modelo SIS–estocástico.

Del sistema de EDE del modelo SIS–estocástico tenemos que  $d(S(t) + I(t))$  está dado por

$$\frac{d(S(t) + I(t))}{dt} = \eta N - \mu(I(t) + S(t)) \quad (3.9)$$

tomando  $y(t) = I(t) + S(t)$ ,  $g(t) = \eta N$  y  $p(t) = \mu$  para cada  $t \geq 0$ , entonces tendremos que la EDO (3.9) es del tipo  $dy/dt + p(t)y = g(t)$  ([Diprima, pág. 65-66]) donde la solución  $y$  está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\int_0^t \left\{ \exp \left( \int_0^u p(u) du \right) g(u) du \right\} + y(0)}{\exp \left( \int_0^t p(u) du \right)} \\ &= \frac{S(0) + I(0) + \int_0^t e^{\mu u} \eta N du}{e^{\mu t}} = \frac{S(0) + I(0) + \frac{\eta}{\mu} N e^{\mu t} - N}{e^{\mu t}}, \end{aligned}$$

<sup>9</sup>El criterio de la raíz para sucesiones afirma que si  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , entonces la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

tomando límite tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [I(t) + S(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(0) + I(0) + \frac{\eta}{\mu} N e^{\mu t} - N}{e^{\mu t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\eta}{\mu} N e^{\mu t}}{e^{\mu t}} = \frac{\eta N}{\mu},$$

y como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$  entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\eta}{\mu} N$ . ■

En la *demostración* del teorema anterior se tiene que la *solución* de la EDO (para el *modelo SIS con nacimientos y muertes*)

$$\frac{d}{dt} (S(t) + I(t)) = \eta N - \mu (I(t) + S(t)),$$

está dada por

$$S(t) + I(t) = \left[ S(0) + I(0) + \frac{\eta}{\mu} N e^{\mu t} - N \right] e^{-\mu t},$$

de esta manera si la *población inicial es completamente susceptible*, entonces  $S(0) = N$  e  $I(0) = 0$ , por tanto:

$$S(t) + I(t) = \frac{\eta}{\mu} N,$$

luego si la *población infectada tiende a 0* en el tiempo  $t$ ,  $I(t) \rightarrow 0$ , entonces la *población susceptible tiende a*  $\frac{\eta}{\mu} N$ . Del anterior razonamiento se tiene el siguiente *corolario*:

**Corolario 3.1.** *En el modelo SIS con nacimientos y muertes si la población inicial es completamente susceptible y la población infectada en un tiempo  $t$  tiende a cero, entonces la población susceptible en dicho tiempo tiende a  $\frac{\eta}{\mu} N$ .*

**Teorema 3.3 (extinción del modelo SEIR–estocástico).** *Sea  $(S(t), E(t), I(t))$  la solución al modelo SEIR–estocástico con valor inicial  $(S(0), E(0), I(0))$ . Se tiene que*

- (i)  $\frac{\ln E(t)}{t} < \frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (v + \mu)$  casi siempre.
- (ii) Si  $\frac{\beta^2}{2\sigma^2} < (v + \mu)$  entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\eta}{\mu} N$ .
- (iii) Si  $\frac{\beta^2}{2\sigma^2} < (v + \mu)$  entonces el modelo SEIR–estocástico tiene extinción.

*Demostración:* (i) De acuerdo con la ecuación EDE del modelo SEIR–estocástico tenemos que el diferencial de  $E(t)$  está dado por

$$dE(t) = (\beta S(t) I(t) - (v + \mu) E(t)) dt + \sigma S(t) I(t) dB(t).$$

Aplicando la *fórmula de Itô* a la función  $\ln E(t)$ , la cual es continua y derivable por la *suposición 2.1*, vamos a tener que

$$d \ln E(t) = \left( \frac{\beta S(t) I(t)}{E(t)} - (v + \mu) - \frac{\sigma^2 S^2(t) I^2(t)}{2E^2(t)} \right) dt + \frac{\sigma S(t) I(t)}{E(t)} dB(t).$$

De esta forma podemos escribir  $\ln E(t)$  como sigue

$$\begin{aligned} \ln E(t) = & \ln E(0) + \int_0^t \left( \frac{\beta S(u) I(u)}{E(u)} - (v + \mu) - \frac{\sigma^2 S^2(u) I^2(u)}{2E^2(u)} \right) du \\ & + \sigma \int_0^t \frac{S(u) I(u)}{E(u)} dB(u), \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sea  $L(t) := \frac{\sigma}{N} \int_0^t [(S(u)I(u))/E(u)] dB(u)$ . Como la integral dada por  $L(t)$  está bien definida por ser  $(S(t)I(t))/E(t)$  continua<sup>10</sup> para todo  $t \geq 0$ , entonces  $(S(t)I(t))/E(t) \in \mathcal{V}(0, +\infty)$  implicando que  $L(t)$  es una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -martingala local continua ( $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  es la filtración browniana) por el teorema 1.4, tal que  $L(0) = 0$  c.s. Por la isometría de Itô

$$\langle L(t), L(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{N^2} \int_0^t \frac{S^2(u)I^2(u)}{E^2(u)} du,$$

por el lema 3.1. vamos a tener que para todo  $\delta > 1$  y para cualesquiera  $v_n, \tau_n$  sucesiones positivas entonces existe  $\eta(\omega) \in \mathbb{Z}^+$  para casi todo  $\omega \in \Omega$  tal que

$$\sigma \int_0^t \frac{S(u)I(u)}{E(u)} dB(u) \leq \frac{1}{2} v_n \langle L(t), L(t) \rangle + \frac{\delta \ln n}{v_n}, \quad \forall t \text{ con } 0 \leq t \leq \tau_n \text{ y todo } n \geq \eta(\omega).$$

Tomando  $\delta = 2$ ,  $v_n = b > 0$  y  $\tau_n = n$  tendremos que para todo  $t$  con  $0 \leq t \leq n$  y todo  $n \geq \eta(\omega)$

$$\sigma \int_0^t \frac{S(u)I(u)}{E(u)} dB(u) \leq \frac{b}{2} \langle L(t), L(t) \rangle + \frac{2 \ln n}{b},$$

por la igualdad 3.10. se tendrá que

$$\begin{aligned} \ln E(t) \leq & \ln E(0) + \int_0^t \left( \frac{\beta S(u)I(u)}{E(u)} - (v + \mu) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{S^2(u)I^2(u)}{E^2(u)} \right) du \\ & + \int_0^t \frac{b\sigma^2 S^2(u)I^2(u)}{2E^2(u)} du + \frac{2 \ln n}{b}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

para todo  $t$  con  $0 \leq t \leq n$  y todo  $n \geq \eta(\omega)$ . De la desigualdad anterior observamos que

$$\begin{aligned} \ln E(t) &= \ln E(0) + \int_0^t \left( \frac{\beta S(u)I(u)}{E(u)} - (v + \mu) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{S^2(u)I^2(u)}{E^2(u)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b\sigma^2 S^2(u)I^2(u)}{2E^2(u)} \right) du + \frac{2 \ln n}{b} \\ \ln E(t) &\leq \ln E(0) + \int_0^t \left( \frac{\beta S(u)I(u)}{E(u)} - (v + \mu) - (1-b) \frac{\sigma^2}{2} \frac{S^2(u)I^2(u)}{E^2(u)} \right) du \\ &\quad + \frac{2 \ln n}{b} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tomando  $b > 0$  tal que  $b > 1$ , observamos que

$$\begin{aligned} 0 &> -(1-b) \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{S(u)I(u)}{E(u)} - \frac{\beta}{\sigma^2(1-b)} \right)^2 \\ &= -(1-b) \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{S^2(u)I^2(u)}{E^2(u)} - \frac{2\beta S(u)I(u)}{\sigma^2(1-b)E(u)} + \frac{\beta^2}{\sigma^4(1-b)^2} \right) \\ &= -(1-b) \frac{\sigma^2}{2} \frac{S^2(u)I^2(u)}{E^2(u)} + \frac{\beta S(u)I(u)}{E(u)} - \frac{\beta^2}{2\sigma^2(1-b)}, \end{aligned}$$

por consiguiente

<sup>10</sup> Por la suposición 2.1. la función  $\frac{S(t)I(t)}{E(t)}$  está definida y es continua, es decir,  $\frac{S(t)I(t)}{E(t)} \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  (condición (ii) de la definición 1.60) entonces se garantiza que  $\frac{\sigma}{N} \int_0^t [(S(u)I(u))/E(u)] dB(u)$  está definida para todo  $t \geq 0$ .



$$\frac{\beta^2}{2\sigma^2(1-b)} > -(1-b) \frac{\sigma^2}{2} \frac{S^2(u) I^2(u)}{E^2(u)} + \frac{\beta S(u) I(u)}{E(u)}.$$

Si suponemos que para algún  $t \geq 0$  se tiene que  $L(t)$  tiene a infinito, caso en el cual  $E(t)$  tiende a 0, entonces basta notar que al tomar dicho límite en la desigualdad anterior ésta se sigue conservando. De esta forma por la desigualdad (3.12) y por la desigualdad anterior se tiene que para todo  $t$  con  $0 \leq t \leq n$ , todo  $n \geq \eta(\omega)$  y casi todo  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \ln E(t) &< \ln E(0) + \int_0^t \left( -(v+\mu) + \frac{\beta^2}{2\sigma^2(1-b)} \right) du + \frac{2 \ln n}{b} \\ &= \ln E(0) + \left( -(v+\mu) + \frac{\beta^2}{2\sigma^2(1-b)} \right) t + \frac{2 \ln n}{b} \end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{\ln E(t)}{t} < \frac{\ln E(0)}{t} + \frac{\beta^2}{2\sigma^2(1-b)} - (v+\mu) + \frac{2 \ln n}{b},$$

razonando de manera análoga como se hizo en la prueba del *teorema 3.2. (i)* tendremos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln E(t)}{t} < \frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (v+\mu) \text{ para casi todo } \omega \in \Omega.$$

(ii) Bajo el supuesto de que  $\beta^2 / (2\sigma^2) < (v+\gamma)$  vamos a tener que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln E(t)}{t} < \frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (v+\mu) < 0,$$

como  $\exp(\cdot)$  es una *función continua* entonces

$$\exp \left[ \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln E(t)}{t} \right] = \limsup_{t \rightarrow +\infty} [\exp \ln E^{1/t}(t)] = \limsup_{t \rightarrow +\infty} t \sqrt[t]{E(t)} < 0.$$

Análogamente como se probó en el *teorema 3.2*, se tiene que la *sucesión*  $\{E^{1/n}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es *convergente* y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(n) = 0$ , lo cual implica que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$  por ser  $E(t)$  *continua* (*suposición 2.1*).

Del sistema de EDE del modelo SEIR–estocástico tenemos que  $d(S(t) + I(t))$  está dado por

$$d(S(t) + E(t)) = [N\eta - vE(t) - \mu(S(t) + E(t))] dt, \quad (3.13)$$

resolviendo de manera similar la EDO (3.13) a la EDO (3.9), es decir, tomando  $y(t) = S(t) + E(t)$ ,  $g(t) = N\eta - vE(t)$  y  $p(t) = \mu$  para cada  $t \geq 0$  de manera similar a la prueba del *teorema 3.2. (ii)* se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{e^{\mu t}} S(0) + E(0) + \int_0^t e^{\mu u} (N\eta - vE(u)) du,$$

siendo una indeterminación del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  de manera que por la regla de L'Hôpital vemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [I(t) + E(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\mu t} (N\eta - vE(t))}{\mu e^{\mu t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N\eta}{\mu} - vE(t),$$

como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$  entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{\eta}{\mu} N$ .

(iii) Notemos de la EDE (2.15) que

$$d(S(t) + E(t) + I(t)) = [N\eta - \mu(S(t) + E(t) + I(t)) - \gamma I(t)] dt,$$

cuya solución con respecto a  $\check{y}(t) = S(t) + E(t) + I(t)$  está dada por

$$\check{y}(t) = \frac{S(0) + E(0) + I(0) + \int_0^t e^{\mu u} (N\eta - \gamma I(u)) du}{e^{\mu t}},$$

de manera análoga al ítem anterior se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [S(t) + E(t) + I(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \check{y}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\mu t} (N\eta - \gamma I(t))}{\mu e^{\mu t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N\eta}{\mu} - \gamma I(t),$$

por otra parte  $\lim_{t \rightarrow +\infty} [S(t) + E(t) + I(t)] = \frac{\eta}{\mu} N + \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)$ , luego

$$\frac{N\eta}{\mu} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma I(t) = \frac{N\eta}{\mu} + \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t),$$

por tanto,

$$(1 + \gamma) \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0,$$

por consiguiente  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ , es decir el modelo SEIR—estocástico tiene extinción. ■

Resolviendo la siguiente EDO (para el modelo SEIR con nacimientos y muertes)

$$\frac{d}{dt} (S(t) + E(t) + I(t) + R(t)) = N\eta - \mu (S(t) + E(t) + I(t) + R(t)),$$

de manera análoga a como se resolvió la EDO para  $\frac{d}{dt} (S(t) + E(t) + I(t))$  en el teorema anterior, se tiene que su solución está dada por:

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = \left[ S(0) + E(0) + I(0) + R(0) + \frac{\eta}{\mu} N e^{\mu t} - N \right] e^{-\mu t},$$

de esta manera si la población inicial es completamente susceptible, entonces  $S(0) = N$  y  $E(0) = I(0) = R(0) = 0$ , por tanto:

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = \frac{\eta}{\mu} N,$$

luego si las poblaciones infectada, susceptible y recuperada tiende a 0 en el tiempo  $t^{11}$ , entonces la población susceptible tiende a  $\frac{\eta}{\mu} N$ . Del anterior razonamiento se tiene el siguiente corolario:

**Corolario 3.2.** *En el modelo SEIR con nacimientos y muertes si la población inicial es completamente susceptible y la población infectada, expuesta y recuperada en un tiempo  $t$  tienden a cero, entonces la población susceptible en dicho tiempo tiende a  $\frac{\eta}{\mu} N$ .*

Utilizando el método de Euler—Maruyama en la sección 4.2.1 se verificará que los teoremas previamente demostrados son acertados tomando diferentes valores para los parámetros. El hecho de que un modelo epidemiológico (estocástico) tenga extinción implica que bajo las condiciones de control, tratamiento y manejo de la epidemia que se están realizando en el momento de realizar un análisis; la epidemia es controlable. En caso contrario, se deben cambiar tales condiciones para disminuir en un tiempo más corto el número de personas infectadas.

<sup>11</sup>Es decir,  $E(t) \rightarrow 0$ ,  $I(t) \rightarrow 0$  y  $R(t) \rightarrow 0$ .

### 3.3. La persistencia en la media

Determinar si una enfermedad es *persistente* consiste en ver si, para cualquier tiempo a partir de la aparición de la misma, existe *población infectada*. Una enfermedad es ***persistente en la media*** si el promedio de la población infectada es mayor que cero para un tiempo *suficientemente grande*. Para el caso de los modelos donde las soluciones son funciones continuas, como lo son los modelos con EDO y con EDE se define puntualmente la persistencia en la media como sigue:

**Definición 3.1.** (i) Un modelo epidemiológico determinístico es ***persistente en la media***, si y sólo si,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du > 0.$$

(ii) Un modelo epidemiológico estocástico es ***persistente en la media***, si y sólo si,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du > 0, \text{ casi siempre.}$$

Los teoremas 3.4 y 3.5. determinan las condiciones suficientes bajo las cuales los modelos SIS–estocástico y SEIR–estocástico, respectivamente, son persistentes en la media. Las demostraciones se harán con base en [Gray, pág. 6–7] y [Liu, pág. 157–158].

**Teorema 3.4.** Para el modelo SIS–estocástico se tiene que para algún valor inicial  $(S(0), I(0))$ , la solución  $(S(t), I(t))$  de dicho sistema satisface que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du \geq \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} \left( R_{0,E}^{SIS} - 1 \right), \text{ casi siempre,}$$

de manera que, si  $R_{0,E}^{SIS} > 1$  entonces el modelo SIS–estocástico es persistente en la media.

*Demostración:* De la EDE del modelo SIS–estocástico tenemos que

$$d(S(t) + I(t)) = [-\mu(S(t) + I(t)) + \eta N] dt,$$

al integrar de 0 a  $t$  y luego dividiendo sobre  $t$  vamos a tener que

$$\frac{S(t) + I(t)}{t} = \frac{S(0) + I(0)}{t} + \eta N - \frac{\mu}{t} \int_0^t S(u) du - \frac{\mu}{t} \int_0^t I(u) du,$$

por consiguiente

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(u) du = \nu(t) + \frac{\eta}{\mu} N - \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du, \quad (3.14)$$

con  $\nu(t) := \frac{1}{\mu t} (S(0) + I(0) - S(t) - I(t))$ .

Por otra parte tomando la función  $\ln I(t)$ , por la *fórmula de Itô* vamos a tener que  $d \ln I(t)$  está dado por

$$\begin{aligned} d(\ln I(t)) &= \left( \beta S(t) - (\mu + \gamma) - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \right) dt + \sigma S(t) dB(t) \\ &\geq^{12} \left( \beta S(t) - (\mu + \gamma) - \frac{1}{2} \sigma^2 N^2 \right) dt + \sigma S(t) dB(t) \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Si  $\mu = \eta$ , entonces  $S(t) \leq N$ , por lo tanto,  $-S^2(t) \geq -N^2$  para todo  $t \geq 0$ . Si  $\mu < \eta$ , para todo  $t \geq 0$ , entonces  $-S^2(t) \leq -\left(\frac{\eta}{\mu}\right)^2 N^2$ . Si  $\mu > \eta$ , entonces  $-S^2(t) \leq -l^2$  para todo  $t \geq 0$ , donde  $l = \max_{t \geq 0} S(t)$ .

Tomando integral a ambos lados de la desigualdad anterior vamos a tener que

$$\begin{aligned}\ln I(t) - \ln I(0) &\geq \beta \int_0^t S(u) du - (\mu + \gamma)t - \frac{1}{2}\sigma^2 N^2 t + \sigma \int_0^t S(u) dB(u) \\ \varpi(t) &\geq \frac{\beta}{t} \int_0^t S(u) du - (\mu + \gamma) - \frac{1}{2}\sigma^2 N^2 + \frac{\sigma}{t} \int_0^t S(u) dB(u),\end{aligned}$$

con  $\varpi(t) = \frac{1}{t}(\ln I(t) - \ln I(0))$ . Por la igualdad (3.14) vamos a tener que

$$\begin{aligned}\varpi(t) &\geq \beta \nu(t) + \beta \frac{\eta}{\mu} N - \frac{\beta}{t} \int_0^t I(u) du - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2 \eta^2}{2\mu^2} N^2 + \frac{\sigma}{t} \int_0^t S(u) dB(u) \\ \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du &\geq \nu(t) + \frac{\eta N}{\mu} - \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} - \frac{\sigma^2 \eta^2}{2\beta \mu^2} N^2 - \frac{\varpi(t)}{\beta} + \frac{\sigma}{\beta t} \int_0^t S(u) dB(u).\end{aligned}$$

Ya que  $0 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln N}{t} = 0$  y  $0 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N}{t} = 0$  donde  $f(t) = S(t)$  o  $f(t) = I(t)$  entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varpi(t) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \nu(t) = 0$ , por consiguiente

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du \geq N - \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} - \frac{\sigma^2 \eta^2}{2\beta \mu^2} N^2 + \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{\beta t} \int_0^t S(u) dB(u).$$

Sea  $\widetilde{M}(t) := \frac{\sigma}{\beta} \int_0^t S(u) dB(u)$ , como  $S(t)$  es *continua* entonces la integral está definida<sup>13</sup>. Por el *teorema 1.4*  $\widetilde{M}(t)$  es una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -martingala local continua ( $\{\mathfrak{F}_t\}_t$  es la *filtración browniana*) con  $\widetilde{M}(0)$  casi siempre. Utilizando la *isometría de Itô* se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle \widetilde{M}(t), \widetilde{M}(t) \rangle}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma^2 S^2(u)}{\beta^2} du \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{\mu^2 \beta^2} du \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{\mu^2 \beta^2} t < +\infty,\end{aligned}$$

por la *ley de los grandes números para las martingalas* tendremos entonces que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\widetilde{M}(t)}{t} = 0,$$

por consiguiente se tendrá la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du &\geq \frac{\eta N}{\mu} - \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\beta \mu^2} \\ &= \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} \left( \frac{N\eta\beta}{\mu(\mu + \gamma)} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\beta \mu^2 (\mu + \gamma)} - 1 \right) = \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} (R_{0,E}^{SIS} - 1),\end{aligned}$$

casi siempre, demostrándose así el *teorema 3.4*. ■

En la siguiente proposición se demuestra que el modelo SIS-estocástico *persistencia en la media implica la extinción* del mismo:

**Proposición 3.2.** *Si  $\beta^2 < 2\sigma^2(\mu + \gamma)$  en el modelo SIS-estocástico entonces  $R_{0,E}^{SIS} < 1$ . Recíprocamente si un modelo SIS-estocástico tiene persistencia en la media, entonces este no tiene extinción.*

<sup>13</sup> Como  $S(t) \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  (condición (ii) de la definición 1.60) entonces se garantiza que  $\int_0^t S(u) dB(u)$  está definida para todo  $t \geq 0$ .

*Demostración:* Consideremos la función:

$$r(N) := \frac{\eta\beta N}{\mu(\mu + \gamma)} - \frac{\sigma^2\eta^2 N^2}{2\mu^2(\mu + \gamma)},$$

se observa que

$$r'(N) := \frac{\eta\beta}{\mu(\mu + \gamma)} - \frac{\sigma^2\eta^2 N}{\mu^2(\mu + \gamma)},$$

cuyo punto crítico está dado por

$$\frac{\mu\beta}{\eta\sigma^2} = N,$$

la segundo derivada corresponde a:

$$r''(N) := -\frac{\sigma^2\eta^2}{\mu^2(\mu + \gamma)} < 0,$$

entonces para  $N = \mu\beta/(\eta\sigma^2)$  se tiene que  $r(\mu\beta/(\eta\sigma^2))$  es un *máximo*, es decir,

$$\begin{aligned} r\left(\frac{\mu\beta}{\eta\sigma^2}\right) &= \frac{\eta\mu\beta^2}{\mu(\mu + \gamma)\eta\sigma^2} - \frac{\sigma^2\eta^2\mu^2\beta^2}{2\mu^2\eta^2\sigma^2\sigma^2(\mu + \gamma)} \\ &= \frac{\beta^2}{\sigma^2(\mu + \gamma)} - \frac{\beta^2}{2\sigma^2(\mu + \gamma)} = \frac{\beta^2}{2\sigma^2(\mu + \gamma)}. \end{aligned}$$

si  $\beta^2 < 2\sigma^2(\mu + \gamma)$  y como  $r(\mu\beta/(\eta\sigma^2))$  es máximo, entonces para todo  $N > 0$  se tiene que  $r(N) < 1$ , es decir,

$$r(N) = \frac{\eta\beta N}{\mu(\mu + \gamma)} - \frac{\sigma^2\eta^2 N^2}{2\mu^2(\mu + \gamma)} < 1.$$

Por *contrarrecíproco*, si  $r(N) \geq 1$ , es decir, si  $R_{0,E}^{SIS} = r(N) > 1$ , entonces el modelo SIS-estocástico es *persistente en la media*. De esta forma se tiene que si el modelo es *persistente en la media* entonces el modelo *no tiene extinción* (pues  $\beta^2 \geq 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ ). ■

Una inquietud formulada en este trabajo y que no será respondida es la siguiente: ¿que un modelo SIS-estocástico no tenga extinción implica que el modelo es persistente en la media? Una vez se responda esta pregunta entonces se tiene que un modelo es persistente en la media, si y sólo si, no tiene extinción.

El siguiente teorema se demuestra utilizando comportamiento de la *gráfica (4.d)* para el modelo *SEIR-estocástico*:

**Teorema 3.5.** *Si existen  $t_1$  y  $t_2$  con  $0 < t_1 < t_2$  tal que  $S(t) \leq E(t)$  para todo  $t \in [0, t_1]$  y  $E(t) \leq I(t)$  para todo  $t \in [t_1, t_2]$ , en el modelo SEIR-estocástico y además*

$$\frac{\eta N\beta}{\mu(v + \mu)} - \frac{\sigma^2\eta^2 N^2}{2\mu^2(v + \mu)} > 1,$$

*entonces el modelo SEIR-estocástico es persistente en la media.*

*Demostración:* De la EDE del modelo SEIR-estocástico tenemos que

$$d(S(t) + E(t) + I(t)) = [\mu N - \mu(S(t) + E(t) + I(t)) - \gamma I(t)] dt,$$

al integrar de 0 a  $t$  y luego dividiendo sobre  $t$  vamos a tener que

$$\frac{S(t) + E(t) + I(t)}{t} = \frac{S(0) + E(0) + I(0)}{t} + \eta N - \frac{\mu}{t} \int_0^t S(u) du - \frac{\mu}{t} \int_0^t E(u) du - \frac{\mu + \gamma}{t} \int_0^t I(u) du,$$

de manera que

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(u) du = \zeta(t) + \frac{\eta}{\mu} N - \frac{1}{t} \int_0^t E(u) du - \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du, \quad (3.15)$$

con  $\zeta(t) := \frac{1}{\mu t} (S(0) + E(0) + I(0) - S(t) - E(t) - I(t))$ .

Observamos además de la EDE del modelo SEIR—estocástico que

$$I(t) = I(0) + v \int_0^t E(u) du - (\mu + \gamma) \int_0^t I(u) du + \sigma \int_0^t S(u) I(u) dB(u),$$

por lo tanto,

$$\int_0^t E(u) du = \varrho(t) + \frac{\mu + \gamma}{v} \int_0^t I(u) du + \sigma \int_0^t S(u) I(u) dB(u), \quad (3.16)$$

con  $\varrho(t) = \frac{1}{v} (I(t) - I(0))$ . Utilizando la fórmula de Itô para la función  $\ln E(t)$  notamos que

$$d \ln E(t) = \left( \frac{\beta S(t) I(t)}{E(t)} - (v + \mu) - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2(t) I^2(t)}{E^2(t)} \right) dt + \frac{\sigma S(t) I(t)}{E(t)} dB(t),$$

utilizando el hecho<sup>14</sup> de que inicialmente tenemos mayor población susceptible que del resto de grupos y con el pasar del tiempo los expuestos superan el número de susceptibles a partir de algún tiempo  $t_1$ . Una vez la población expuesta alcanza un valor máximo entonces empieza a descender su valor teniendo en algún momento  $t_2$  mayor población infectada que expuesta. De esta forma para cualquier tiempo  $t \geq t_2$  se tiene que  $S(t) \leq E(t)$  y  $E(t) \leq I(t)$  por consiguiente de la ecuación (3.17) para todo  $t \geq t_2$  satisface la siguiente desigualdad

$$d \ln E(t) \geq \left( \beta S(t) - (v + \mu) - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2} \right) dt + \sigma S(t) dB(t),$$

y tomando integral tendremos

$$\ln E(t) - \ln E(0) \geq \int_0^t \beta S(u) du - (v + \mu) t - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2} t + \int_0^t \sigma S(u) dB(u), \quad (3.17)$$

dividiendo entre  $t$  observamos que

$$\varkappa(t) \geq \frac{\beta}{t} \int_0^t S(u) du - (v + \mu) - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2} + \frac{\sigma}{t} \int_0^t S(u) dB(u),$$

con  $\varkappa(t) = \frac{1}{t} (\ln E(t) - \ln E(0))$ . Por la ecuación (3.15) es igual a

<sup>14</sup>Que se puede observar en el gráfico (2.d).

$$\varkappa(t) \geq \beta \zeta(t) + \beta \frac{\eta}{\mu} N - \frac{\beta}{t} \int_0^t E(u) du - \frac{\beta}{t} \int_0^t I(u) du - (v + \mu) - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2} + \frac{\sigma}{t} \int_0^t S(u) dB(u),$$

y por la ecuación (3.16)

$$\begin{aligned} \varkappa(t) \geq & \beta \zeta(t) + \beta \frac{\eta}{\mu} N - \beta \varrho(t) + \beta \frac{(\mu + \gamma)}{v} \int_0^t I(u) du - \frac{\beta}{t} \int_0^t I(u) du - (v + \mu) \\ & - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2} + \frac{\sigma}{t} \int_0^t (S(u) + S(u) I(u)) dB(u), \end{aligned}$$

como  $\zeta(t), \varrho(t), \varkappa(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  entonces

$$\frac{\beta[v - (\mu + \gamma)]}{v} \int_0^t I(u) du \geq \beta \frac{\eta}{\mu} N - (v + \mu) - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2} + \frac{\sigma}{t} \int_0^t v(u) dB(u),$$

con  $v(u) = S(u) + S(u) I(u)$ . Sea  $\tilde{L}(t) := \frac{\sigma}{\beta} \int_0^t v(u) dB(u)$ , como  $v(t)$  es *continua* entonces la integral está definida<sup>15</sup>. Por el *teorema 1.4*,  $\tilde{L}(t)$  es una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -martingala local continua ( $\{\mathfrak{F}_t\}_t$  es la *filtración browniana*). Utilizando la *isometría de Itô* se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle \tilde{L}(t), \tilde{L}(t) \rangle}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{t} \int_0^t (S(u) + S(u) I(u))^2 du \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left( \frac{\sigma \eta N}{t \mu} \left( 1 + \frac{\eta N}{\mu} \right) \right)^2 t < +\infty, \end{aligned}$$

por la *ley de los grandes números para las martingalas* tendremos entonces que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{L}(t)}{t} = 0,$$

por consiguiente se tendrá la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{v}{v} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du &\geq \frac{1}{t} \frac{[v - (\mu + \gamma)]}{v} \int_0^t I(u) du \geq \frac{\eta}{\mu} N - \frac{v + \mu}{\beta} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2 \beta} \\ \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du &\geq \frac{v + \mu}{\beta} \left( \frac{\eta N \beta}{\mu(v + \mu)} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(v + \mu)} - 1 \right), \end{aligned}$$

de manera que si

$$\frac{\eta N \beta}{\mu(v + \mu)} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(v + \mu)} > 1,$$

entonces el modelo SEIR—estocástico es *persistente en la media* como se quería demostrar. ■

Cuando un modelo epidemiológico es *persistente en la media* significa que en promedio siempre tendremos población infectada, sin embargo, también puede ser de nuestro interés estudiar la *población susceptible promedio* dada esta condición. Siguiendo [Lu, pág. 160–161], en el caso del modelo SIS—estocástico se demostró en el *teorema 3.4* que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du \geq \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} \left( R_{0,E}^{SIS} - 1 \right), \text{ casi siempre,}$$

<sup>15</sup> Como  $v(t) \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  (condición (ii) de la *definición 1.60*) entonces se garantiza que  $\int_0^t v(u) dB(u)$  está definida para todo  $t \geq 0$ .

lo cual por definición de límite inferior significa que para todo  $\epsilon > 0$  y para todo  $\omega \in \Omega$  existe  $T(\omega)$  tal que

$$\frac{1}{t} \int_0^t I(u) du \geq \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} (R_{0,E}^{SIS} - 1) - \epsilon, \text{ para todo } t > T(\omega),$$

de la ecuación (3.14) y de la desigualdad anterior observamos que

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(u) du \leq \nu(t) + \frac{\eta}{\mu} N - \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} (R_{0,E}^{SIS} - 1) + \epsilon, \text{ para todo } t > T(\omega),$$

tomando  $t \rightarrow +\infty$  para todo  $\epsilon > 0$  vemos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(u) du \leq \frac{\eta}{\mu} N - \frac{(\mu + \gamma)}{\beta} (R_{0,E}^{SIS} - 1), \text{ casi siempre.} \quad (3.18)$$

En el caso del modelo SEIR-estocástico se demostró en el *teorema 3.5.* que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du \geq \frac{\eta N \beta}{\mu(v + \mu)} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(v + \mu)},$$

es decir, para todo  $\epsilon > 0$  y para todo  $\omega \in \Omega$  existe  $T(\omega)$  tal que

$$\frac{1}{t} \int_0^t I(u) du \geq \frac{\eta N \beta}{\mu(v + \mu)} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2(v + \mu)} - \epsilon, \text{ para todo } t > T(\omega),$$

Por otra parte, de las ecuaciones (3.15) y (3.16) vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t S(u) du = & \zeta(t) + \frac{1}{t} \varrho(t) + \frac{\eta}{\mu} N - \frac{1}{t} \left( 1 + \frac{\mu + \gamma}{v} \right) \int_0^t I(u) du \\ & - \frac{\sigma}{t} \int_0^t S(u) I(u) dB(u), \end{aligned}$$

de la última desigualdad observamos que

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(u) du \leq \frac{\eta}{\mu} N - \left( \frac{v + \mu + \gamma}{v(v + \mu)} \right) \left( \frac{\eta N \beta}{\mu} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu} \right) + \epsilon, \text{ para todo } t > T(\omega).$$

Así tomando  $t \rightarrow +\infty$  para todo  $\epsilon > 0$  vemos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(u) du \leq \left( \frac{v + \mu + \gamma}{v(v + \mu)} \right) \left( \frac{\eta N \beta}{\mu} - \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu} \right), \text{ casi siempre.} \quad (3.19)$$

### 3.4. Existencia de la distribución estacionaria

Recordemos que  $I(t)$  es el número de personas infectadas por la enfermedad en el tiempo  $t$ , siendo ésta una *variable aleatoria* (ejemplo 1.6), cuya *distribución* está dada por:

$$P_{I(t)}(B) := P(I(t) \in B) \text{ para todo } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \text{ (ejemplo 1.7)}^{16},$$

donde

---

<sup>16</sup>Donde  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^+)$  es la huella de la  $\sigma$ -álgebra de Borel (definición 1.2.) sobre  $\mathbb{R}^+$ .



$$F_{I(t)}(x) := P(I(t) \leq x), \text{ para todo } x \in [0, +\infty)$$

es la *función de distribución* (definición 1.10) de  $I(t)$  para cada  $t \geq 0$ .

Tenemos que  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  es un *proceso estocástico*, sobre el cual se define (en caso de existir) la **distribución estacionaria** (definición 1.38) como la *variable aleatoria*  $I(+\infty)$  con distribución

$$P_{I(+\infty)}(B) := P(I(+\infty) \in B) \text{ para todo } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+),$$

tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{I(t)}(x) = F_{I(+\infty)}(x), \text{ para todo } x \text{ punto de continuidad de } F,$$

donde  $F_{I(+\infty)}(x)$  es la *función de distribución* de la *variable aleatoria*  $I(+\infty)$  ([Gray, pág. 16-17]).

La existencia de una *distribución estacionaria* para la población infectada nos permite determinar el posible *comportamiento asintótico* que presentará la enfermedad. Conociéndose si un proceso tiene una distribución estacionaria surge la pregunta natural determinar la media y la varianza de tal distribución. En el modelo SIS-estocástico es posible determinar tal media y tal varianza ([Gray, pág. 19]), lo cual se hace en la *proposición 3.2*. En este trabajo no se determina la *media* y la *varianza* de la *distribución estacionaria* en el modelo SEIR-estocástico, dada la dificultad del mismo modelo.

Se define *matriz de difusión* por aparecer como una *condición suficiente* del lema 3.2., el cual es utilizado para demostrar los *teoremas 3.6* y *3.7*.

**Definición 3.2.** ([Liu, pág. 161]) Sean  $\{\mathbf{B}(t)\}_{t \geq 0} = \{B_1(t), \dots, B_k(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano  $k$ -dimensional sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , un proceso de Markov  $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ , con  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ , regular de tiempo homogéneo (definición 1.40) con valores en  $[0, +\infty)^n$ , el cual es una solución de la ecuación diferencial estocástica dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_1(t) = b_1(X(t)) dt + \sigma_1^{(1)}(X(t)) dB_1(t) + \dots + \sigma_k^{(1)}(X(t)) dB_k(t) \\ \quad = b_1(X(t)) dt + \sum_{r=1}^k \sigma_r^{(1)}(X(t)) dB_r(t) \\ \quad \quad \quad \vdots \\ dX_n(t) = b_n(X(t)) dt + \sigma_1^{(n)}(X(t)) dB_1(t) + \dots + \sigma_k^{(n)}(X(t)) dB_k(t) \\ \quad = b_n(X(t)) dt + \sum_{r=1}^k \sigma_r^{(n)}(X(t)) dB_r(t) \end{array} \right.$$

donde  $|b_i(X(t))|^{1/2} \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y  $\sigma_i^{(j)}(X(t)) \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  para todo  $i = 1, \dots, k$  y  $j = 1, \dots, n$ . La **matriz de difusión** de  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  se define como la matriz  $A(X(t)) = (a_{ij}(X))$  de tamaño  $n \times k$  tal que

$$a_{ij}(X(t)) := \sigma_1^{(i)}(X(t)) \sigma_1^{(j)}(X(t)) + \dots + \sigma_k^{(i)}(X(t)) \sigma_k^{(j)}(X(t)) = \sum_{r=1}^k \sigma_r^{(i)}(X(t)) \sigma_r^{(j)}(X(t)).$$

Para aclarar el *concepto de matriz de difusión* se realiza el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.1.** Sea  $X(t) = (X_1(t), X_2(t))^T$  la solución del sistema EDE dado por

$$\begin{cases} dX_1(t) = 3X_2(t)dt + 4dB_1(t) + X_1(t)X_2(t)dB_k(t) \\ dX_2(t) = 8X_1(t)dt + X_2(t)dB_1(t) \end{cases},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} b_1(X(t)) &= 3, \quad \sigma_1^{(1)}(X(t)) = 4 \quad y \quad \sigma_2^{(1)}(X(t)) = X_1(t)X_2(t), \\ b_2(X(t)) &= 8X_1(t) \quad y \quad \sigma_1^{(2)}(X(t)) = X_2(t), \end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned} a_{11}(X(t)) &= \sigma_1^{(1)}(X(t))\sigma_1^{(1)}(X(t)) + \sigma_2^{(1)}(X(t))\sigma_2^{(1)}(X(t)) = 9 + X_1^2(t)X_2^2(t), \\ a_{12}(X(t)) &= \sigma_1^{(1)}(X(t))\sigma_1^{(2)}(X(t)) + \sigma_2^{(1)}(X(t))\sigma_2^{(2)}(X(t)) = 4X_2(t) + 0, \\ a_{21}(X(t)) &= \sigma_1^{(2)}(X(t))\sigma_1^{(1)}(X(t)) + \sigma_2^{(2)}(X(t))\sigma_2^{(1)}(X(t)) = 4X_2(t) + 0, \\ a_{22}(X(t)) &= \sigma_1^{(2)}(X(t))\sigma_1^{(2)}(X(t)) + \sigma_2^{(2)}(X(t))\sigma_2^{(2)}(X(t)) = X_2^2(t) + 0; \end{aligned}$$

luego la matriz de difusión para  $X(t)$  corresponde a:

$$A(X(t)) = \begin{pmatrix} 9 + X_1^2(t)X_2^2(t) & 4X_2(t) \\ 4X_2(t) & X_2^2(t) \end{pmatrix}.$$

En los siguientes ejemplos se calcula la *matriz de difusión* de los modelos *SIS-estocástico* y *SEIR-estocástico*.

**Ejemplo 3.2.** Sea  $Z(t) = (S(t), I(t))^T$  la solución del modelo *SIS-estocástico*. Del sistema EDE (2.22) tenemos que

$$\begin{aligned} b_1(Z(t)) &= \eta N + \gamma I(t) - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) \quad y \quad \sigma_1^{(1)}(Z(t)) = -\sigma I(t)S(t), \\ b_2(Z(t)) &= \beta I(t)S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \quad y \quad \sigma_2^{(2)}(Z(t)) = \sigma I(t)S(t), \end{aligned}$$

de esta manera,

$$\begin{aligned} a_{11}(Z(t)) &= \sigma_1^{(1)}(Z(t))\sigma_1^{(1)}(Z(t)) = \sigma^2 S^2(t)I^2(t), \\ a_{12}(Z(t)) &= \sigma_1^{(1)}(Z(t))\sigma_1^{(2)}(Z(t)) = -\sigma^2 S^2(t)I^2(t), \\ a_{21}(Z(t)) &= \sigma_1^{(2)}(Z(t))\sigma_1^{(1)}(Z(t)) = -\sigma^2 S^2(t)I^2(t), \\ a_{22}(Z(t)) &= \sigma_1^{(2)}(Z(t))\sigma_1^{(2)}(Z(t)) = \sigma^2 S^2(t)I^2(t); \end{aligned}$$

por consiguiente su matriz de difusión para el sistema EDE del modelo *SIS-estocástico* corresponde a:

$$A(Z(t)) = \sigma^2 S^2(t)I^2(t) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲

**Ejemplo 3.3.** Sea  $Y(t) = (S(t), I(t))^T$  la solución del modelo *SIS-estocástico*. Del sistema EDE (2.23) tenemos que

$$\begin{aligned} b_1(X(t)) &= \eta N - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) \quad y \quad \sigma_1^{(1)}(X(t)) = -\sigma I(t)S(t), \\ b_2(X(t)) &= \beta I(t)S(t) - v E(t) - \mu E(t) \quad y \quad \sigma_1^{(2)}(X(t)) = \sigma I(t)S(t), \\ b_3(X(t)) &= v E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \quad y \quad \sigma_1^{(3)}(X(t)) = 0, \\ b_4(X(t)) &= \gamma I(t) - \mu R(t) \quad y \quad \sigma_1^{(4)}(X(t)) = 0, \end{aligned}$$

de esta manera,

$$\begin{aligned}
a_{11}(X(t)) &= a_{22}(X(t)) = \sigma_1^{(1)}(X(t)) \sigma_1^{(1)}(X(t)) = \sigma^2 S^2(t) I^2(t), \\
a_{12}(X(t)) &= a_{21}(X(t)) = \sigma_1^{(1)}(X(t)) \sigma_1^{(2)}(X(t)) = -\sigma^2 S^2(t) I^2(t), \\
a_{ij}(X(t)) &= 0, \text{ para todo } i, j = 3, 4,
\end{aligned}$$

por consiguiente su matriz de difusión para el sistema EDE del modelo SEIR-estocástico corresponde a:

$$A(Y(t)) = \sigma^2 S^2(t) I^2(t) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

▲

**Definición 3.3.** Sea  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  una cadena de Markov de tiempo homogéneo como en la definición 3.2.

(i) Se define el **tiempo de una trayectoria que inicia desde el estado inicial**  $X(0) = x_0$  **hasta el conjunto**  $U$  como

$$\tau_{x_0}^U := \inf \{t \geq 0 : X(t) \in U \mid X(0) = x_0\},$$

(ii) Se define el **tiempo medio de una trayectoria que inicia en**  $x_0$  **hasta**  $U$  como  $\mathbb{E}(\tau_{x_0}^U)$ . Dicho tiempo medio se nota en [Has'minskii, pág. 107] y en [Liu, pág. 161-163] como  $\mathbb{E}_{x_0}(\tau)$ .

Para demostrar la existencia y la unicidad de la distribución estacionaria de un modelo epidemiológico estocástico se puede utilizar el siguiente lema enunciado en [Has'minskii, pág. 107-108].

**Lema 3.2.** Sea un proceso de Markov de tiempo homogéneo  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  con valores en  $\mathbb{R}^d$ , el cual es una solución de un sistema EDE dado en la definición 3.2 y cuya matriz de difusión es  $A(X(t))$ . Si existe un subconjunto de valores de  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ ,  $U$ , tal que  $U$  es de frontera regular<sup>17</sup>,  $\partial U \subseteq \mathbb{R}^d$ <sup>18</sup> y  $U$  satisface las siguientes propiedades:

(i) En el dominio  $U$  y alguna vecindad  $V_U$ <sup>19</sup> de tal dominio se tiene que el menor valor propio de la matriz de difusión  $A(X(t))$  está acotado alrededor de cero, para todo  $X(t) \in U$ ,

(ii) Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus U$  se tiene que  $\mathbb{E}(\tau_{x_0}^U) < +\infty$ . Además para todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^m$ ,  $K$ , se tiene que

$$\sup_{x \in K} \mathbb{E}(\tau_x^U) < +\infty,$$

entonces  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  tiene una única distribución estacionaria.

**Nota 3.1.** De acuerdo con [Liu, pág. 161-163] para probar la condición (i) del lema 3.2. basta con demostrar la condición (i') dada por:

(i') existe  $M > 0$  tal que

$$\zeta^T A(X(t)) \zeta = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(X(t)) \zeta_i \zeta_j > M \|\zeta\|, \text{ para todo } \zeta \in \mathbb{R}^m \text{ y todo } X(t) \in U,$$

<sup>17</sup> Consultar la definición de frontera regular está dada en la definición 1.64.

<sup>18</sup>  $\partial U$  denota la frontera de  $U$ , consultar la definición A.5

<sup>19</sup> Definición A4

siendo  $A(X(t))$  la matriz de difusión de  $X(t)$ , con  $i, j = 1, \dots, m$ .

Para demostrar la condición (i') de la nota anterior de acuerdo con [Liu, pág. 161-163] se puede utilizar el principio de Rayleigh el cual se enuncia y se demuestra en [Strang, pág. 342-343]:

**Lema 3.3** (Principio de Rayleigh). ([Strang, pág. 342-343]) Sea  $A(x)$  una matriz simétrica de tamaño  $m \times m$ , entonces para todo  $\zeta \in \mathbb{R}^m$  se tiene que existe  $\lambda$  tal que

$$\frac{\zeta^T A(x) \zeta}{\|\zeta\|} \geq \min_{\zeta \in \mathbb{R}^m} \frac{\zeta^T A(x) \zeta}{\|\zeta\|} = \lambda,$$

si y sólo si,

$$\zeta^T A(x) \zeta \geq \lambda \|\zeta\|$$

donde  $\lambda$  es el menor valor propio de la matriz  $A(x)$ .

De los ejemplos 3.2. y 3.3. tenemos que las matrices de difusión para los modelos SIS-estocástico ( $A(Z(t))$ ) y SEIR-estocástico ( $A(Y(t))$ ) son ambas simétricas, lo cual implica por el principio de Rayleigh que existen  $\lambda_1$  (para el modelo SIS-estocástico) y  $\lambda_2$  (para el modelo SEIR-estocástico) tales que

$$\zeta^T A(Z(t)) \zeta \geq \lambda_1 \|\zeta\| \text{ y } \kappa^T A(Y(t)) \kappa \geq \lambda_1 \|\kappa\|,$$

para todo  $\zeta \in \mathbb{R}^2$  y para todo  $\kappa \in \mathbb{R}^4$ . De esta manera los sistemas EDE de los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico satisfacen la condición (i') de la nota 3.1. y por consiguiente la condición (i) del lema 3.2.

**Nota 3.2.** Observemos que tomando únicamente el proceso estocástico  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  de cualquiera de los modelos epidemiológicos estocásticos tenemos que la condición (ii) del lema 3.2. corresponde a la condición (ii') dada por:

(ii') Existen  $a$  y  $b$  con  $a < b$  tales que para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$

$$\tau_x^{(a,b)} := \inf \{t \geq 0 : I(t) \in (a, b) \mid I(0) = x\}$$

satisface que  $\mathbb{E}(\tau_x^{(a,b)}) < +\infty$ . Además

$$\sup_{x \in K} \mathbb{E}(\tau_x^{(a,b)}) < +\infty \text{ para todo intervalo cerrado } K \subseteq (0, N).$$

Para aplicar el lema 3.2 en la demostración de los teorema 3.6 se hace necesario hacer la siguiente suposición para el modelo SIS-estocástico.

**Suposición 3.1.** Sean el proceso estocástico  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  en el modelo SIS-estocástico con la misma tasa de natalidad y de mortalidad y  $a < b$ . Los intervalos cerrados  $[a, b]$  tales que  $x_2 \in [a, b]$ , donde  $x_2$  es un cero positivo de la función

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sigma^2(N-x)^2 + \beta(N-x) - (\mu + \gamma)$$

son subconjuntos con frontera regular para el proceso  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$ .

Para demostrar que el proceso estocástico  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  (únicamente) tiene una distribución estacionaria vamos a utilizar (ii') propuesto en [Gray, pág. 17-18]

**Teorema 3.6.** ([Gray, pág. 18]) *El modelo SIS–estocástico con igual tasa de natalidad y de mortalidad tiene una única distribución estacionaria si  $\beta^2 > 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ .*

*Demostración* ([Gray, pág. 18-19]): Vamos a probar la condición (ii'). Por la fórmula de Itô vamos a tener que

$$d(\ln I(t)) = \left( \beta S(t) - (\mu + \gamma) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t) \right) dt + \sigma S(t) dB(t),$$

de manera que

$$\ln I(t) = \ln I(0) + \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(u) \right) du + \sigma \int_0^t S(u) dB(u),$$

como  $S(t) + I(t) = N$ , si y sólo si,  $S(t) = N - I(t)$ , definiendo

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sigma^2(N - x)^2 + \beta(N - x) - (\mu + \gamma)$$

observamos que

$$\ln I(t) = \ln I(0) + \int_0^t f(I(u)) du + \sigma \int_0^t (N - I(u)) dB(u), \quad (3.20)$$

las *soluciones* de la función  $f(x)$ , es decir, los  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 0$ , están dadas por

$$N - x = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2\sigma^2(\mu + \gamma)}}{\sigma^2},$$

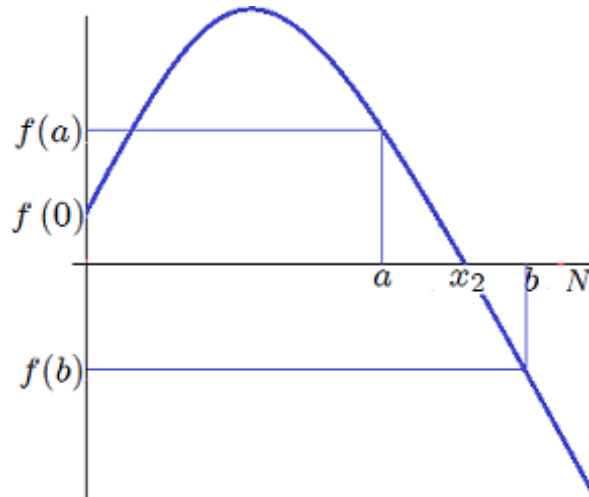
por lo tanto,

$$x = -\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2\sigma^2(\mu + \gamma)}}{\sigma^2} - N = \frac{\mp \sqrt{\beta^2 - 2\sigma^2(\mu + \gamma)}}{\sigma^2} + \frac{\beta + \sigma^2 N}{\sigma^2}$$

notemos que las dos *soluciones* (o por lo menos una) existen si  $\beta^2 > 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ . Adicionalmente,

$$x_2 = \frac{1}{\sigma^2} \left( \sqrt{\beta^2 - 2\sigma^2(\mu + \gamma)} + \beta + \sigma^2 N \right) > 0.$$

Se observa que  $f'(x) = \frac{2}{2}\sigma^2(N - x) - \beta$ , por tanto  $f'(N) = -\beta < 0$ , es decir,  $f$  es decreciente en el intervalo  $N$  y por tanto *negativa* en  $(x_2, N]$ .

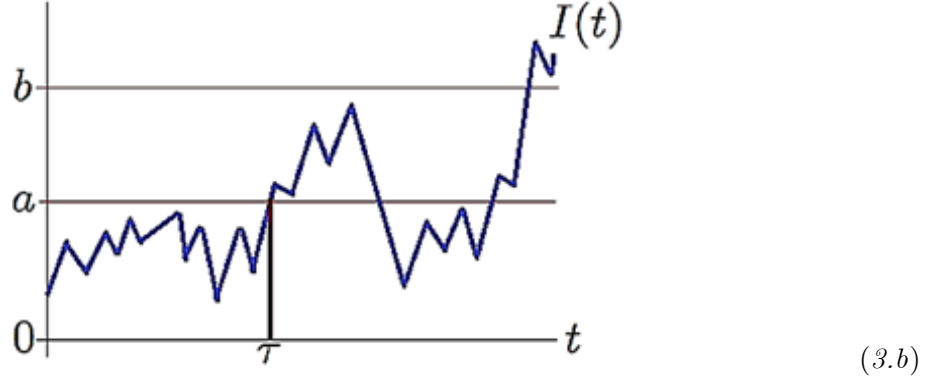


(3.a)

Sean  $a$  y  $b$  **arbitrarios** tales que  $0 < a < x_2 < b < N$  tendremos que (ver *figura 3.a*)

$$\begin{aligned} (i) & \text{ para todo } b \leq x < N, f(x) \leq f(b), \\ (ii) & \text{ para todo } 0 \leq x < a, f(0) \wedge f(a) \leq f(x). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Definamos  $\tau := \inf \{t \geq 0 : I(t) \in (a, b)\}$ . Consideremos primero el *caso* en que  $I(0) \in (0, a)$  (*figura 3.b*), tendremos que la función  $I(t)$  alcanzará primero a  $a$  que a cualquier otro número en  $(a, b)$ , es decir  $0 \leq I(\tau \wedge t) \leq a$



Por consiguiente  $\ln(a) \geq \ln(I(\tau \wedge t))$  para todo  $t \geq 0$  (por ser  $\ln(\cdot)$  una *función creciente*), de esta manera de la *ecuación 3.20* tenemos que

$$\begin{aligned} \ln(a) & \geq \ln(I(\tau \wedge t)) = \ln I(0) + \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} f(I(u)) du \right) + \sigma \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u) \right) \\ & \geq \ln I(0) + \int_0^{\tau \wedge t} (f(0) \wedge f(a)) du + \sigma \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u), \text{ por (3.20) (ii)} \\ & = \ln I(0) + (f(0) \wedge f(a))(\tau \wedge t) + \sigma \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u). \end{aligned}$$

tomando *esperanza* a ambos lados de la desigualdad anterior se tiene que  $\int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u)$  está definida

$$\ln(a) \geq \mathbb{E}[\ln(I(\tau \wedge t))] = \ln I(0) + [f(0) \wedge f(a)] \mathbb{E}(\tau \wedge t) + \sigma \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u) \right),$$

como  $\{\ln(I(t))\}_{t \geq 0}$  es un *proceso de Itô* (por la *fórmula de Itô*) entonces  $\int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u)$  está definida y por la *proposición 1.3* se tiene que  $\mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u) \right) = 0$ , obteniéndose la siguiente desigualdad:

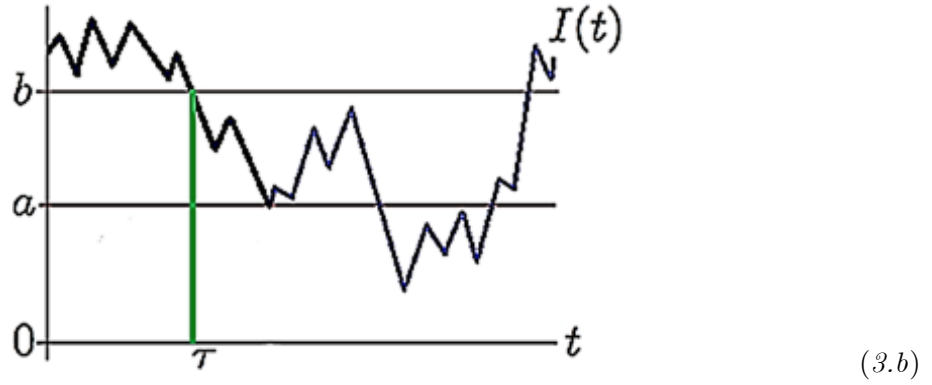
$$\ln(a) \geq \ln I(0) + (f(0) \wedge f(a)) \mathbb{E}(\tau \wedge t)$$

si y sólo si

$$\frac{\ln(a/I(0))}{f(0) \wedge f(a)} \geq \mathbb{E}(\tau \wedge t) \text{ para todo } t \geq 0.$$

Para el *caso* en el cual  $I(0) \in (b, N)$  (*figura 3.b*), tendremos que la función  $I(t)$  pasa primero por  $b$  que por cualquier otro número de  $(a, b)$ , es decir,  $b \leq I(\tau \wedge t) \leq I(t) \leq N$ , de manera

que  $\ln(I(\tau \wedge t)) \geq \ln(b)$  para todo  $t \geq 0$ ,



de esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} \ln(b) \leq \ln(I(\tau \wedge t)) &= \ln I(0) + \int_0^{\tau \wedge t} f(I(u)) du + \sigma \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u) \\ &\leq \ln I(0) + \int_0^{\tau \wedge t} f(b) du + \sigma \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u) \\ &= \ln I(0) + |f(b)|(\tau \wedge t) + \sigma \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u) \end{aligned}$$

al aplicar *esperanza* a ambos lados de la *desigualdad* anterior y dado que

$$\mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u) \right) = 0,$$

entonces:

$$\ln(b) \leq \ln I(0) + |f(b)| \mathbb{E}(\tau \wedge t) + \sigma \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} (N - I(u)) dB(u) \right) = \ln I(0) + |f(b)| \mathbb{E}(\tau \wedge t),$$

como  $|f(b)| = -f(b)$  por ser  $f(b) \leq 0$ , entonces

$$\ln(b) \leq \ln I(0) - f(b) \mathbb{E}(\tau \wedge t), \text{ si y sólo si, } \mathbb{E}(\tau \wedge t) \leq \frac{\ln(I(0)/b)}{|f(b)|}.$$

Tomando  $t \rightarrow +\infty$ , tendremos que  $\tau \wedge t \rightarrow \tau$  (ya que  $t \rightarrow 0$ ) y así  $\mathbb{E}(\tau \wedge t) \rightarrow \mathbb{E}(\tau)$ , por consiguiente

$$\mathbb{E}(\tau) \leq \frac{\ln(I(0)/b)}{|f(b)|} < +\infty \text{ y } \mathbb{E}(\tau) \leq \frac{\ln(a/I(0))}{f(0) \wedge f(a)} < +\infty \text{ para todo } t \geq 0,$$

es decir,  $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$  considerando el problema inicial  $I(0) \in (0, a) \cup (b, N) = (0, N) \setminus [a, b]$ .

Nótese ahora que si tomamos como *condición inicial*  $I(0) \in (a, b)$ , entonces

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : I(t) \in (a, b)\} = 0,$$

luego  $\mathbb{E}(\tau) = 0$  y así  $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$  para toda condición inicial  $I(0) \in (0, N)$ , lo que implica que

$$\sup \left\{ \mathbb{E}(\tau) : I(0) \in [\tilde{a}, \tilde{b}] \right\} < +\infty, \text{ para todo } [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (0, N).$$

■

En la sección anterior definimos la persistencia en la media utilizando el hecho de que la integral  $\frac{1}{t} \int_0^t I(u) du > 0$  denota el *promedio* la población total infectada en cualquier tiempo  $t$ , es decir, el *número de personas infectadas que se espera tener* en cualquier instante de tiempo. Siguiendo esta motivación definimos la *media de la variable aleatoria*  $I(t)$  y su *varianza* como se sigue:

**Definición 3.4.** La *media* y la *varianza del número de infectados en el tiempo*  $t$ , para todo  $t \geq 0$ , se definen respectivamente por

$$\mathbb{E}[I(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du \text{ y } \mathbb{V}[I(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t I^2(u) du - (\mathbb{E}[I(t)])^2.$$

**Proposición 3.3.** Si  $\beta^2 > 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ , entonces la media y el segundo momento de la distribución estacionaria del modelo SIS–estocástico con la misma tasa de mortalidad y de natalidad están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(+\infty)] &= \frac{2\beta \left( R_{0,E}^{SIS} - 1 \right) (\mu + \gamma)}{2\beta (\beta - \sigma^2 N) \sigma^2 (\beta N - \mu + \gamma)} \text{ y} \\ \mathbb{E}[I^2(+\infty)] &= \frac{2 \left( R_{0,E}^{SIS} - 1 \right) (\mu + \gamma) (\beta N - (\mu + \gamma))}{2\beta (\beta - \sigma^2 N) + \sigma^2 (\beta N - \mu + \gamma)}. \end{aligned}$$

*Demostración* ([Gray, pág. 19-20]): Fijemos  $I(0) \in (0, N)$ . De la EDE del modelo SIS–estocástico tenemos inmediatamente que

$$I(t) = I(0) + \int_0^t I(u) (\beta S(u) - (\mu + \gamma)) du + \int_0^t \sigma I(u) S(u) dB(u),$$

como  $N = S(t) + I(t)$  entonces tenemos que

$$I(t) = I(0) + \int_0^t I(u) (\beta N - \beta I(u) - (\mu + \gamma)) du + \int_0^t \sigma I(u) (N - I(u)) dB(u),$$

al tomar el límite  $t \rightarrow +\infty$  y dividiendo entre  $t$  tendremos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(0)}{t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) (\beta N - \beta I(u) - (\mu + \gamma)) du \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{t} \int_0^t I(u) (N - I(u)) dB(u) \end{aligned}$$

como  $I(0)$  es una *constante* entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)/t = 0$ , luego la igualdad anterior la podemos escribir como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) (\beta N - (\mu + \gamma)) du - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \beta I^2(u) du \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{t} \int_0^t I(u) (N - I(u)) dB(u), \end{aligned} \quad (3.22)$$

como  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  es un *proceso de Itô*, entonces la *integral* dada por

$$\tilde{M}(t) := \int_0^t \sigma I(u) (N - I(u)) dB(u)$$

está definida. Por el *teorema 1.4.* se tiene que  $\{\tilde{M}(t)\}_{t \geq 0}$  es una  $\{\mathfrak{F}_t\}_t$ -*martingala local continua* donde  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$  es la *filtración browniana*. Nótese que:



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle \check{M}(t), \check{M}(t) \rangle}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{t} \int_0^t I^2(u) (N - I(u))^2 dB(u) du \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sigma^2 N^2 t < +\infty,$$

luego por la *ley de los grandes números para las martingalas* tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\check{M}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{t} \int_0^t I(u) (N - I(u)) dB(u) = 0,$$

de esta manera la *ecuación (3.22)* la podemos reescribir como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\beta N - (\mu + \gamma)) I(u) du - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \beta I^2(u) du,$$

siendo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du$  la *esperanza de la variable aleatoria*  $I(+\infty)$  y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I^2(u) du$  el *segundo momento* de  $I(+\infty)$ . Por consiguiente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t} = (\beta N - (\mu + \gamma)) \mathbb{E}[I(+\infty)] - \beta \mathbb{E}[I^2(+\infty)], \quad (3.23)$$

Como  $\beta^2 > 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ , en la *demostración del teorema 3.2.(ii)* se prueba que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} = 0$  y que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} [S(t) + I(t)] = \frac{\eta}{\mu} N$ . Obsérvese la siguiente desigualdad:

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t) + I(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\eta}{\mu} N}{t} = 0,$$

por el *teorema del emparedado* tenemos que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t)/t = 0$ , así la *ecuación (3.23)* está dada por

$$\mathbb{E}[I^2(+\infty)] = \frac{1}{\beta} (\beta N - (\mu + \gamma)) \mathbb{E}[I(+\infty)]. \quad (3.24)$$

Por otra parte, aplicando la *fórmula de Itô* a la función  $\ln I(t)$ , tenemos que  $d \ln I(t)$  está dado por:

$$d(\ln I(t)) = \left( \beta S(t) - (\mu + \gamma) - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \right) dt + \sigma S(t) dB(t),$$

teniendo la siguiente *notación integral*

$$\ln I(t) = \ln I(0) + \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(u) \right) du + \sigma \int_0^t S(u) dB(u),$$

divididiendo la *ecuación* anterior entre  $t$  y luego tomando *límite* cuando  $t$  tiende a  $+\infty$  obtenemos la siguiente *ecuación*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(0)}{t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} S^2(u) \right) du \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{t} \int_0^t S(u) dB(u), \end{aligned}$$

como  $\tilde{m}(t) = \int_0^t S(u) dB(u)$  es una *martingala local continua* y de nuevo aplicando la *ley de los grandes números para martingalas* (ver *demostración del teorema 3.4*, en la *página 75*), tendremos que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(u) dB(u) = 0$ . Además como  $I(0)$  es constante entonces  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln I(0)/t = 0$ , por lo tanto la *ecuación anterior* la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left( \beta S(u) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} S^2(u) \right) du \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left( \beta (N - I(u)) - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2}{2} (N - I(u))^2 \right) du \quad (\text{por} \\
&\quad \text{ser } S(t) = N - I(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[ \frac{\sigma^2 I^2(u)}{2} - (\beta - \sigma^2 N) I(u) + \beta N - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2 N^2}{2} \right] du,
\end{aligned}$$

como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln I(t)/t = 0$  (por ser  $\beta^2 > 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ ), entonces la ecuación anterior la reescribimos como

$$0 = \frac{\sigma^2}{2} \mathbb{E}[I^2(+\infty)] - (\beta - \sigma^2 N) \mathbb{E}[I(+\infty)] + \beta N - (\mu + \gamma) - \frac{\sigma^2 N^2}{2},$$

por lo tanto,

$$\frac{\sigma^2}{2} \mathbb{E}[I^2(+\infty)] - (\beta - \sigma^2 N) \mathbb{E}[I(+\infty)] = (\mu + \gamma) + \frac{\sigma^2 N^2}{2} - \beta N, \quad (3.25)$$

así las ecuaciones (3.24) y (3.25) forman un *sistema de ecuaciones lineales*, para resolverlo hacemos

$$\begin{aligned}
(\mu + \gamma) + \frac{\sigma^2 N^2}{2} - \beta N &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (\beta N - (\mu + \gamma)) \mathbb{E}[I(+\infty)] - (\beta - \sigma^2 N) \mathbb{E}[I(+\infty)], \text{ si y sólo si,} \\
[\sigma^2 (\beta N - (\mu + \gamma)) - 2\beta (\beta - \sigma^2 N)] \mathbb{E}[I(+\infty)] &= 2\beta \left( (\mu + \gamma) + \frac{\sigma^2 N^2}{2} - \beta N \right), \text{ si y sólo si,} \\
[\sigma^2 (\beta N - (\mu + \gamma)) - 2\beta (\beta - \sigma^2 N)] \mathbb{E}[I(+\infty)] &= 2\beta (\mu + \gamma) \left( 1 + \frac{\sigma^2 N^2}{2(\mu + \gamma)} - \frac{\beta N}{\mu + \gamma} \right),
\end{aligned}$$

obteniendo que

$$\mathbb{E}[I(+\infty)] = \frac{2\beta (R_{0,E}^{SIS} - 1) (\mu + \gamma)}{2\beta (\beta - \sigma^2 N) + \sigma^2 (\beta N - (\mu + \gamma))}$$

de la ecuación (3.24) tenemos que

$$\mathbb{E}[I^2(+\infty)] = \frac{2 (R_{0,E}^{SIS} - 1) (\mu + \gamma) (\beta N - (\mu + \gamma))}{2\beta (\beta - \sigma^2 N) + \sigma^2 (\beta N - (\mu + \gamma))}.$$

■

De la proposición anterior tenemos que la *varianza de la distribución* estacionaria del modelo SIS–estocástico está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[I(+\infty)] &= \frac{2 (R_{0,E}^{SIS} - 1) (\mu + \gamma) (\beta N - (\mu + \gamma))}{2\beta (\beta - \sigma^2 N) + \sigma^2 (\beta N - \mu + \gamma)} - \frac{\left( 2\beta (R_{0,E}^{SIS} - 1) (\mu + \gamma) \right)^2}{(2\beta (\beta - \sigma^2 N) + \sigma^2 (\beta N - \mu + \gamma))^2} \\
&= \frac{(R_{0,E}^{SIS} - 1) (\mu + \gamma)}{\beta (\beta - \sigma^2 N) + \sigma^2 (\beta N - \mu + \gamma)} \left[ \beta N - (\mu + \gamma) - \frac{2\beta^2 (R_{0,E}^{SIS} - 1) (\mu + \gamma)}{2\beta (\beta - \sigma^2 N) + \sigma^2 (\beta N - \mu + \gamma)} \right].
\end{aligned}$$

Para aplicar el lema 3.2 en la demostración de los teorema 3.7 se hace necesario hacer la siguiente suposición para el modelo SEIR-estocástico.

**Suposición 3.2.** Sean el proceso estocástico  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$  en el modelo SEIR-estocástico con la misma tasa de natalidad y de mortalidad y  $a < b$ . Los cerrados  $[a, b]$  tales que  $x_3, y_2 \in [a, b]$ , donde  $x_3$  es un cero positivo de la función

$$g(x) = (N\beta - \mu) + \left(\frac{\sigma^2}{2}N - \beta\right)x - \frac{\sigma^2}{2}x^2$$

y  $y_2$  es un cero positivo de la función

$$h(x) = \beta N - \beta x - \frac{\sigma^2}{2}x^2,$$

son subconjuntos con frontera regular para el proceso  $\{I(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Teorema 3.7.** El modelo SEIR-estocástico con iguales tasas de mortalidad y de natalidad tiene una única distribución estacionaria si  $\beta^2 > 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ ,  $\beta N < \mu$  y  $\sigma^2 N > 2\beta$ .

*Demostración:* Vamos a probar la condición (ii') (página 83). Por la fórmula de Itô vamos a tener que

$$d(\ln S(t)) = \left[ \frac{\mu N}{S(t)} - \beta I(t) - \mu - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} \right] dt + \sigma I(t) dB(t),$$

consideremos la función

$$g(I(t)) = \frac{\mu N}{N - I(t)} - \beta I(t) - \mu - \frac{\sigma^2}{2}I^2(t),$$

como  $S(t) = N - E(t) - I(t) - R(t) \leq N - I(t)$  entonces

$$d(\ln S(t)) \geq g(I(t)) dt + \sigma I(t) dB(t).$$

Para determinar los ceros de la función  $g(I(t))$  hacemos:

$$\frac{\mu N}{N - I(t)} - \beta I(t) - \mu - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} = 0,$$

si y sólo si,

$$\mu N = \left( \beta I(t) + \mu + \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} \right) (N - I(t)),$$

por lo tanto,

$$\mu N = \mu N + (N\beta - \mu) I(t) + \left( \frac{\sigma^2}{2}N - \beta \right) I^2(t) - \frac{\sigma^2}{2}I^3(t),$$

por consiguiente,

$$0 = \left[ (N\beta - \mu) + \left( \frac{\sigma^2}{2}N - \beta \right) I(t) - \frac{\sigma^2}{2}I^2(t) \right] I(t),$$

luego  $x_1 = I(t) = 0$  o  $I(t)$  satisface la siguiente ecuación

$$0 = (N\beta - \mu) + \left( -\frac{\sigma^2}{2}N - \beta \right) I(t) - \frac{\sigma^2}{2}I^2(t),$$

de esta manera tomando  $a = \frac{\sigma^2}{2}$ ,  $b = -\left(\frac{\sigma^2}{2}N - \beta\right)$  y  $c = -(N\beta - \mu)$  vamos a tener que dos ceros de  $g(I(t))$  están dados por  $x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  con  $i = 2, 3$ . Como  $4ac = -2(N\beta - \mu)\sigma^2$  y  $N\beta - \mu < 0$ <sup>20</sup> entonces  $4ac > 0$ , de manera que

$$x_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \geq \frac{-b - \sqrt{b^2}}{2a},$$

como  $\sigma^2 N > 2\beta$  entonces  $\frac{\sigma^2}{2}N - \beta > 0$  de manera que  $\sqrt{b^2} = \frac{\sigma^2}{2}N - \beta$  y así  $x_3$  está dado por

$$x_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \geq \frac{\frac{\sigma^2}{2}N - \beta - \left(\frac{\sigma^2}{2}N - \beta\right)}{2a} = 0,$$

garantizando así que  $x_3$  es una solución positiva. Adicionalmente notemos que

$$g'(I(t)) = \frac{\mu N}{(N - I(t))^2} - \beta - \sigma^2 I(t),$$

de forma que para calcular los puntos críticos igualamos  $g'(I(t)) = 0$  obteniendo

$$\frac{\mu N}{(N - I(t))^2} = \beta + \sigma^2 I(t),$$

para que la función  $g(I(t))$  sea creciente en 0 es necesario que  $g'(0) = \frac{\mu}{N} - \beta > 0$ , es decir, cuando  $\beta N < \mu$ , lo que quiere decir que el *promedio de los nuevos infectados de una población*  $N$  es menor que la *tasa de mortalidad*. Por otra parte, como  $g(I(t))$  es continua en  $[0, N)$  y dado que  $g(0) = 0 = g(x_3)$  entonces existe un punto máximo  $I(t) = \tilde{x}$  tal que  $\tilde{x} \in (0, x_3)$ .

Por otra parte, al tenerse que la *tasa de mortalidad* es la misma que la *tasa de natalidad*, entonces la *población total* permanece constante para todo tiempo  $t \geq 0$ . De esta manera al tenerse *inicialmente*  $S(0)$  *individuos susceptibles*, una vez éstos tienen *contacto* con los  $I(0)$  *inicialmente infectados*<sup>21</sup>, entonces la *población susceptible* va a decrecer, por lo menos hasta un tiempo  $t_1$  (los *susceptibles* se vuelven *expuestos*)<sup>22</sup>. De esta manera el *diferencial*  $dS(t)/dt$  del modelo SEIR debe ser *negativo*, es decir:

$$\mu N - \beta I(t)S(t) - \mu S(t) < 0 \text{ para todo } 0 \leq t \leq t_1,$$

si y sólo si, para todo  $0 \leq t \leq t_1$

$$\frac{\mu N}{\beta N + \mu} \leq \frac{\mu N}{\beta I(t) + \mu} < S(t),$$

<sup>20</sup>Una de las hipótesis del teorema es que  $\beta N < \mu$ .

<sup>21</sup>En todos los modelos epidemiológicos se debe considerar como condiciones iniciales que se tienen individuos susceptibles como infectados para tener una epidemia (si no hay infectados, no hay epidemia en la región de estudio).

<sup>22</sup>Al simular el modelo *SEIR-estocástico* se observa en la *figura 4.c* y en la *figura 4.d* (donde se observa *extinción*) que **no siempre la población susceptible es decreciente**. La población susceptible puede alcanzar un mínimo y luego aumentar a medida que *aumenta* el tiempo.

así  $S(t) > \mu N / (\beta N + \mu)$  para todo  $0 \leq t \leq t_1$ . Si  $t_1 < +\infty$ , entonces para todo  $t > t_1$ ,  $S(t)$  es creciente, así  $S(t) > S(t_1) > \mu N / (\beta N + \mu)$  para todo  $t > t_1$  (y para todo  $t > 0$ ). De esta forma obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} d(\ln S(t)) &\leq \left[ (\beta N + \mu) \frac{\mu N}{\mu N} - \beta I(t) - \mu - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} \right] dt + \sigma I(t) dB(t) \\ &= \left[ \beta N - \beta I(t) - \frac{\sigma^2 I^2(t)}{2} \right] dt + \sigma I(t) dB(t) \end{aligned}$$

definiendo la función  $h(I(t)) = \beta N - \beta I(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 I^2(t)$  tendremos que los ceros de esta función están dados por  $I(t) = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2\beta N \sigma^2}}{\sigma^2}$ . Observemos que

$$y_2 := \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 2\beta N \sigma^2}}{\sigma^2} \geq \frac{\beta + \sqrt{\beta^2}}{\sigma^2} > 0,$$

probando que  $y_2$  es una solución positiva. Como  $h'(I(t)) = -\beta - \sigma^2 I(t) < 0$  para todo  $t \geq 0$  entonces vemos que  $h(I(t))$  es una función decreciente para  $(y_2, N]$ , por consiguiente para todo  $I(t) \in (y_2, N]$ ,  $h(I(t)) < 0$ .

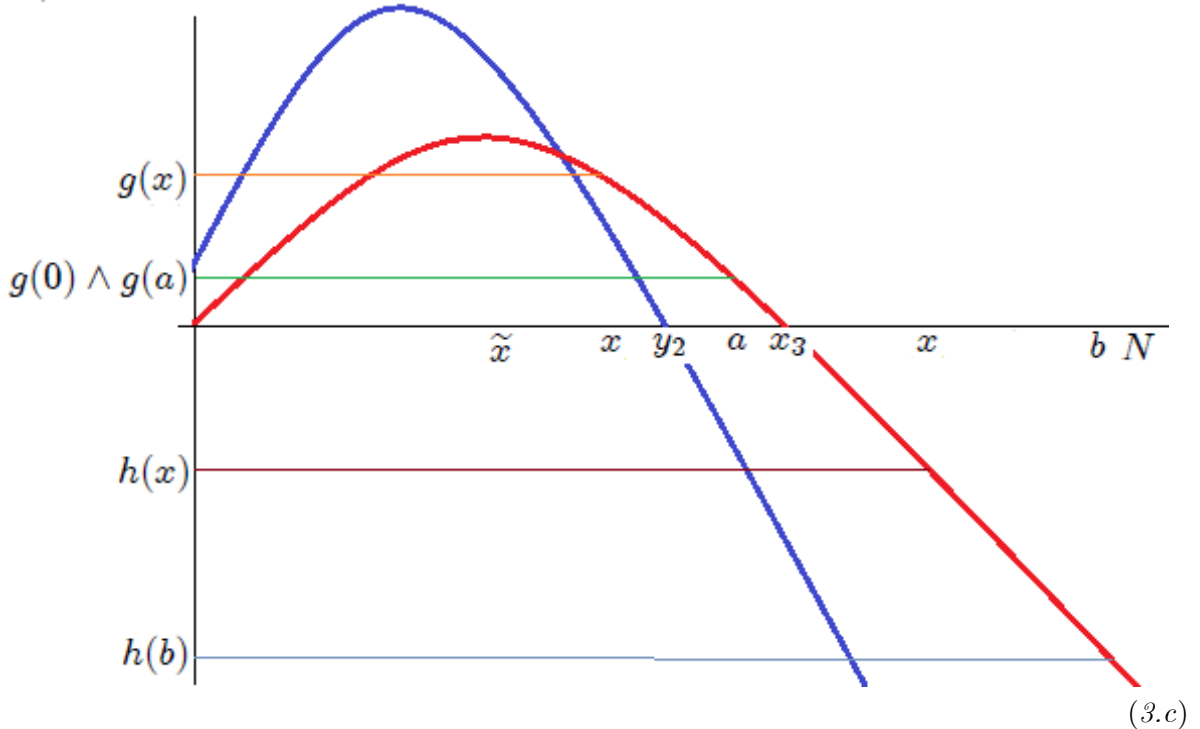
**Supongamos primero que**  $y_2 < x_3$ , al tomar  $a$  y  $b$  arbitrarios tales que

$$0 < a < x_3 < b < N$$

tendremos que

$$\begin{aligned} (i) &\text{ para todo } x \text{ con } 0 \leq x < a, g(x) \geq g(0) \wedge g(a), \\ (ii) &\text{ para todo } x \text{ con } b \leq x < N, h(x) \leq h(b). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Ver figura 3.c.



(3.c)

Sea  $\tau := \inf \{t > 0 : I(t) \in (a, b)\}$ . Notemos que  $\ln S(t \wedge \tau) \leq \ln N$ , además si  $I(0) \in (0, a)$ , tendremos que la función  $I(t)$  alcanzará primero a  $a$  que a cualquier otro número en  $(a, b)$  (ver figura 3.a.), es decir  $0 \leq I(t \wedge \tau) \leq a$  para todo  $t \geq 0$ , de manera que

$$\begin{aligned}
\ln(N) \geq \mathbb{E}(\ln(S(\tau \wedge t))) &= \ln S(0) + \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} \left[ \frac{\mu N}{S(u)} - \beta I(u) - \mu - \frac{\sigma^2 I^2(u)}{2} \right] du \right) \\
&\quad + \mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge t} \sigma I(u) dB(u) \\
&\geq \ln S(0) + \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} g(I(u)) du \right) + \mathbb{E} \int_0^{\tau \wedge t} \sigma I(u) dB(u) \\
&\geq \ln S(0) + \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} (g(0) \wedge g(a)) du \right) + \sigma \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} I(u) dB(u) \right) \\
&\quad (\text{por la ecuación 3.26 (i)})
\end{aligned}$$

Al suponerse igual la *tasa de natalidad* que la de *mortalidad* entonces

$$S(\tau \wedge t) + I(\tau \wedge t) = N,$$

de manera que  $N \geq S(\tau \wedge t)$  y como  $\ln(\cdot)$  es un *función creciente* entonces

$$\ln(N) \geq \mathbb{E}(\ln(S(\tau \wedge t))).$$

Observemos que  $\int_0^{\tau \wedge t} \sigma I(u) dB(u)$  está bien definida, por ser  $I(u)$  una *función continua* y por tanto *integrable* (condición (ii) de la definición 1.60) con respecto al *movimiento browniano*. Por el teorema 1.3.  $\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau \wedge t} \sigma I(u) dB(u) \right] = 0$ , entonces la desigualdad anterior está dada por

$$\ln(N) \geq \ln S(0) + (g(0) \wedge g(a)) \mathbb{E}(\tau \wedge t),$$

esto es,

$$\frac{\ln(N/S(0))}{g(0) \wedge g(a)} \geq \mathbb{E}(\tau \wedge t) \text{ para todo } t \geq 0.$$

Por otra parte, sea  $\tilde{n} := \mu N / (\beta N + \mu)$ , entonces como  $\ln(\cdot)$  es una *función creciente* se tiene que

$$\ln \tilde{n} < \ln(S(t \wedge \tau)) \text{ para todo } t \geq 0.$$

Además para el caso en el cual  $I(0) \in (b, N)$  tendremos que la función  $I(t)$  pasa primero por  $b$  que por cualquier otro número de  $(a, b)$  (ver figura 3.b.), es decir,  $b \leq I(\tau \wedge t) \leq N$  para todo  $t \geq 0$ , de manera que para todo  $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\ln(\tilde{n}) \leq \mathbb{E}(\ln(S(t \wedge \tau))) &= \ln S(0) + \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} \left[ \frac{\mu N}{S(u)} - \beta I(u) - \mu - \frac{\sigma^2 I^2(u)}{2} \right] du \right) \\
&\quad + \sigma \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} \sigma I(u) dB(u) \right) \\
&\leq \ln S(0) + \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} h(I(u)) du \right) + \mathbb{E} \left( \int_0^{\tau \wedge t} \sigma I(u) dB(u) \right) \\
&\leq \ln S(0) + |h(b)| \mathbb{E}(\tau \wedge t) = \ln S(0) - h(b) \mathbb{E}(\tau \wedge t) \text{ (por la} \\
&\quad \text{ecuación (3.26) (ii))},
\end{aligned}$$

de manera que

$$h(b) \mathbb{E}(\tau \wedge t) \leq \ln(S(0)/\tilde{n}),$$

como  $|f(b)| = -f(b)$  por ser  $f(b) \leq 0$ , entonces podemos escribir la desigualdad anterior así:

$$\mathbb{E}(\tau \wedge t) \leq \frac{\ln(S(0)/\tilde{n})}{|h(b)|}$$

Tomando  $t \rightarrow +\infty$ , tendremos que  $\tau \wedge t \rightarrow \tau$  y así  $\mathbb{E}(\tau \wedge t) \rightarrow \mathbb{E}(\tau)$ .

$$\mathbb{E}(\tau \wedge t) \leq \frac{\ln(S(0)/\tilde{n})}{|h(b)|} < +\infty \text{ y } \mathbb{E}(\tau) \leq \frac{\ln(N/S(0))}{g(0) \wedge g(a)} < +\infty \text{ para todo } t \geq 0,$$

es decir,  $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$  considerando el problema inicial  $I(0) \in (0, a) \cup (b, N) = (0, N) \setminus [a, b]$ . Nótese ahora que si tomamos como *condición inicial*  $I(0) \in (a, b)$ , entonces

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : I(t) \in (a, b)\} = 0,$$

luego  $\mathbb{E}(\tau) = 0$  y así  $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$  para toda condición inicial  $I(0) \in (0, N)$ , lo que implica que

$$\sup \left\{ \mathbb{E}(\tau) : I(0) \in [\tilde{a}, \tilde{b}] \right\} < +\infty, \text{ para todo } [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (0, N).$$

**Supongamos ahora que**  $x_3 < y_2$ . Tomando  $a$  y  $b$  arbitrarios tales que  $0 < a < x_3 < y_2 < b < N$  tendremos de manera análoga que  $\mathbb{E}(\tau) < +\infty$  considerando el problema inicial

$$I(0) \in (0, a) \cup (b, N).$$

Notemos adicionalmente que para  $I(0) \in [a, b]$  tenemos que  $\tau$  tiende a cero (en particular es finito), de manera que

$$\sup \left\{ \mathbb{E}(\tau) : I(0) \in [\tilde{a}, \tilde{b}] \right\} < +\infty \text{ para todo } [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (0, N).$$

■

**Nota 3.3.** En la demostración del teorema anterior se consideró que  $x_3, y_2 < N$ . En el caso particular en que  $x_3 > N$  basta considerar  $0 < a < N$  y la condición (i) de (3.24) queda escrita así

$$(i') \text{ para todo } x \text{ con } 0 \leq x < a, g(x) \geq g(0),$$

si  $y_2 > N$  basta considerar  $0 < b < N$  y la condición (ii) de (3.24) queda escrita así

$$(ii) \text{ para todo } x \text{ con } b \leq x < N, h(x) \leq h(N).$$

obteniendo nuevamente que la esperanza es finita.

Para el caso del modelo SEIR—estocástico notemos que de la ecuación (3.15) tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t S(u) du = \frac{\eta}{\mu} N - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(u) du - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I(u) du,$$

es decir,

$$\mathbb{E}[S(+\infty)] + \mathbb{E}[E(+\infty)] + \mathbb{E}[I(+\infty)] = \frac{\eta}{\mu} N,$$

de otra parte, de la ecuación (3.16) observamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(u) du = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu + \gamma}{vt} \int_0^t I(u) du,$$

por lo tanto,

$$\mathbb{E}[S(+\infty)] + \frac{(\mu + \gamma + v)}{v} \mathbb{E}[I(+\infty)] = \frac{\eta}{\mu} N.$$

Si el modelo *SEIR-estocástico* tiene *extinción* entonces necesariamente  $\mathbb{E}[I(+\infty)] = 0$ , por consiguiente  $\mathbb{E}[S(+\infty)] = \frac{\eta}{\mu} N$ ,  $\mathbb{E}[R(+\infty)] = 0$  y  $\mathbb{E}[E(+\infty)] = 0$ . Lo anterior significa que *en promedio* el modelo SEIR-estocástico tiende al *punto de equilibrio libre de enfermedad* si el modelo *tiene extinción* y *existe la distribución estacionaria* del proceso estocástico

$$\{(S(t), E(t), I(t), R(t))\}_{t \geq 0}.$$



## Capítulo 4

# Simulaciones y estimaciones

Este capítulo tiene como objetivo *estimar los parámetros y simular las trayectorias* de los modelos SIS—estocástico y SEIR—estocástico. Para hacer tales simulaciones debemos utilizar *métodos numéricos estocásticos*, como lo son el *método de Euler—Maruyama* y el *método de Milstein*. En este trabajo se utilizará el método de Milstein para modelar las trayectorias así como también para determinar los *estimadores de máxima verosimilitud* de ambos modelos epidemiológicos.

### 4.1. El método de Euler—Maruyama

El *método de aproximación de Euler—Maruyama* para ecuaciones diferenciales estocásticas es muy similar al método de Euler que utilizamos para las ecuaciones diferenciales ordinarias y se basa en la *discretización* de dos integrales: la *integral ordinaria* y la *integral estocástica*. Tales *discretizaciones* se basan en tomar intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  de una partición  $\mathcal{P}$  dado un intervalo  $[0, T]$  (ver [Marín, pág. 22–24]).

Consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = f(X(t)) dt + g(X(t)) dB(t), \quad X(0) = X_0,$$

definida en todo intervalo  $[0, T]$  para las *funciones escalares*  $f$  y  $g$ . Bajo estas condiciones podemos escribir la anterior EDE como sigue

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s)) ds + \int_0^t g(X(s)) dB(s), \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T,$$

tomemos ahora la partición  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$  del intervalo  $[0, T]$ , es decir,  $t_0, \dots, t_n$  tales que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Consideremos el sub-intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , vamos a tener que la solución en éste corresponde a

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(X(u)) du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(X(u)) dB(u); \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

La *aproximación de Euler* se basa en discretizar la ecuación anterior utilizando las siguientes aproximaciones

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(X(u)) du \approx f(X(t_{i-1})) \triangle t_i = f(X(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}), \\ (ii) \quad & \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(X(u)) dB_u \approx g(X(t_{i-1})) \triangle B_i = g(X(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  es un *movimiento browniano* entonces

$$\Delta B_i = B(t_i) - B(t_{i-1}) \sim \mathbf{N}(0, t_i - t_{i-1}),$$

este hecho es utilizado para determinar los *estimadores máximo verosímiles* de los modelos propuestos (sección 4.3).

Si denotamos  $X^{(n)}(t_i)$  la *solución aproximada* de la EDE en el tiempo  $t_i$ , entonces

$$X^{(n)}(t_i) = X^{(n)}(t_{i-1}) + f(X^{(n)}(t_{i-1})) \Delta t_i + g(X^{(n)}(t_{i-1})) \Delta B_i; \text{ para todo } i = 1, \dots, n,$$

de manera que el método de Euler se contruye *iterativamente* como sigue

$$\begin{aligned} X^{(n)}(0) &= X_0 \\ X^{(n)}(t_1) &= X^{(n)}(0) + f(X^{(n)}(0)) \Delta t_1 + g(X^{(n)}(0)) \Delta B_1 \\ X^{(n)}(t_2) &= X^{(n)}(t_1) + f(X^{(n)}(t_1)) \Delta t_2 + g(X^{(n)}(t_1)) \Delta B_2 \\ &\vdots \\ X^{(n)}(T) &= X^{(n)}(t_{n-1}) + f(X^{(n)}(t_{n-1})) \Delta t_n + g(X^{(n)}(t_{n-1})) \Delta B_n \end{aligned}$$

Siendo la anterior la solución aproximada de la EDE por el **método de Euler–Maruyama**. Para determinar qué tan buena es la aproximación utilizamos el **coeficiente de error** definido por

$$e_s = \mathbb{E} \left( \left| X_t - X_t^{(n)} \right| \right), \text{ para cualquier } t \geq 0.$$

Para más detalles del *método de Euler–Maruyama* se puede consultar [Sauer, pág. 5-7].

## 4.2. Simulación de las trayectorias

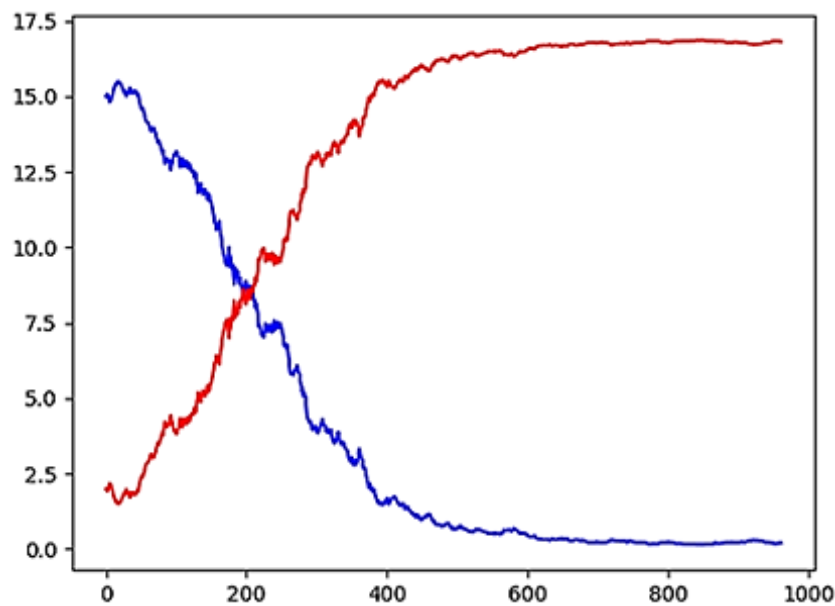
Para simular las trayectorias de las EDE de los modelos SIS–estocástico y SEIR–estocástico se utilizará el *método de Euler–Maruyama*, donde las *discretizaciones* de las EDE de los modelos SIS–estocástico y SEIR–estocástico están dadas respectivamente por

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t_{j+1}) = S(t_j) + [\eta N - \beta S(t_j) I(t_j) + \gamma I(t_j) - \mu S(t_j)] (t_{j+1} - t_j) \\ \quad - \sigma S(t_j) I(t_j) (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \\ I(t_{j+1}) = I(t_j) + [\beta S(t_j) I(t_j) - (\mu + \gamma) I(t_j)] (t_{j+1} - t_j) \\ \quad + \sigma S(t_j) I(t_j) (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \end{array} \right., \quad (4.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t_{j+1}) = S(t_j) + [\eta N - \beta S(t_j) I(t_j) - \mu S(t_j)] (t_{j+1} - t_j) \\ \quad - \sigma S(t_j) I(t_j) (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \\ S(t_{j+1}) = E(t_j) + [\beta S(t_j) I(t_j) - (v + \mu) E(t_j)] (t_{j+1} - t_j) \\ \quad + \sigma S(t_j) I(t_j) (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \\ I(t_{j+1}) = I(t_j) + [v E(t_j) - (\mu + \gamma) I(t_j)] (t_{j+1} - t_j) \\ R(t_{j+1}) = R(t_j) + [\gamma I(t_j) - \mu R(t_j)] (t_{j+1} - t_j) \end{array} \right., \quad (4.3)$$

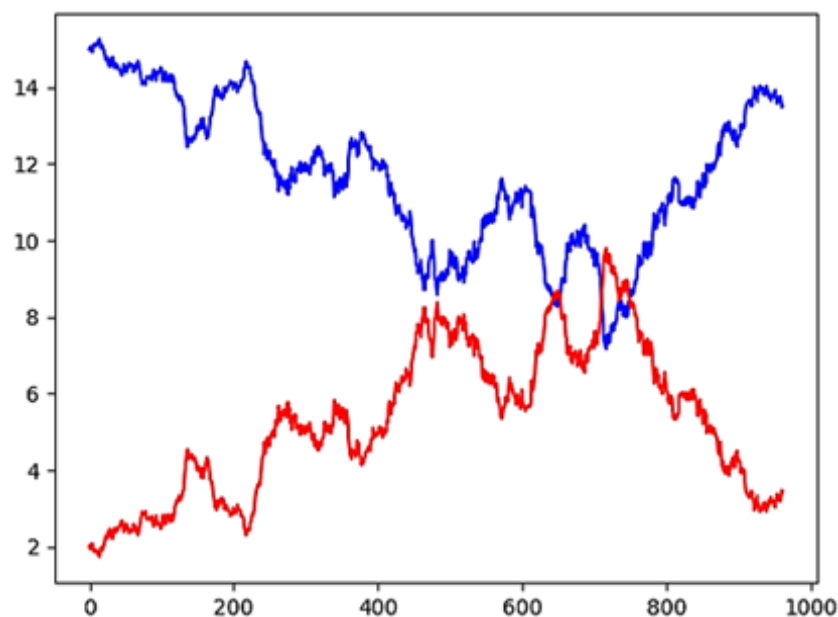
donde  $t_j$  corresponden a los tiempos en los cuales hacemos las *mediciones*, para  $i = 0, \dots, n$ , tal que  $t_0 = 0$  y  $t_n = T$  el último tiempo de medición. Notemos que por ser  $\{B(t)\}_{t \geq 0}$  un movimiento browniano, por definición del mismo tenemos que  $B(t_{j+1}) - B(t_j) \sim \mathbf{N}(0, t_{j+1} - t_j)$ . De esta manera podemos reescribir  $B(t_{j+1}) - B(t_j)$  como  $(t_{j+1} - t_j)^{1/2} Z$  donde  $Z$  es una *variable aleatoria* tal que  $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$  teniendo ambas *variables aleatorias* la misma *distribución*.

Para *simular* las trayectorias en el modelo SIS—estocástico se utilizó el código en **python** mostrado en el *anexo A* del trabajo se consideró  $\eta = 0,0001$ ,  $\beta = 0,05$ ,  $\mu = 0$ ,  $\gamma = 0,01$ ,  $\sigma = 0,02$ ,  $S(0) = 15$  e  $I(0) = 2$ ;



(4.a)

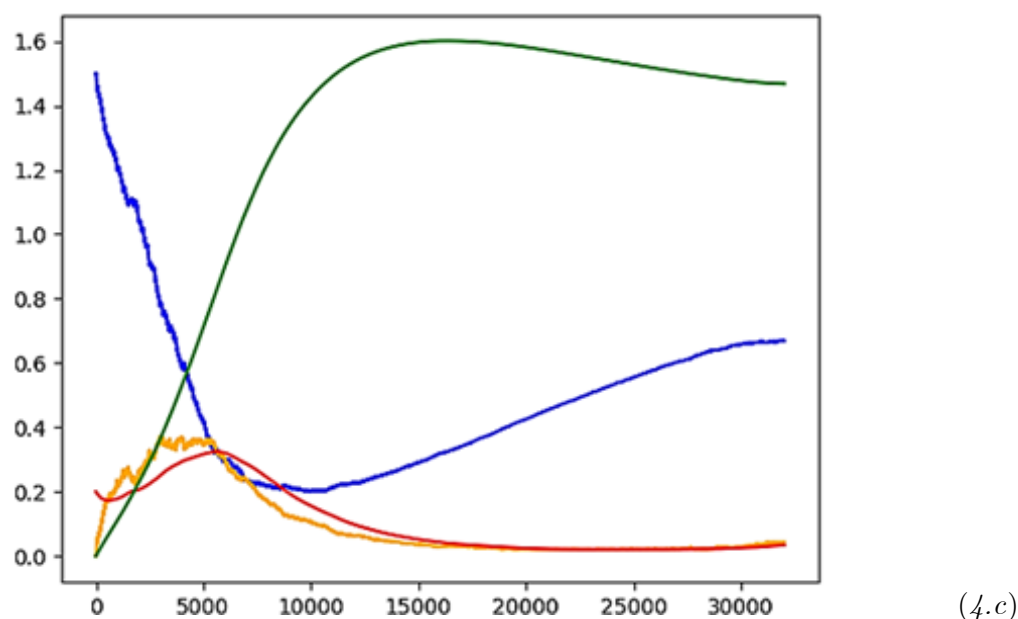
De acuerdo con el *gráfico* anterior se encuentra que con los parámetros escogidos se encuentra que mientras la *población susceptible* (línea azul) desciende a medida que aumenta el tiempo la *población infectada* (línea roja) tiende a ser cada vez mayor. Este comportamiento *no es general* en el modelo, ya que bajo los parámetros  $\eta = 0,0002$ ,  $\beta = 0,05$ ,  $\mu = 0,001$ ,  $\gamma = 0,4$ ,  $\sigma = 0,02$ ,  $S(0) = 15$  e  $I(0) = 2$  encontramos que los *infectados* alcanzan un *máximo* para luego descender, mientras que los *susceptibles* alcanzan un *mínimo* y luego aumentan como se muestra en la siguiente figura



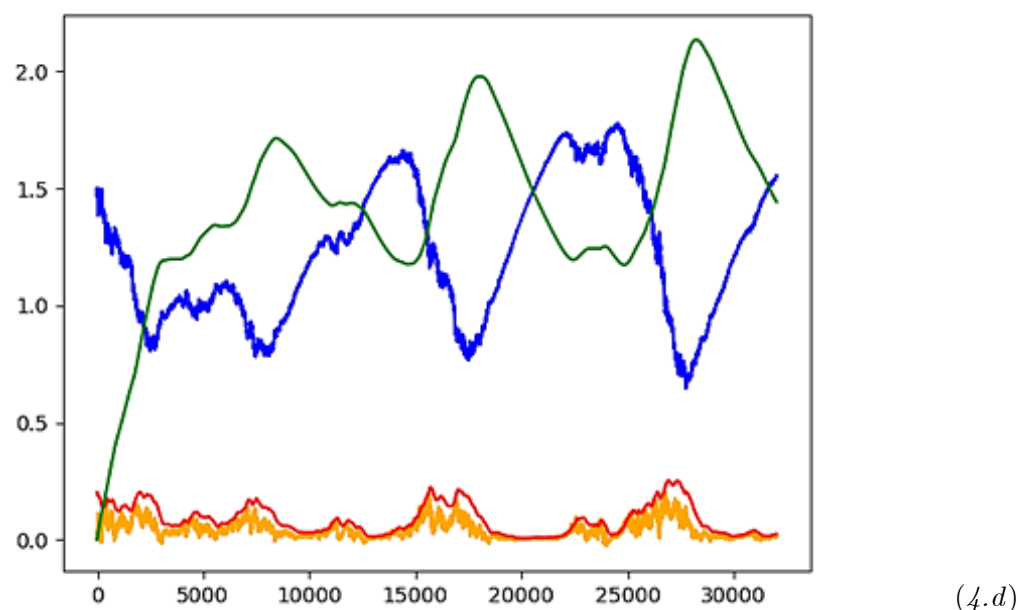
(4.b)

Igualmente podemos *modelar* la EDE del modelo SEIR—estocástico, tomando como parámetros  $\eta = 0,0001$ ,  $\beta = 0,02$ ,  $\mu = 0,001$ ,  $v = 0,04$ ,  $\gamma = 0,04$ ,  $\sigma = 0,05$ ,  $S(0) = 1,5$ ,  $E(0) = 0$ ,  $I(0) = 0,2$

y  $R(0) = 0$ ; mostrando la siguiente figura:



En el *diagrama anterior* se muestra que a medida que la *población susceptible* (en azul) disminuye, aumenta la *población expuesta* (en amarillo) hasta alcanzar un *punto máximo* para luego descender a medida que el tiempo aumenta, por su parte la *población infectada* (en rojo) aumenta hasta alcanzar un *punto máximo*, el cual está a un tiempo mayor que el *máximo* de la *población expuesta* y luego descende cuando el tiempo aumenta. La *población recuperada* (en verde) aumenta con la disminución de personas *susceptibles*, *expuestas* e *infectadas*, hasta cierto tiempo, en el cual la *población recuperada* descende mientras que la *población susceptible* aumenta y los *expuestos* e *infectados* tienden a cero. Este comportamiento *no es general*, al tomar los parámetros  $\eta = 0,02$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $\mu = 0,01$ ,  $v = 0,4$ ,  $\gamma = 0,2$ ,  $\sigma = 0,2$ ,  $S(0) = 1,5$ ,  $E(0) = 0$ ,  $I(0) = 0,2$  y  $R(0) = 0$  se tiene el siguiente gráfico



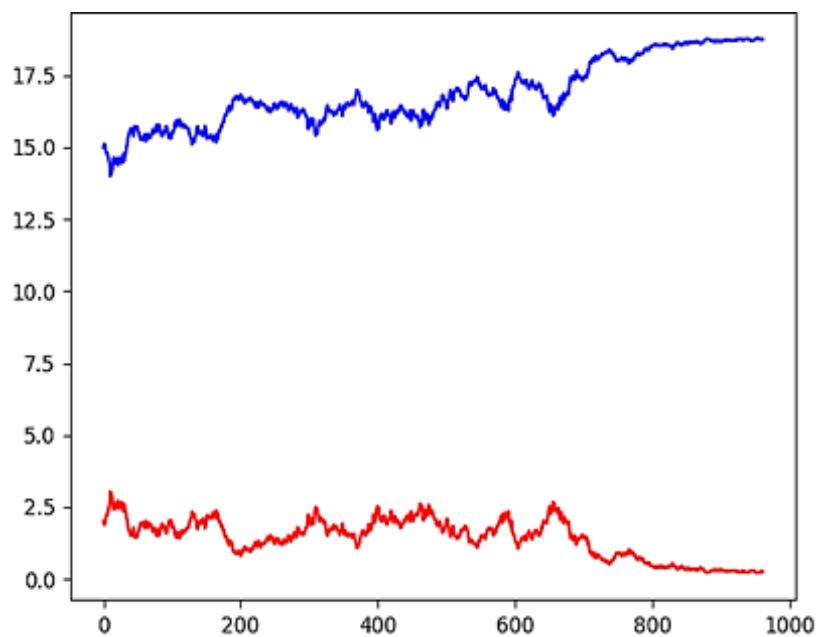
Notamos en los gráficos de la *simulación de las trayectorias* del modelo SEIR–estocástico que las trayectorias de la población susceptible y expuesta presentan *aleatoriedad*<sup>1</sup> mientras que

<sup>1</sup>Se dice que *gráficamente una trayectoria presenta aleatoriedad* si su *línea* es parecida a la gráfica del movimiento browniano (figura 1.b) donde se observa que las *líneas rectas* se mueven *hacia arriba* y *hacia abajo*. Si las gráficas

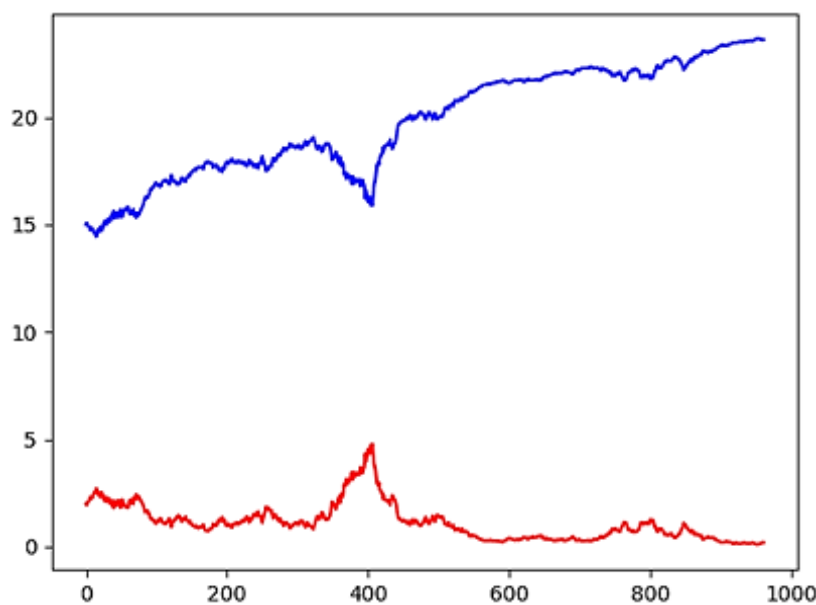
las trayectorias de la población infectada y recuperada no, esto se debe a que en la población infectada y recuperada no se tiene en la EDE un “ $dB(t)$ ”.

#### 4.2.1. La extinción en las simulaciones

De acuerdo con el *teorema 3.2* tenemos que si  $\beta^2 < 2\sigma^2(\mu + \gamma)$  entonces el modelo SIS-estocástico tiene *extinción*. Tomando los parámetros  $\eta = 0,05$ ,  $\beta = 0,01$ ,  $\mu = 0,04$ ,  $\gamma = 0,15$ ,  $\sigma = 0,03$ ,  $S(0) = 15$  e  $I(0) = 2$ ; y  $\eta = 0,08$ ,  $\beta = 0,001$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $S(0)$  e  $I(0)$  como en la simulación anterior obtenemos respectivamente las *figuras 4.e* y *4.f*



(4.e)



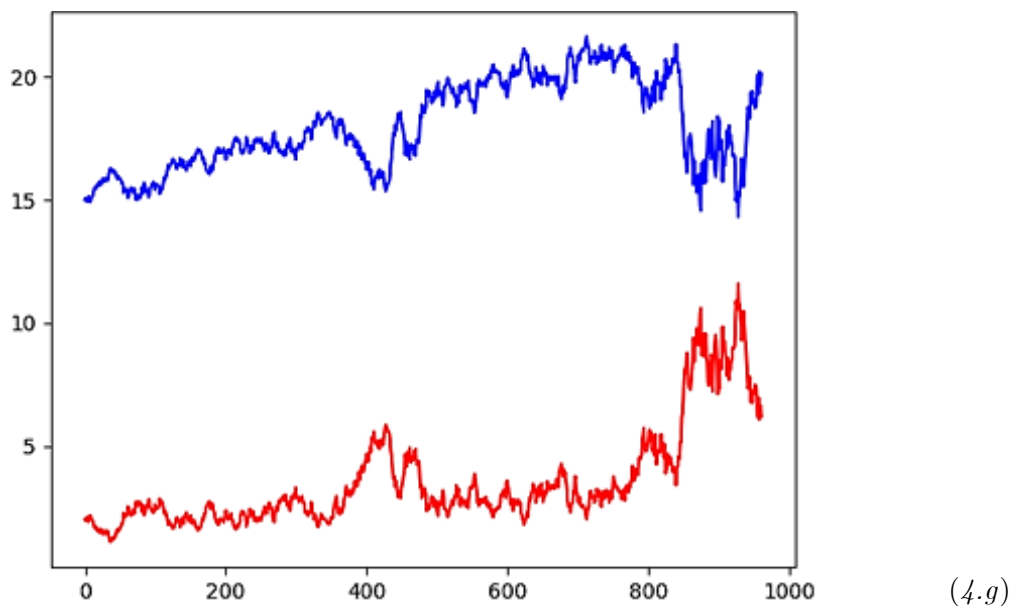
(4.f)

Los gráficos evidencian que la *población infectada* efectivamente tiende a cero, más en el segundo gráfico que en el primero, *verificándose así el teorema 3.2*<sup>2</sup>. Por otra parte al tomar  $\beta^2 = 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ , es decir,  $\beta = \sqrt{2 \cdot 0,03^2 \cdot (0,04 + 0,15)}$  y los parámetros  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $S(0)$  e

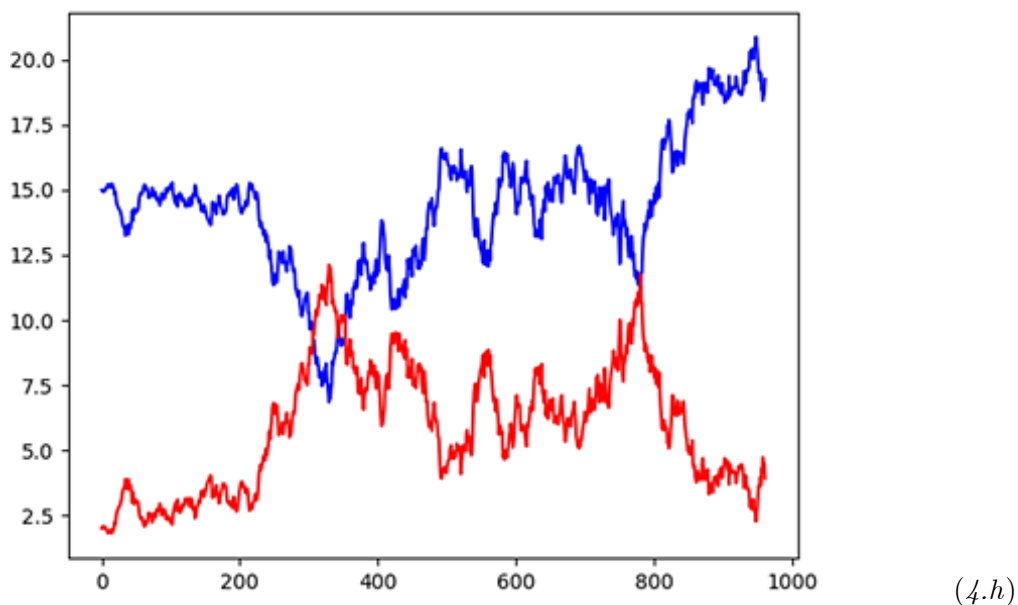
son completamente “lisas”, es decir, no se ve como líneas hacia arriba y hacia abajo, entonces se dice que las trayectorias *gráficamente* no presentan *aleatoriedad*.

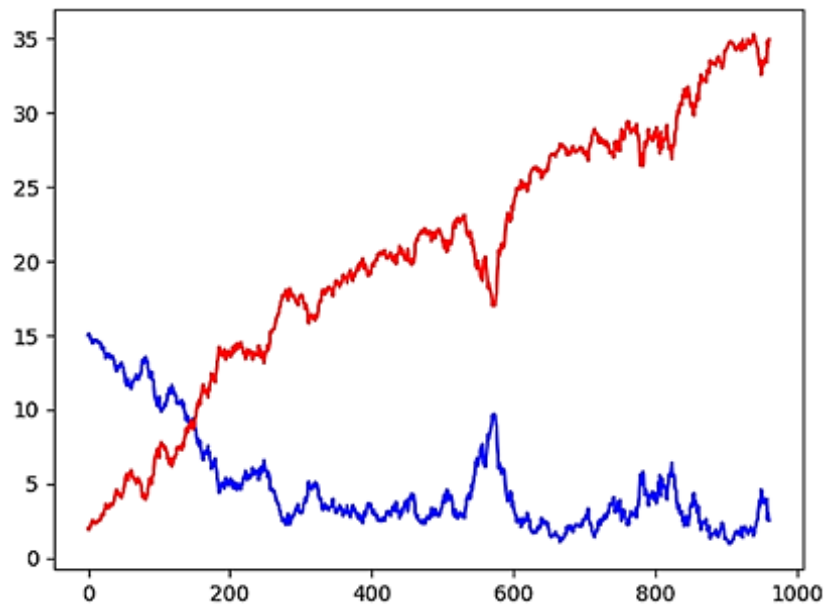
<sup>2</sup>Por *verificar el teorema 3.2*, se hace referencia a que *gráficamente* se observa la extinción del modelo (porque  $I(t)$  tiende a cero).

$I(0)$  como se tomaron en la *simulación* de la *figura 4.e*, se observa en la siguiente figura que el modelo *SIS-estocástico* ya *no tiene extinción*



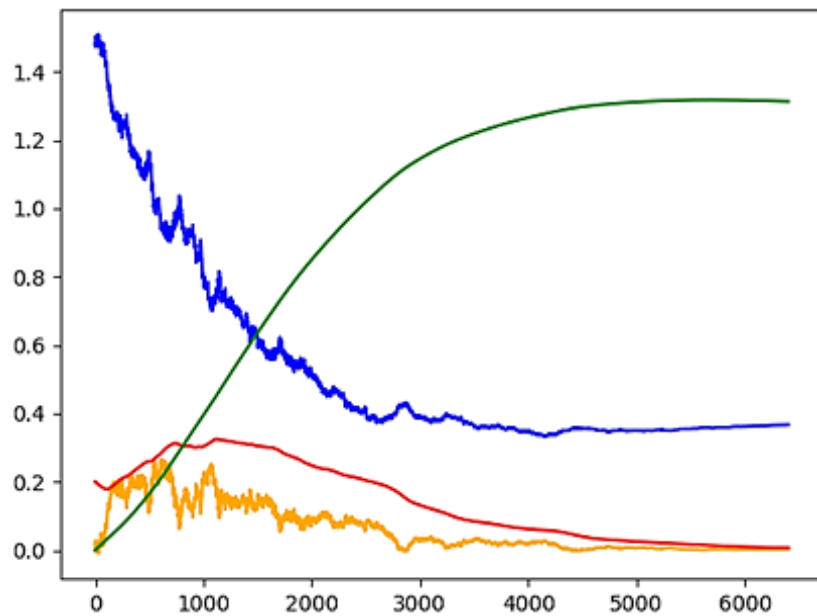
Tomando  $\beta^2 > 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ , por ejemplo,  $\beta = 0,02$  y  $\beta = 0,05$ ,  $\eta, \mu, \gamma, \sigma, S(0)$  e  $I(0)$  como en 4.e se observan respectivamente las *gráficas 4.h* y 4.i. Notamos que no es tan evidente que el modelo tenga extinción cuando  $\beta = 0,02$ , mientras que en 4.i se observa que la *población infectada* tiende a aumentar a medida que pasa el tiempo, por consiguiente para dichos parámetros este modelo no tiene extinción.



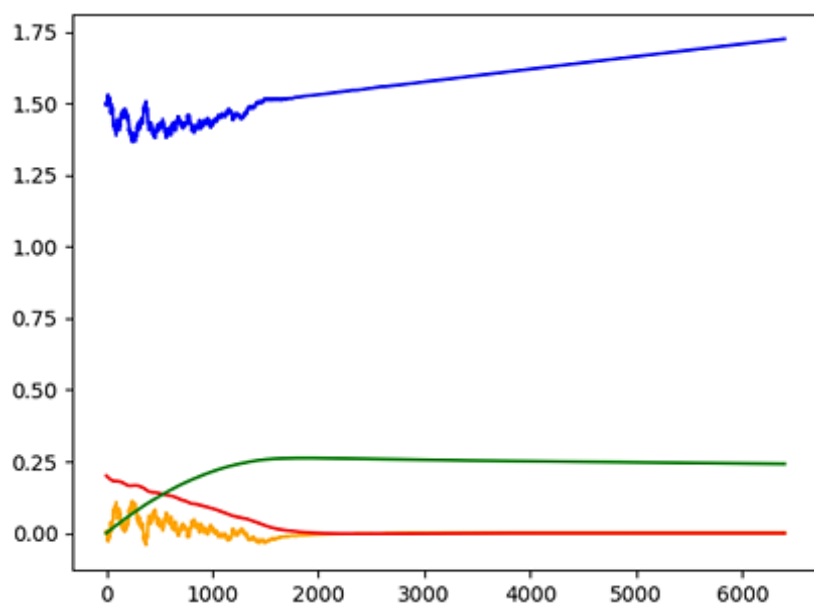


(4.i)

Para el modelo SEIR-estocástico tenemos del *teorema 3.3.* que si  $\beta < 2\sigma^2(\mu + v)$  entonces el modelo tiene extinción. Para *corroborar* esto podemos tomar los parámetros como  $\eta = 0,001$ ,  $\beta = 0,12$ ,  $\mu = 0,001$ ,  $v = 0,2$ ,  $\sigma = 0,2$ ,  $\gamma = 0,1$ ,  $S(0) = 1,5$ ,  $E(0) = 0$ ,  $I(0) = 0,2$  y  $R(0) = 0$ ; y  $\eta = 0,003$ ,  $\beta = 0,012$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $S(0)$ ,  $E(0)$ ,  $I(0)$  y  $R(0)$  como en la simulación anterior obtenemos respectivamente las *figuras 4.j* y *4.k*

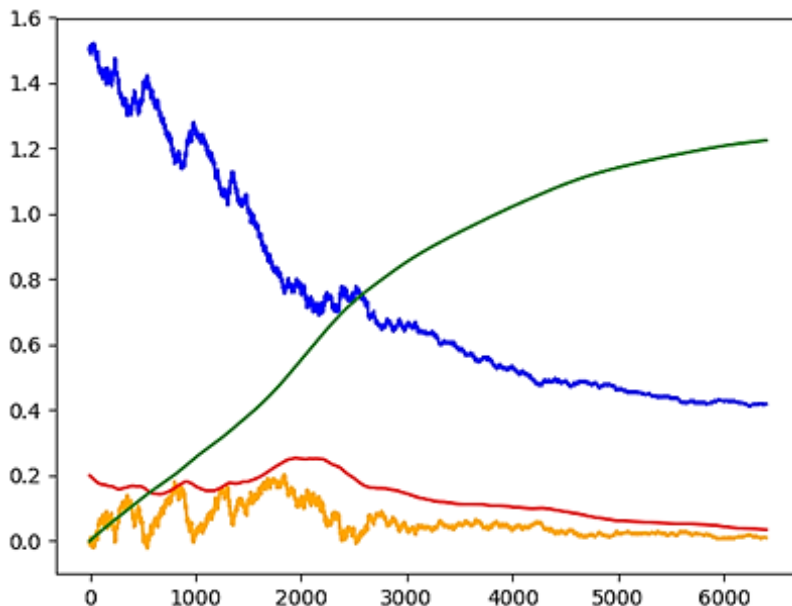


(4.j)



(4.k)

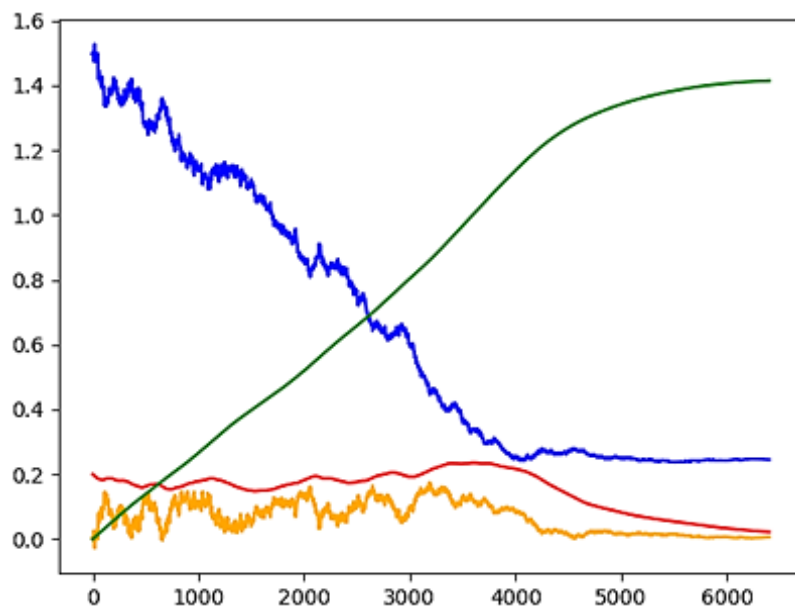
En ambos gráficos se evidencia que la *población infectada* efectivamente tiende a cero, más en el segundo gráfico que en el primero, *verificándose así el teorema 3.3*. Por otra parte al tomar  $\beta^2 = 2\sigma^2(v + \gamma)$ , es decir,  $\beta = \sqrt{2 \cdot 0,2^2 \cdot (0,2 + 0,001)}$ ,  $\eta$ ,  $v$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $S(0)$ ,  $E(0)$ ,  $I(0)$  y  $R(0)$  como en la *simulación* de la *figura 4.j* En este caso la *extinción* no es algo tan evidente, sin embargo se observa que la población susceptible desciende a medida que pasa el tiempo teniéndose posiblemente la extinción



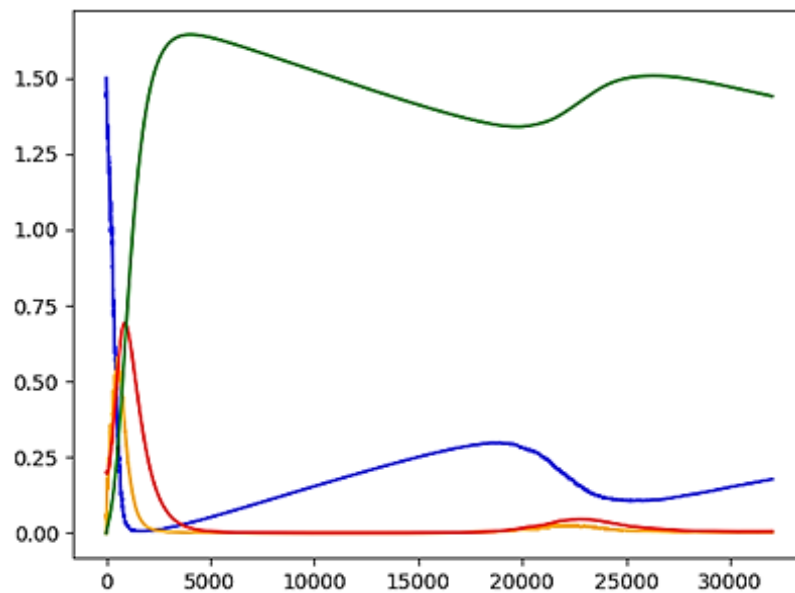
(4.l)

Tomando  $\beta^2 > 2\sigma^2(\mu + \gamma)$ , por ejemplo,  $\beta = 0,13$  y  $\beta = 0,5$ ,  $\eta$ ,  $v$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $S(0)$  e  $I(0)$  como en 4.j se observan respectivamente las *gráficas 4.m* y *4.n*. Notamos que no es tan evidente que el modelo tenga extinción para  $\beta = 0,13$ , por su parte la *gráfica 4.n* muestra que al tomarse  $\beta = 0,5$  se tiene que la *población susceptible* tiene un *máximo local* después de cierto tiempo, es decir, la *población infectada* no necesariamente se va a extinguir. Este *comportamiento cíclico* se observa mejor en la *figura 4.d*.





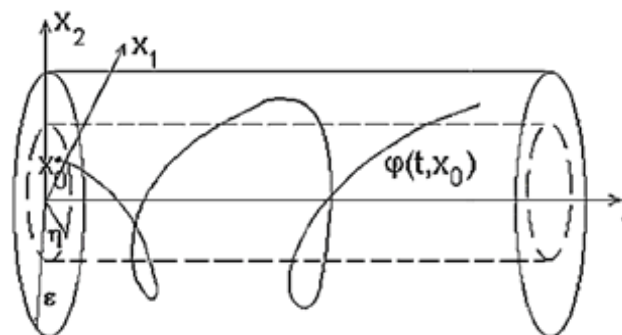
(4.m)



(4.n)

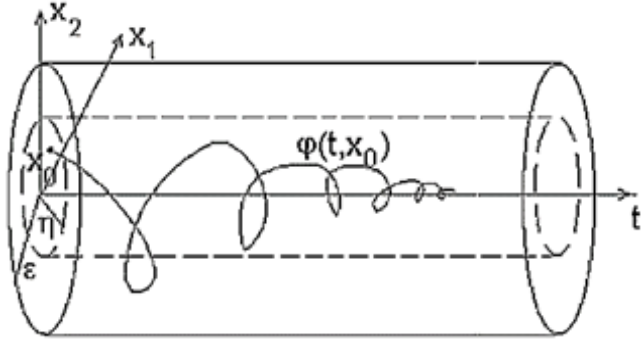
#### 4.2.2. La estabilidad en las simulaciones

Para determinar gráficamente si el sistema de EDO (2.25) tiene estabilidad en su punto inicial  $X(0) = x_0$  vamos a seguir el enfoque dado en [Carrillo, pág. 3–4] donde se presentan los gráficos 4.o, 4.p y 4.q



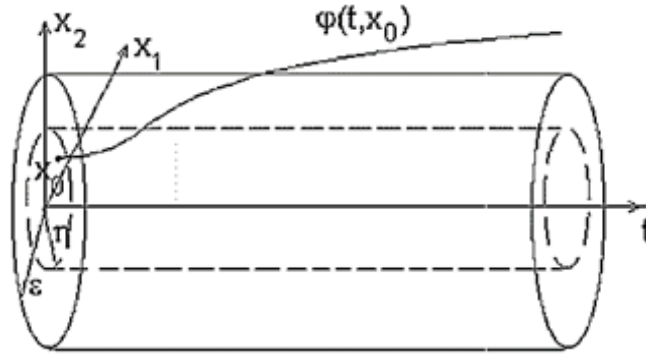
(4.o)

Ahí se muestra la *estabilidad* de  $x_0$  ya que para  $\varepsilon > 0$  existe  $\eta > 0$  tal que la *solución*  $\varphi(t, x_0)$  (notación alterna para la solución  $\varphi(t)$  que empieza desde  $x_0$ ) no sale del cilindro de radio  $\varepsilon$ . En 4.p se muestra que a medida que el tiempo aumenta la solución  $\varphi(t, x_0)$  tiende a cero, es decir,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$  siendo esta la *estabilidad asintótica* de  $x_0$ .



(4.p)

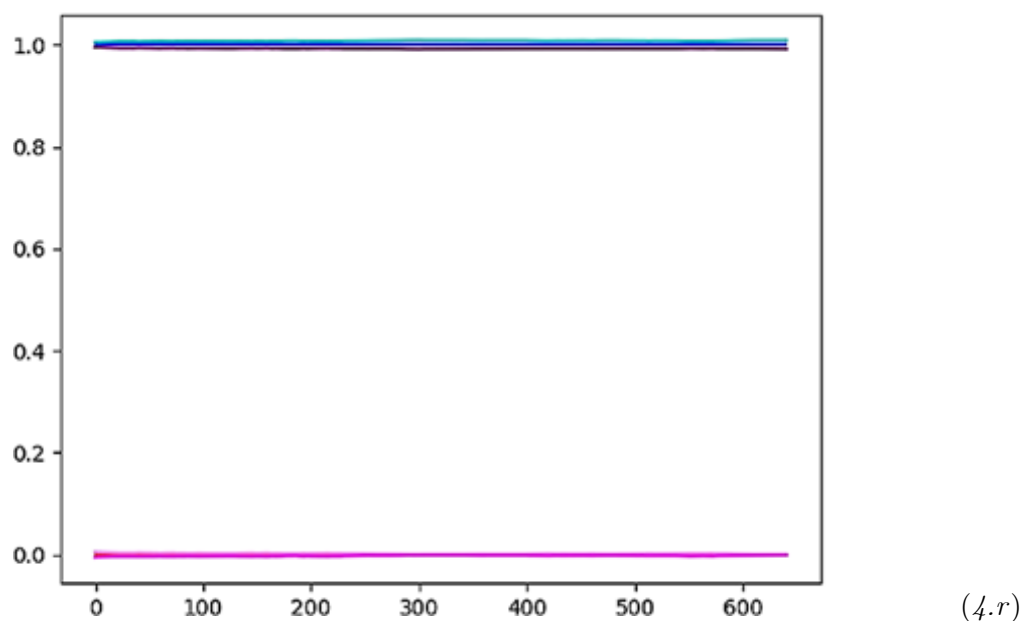
En 4.q se evidencia que la solución  $\varphi(t, x_0)$  sale del cilindro de radio  $\varepsilon > 0$  teniéndose así la *inestabilidad* de  $x_0$ .



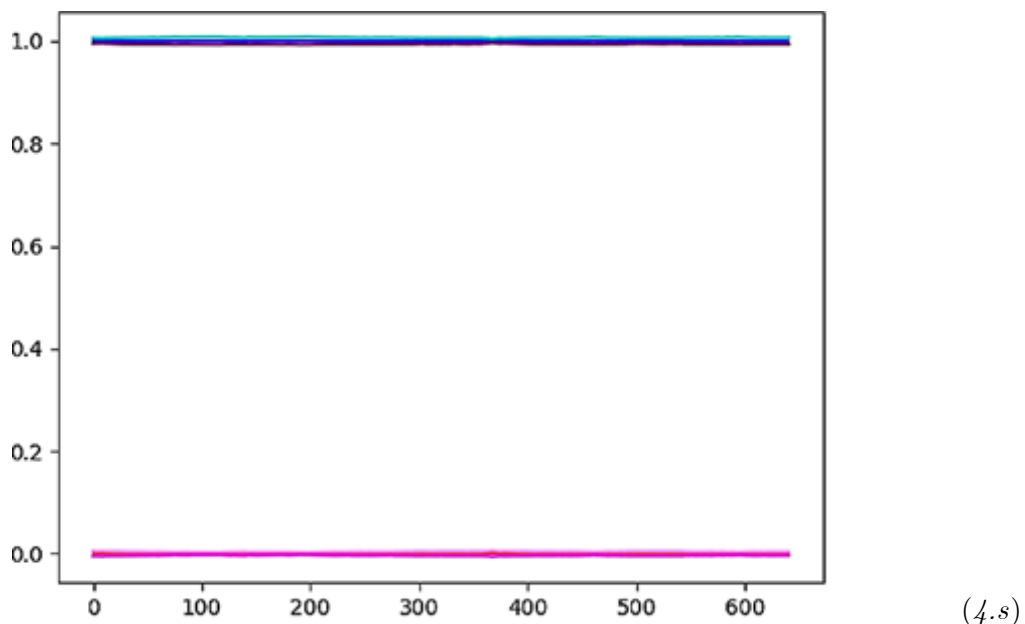
(4.q)

Para *simular* la *estabilidad asintótica* en los modelos SIS–estocásticos y SEIR–estocástico se sumará y se restará 0,005 (el cual corresponde a un valor de  $\delta$ ), a las condiciones iniciales dadas por  $S(0) = N$  y 0 para el resto de *poblaciones* (infectados, recuperados o expuestos) como se sugiere en los *teoremas* 2.5 y 2.6.

Tomando  $N = 1$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $\gamma = 0,6$ ,  $\mu = 0,005$  y  $\eta = 0,005$ , condiciones bajo las cuales  $\beta < \mu + \gamma - \sigma^2/2$  obtenemos la *gráfica* 4.r para el modelo SIS–estocástico. En la grafica se simulan las *trayectorias* de la *población susceptible* para  $S(0)$  (azul),  $S(0) + 0,005$  (morado) y  $S(0) - 0,005$  (cian) y las *trayectorias* de la *población infectada* para  $I(0)$  (rojo),  $I(0) + 0,005$  (magenta) y  $I(0) - 0,005$  (violeta)



se observa que las soluciones *convergen a las trayectorias* de  $S(0)$  y de  $I(0)$  verificándose la *estabilidad asintótica* y con ello el *teorema 2.5*. Ahora, si tomamos  $N = 1$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $\gamma = 0,46$  y  $\mu = 0,005$ , condiciones bajo las cuales  $\beta \frac{\eta N}{\mu} < \gamma + \mu + \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2}$ , tendremos el *gráfico 4.s*,



donde nuevamente observamos la *estabilidad asintótica* de  $(1, 0)$ , motivación que conduce a una primera *conjetura*, no probada en este trabajo, correspondiente a

**Conjetura 4.1.** *Si la condición de que*

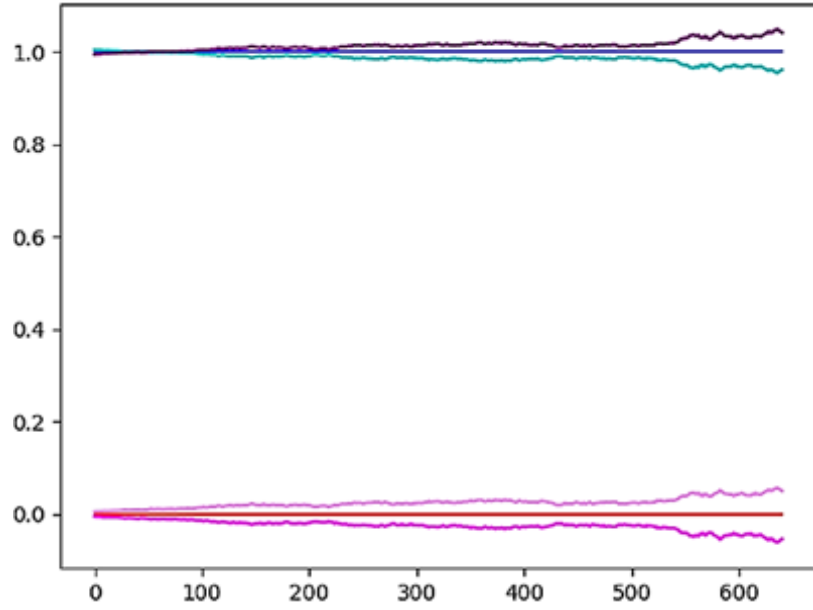
$$0 < \beta \frac{\eta N}{\mu} < \gamma + \mu + \frac{\sigma^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2},$$

*se satisface entonces el punto inicial  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0\right)$  para el modelo SIS-estocástico es asintóticamente estable. La desigualdad anterior se puede reescribir como*

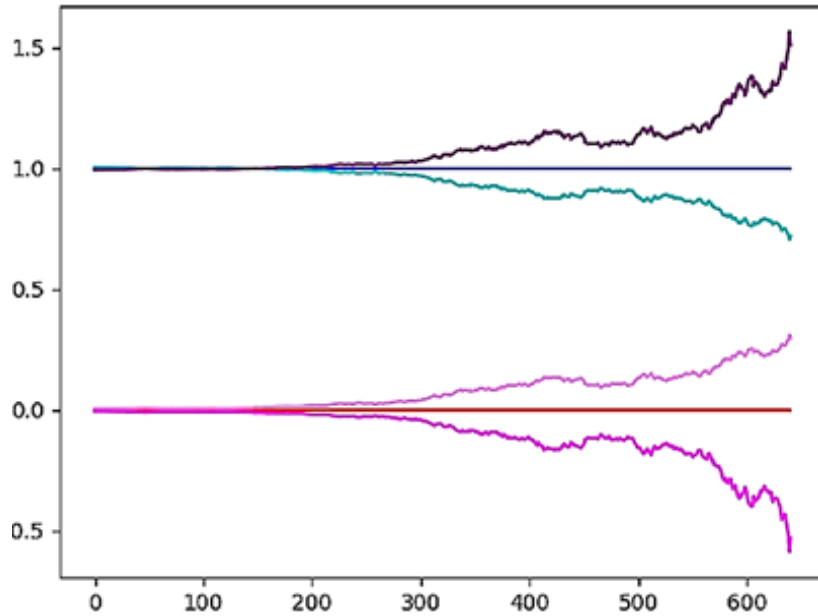
$$R_{0,E}^{SIS} := \frac{\eta\beta N}{\mu(\gamma + \mu)} - \frac{\eta^2\sigma^2 N^2}{2\mu^2(\gamma + \mu)} < 1,$$

donde  $R_{0,E}^{SIS}$  es el número reproductivo básico del modelo SIS-estocástico por ser el menor valor encontrado para el cual se tiene la estabilidad asintótica (definición 2.9).

Si se toman los parámetros  $N = 1$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $\gamma = 0,2$ ,  $\mu = 0,005$  y  $\eta = 0,005$  (figura 4.t) y  $\gamma = 0,1$  (figura 4.u), parámetros bajo los cuales  $\beta > \mu + \gamma + \sigma^2/2$  observamos



(4.t)

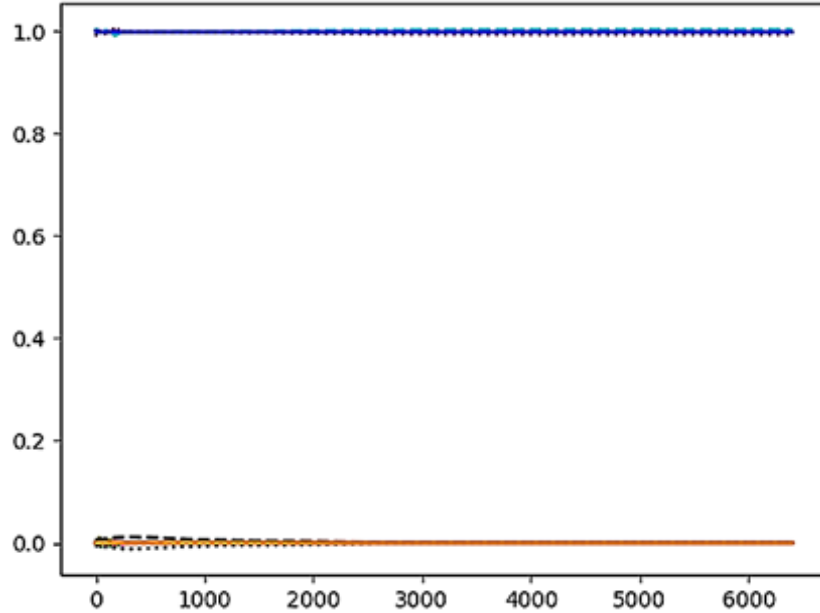


(4.u)

Se observa que las trayectorias para  $S(0) + 0,005$ ,  $S(0) - 0,005$ ,  $I(0) + 0,005$  e  $I(0) - 0,005$  tienden a alejarse de  $S(0)$  e  $I(0)$  a medida que el tiempo aumenta siendo así el punto inicial  $(S(0), I(0))$  inestable para ambos modelos.

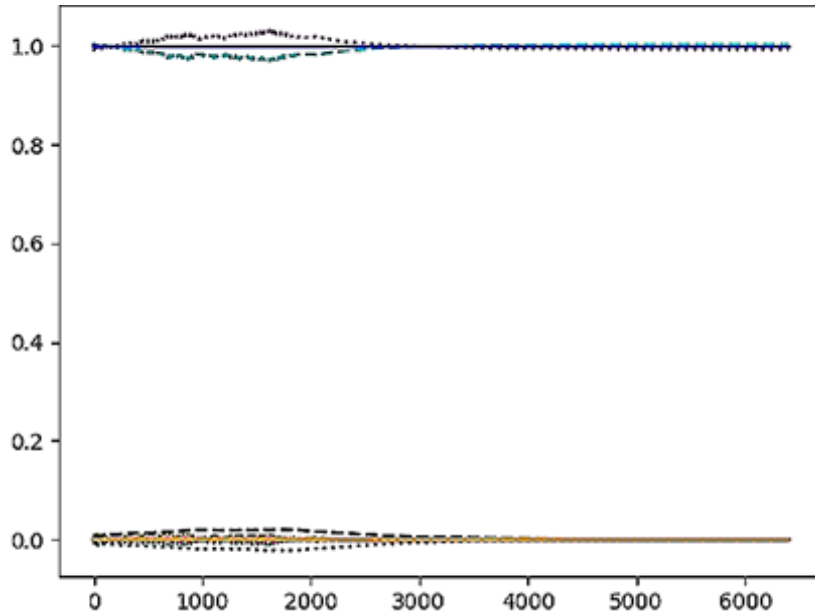
Tomando  $N = 1$ ,  $\beta = 0,6$ ,  $\sigma = 0,8$ ,  $\gamma = 0,6$ ,  $v = 0,5$ ,  $\mu = 0,1$  y  $\eta = 0,1$ ; condiciones bajo las cuales  $v\beta + \sigma^2 v^2/2 < (\mu + \gamma)(\mu + v)$ ,  $\beta < \mu + \gamma$  y  $v + \beta > 1$  obtenemos la gráfica 4.v. En la grafica se simulan las trayectorias de la población susceptible para  $S(0)$  (azul),  $S(0) + 0,005$  (cian

rayada<sup>3</sup>) y  $S(0) - 0,005$  (morado punteada), las *trayectorias de la población susceptible* para  $E(0)$  (naranja),  $E(0) + 0,005$  (oliva rayada) y  $E(0) - 0,005$  (verde punteada), las *trayectorias de la población infectada* para  $I(0)$  (rojo),  $I(0) + 0,005$  (violeta rayada) y  $I(0) - 0,005$  (magenta punteada) y las *trayectorias de la población recuperada* para  $R(0)$  (rojo),  $R(0) + 0,005$  (negro rayada) y  $R(0) - 0,005$  (negro punteada).



(4.v)

En la gráfica anterior observamos que efectivamente  $(1, 0, 0, 0)$  es *asintóticamente estable*<sup>4</sup> verificándose así el *teorema 2.6*. Por otra parte, si tomamos  $\beta = 0,7$  y los mismos parámetros de la *simulación 4.v* se cumplen las condiciones de que  $v\beta - \sigma^2 v^2 / 2 < (\mu + \gamma)(\mu + v)$ ,  $\beta < \mu + \gamma$  y  $v + \beta > 1$  obteniendo la *gráfica 4.w*



(4.w)

<sup>3</sup>Se dice que la gráfica de una función es *rayada* si la *línea* de la misma se representan así: ‘—’.

<sup>4</sup>A pesar de no observarse en el gráfico (por la graficación de **pycharm** un compilador de **python**), las líneas para la población susceptible (azul, cian rayada y morado punteada) tienden todas a 1 y las líneas de las poblaciones expuestas, infectadas y recuperadas (el resto de líneas) tienden todas a 0.

Nuevamente bajo éstos parámetros observamos que  $(1, 0, 0, 0)$  es *asintóticamente estable*<sup>5</sup> teniendo así la *conjetura 4.2*.

**Conjetura 4.2.** *Si las condiciones de que*

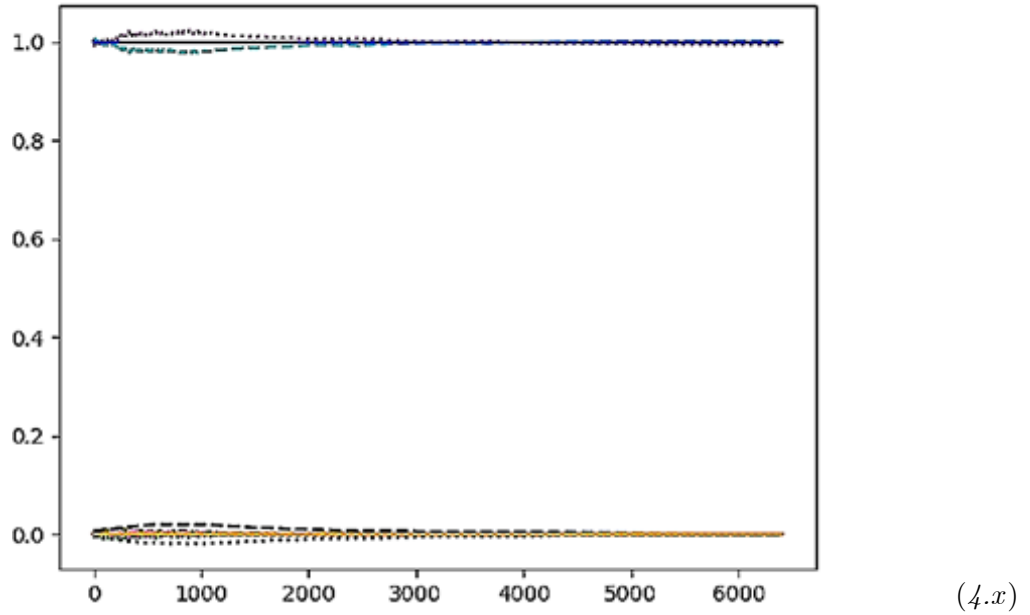
$$0 < v\beta \frac{\eta N}{\mu} < (\gamma + \mu)(v + \mu) + \frac{\sigma^2 v^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2}, \beta < \mu + \gamma \text{ y } v + \beta > 1$$

*se satisface entonces el punto inicial  $(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0)$  para el modelo SEIR-estocástico es asintóticamente estable. La primera desigualdad se puede reescribir como*

$$R_{0,E}^{SEIR} := \frac{v\eta\beta N}{\mu((\gamma + \mu)(v + \mu))} - \frac{v^2\eta^2\sigma^2 N^2}{2\mu^2((\gamma + \mu)(v + \mu))} < 1,$$

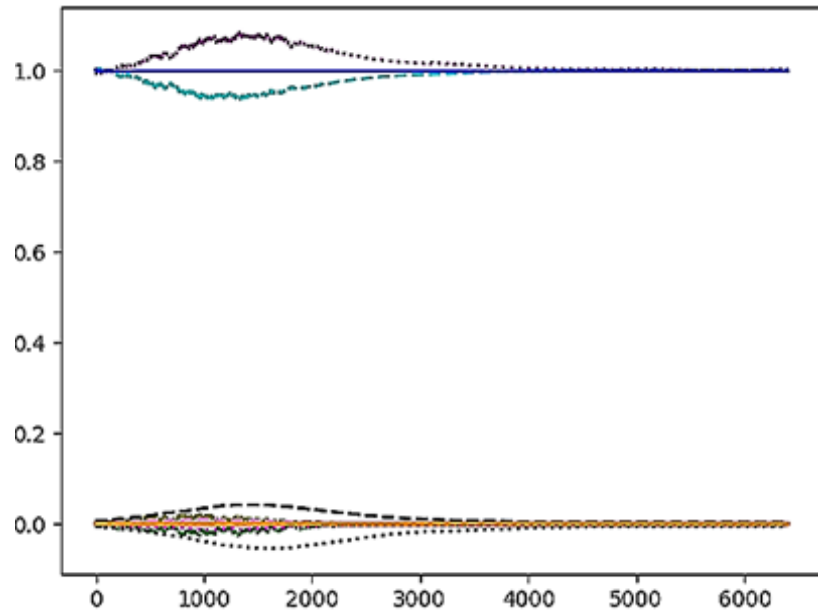
*donde  $R_{0,E}^{SEIR}$  es el número reproductivo básico del modelo SEIR-estocástico por ser el menor valor encontrado para el cual se tiene la estabilidad asintótica (definición 2.10).*

Si tomamos los parámetros como se tomaron para la *gráfica 4.v* excepto  $\beta = 0,9$  tendremos la *figura 4.x*, donde se evidencia que para estos parámetros,  $(1, 0, 0, 0)$  es *asintóticamente estable*, sin embargo, la condición de que  $\beta < \mu + \gamma$  ya no se satisface en este caso.



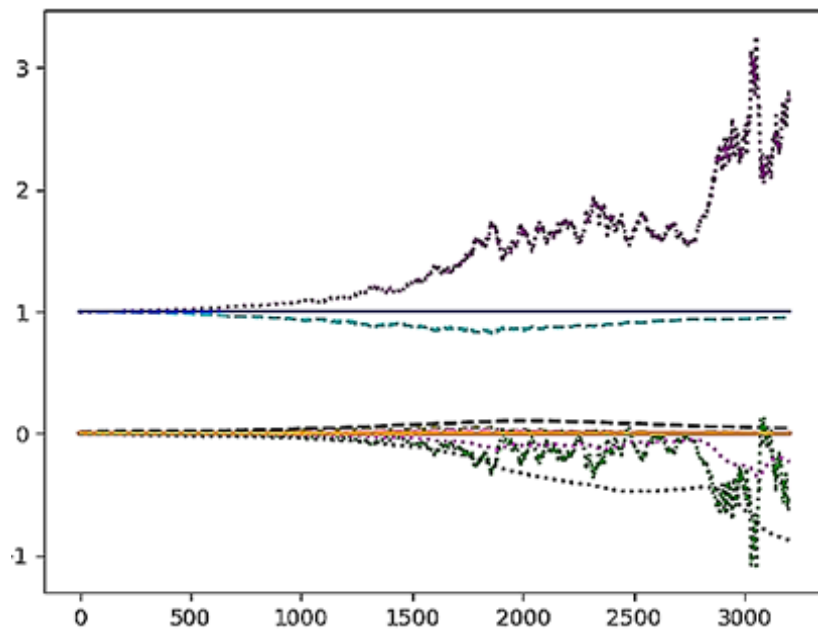
Tomando  $\beta = 0,999$  y el resto de parámetros como en *4.v* obtenemos el siguiente gráfico donde se muestra también la estabilidad asintótica de  $(1, 0, 0, 0)$ . En este caso los parámetros aún satisfacen la condición de que  $v\beta - \sigma^2 v^2 / 2 < (\mu + \gamma)(\mu + v)$ .

<sup>5</sup> A pesar de no observarse en el gráfico, las líneas para la *población susceptible* (azul, cian rayada y morado punteada) tienden todas a 1 y las líneas de las *poblaciones expuestas, infectadas y recuperadas* (el resto) tienden a 0.

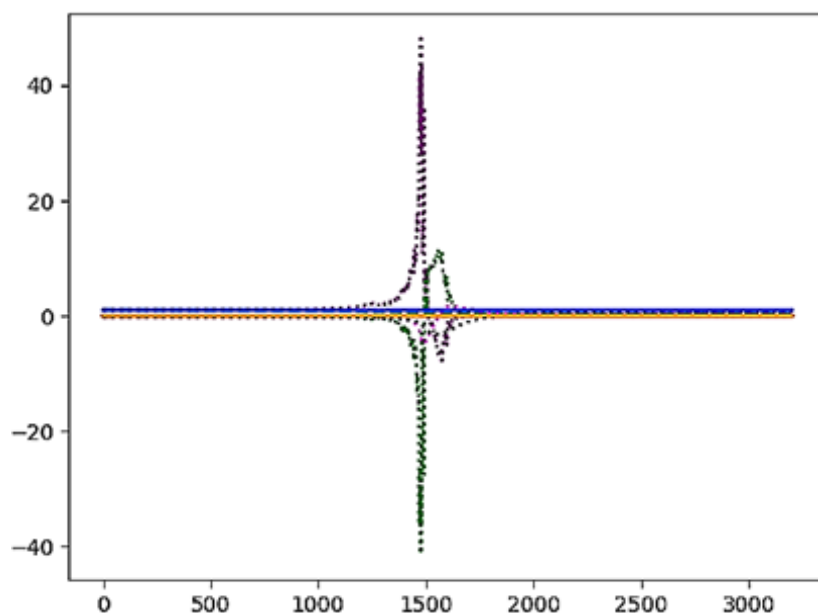


(4.y)

Tomando los parámetros como en 4.v,  $\beta = 1,1$  (figura 4.z) o  $\beta = 1,4$  (figura 4.aa), valores para los cuáles ya no se cumple que  $v\beta - \sigma^2 v^2 / 2 < (\mu + \gamma)(\mu + v)$  se observa que  $(1, 0, 0, 0)$  ya no es *asintóticamente estable* puesto que las trayectorias de  $S(0) + 0,005$ ,  $E(0) + 0,005$ ,  $I(0) + 0,005$  y  $R(0) + 0,005$  no tienden a las trayectorias de  $S(0)$ ,  $E(0)$ ,  $I(0)$  y  $R(0)$ , respectivamente.

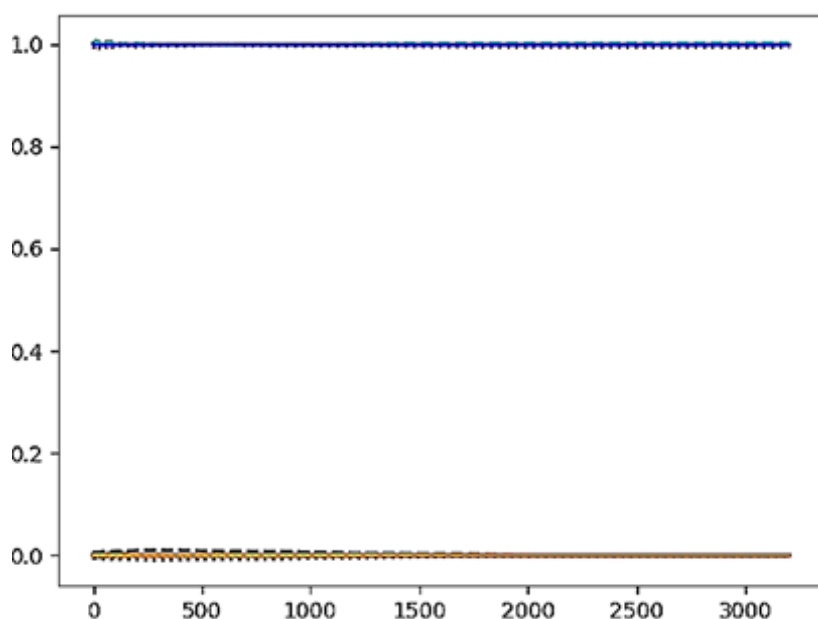


(4.z)



(4.aa)

La condición de que  $v + \beta > 1$  no es *indispensable* para tener estabilidad de  $(1, 0, 0, 0)$  en el modelo SEIR-estocástico. Por ejemplo si tomamos  $\beta = 0,4$ ,  $v = 0,5$  y el resto de parámetros como en 4.u, valores que cumplen que  $v\beta - \sigma^2 v^2 / 2 < (\mu + \gamma)(\mu + v)$  y  $\beta < \mu + \gamma$  obtenemos la gráfica 4.ab.

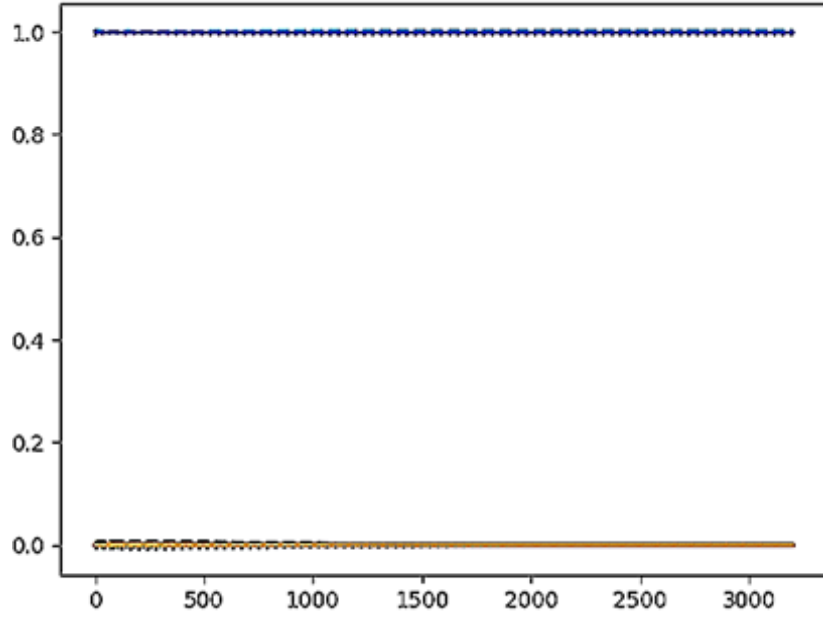


(4.ab)

Si tomamos  $\beta = 0,4$ ,  $v = 0,2$  y el resto de parámetros como en 4.u, valores que no cumplen que  $v + \beta > 1$  y  $\beta < \mu + \gamma$ , pero sí  $v\beta - \sigma^2 v^2 / 2 < (\mu + \gamma)(\mu + v)$  obtenemos la gráfica 4.ac donde observamos *estabilidad asintótica*<sup>6</sup>, implicando que ambas condiciones no son *condiciones suficientes*.

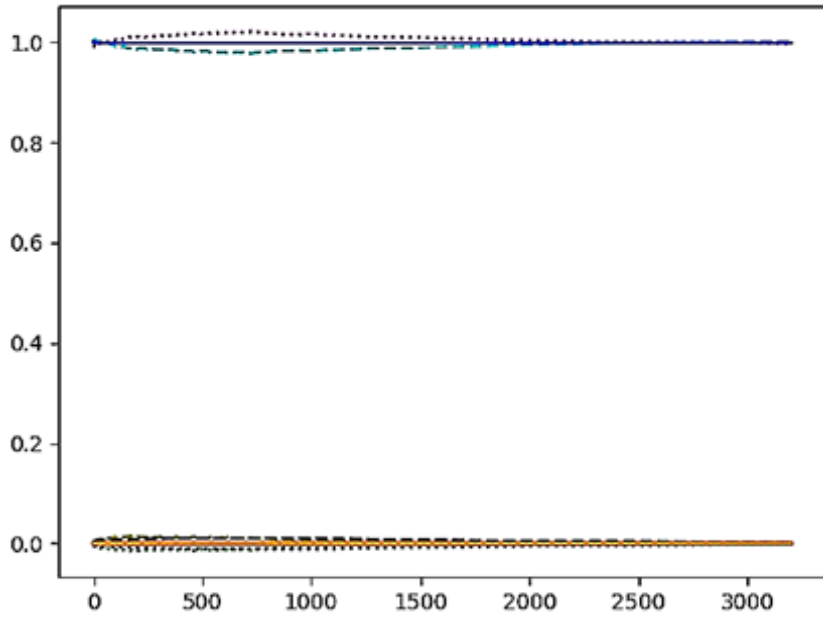
<sup>6</sup> A pesar de no observarse en el gráfico (por la graficación de `pycharm` un compilador de `python`), las líneas para la población susceptible (azul, cian rayada y morado punteada) tienden todas a 1 y las líneas de las poblaciones expuestas, infectadas y recuperadas (el resto de líneas) tienden todas a 0.





(4.ac)

De hecho si tomamos  $\beta = 1,1$ ,  $v = 0,2$  y el resto de parámetros como en 4.u, valores que no cumplen que  $v + \beta > 1$  y  $\beta < \mu + \gamma$ , pero sí  $v\beta + \sigma^2 v^2 / 2 < (\mu + \gamma)(\mu + v)$  obtenemos la *gráfica 4.ad* donde observamos *estabilidad asintótica*<sup>7</sup>. La motivación anterior nos motiva a enunciar la *conjetura 4.3*.



(4.ad)

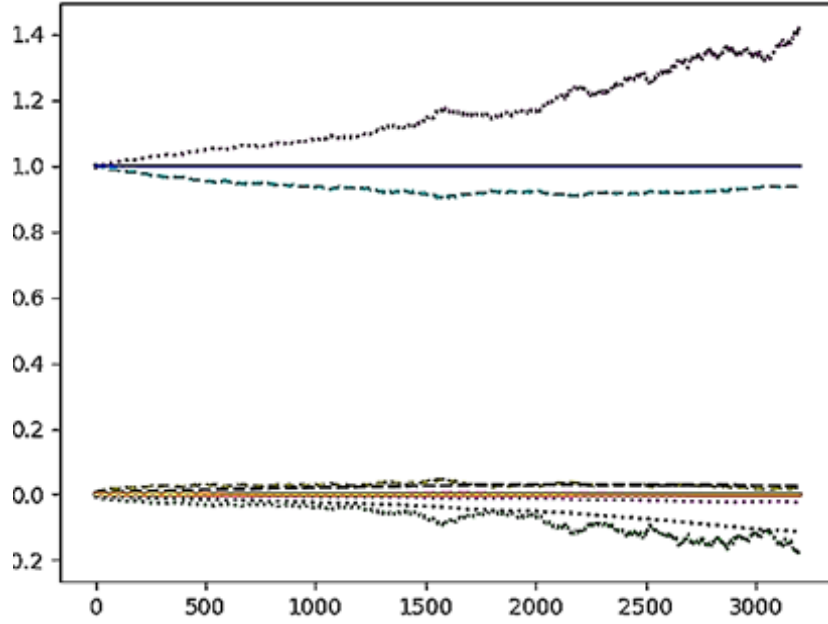
**Conjetura 4.3.** Si la condición de que

$$0 < v\beta \frac{\eta N}{\mu} < (\gamma + \mu)(v + \mu) + \frac{\sigma^2 v^2 \eta^2 N^2}{2\mu^2}$$

se satisface entonces el punto inicial  $\left(\frac{\eta}{\mu}N, 0, 0, 0\right)^T$  en el modelo SEIR-estocástico es asintóticamente estable.

<sup>7</sup>A pesar de no observarse en el gráfico (por la graficación de `pycharm` un compilador de `python`), las *líneas* para la *población susceptible* (azul, cian rayada y morada punteada) tienden todas a 1 y las líneas de las *poblaciones expuestas, infectadas y recuperadas* (el resto de líneas) tienden todas a 0.

Finalmente si las tres condiciones no se cumplen tendremos la *inestabilidad* de  $(1, 0, 0, 0)$ , es decir, la *estabilidad asintótica* no se presenta cuando las tres condiciones suficientes de la *conjetura 4.2.* no se satisfacen simultáneamente. Para verificar esto tomamos  $\beta = 1,9$ ,  $v = 0,2$  y el resto de parámetros como en 4.u obteniendo la gráfica 4.ae.



(4.ae)

### 4.3. Estimación de los parámetros

Dados los datos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una *muestra aleatoria* con distribución de parámetros (o parámetros)  $\theta$  (capítulo 2, pág. 12) se quiere *estimar*  $\theta$  a partir de los valores de  $X_i$ . Para ello utilizamos los conocidos *métodos de estimación* como lo son el *método de momentos* ([Casela, pág. 313–314]), el *método de mínimos cuadrados* ([Bickel, pág. 107–108]), la *estimación minimax* ([Casela, pág. 309–310]), la *estimación por máxima-verosimilitud*. En este trabajo estaremos los parámetros de los modelos epidemiológicos SIS–estocástico y SEIR–estocástico utilizando el *método de máxima verosimilitud*. A *grosso modo* este método consiste en encontrar el valor de  $\hat{\theta}$  más probable dado los datos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ([Casela, pág. 290]).

**Definición 4.1.** ([Casela, pág. 290]) Sea  $f(\mathbf{x}; \theta)$  la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra aleatoria  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  y  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)^8$ . Entonces dado  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ , la función de  $\theta$  definida como

$$L(\theta; \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}; \theta),$$

se llama la **función de verosimilitud**.

La notación  $p(\mathbf{x}; \theta)$  significa que a partir del (de los) parámetro(s)  $\theta$  calculamos la probabilidad de tener el dato  $\mathbf{x}$ . Como lo que conocemos es un valor de  $\mathbf{X}$ , el cual es  $\mathbf{x}$ , necesitamos determinar los valores de  $\theta$ , o en su defecto *estimarlos*, razón por la que escribimos  $L(\theta; \mathbf{x})$ . Lo que conocemos va después del “;”, en el caso de *estimación de parámetros* es el valor de  $\mathbf{x}$ . El *estimador de máxima verosimilitud* corresponde al valor  $\hat{\theta}$  que *máximiza* la función  $L(\theta; \mathbf{x})$ , la cual representa la *probabilidad* de que, dados los datos  $\mathbf{x}$ , se tenga el valor  $\theta$ . La definición corresponde a:

<sup>8</sup>En esta definición se tiene que  $n$  es el tamaño de la muestra y  $r$  es el número de parámetros de la *distribución*. Por ejemplo, la *distribución normal univariada* tiene dos parámetros, es decir,  $r = 2$ .

**Definición 4.2.** ([Casela, pág. 316]) Para cada punto muestral  $\mathbf{x}$ , sea  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$  un valor del parámetro donde  $L(\theta; \mathbf{x})$  se maximiza con respecto a  $\theta$ , siendo  $\mathbf{x}$  fijo. Un **estimador de máxima verosimilitud** o **máximo verosímil** de  $\theta$ , dada la muestra aleatoria  $\mathbf{X}$ , corresponde al valor de  $\hat{\theta}(\mathbf{X})$  el cual satisface

$$L(\hat{\theta}(\mathbf{x}); \mathbf{x}) = \max\{L(\theta; \mathbf{x}) : \theta \in \Theta\},$$

donde  $\Theta$  es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar  $\theta$ .

Los estimadores máximo verosímiles pueden no existir cuando la función  $L(\hat{\theta}(\mathbf{x}); \mathbf{x})$  no tiene máximo o pueden no ser únicos cuando  $L(\hat{\theta}(\mathbf{x}); \mathbf{x})$  presenta varios valores máximos ([Casela, pág. 318]). En la mayoría de los casos es más fácil *maximizar* la conocida **función de log-verosimilitud** que es  $l(\theta; \mathbf{x}) := \ln L(\theta; \mathbf{x})$ . Los máximos de la función de verosimilitud y de log-verosimilitud coinciden porque esta última es monótona y estrictamente creciente en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

Veamos el siguiente ejemplo de estimación por máxima verosimilitud:

**Ejemplo 4.1.** ([Casela, pág. 316]) Estimador máximo verosímil de una muestra aleatoria simple de una distribución  $\mathbf{N}(\theta, 1)$ . Dada una muestra aleatoria simple  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (cap. 2, pág. 12) de una distribución  $\mathbf{N}(\theta, 1)$  tenemos que por ser  $X_1, X_2, \dots, X_n$  iid entonces la función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i - \theta)^2\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2\right\},$$

de manera que la log-verosimilitud corresponde a

$$l(\theta; \mathbf{x}) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2,$$

derivando con respecto  $\theta$  para maximizar  $L(\theta; \mathbf{x})$  vamos a tener que

$$\frac{\partial l(\theta; \mathbf{x})}{\partial \theta} = \frac{2}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = \sum_{i=1}^n x_i - n\theta = 0,$$

por lo tanto,

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x},$$

observemos que  $\left. \frac{\partial^2 l(\theta; \mathbf{x})}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -n < 0$ , por consiguiente  $\theta = \hat{\theta}$  es un máximo de  $l(\theta; \mathbf{x})$  y en consecuencia de  $L(\theta; \mathbf{x})$ , es decir,  $\hat{\theta} = \bar{x}$  es el estimador máximo verosímil. ▲

Para estimar los parámetros de los sistemas de EDE de los modelos epidemiológicos SIS-estocástico y SEIR-estocástico utilizamos un razonamiento análogo al hecho en [Torres] donde se toma un *modelo estocástico* de interacción entre depredador-presa y se estiman los parámetros utilizando como datos el número de depredadores y el número de presas en los instantes de tiempo donde se tomaron las correspondientes mediciones.

### 4.3.1. Estimación de los parámetros para el modelo SIS–estocástico

El objetivo de esta subsección consiste en encontrar  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}, \hat{\eta}, \hat{\gamma}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$  un *estimador máximo verosímil* de  $\theta$  de la EDE del modelo SIS–estocástico. Para tales estimaciones utilizamos los datos de la *población susceptible* y la *población infectada* en  $n$  días, es decir, conocemos  $S(t_i)$  e  $I(t_i)$  para todo  $i = 0, \dots, n$ ,  $t_0 = 0$  y  $t_n = n$ .

Para determinar la función

$$L(\theta; S(t_i), I(t_i) : i = 0, \dots, n) := L(\theta; S(t_1), \dots, S(t_n), I(t_1), \dots, I(t_n))$$

vamos a tomar los valores de  $S(t_i)$  y  $I(t_i)$  como la *recursión* dada por el *método de Euler–Maruyama* (*sistemas de ecuaciones (4.2)*). Por definición, la *función de verosimilitud* está dada por

$$L(\theta; S(t_i), I(t_i) : i = 0, \dots, n) = f(S(t_1), \dots, S(t_n), I(t_1), \dots, I(t_n)).$$

Notacionalmente vamos a escribir

$$f(S(t_1), \dots, S(t_n), I(t_1), \dots, I(t_n)) := f(S(t_i), I(t_i) : i = 0, 1, \dots, n)$$

$$\begin{aligned} f(S(t_n), I(t_n) | S(t_1), \dots, S(t_{n-1}), I(t_1), \dots, I(t_{n-1})) := \\ f(S(t_n), I(t_n) | S(t_i), I(t_i) : i = 0, \dots, n-1), \end{aligned}$$

por definición de la *función de densidad de probabilidad condicional* de  $X$  dado  $Y = y$  (*cap. 1*, pág. 10) tenemos que

$$\begin{aligned} f(S(t_i), I(t_i) : i = 0, 1) &= f(S(t_1), I(t_1) | S(t_0), I(t_0)) f(S(t_0), I(t_0)) \\ f(S(t_2), I(t_2) : i = 0, 1, 2) &= \\ f(S(t_2), I(t_2) | S(t_i), I(t_i) : i = 0, 1) f(S(t_1), I(t_1) | S(t_0), I(t_0)) f(S(t_0), I(t_0)) \\ &\vdots \\ f(S(t_n), I(t_n) : i = 0, \dots, n) &= \\ f(S(t_n), I(t_n) | S(t_i), I(t_i) : i = 0, \dots, n-1) \cdots f(S(t_1), I(t_1) | S(t_0), I(t_0)) f(S(t_0), I(t_0)), \end{aligned}$$

es decir,

$$L(\theta; S(t_i), I(t_i) : i = 0, \dots, n) = \prod_{i=0}^n f(S(t_i), I(t_i) | S(t_k), I(t_k) : k = 0, \dots, i-1). \quad (4.4)$$

El proceso estocástico determinado por el vector  $\{(S(t), I(t))\}_{t \geq 0}$  constituye una *Cadena de Markov* ya que el número de infectados y susceptibles en el día  $t$  depende únicamente de las interacciones entre los individuos que empiezan siendo susceptibles y los que empiezan siendo infectados desde que comienza el día, siendo tales individuos aquellos que estaban infectados y eran susceptibles el día inmediatamente anterior, es decir, desde el día  $t-1$ . De esta forma tenemos de la *igualdad (4.4)* que

$$L(\theta; S(t_i), I(t_i) : i = 0, \dots, n) = \prod_{i=0}^n f(S(t_i), I(t_i) | S(t_{i-1}), I(t_{i-1})). \quad (4.5)$$

Si tomamos los datos *diariamente* o *anualmente*, es decir, haciendo que  $t_{j+1} - t_j = 1$  entonces tendremos que  $B(t_{j+1}) - B(t_j) \sim \mathbf{N}(0, 1)$ . Utilizando tal variable aleatoria, de la *ecuación (4.2)* observamos que

$$S(t_{j+1}) \sim \mathbf{N}(\mu_{S_j}, \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)) \text{ y } I(t_{j+1}) \sim \mathbf{N}(\mu_{I_j}, \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)),$$

, donde

$$\begin{aligned}\mu_{S_j} &= S(t_j) + \eta N - \beta S(t_j) I(t_j) + \gamma I(t_j) - \mu S(t_j) \text{ y} \\ \mu_{I_j} &= I(t_j) + \beta S(t_j) I(t_j) - (\mu + \gamma) I(t_j).\end{aligned}$$

La *función de densidad condicional*  $f(S(t_j), I(t_j) | S(t_{j-1}), I(t_{j-1}))$  representa a *grosso modo* la *probabilidad* de que se tengan  $S(t_j)$  susceptibles e  $I(t_j)$  infectados en el día  $t_j$  dado que se empieza ese día con  $S(t_{j-1})$  susceptibles e  $I(t_{j-1})$  infectados. De esta forma tendremos que  $S(t_j), I(t_j) | S(t_{j-1}), I(t_{j-1})$  es una *variable aleatoria* que toma los valores  $(S(t_{j-1}), I(t_{j-1}))$  con *población media susceptible* y *población media infectada*  $\mu_{S_j}$  y  $\mu_{I_j}$ , respectivamente para ese día; además la varianza para ambas poblaciones es de  $\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)$ . Así la variable aleatoria  $S(t_j), I(t_j) | S(t_{j-1}), I(t_{j-1})$  tiene *distribución normal* con *función de densidad de probabilidad* dada por:

$$f(S(t_j), I(t_j) | S(t_{j-1}), I(t_{j-1})) = \frac{1}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{S_j})^2}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(I(t_j) - \mu_{I_j})^2}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} \right) \right\}.$$

Nótese que en la *fdp* anterior se considera que las variables aleatorias  $S(t_j)$  e  $I(t_j)$  son ambas *independientes* en el tiempo  $t_j$  ya que  $S(t_j)$  e  $I(t_j)$  sólo dependen de  $S(t_{j-1})$  e  $I(t_{j-1})$ . De la *ecuación (4.5)* y de la anterior *fdp* tenemos que la *función de verosimilitud* corresponde a

$$\begin{aligned}L(\theta) &= L(\theta; S(t_i), I(t_i) : i = 0, \dots, n) = \prod_{j=1}^n f(S(t_j), I(t_j) | S(t_{j-1}), I(t_{j-1})) \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{S_j})^2}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(I(t_j) - \mu_{I_j})^2}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{(\sigma^2 \sqrt{2\pi})^n \prod_{j=1}^n S^2(t_j) I^2(t_j)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{S_j})^2}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(I(t_j) - \mu_{I_j})^2}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} \right) \right\},\end{aligned}$$

de manera que la *función de log-verosimilitud* está dada por

$$\begin{aligned}l(\theta) &= -n \ln(\sigma^2 \sqrt{2\pi}) - 2 \sum_{j=1}^n \ln(S(t_j) I(t_j)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{S_j})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(I(t_j) - \mu_{I_j})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right),\end{aligned}$$

para estimar los parámetros tenemos que maximizar la *función de logverosimilitud*. Derivando dicha función con respecto a  $\sigma$  tenemos que

$$\frac{dl(\theta)}{d\sigma} = -2n \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{S_j})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(I(t_j) - \mu_{I_j})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right),$$

por consiguiente el valor del estimador de máxima verosimilitud para  $\sigma^2$  corresponde a

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{S_j})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(I(t_j) - \mu_{I_j})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right), \quad (4.6)$$

para el parámetro  $\beta$  se tiene la siguiente derivada

$$\begin{aligned} \frac{dl(\theta)}{d\beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d\mu_{S_j}}{d\beta} + \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d\mu_{I_j}}{d\beta} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} (-S(t_j) I(t_j)) + \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} S(t_j) I(t_j) \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S(t_j) I(t_j)} - \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S(t_j) I(t_j)} \right), \end{aligned}$$

por consiguiente el valor del estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  debe satisfacer la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S(t_j) I(t_j)} - \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S(t_j) I(t_j)} \right) = 0,$$

si y sólo si,

$$\sum_{j=1}^n \frac{2(-\hat{\eta}N + \hat{\beta}S(t_j)I(t_j) - \hat{\gamma}I(t_j) + \hat{\mu}S(t_j))}{S(t_j)I(t_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{2(-\hat{\beta}S(t_j)I(t_j) + (\hat{\mu} + \hat{\gamma})I(t_j))}{S(t_j)I(t_j)},$$

si y sólo si,

$$-\hat{\eta}N \sum_{j=1}^n \frac{1}{S(t_j)I(t_j)} + \hat{\beta}n - \hat{\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{S(t_j)} + \hat{\mu} \sum_{j=1}^n \frac{1}{I(t_j)} = -\hat{\beta}n + \hat{\mu} \sum_{j=1}^n \frac{1}{S(t_j)} + \hat{\gamma} \sum_{j=1}^n \frac{1}{S(t_j)},$$

implicando que  $\hat{\beta}$  está dado por

$$\frac{1}{2} \left( \hat{\eta}N \overline{\frac{1}{SI}} + \hat{\mu} \left( \overline{\frac{1}{S}} - \overline{\frac{1}{I}} \right) + 2\hat{\gamma} \overline{\frac{1}{S}} \right) = \hat{\beta}, \quad (4.7)$$

donde

$$\overline{\frac{1}{S}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{S(t_j)}, \quad \overline{\frac{1}{I}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{I(t_j)} \text{ y } \overline{\frac{1}{SI}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{S(t_j)I(t_j)}.$$

Para el parámetro  $\gamma$  se tiene la siguiente derivada

$$\begin{aligned} \frac{dl(\theta)}{d\gamma} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d\mu_{S_j}}{d\gamma} + \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d\mu_{I_j}}{d\gamma} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} I(t_j) + \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} (-I(t_j)) \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j) I(t_j)} - \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j) I(t_j)} \right), \end{aligned}$$

de manera que el valor del estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  satisface la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{-\hat{\eta}N + \hat{\beta}S(t_j)I(t_j) - \hat{\gamma}I(t_j) + \hat{\mu}S(t_j)}{S^2(t_j)I(t_j)} &= \sum_{j=1}^n \frac{-\hat{\beta}S(t_j)I(t_j) + (\hat{\mu} + \hat{\gamma})I(t_j)}{S^2(t_j)I(t_j)} \\ -\hat{\eta}Nn \frac{1}{S^2I} + \hat{\beta}n \frac{1}{S} - \hat{\gamma}n \frac{1}{S^2} + \hat{\mu}n \frac{1}{SI} &= -\hat{\beta}n \frac{1}{S} + \hat{\mu}n \frac{1}{S^2} + \hat{\gamma}n \frac{1}{S^2} \\ \frac{1}{2} \left( \hat{\mu} \left( \frac{1}{S^2} - \frac{1}{SI} \right) + 2\hat{\gamma} \frac{1}{S^2} + \hat{\eta}N \frac{1}{S^2I} \right) &= \hat{\beta} \frac{1}{S}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$\frac{1}{S^2I} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{S^2(t_j)I(t_j)} \text{ y } \frac{1}{S^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{S^2(t_j)}.$$

Para el parámetro  $\mu$  se tiene la siguiente derivada

$$\begin{aligned} \frac{dl(\theta)}{d\mu} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j)I^2(t_j)} \frac{d\mu_{S_j}}{d\mu} + \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j)I^2(t_j)} \frac{d\mu_{I_j}}{d\mu} \right) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j)I^2(t_j)} (-S(t_j)) + \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j)I^2(t_j)} (-I(t_j)) \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S(t_j)I^2(t_j)} + \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j)I(t_j)} \right), \end{aligned}$$

por consiguiente el valor del *estimador de máxima verosimilitud*  $\hat{\theta}$  satisface la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \frac{S(t_j) - \mu_{S_j}}{S(t_j)I^2(t_j)} + \frac{I(t_j) - \mu_{I_j}}{S^2(t_j)I(t_j)} \right) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n \frac{-\hat{\eta}N + \hat{\beta}S(t_j)I(t_j) - \hat{\gamma}I(t_j) + \hat{\mu}S(t_j)}{S(t_j)I^2(t_j)} &= \sum_{j=1}^n \frac{\hat{\beta}S(t_j)I(t_j) - (\hat{\mu} + \hat{\gamma})I(t_j)}{S^2(t_j)I(t_j)} \\ -\hat{\eta}Nn \frac{1}{SI^2} + \hat{\beta}n \frac{1}{I} - \hat{\gamma}n \frac{1}{S^2I} + \hat{\mu}n \frac{1}{I^2} &= -\hat{\beta}n \frac{1}{S} + \hat{\mu}n \frac{1}{S^2} + \hat{\gamma}n \frac{1}{S^2} \\ \hat{\mu} \left( \frac{1}{S^2} - \frac{1}{I^2} \right) + \hat{\gamma} \left( \frac{1}{S^2} - \frac{1}{S^2I} \right) + \hat{\eta}N \frac{1}{SI^2} &= \hat{\beta} \left( \frac{1}{I} - \frac{1}{S} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para el parámetro  $\eta$  se tiene la siguiente derivada

$$\begin{aligned} \frac{dl(\theta)}{d\eta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j)I^2(t_j)} \frac{d\mu_{S_j}}{d\eta} + \frac{2(I(t_j) - \mu_{I_j})}{S^2(t_j)I^2(t_j)} \frac{d\mu_{I_j}}{d\eta} \right) \\ &= -\frac{N}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j)I^2(t_j)}, \end{aligned}$$

por consiguiente el valor del *estimador de máxima verosimilitud*  $\hat{\theta}$  satisface la siguiente igualdad

$$\sum_{j=1}^n \frac{(S(t_j) - \mu_{S_j})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} = 0$$

$$-\hat{\eta}N \frac{1}{S^2 I^2} + \hat{\beta} \frac{1}{SI} - \hat{\gamma} \frac{1}{S^2 I} + \hat{\mu} \frac{1}{SI^2} = 0, \quad (4.10)$$

de esta manera tenemos que los estimadores del modelo SIS–estocástico por el *método de máxima verosimilitud* corresponde a la solución  $\hat{\beta}, \hat{\eta}, \hat{\gamma}, \hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  del sistema de ecuaciones conformado por las ecuaciones (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) y (4.10).

#### 4.3.2. Estimación de los parámetros para el modelo SEIR–estocástico

En el caso del modelo SEIR–estocástico se encontrará  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\eta}, \hat{\mu}, \hat{v}, \hat{\sigma})$  un *estimador máximo verosímil* conociendo la *población susceptible*, la *población expuesta*, la *población infectada* y la *población recuperada* durante  $n$  tiempos, es decir, conocemos  $S(t_i), E(t_i), I(t_i)$  y  $R(t_i)$  para  $i = 0, \dots, n$ ,  $t_0 = 0$  y  $t_n = n$ . Igualmente como se consideró en el modelo SIS–estocástico vamos a tomar  $t_{j+1} - t_j = 1$ , en consecuencia,  $B(t_{j+1}) - B(t_j) \sim \mathbf{N}(0, 1)$ . Siguiendo la EDE del modelo SEIR–estocástico tenemos que

$$S(t_{j+1}) \sim \mathbf{N}(\mu_{S_j}, \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)),$$

$$E(t_{j+1}) \sim \mathbf{N}(\mu_{E_j}, \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)),$$

donde

$$\mu_{S_j} = S(t_j) + \mu N - \beta S(t_j) I(t_j) - \mu S(t_j) \text{ y } \mu_{E_j} = E(t_j) + \beta S(t_j) I(t_j) - (v + \mu) E(t_j),$$

$$\mu_{I_j} = I(t_j) + v E(t_j) - (\mu + \gamma) I(t_j) \text{ y } \mu_{R_j} = R(t_j) + \gamma I(t_j) - \mu R(t_j),$$

se tiene que  $I(t_{j+1})$  y  $R(t_{j+1})$  son dos *variables aleatorias* de media  $\mu_{I_j}$  y  $\mu_{R_j}$ , respectivamente, pero ambas con *varianza nula*, puesto que en el *sistema EDE* del modelo *SEIR-estocástico* las variables  $I(t)$  y  $R(t)$  no tienen componente estocástica.

Observemos que para todas las constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$  obtenemos

$$\alpha_1 S(t_{j+1}) + \alpha_2 I(t_{j+1}) + \alpha_3 E(t_{j+1}) + \alpha_4 R(t_{j+1}) \sim$$

$$\mathbf{N}(\alpha_1 \mu_{S_j} + \alpha_2 \mu_{I_j} + \alpha_3 \mu_{E_j} + \alpha_4 \mu_{R_j}, 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)),$$

lo que significa por definición de la *distribución normal multivariada* que

$$\begin{pmatrix} S(t_{j+1}) & E(t_{j+1}) & I(t_{j+1}) & R(t_{j+1}) \end{pmatrix}^T \sim \mathbf{N}_4 \left( \begin{pmatrix} \mu_{S_j} & \mu_{E_j} & \mu_{I_j} & \mu_{R_j} \end{pmatrix}^T, \Sigma \right)$$

donde

$$\Sigma = \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de esta forma  $(S(t_{j+1}), E(t_{j+1}), I(t_{j+1}), R(t_{j+1}))^T$  es un vector aleatorio con *distribución normal 4-variante* con  $\det \Sigma = 0$ , es decir, tiene una *distribución degenerada*<sup>9</sup>. Razonando de manera análoga como se hizo en el modelo SIS–estocástico vamos a tener que la variable aleatoria

<sup>9</sup> $(S(t_{j+1}), E(t_{j+1}), I(t_{j+1}), R(t_{j+1}))^T$  es un *vector aleatorio* con *distribución normal degenerada*, ya que el *sistema EDE* del modelo *SEIR-estocástico* se tiene que  $I(t_{j+1})$  y  $R(t_{j+1})$  son *variables aleatorias* de medias  $\mu_{I_j}$  y  $\mu_{R_j}$ , respectivamente, pero ambas con *varianza 0*.



$$S(t_i), E(t_i), I(t_i), R(t_i) | S(t_{i-1}), E(t_{i-1}), I(t_{i-1}), R(t_{i-1})$$

tiene *distribución normal* con *función de densidad de probabilidad* dada por:

$$f(\mathbf{x}_{j+1} | \mathbf{x}_j) = \frac{1}{(\det(2\pi\mathbf{\Sigma}))^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_j - \Phi)^T \mathbf{\Sigma} (\mathbf{x}_j - \Phi) \right\},$$

donde  $\mathbf{x}_j = (S(t_j), E(t_j), I(t_j), R(t_j))^T$  y  $\Phi = (\mu_{Sj}, \mu_{Ej}, \mu_{Ij}, \mu_{Rj})^T$ . Sin embargo notemos que la función anterior no está definida puesto que  $\det \mathbf{\Sigma} = 0$ , razón por la cual se debe tomar una función de densidad “cercana” correspondiente a

$$f(\mathbf{x}_{j+1} | \mathbf{x}_j) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} (\det(\mathbf{\Lambda}))^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_j - \Phi)^T \mathbf{\Sigma}^+ (\mathbf{x}_j - \Phi) \right\},$$

donde  $\mathbf{\Sigma}^+$  es la *inversa generalizada de Moore–Penrose* de  $\mathbf{\Sigma}$  y  $\mathbf{\Lambda}$  es la matriz diagonal de los *valores propios* distintos de cero de la matriz  $\mathbf{\Sigma}$  (*teorema de la desintegración* en [Tsukuma, pág. 4-5]). Para este caso específico tenemos que

$$\mathbf{\Lambda} = \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \det \mathbf{\Lambda} = \sigma^4 S^4(t_j) I^4(t_j)$$

y para la calcular la *inversa de Moore–Penrose* seguimos el procedimiento dado en ([Soto, pág. 302–303]), donde se seleccionan primero las *columnas linealmente independientes* de la matriz  $\mathbf{\Sigma}$  formando así la matriz  $B$ ; determinamos además las *filas independientes* de  $\mathbf{\Sigma}$  formando la matriz  $C$  y posteriormente calculamos las matrices  $B_i^{-1} = (B^T B)^{-1} B^T$  y  $C_d^{-1} = C^T (C^T C)^{-1}$ . Veamos

$$\begin{aligned} B^T &= \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \\ B_i^{-1} &= \frac{1}{\sigma^4 S^4(t_j) I^4(t_j)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B^T = \frac{1}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y} \\ C_d^{-1} &= \frac{1}{\sigma^4 S^4(t_j) I^4(t_j)} C^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \end{aligned}$$

si tomamos  $A_{11}$  como la matriz para la cual las filas y columnas de  $B$  y  $C$  coinciden, entonces la *inversa generalizada de Moore–Penrose* es igual a  $C_d^{-1} A_{11} B_i^{-1}$ . Así como

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces} \\ G = C_d^{-1} A_{11} B_i^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

así tenemos que la *función de densidad condicional* está dada por

$$f(\mathbf{x}_{j+1} | \mathbf{x}_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right) \right\}$$

de esta manera y bajo la suposición de que el *proceso estocástico* forma un *proceso de Markov* entonces la función de verosimilitud está dada por

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{j=1}^n f(\mathbf{x}_{j+1} | \mathbf{x}_{j-k} : k = 1, 2, \dots, j-1) = \prod_{j=1}^n f(\mathbf{x}_{j+1} | \mathbf{x}_j) \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2 S^2(t_j) I^2(t_j)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{(\sigma^2 \sqrt{2\pi})^n \prod_{j=1}^n (S(t_j) I(t_j))^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right) \right\}
\end{aligned}$$

de manera que la *función de log-verosimilitud* está dada por

$$l(\theta) = \ln \left( (\sigma^2 \sqrt{2\pi})^n \right) - 2 \sum_{j=1}^n \ln (S(t_j) I(t_j)) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})^2}{(S(t_j) I(t_j))^2} + \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej})^2}{(S(t_j) I(t_j))^2} \right),$$

para estimar los parámetros tenemos que *maximizar* la *función de logverosimilitud*. Derivando dicha función con respecto a  $\sigma$  tenemos que

$$\frac{dl(\theta)}{d\sigma} = -2n \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right),$$

por consiguiente el valor del *estimador de máxima verosimilitud* para  $\sigma^2$  corresponde a

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} + \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej})^2}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right), \quad (4.11)$$

de manera análoga como se realizó con el modelo SIS–estocástico calculamos con respecto a  $\beta$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{dl(\theta)}{d\beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d(\mu_{Sj})}{d\beta} + \frac{2(E(t_j) - \mu_{Ej})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d(\mu_{Ej})}{d\beta} \right) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( -\frac{2(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} S(t_j) I(t_j) + \frac{2(E(t_j) - \mu_{Ej})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} S(t_j) I(t_j) \right)
\end{aligned}$$

de manera que el valor del estimador de máxima verosimilitud para  $\beta$  satisface la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S(t_j) I(t_j)} &= \sum_{j=1}^n \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej})}{S(t_j) I(t_j)} \\
\sum_{j=1}^n \frac{-\hat{\eta}N + \hat{\beta}S(t_j) I(t_j) + \hat{\mu}S(t_j)}{S(t_j) I(t_j)} &= \sum_{j=1}^n \frac{-\hat{\beta}S(t_j) I(t_j) + (\hat{v} + \hat{\mu}) E(t_j)}{S(t_j) I(t_j)} \\
\hat{\beta} &= \frac{1}{2} \left( \hat{\eta}N \overline{\frac{1}{SI}} - \hat{\mu} \left( \overline{\frac{1}{I}} - \overline{\frac{E}{SI}} \right) + \hat{v} \overline{\frac{E}{SI}} \right), \quad (4.12)
\end{aligned}$$

para el parámetro  $v$  observamos que

$$\begin{aligned}
\frac{dl(\theta)}{dv} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d(\mu_{Sj})}{dv} + \frac{2(E(t_j) - \mu_{Ej})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d(\mu_{Ej})}{dv} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(E(t_j) - \mu_{Ej})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} E(t_j) \right)
\end{aligned}$$

de manera que el valor del estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  satisface la siguiente igualdad

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej}) E(t_j)}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right) = 0$$

$$\hat{\beta} \frac{\overline{E}}{SI} - \hat{v} \frac{\overline{E^2}}{S^2 I^2} - \hat{\mu} \frac{\overline{E^2}}{S^2 I^2} = 0, \quad (4.13)$$

para el parámetro  $\mu$  observamos que

$$\begin{aligned} \frac{dl(\theta)}{d\mu} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d(\mu_{Sj})}{d\mu} + \frac{2(E(t_j) - \mu_{Ej})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d(\mu_{Ej})}{d\mu} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} S(t_j) + \frac{(E(t_j) - \mu_{Ej})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} E(t_j) \right) \end{aligned}$$

de manera que el valor del estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  satisface la siguiente igualdad

$$\sum_{j=1}^n \frac{-\hat{\eta}N + \hat{\beta}S(t_j)I(t_j) + \hat{\mu}S(t_j)}{S(t_j)I^2(t_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{(-\hat{\beta}S(t_j)I(t_j) + (\hat{v} + \hat{\mu})E(t_j))}{S^2(t_j)I^2(t_j)} E(t_j)$$

$$\hat{\beta} \left( \frac{1}{I} + \frac{\overline{E}}{SI} \right) = \hat{\eta}N \frac{1}{SI^2} + \hat{v} \frac{\overline{E^2}}{S^2 I^2} + \hat{\mu} \left( \frac{\overline{E^2}}{S^2 I^2} - \frac{1}{I^2} \right), \quad (4.14)$$

para el parámetro  $\eta$  observamos que

$$\begin{aligned} \frac{dl(\theta)}{d\eta} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d(\mu_{Sj})}{d\eta} + \frac{2(E(t_j) - \mu_{Ej})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \frac{d(\mu_{Ej})}{d\eta} \right) \\ &\quad - \frac{N}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{2(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} \right) \end{aligned}$$

de manera que el valor del estimador de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  satisface la siguiente igualdad

$$\sum_{j=1}^n \frac{(S(t_j) - \mu_{Sj})}{S^2(t_j) I^2(t_j)} = 0$$

$$-\hat{\eta}N \frac{1}{S^2 I^2} + \hat{\beta} \frac{1}{SI} + \hat{\mu} \frac{1}{SI^2} = 0. \quad (4.15)$$

Para el parámetro  $\gamma$ , que es la *tasa de recuperación*, no tenemos una *estimación*, ya que  $\gamma$  no aparece en la *función de máxima verosimilitud*. Tal *problema* hace que el método propuesto en este trabajo no sea *adecuado* para *estimar los parámetros* del modelo SEIR–estocástico. De hecho para *estimar* algunos *parámetros* se ignoró cierta información de los mismos, por ejemplo en el caso de  $\mu$  no se tuvo en cuenta que también fallecen *personas infectadas y recuperadas*. Los *estimadores máximo verosímiles* del modelo SEIR–estocástico satisfacen las ecuaciones (4.12), (4.13), (4.14) y (4.15).

#### 4.4. Ejemplo de aplicación con datos reales

Para evidenciar una aplicación vamos a tomar los datos dados en [Min, pág. 6] correspondientes al número de casos reportados de la *sífilis* para los años 2009, 2010 y 2011 (ver *tabla T1*). En este trabajo se determinará el comportamiento que tendrá la *sífilis* en Colombia *estimando* primero las *tasas* (los *parámetros*) en el modelo SIS—estocástico utilizando los *estimadores máximo—verosímiles* propuestos en la sección anterior. Luego se determinará el *número reproductivo básico* para encontrar la *estabilidad del sistema* y su *persistencia en la media*. Para la *extinción* se modelarán las trayectorias por el *método de Euler—Maruyama* y se calculará la *media* y la *varianza* de la *distribución estacionaria* de la *población infectada*.

Diagnóstico	Número de personas Atendidas		
	2009	2010	2011
Sífilis precoz	2172	1898	2228
Sífilis tardía	885	836	992
Otra sífilis y las no especificadas	4297	4018	6104
Total	7354	6754	9324

(T1)

Los datos se agrupan en dos etapas: la *sífilis*: *sífilis precoz*, *sífilis tardía* y otras sífilis y las no especificadas<sup>10</sup>. La *sífilis precoz* corresponde a las *fase primaria* y a la *fase secundaria* de la enfermedad, periodo en cual una *persona infectada* desarrolla el *chancro*; el cual es una llaga firme, inolora y que no causa dolor (*primera fase*), para luego presentar erupciones en la piel o llagas en la vagina, boca o ano, además de posiblemente desarrollar fiebre, inflamación de las glándulas linfáticas, pérdida parcial del cabello, dolor de cabeza, pérdida de peso, fatiga y dolor muscular (*segunda fase*). La *sífilis* tiene cura si se trata durante las primeras dos fases de la enfermedad, el tratamiento consiste en un adecuado manejo de medicamentos recetados por el médico tratante. Si la enfermedad no se trata, llegará a su *fase avanzada* o *sífilis tardía*, donde el individuo infectado podría desarrollar ceguera, demencia, tener problemas con la coordinación de su motricidad, etc. (ver [CDC]).

Según [CDC, pág. 2] una persona que tiene *sífilis* y se cura se puede volver a contagiar al estar en contacto sexual con una persona infectada. Es decir que frente a la *sífilis* un ser humano no desarrolla *inmunidad*, razón por la cual un individuo que se cura pasa a ser de nuevo una *persona susceptible*, por lo cual es conveniente modelar la dinámica de esta enfermedad utilizando el modelo SIS—estocástico. Los datos que se presentan corresponden al número de infectados con *sífilis tardía* y *sífilis precoz*. Un individuo es *infeccioso* sólo durante las dos primeras fases de la enfermedad o también cuando una madre está infectada y contagia a su bebé durante la gestación. En este trabajo se tomará el grupo de los infectados únicamente a los individuos en la *fase precoz*, por ser aquellos que son *infecciosos*. Como aquellos que tienen *sífilis tardía* no se recuperaran de la enfermedad, éstos individuos no pueden volver al grupo de *susceptibles*, pero tampoco pueden ser considerados como *infectados*, ya que los individuos infectados son aquellos que también son infecciosos, razón por la cual éstos individuos no se tendrán en cuenta en la *modelación*.

De acuerdo con la OMS en [OMS] la edad donde predomina la actividad sexual está entre los 15 y los 49 años siendo el 49,37 % de la población ([DANE]), razón por la cual en este trabajo se considerará dicho rango de edad como el de las personas *sexualmente activas*. La población total en Colombia en el año 2009 fue de 44978000 habitantes ([Banrep]), de manera que el número de personas *susceptibles* a la *sífilis* para el año 2009, si consideramos los *casos no especificados como individuos no infecciosos*, corresponde a

<sup>10</sup>Por *sífilis no especificadas* se refiere a que en los *pacientes* no se determina en qué etapa de la *sífilis* está: o bien puede ser en la *etapa precoz* o bien puede ser en la *etapa tardía*.

$$S(0) = \frac{49,37}{100} 44978000 - 5182 = 22204754$$

Número de personas sexualmente activas en 2009
Número de personas con sífilis no infecciosos en 2009

En [Banrep] también se muestra que en 2010 y 2011 Colombia tenía 45509584 y 46044601 habitantes<sup>11</sup>, respectivamente. Razonando de manera análoga obtenemos la *tabla T2* con los valores de los *susceptibles* y los *infecciosos confirmados* anualmente

Diagnóstico	2009	2010	2011
Susceptibles	22200457	22463228	22725124
Infectados	2172	1898	2228

(T2)

Por otra parte, si consideramos que todos los individuos de los cuales se desconoce su diagnóstico son *infecciosos* entonces tenemos la *tabla T3*

Diagnóstico	2009	2010	2011
Susceptibles	22204754	22467246	22731228
Infectados	6469	5918	8332

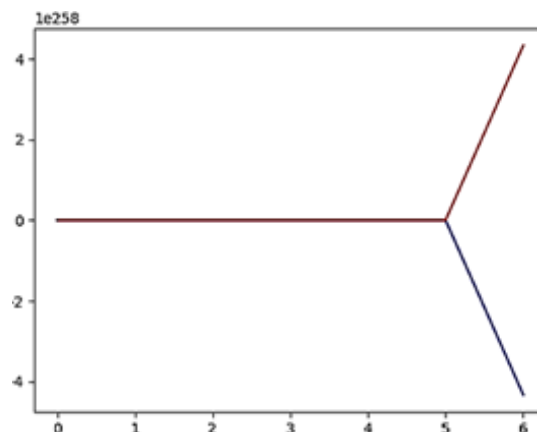
(T3)

Tomando los datos anteriores como  $S(0)$ ,  $S(1)$  y  $S(2)$ ;  $I(0)$ ,  $I(1)$  e  $I(2)$ , respectivamente, tendremos que el *sistema de ecuaciones* para determinar los *estimadores máximo-verosímiles* (*ecuaciones de la 4.6 a la 4.10*) tienen solución para los siguientes valores

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= -2,457295\text{e} - 04 &= -0,0002457296 \\
\hat{\eta} &= -1,038560\text{e} + 00 &= -1,03856 \\
\hat{\mu} &= 3,882654\text{e} - 05 &= 0,00003882654 \\
\hat{\gamma} &= 7,237712\text{e} - 04 &= 0,0007237712 \\
\hat{\delta} &= 0,005871479 &= 0,005871479
\end{aligned}$$

Se utilizó el código de **RStudio** mostrado en el *anexo B*, en el cual se utilizó la función **BBSolve** de la librería **BB** del paquete **BB**, el cual resuelve el sistema por el *método de Barzilai-Borwein* (ver [Dai]).

Notamos inmediatamente que la *tasa de infectividad* y la *tasa de influencia* estimadas son negativas. Una tasa negativa denota *decrecimiento*, por ejemplo, si  $\beta = -3$  personas/año, denota que el número de infectados se reduce tres personas anualmente. La *figura 4.af* muestra las trayectorias que sigue la enfermedad bajo las estimaciones realizadas por el método de máxima verosimilitud propuesto en este trabajo para el modelo SIS–estocástico.



(4af)

<sup>11</sup>La población de los años 2009, 2010 y 2011 en realidad son estimaciones dadas por las proyecciones de la población de acuerdo con el Censo Nacional realizado por el DANE en el año 2005

La anterior gráfica es “poco diciente” o no informativa. El problema está en que la *tasa de influencia* estimada “no tiene sentido”, ya que al tener  $\hat{\eta} = -1,038560$  entonces

$$\hat{\eta}N = -1,038560 (22204754)$$

lo que significa que en promedio se reduce la *influencia de la población*  $-\hat{\eta}N$ , siendo este un número mayor incluso que la población máxima de los tres años. Es necesario tener en cuenta que los estimados máximo verosímiles *pueden no ser únicos*, por lo que en ocasiones es necesario “corregir este problema” *estimando directamente* de los datos algunos de los parámetros, en este caso la *tasa de influencia*, la *tasa de mortalidad* y la *tasa de infectividad*. Para estimar la *tasa de influencia* observamos que

$$\text{Tasa de influencia del 2009: } 22204754 - \frac{49,37}{100} (43926929) = 518029$$

$$\text{Tasa de influencia del 2010: } 22467246 - 22204754 = 262492$$

$$\text{Tasa de influencia del 2011: } 22731228 - 22467246 = 263982$$

de esta manera

$$\hat{\eta}N = \frac{518029+262492+263982}{3} = 348167,666666,$$

como  $N = S(0) = 22204754$ , entonces

$$\hat{\eta} = \frac{348167,666666}{22204754} = 0,01567987.$$

Para estimar el parámetro  $\mu$  (*tasa de mortalidad*) utilizamos los datos encontrados en ([Min1]) correspondientes a la *tabla T4*

Diagnóstico	2009	2010	2011
Número de muertos	196933	200522	195823

(T4)

de esta forma para estimar *tasa de mortalidad*  $\mu$  hacemos

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{3} \left( \frac{\text{Muertos del 2009}}{\text{Población total del 2009}} + \frac{\text{Muertos del 2010}}{\text{Población total del 2010}} + \frac{\text{Muertos del 2011}}{\text{Población total del 2011}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{196933}{44978000} + \frac{200522}{45509584} + \frac{195823}{46044601} \right) = 0,00434582\end{aligned}$$

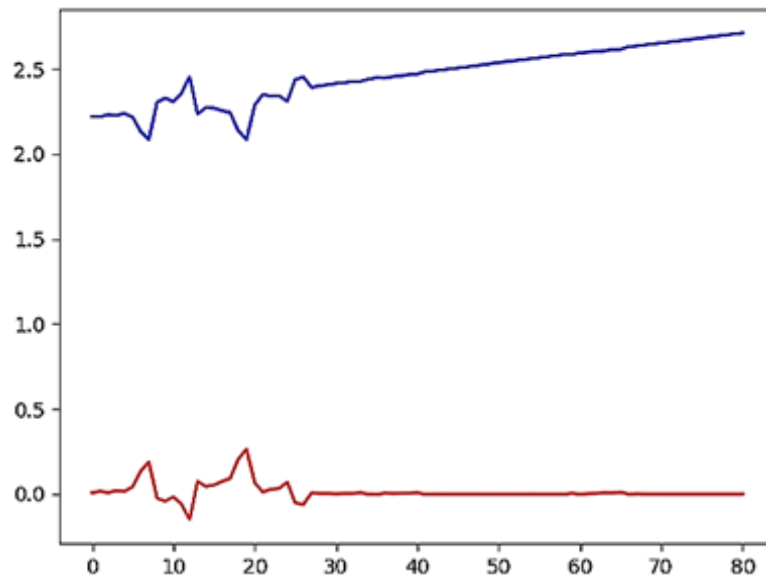
Para estimar la *tasa de infectividad*  $\beta$  calculamos

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{1}{3} \left( \frac{\text{Infectados del 2009}}{\text{Población susceptible del 2009}} + \frac{\text{Infectados del 2010}}{\text{Población susceptible del 2010}} + \frac{\text{Infectados del 2011}}{\text{Población susceptible del 2011}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{6469}{22204754} + \frac{5918}{22467246} + \frac{8332}{22731228} \right) = 0,00030709\end{aligned}$$

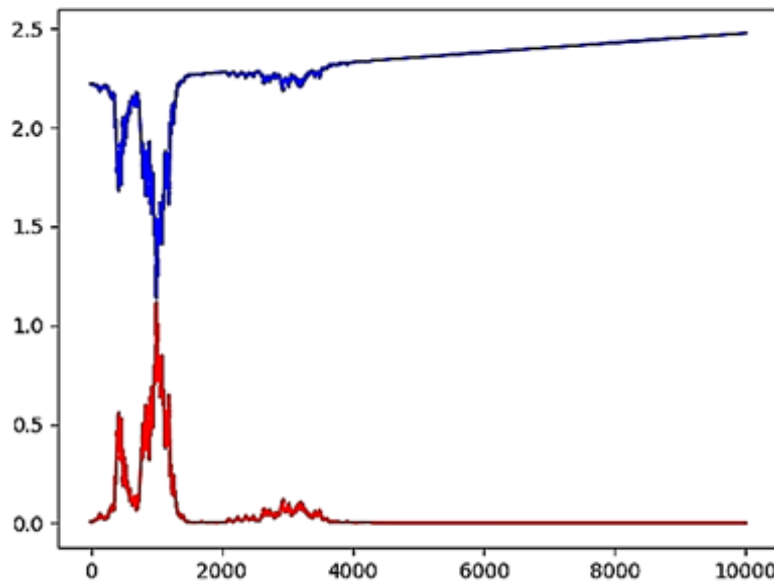
Con los valores de  $\hat{\eta}, \hat{\mu}, \hat{\beta}$  basta con reemplazarlos en el sistema de ecuaciones conformado por las *ecuaciones (4.6) y (4.8)*. Resolviendo dicho sistema se encuentra los valores de  $\hat{\gamma}$  y de  $\hat{\sigma}$ , nuevamente utilizando la función **BBsolve**. Los valores corresponden a:

$$\hat{\sigma} = 1,07774281 \text{ y } \hat{\gamma} = 0,08313723.$$

Las gráficas  $4ag$  y  $4ah$  muestran el comportamiento durante los primeros 80 años y durante 10000 años de prevalencia de la enfermedad. Se observa que el *modelo tiene extinción*.



(4ag)



(4ah)

El número reproductivo básico corresponde a

$$\hat{R}_{0,E} = \frac{\hat{\beta}\hat{\eta}N}{\hat{\mu}(\hat{\gamma} + \hat{\mu})} - \frac{\hat{\sigma}^2\hat{\eta}^2N^2}{2\hat{\mu}^2(\hat{\gamma} + \hat{\mu})} = 4,73102e + 16 = 4,73102^{16}$$

Claramente  $\hat{R}_0 > 1$ , indicando que el sistema de EDE es *inestable y persistente en la media*. De hecho  $\hat{R}_{0,E}$  es *excesivamente grande*, esto puede deberse a que la enfermedad tiene prevalencia aún después de 4000 años. Finalmente la *media* y la *varianza* de la distribución estacionaria corresponde a

$$\mathbb{E}[I(+\infty)] = 144574203 \text{ y } \mathbb{V}[I(+\infty)] = -2,115464e + 16$$

Obteniendo así una *varianza negativa* (hecho que no puede ocurrir). Esto podría indicar que el modelo *SIS-estocástico* con los parámetros estimados no tiene una *distribución estacionaria*, es decir, la dinámica de la enfermedad en un *tiempo suficientemente grande* no puede ser determinado por una *distribución*. Esto significa que los resultados pueden *variar significativamente*<sup>12</sup> al hacerse una *simulación* y otra.

---

<sup>12</sup>Es decir, las gráficas para la población susceptible e infectada pueden tener cambios drásticos con respecto a las gráficas presentadas en este trabajo.



# Conclusiones

El *modelamiento matemático epidemiológico* es una herramienta muy útil para pronosticar el comportamiento de una enfermedad. Comúnmente se utilizan los modelos matemáticos deterministas en los cuáles no se consideran ningún tipo de *perturbación* debida, por ejemplo, a factores ambientales como la contaminación, el clima o la densidad de población. Considerando que tales perturbaciones pueden afectar la *infectividad* de una epidemia es que en este trabajo se estudia el modelo epidemiológico SIS-estocástico (propuesto en [Gray]) y se propone el modelo SEIR-estocástico, derivados directamente de los *modelos deterministas*.

En los modelos epidemiológicos estocásticos SIS y SEIR ya no se habla sólo de un número reproductivo básico, que es el promedio de infectados por una persona infectada cuando la población es completamente susceptible, sino de una *variable aleatoria reproductiva* básica derivada de la integral de la *función de sobrevivencia* (en este trabajo la función  $F(a)$ ) y de un *número reproductivo básico* derivado de las *condiciones numéricas* que conducen a una estabilidad asintótica de las *condiciones iniciales* de los sistemas. La relación entre el *número reproductivo básico* y la *variable reproductiva básica* es que la *esperanza* de la *variable* es mayor que el *número reproductivo*. Cabe aclarar que la definición de *número reproductivo básico* para de los modelos SIS-estocástico y SEIR-estocástico se realiza a partir de las *simulaciones* de los sistemas, sin embargo, no se hace una *demonstración matemática* que *pruebe* que efectivamente se tenga la *estabilidad asintótica* de las *condiciones iniciales* de acuerdo con el *número reproductivo básico* definido. Estas *demonstraciones* se realizan para valores mayores a los *número reproductivo* definido.

La ventaja de considerar el *número reproductivo básico* sobre la *variable reproductiva básica* está en que los resultados sobre la *estabilidad asintótica* de los sistemas se *formulan* de acuerdo a *condiciones numéricas* suficientes, no en términos de *variables aleatorias*. Además los resultados estudiados en el capítulo 3 se formulan también dadas ciertas *condiciones numéricas* de los *parámetros*. Sin embargo, para la *variable aleatoria reproductiva básica* se podría determinar un conjunto de pronósticos más probables a diferencia de considerar el número reproductivo donde se tiene un sólo pronóstico.

Se estudiaron cuatro aspectos importantes: *existencia y unicidad*, *extinción*, *persistencia en la media* y *existencia de la distribución estacionaria*. Si bien la existencia de las soluciones están garantizadas para los modelos SIS—estocástico y SEIR—estocástico, el resto de aspectos tienen como *hipótesis suficientes* ciertas *condiciones numéricas* determinadas por los parámetros de los modelos. Un aspecto más interesante es estudiar “condiciones más finas”, es decir, mejores condiciones para garantizar *extinción*, *persistencia en la media* y *existencia de la distribución estacionaria*. Para ello se podría realizar un trabajo de *control estocástico* y de *optimización estocástica*.

En este trabajo se verifica vía simulaciones los teoremas propuestos con respecto a la estabilidad de los sistemas y con respecto a la extinción de los mismos. De hecho se formulan conjeturas no demostradas sobre la *estabilidad asintótica* dadas ciertas condiciones numéricas de los parámetros de los modelos. Demostrar tales conjeturas puede ser un trabajo futuro.

Se *simulan las gráficas de las soluciones* utilizando el *método de Euler-Maruyama*, el cual permite no sólo simular sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas en general, sino también hacer una estimación de los parámetros de dichas ecuaciones por máxima verosimilitud. Sin embargo, como se observa en el manejo de datos reales, esta estimación no siempre es adecuada porque los estimadores obtenidos pueden no ser únicos. Por otra parte, es recomendable utilizar la *información conocida* para estimar la mayor cantidad de parámetros posible y dejar únicamente la componente estocástica ( $\sigma$ ) para estimar vía máxima verosimilitud, obteniendo así en el trabajo una *mejor estimación*, a pesar de estimar el parámetro  $\gamma$  también por máxima verosimilitud, por ausencia de información. Como un trabajo futuro puede estar determinar el *sesgo*, la *suficiencia*, la *completez* y la *consistencia* de los estimadores propuestos en este trabajo. De hecho un trabajo más ambicioso está en determinar *intervalos de confianza* y *pruebas de hipótesis* para dichos estimadores.

Si bien se hacen las simulaciones y las estimaciones por el método de Euler-Maruyama, cabe resaltar que hay *métodos mejores*, en el sentido de que existen métodos, como el de *Milstein*, con un *coeficiente de error* menor al del método de Euler-Maruyama. Sin embargo al hacer las *estimaciones* usando estos métodos se pierde la *distribución normal* en la función de *máxima verosimilitud*, lo que puede significar cálculos más complejos.

En los *modelos presentados en este trabajo* se tiene que  $\beta I(t) S(t)$  es el número de *nuevos infectados* de por  $I(t)$  *infectados* teniendo  $S(t)$  *susceptibles*. Sin embargo, este supuesto no es muy “realista” puesto que no considera el hecho de que la población infectada tiene cierto *punto máximo*, a partir del cual empieza a decaer. Teniendo este supuesto, en [Liu] se propone un modelo epidemiológico con *incidencia saturada*  $\alpha$ , la cual es una constante (parámetro) bajo el cual se tiene que el número de infectados en el tiempo  $t$  por  $I(t)$  infecciosos en un grupo de  $S(t)$  susceptibles corresponde a:

$$\frac{\beta I(t) S(t)}{1 + \alpha I(t)}$$

donde  $\alpha$  se conoce como *parámetro de incidencia*. Otro supuesto de los modelos presentados en este trabajo está en considerar *implícitamente* que todos los *individuos susceptibles* tienen contacto con todos los *individuos infectados*, algo que no ocurre en caso de que un paciente infectado sea *hospitalizado* y aislado del resto de *susceptibles*. De esta manera, otro trabajo futuro está en considerar un supuesto que tenga en cuenta como se da el contacto entre los *pacientes sanos* y los *infectados*.

# Anexo A: Conceptos de análisis matemático

En este anexo se definen los conceptos del *análisis matemático* que se utilizan en este trabajo. Se empieza con la definición de *límite*, *límite superior* y *límite inferior*, los cuáles aparecen en los teoremas de la *extinción* y la *persistencia en la media*. Luego se define vía límites cuando una función es *continua*, cuando es del tipo *Lipschitz* y cuando es *Lipschitz localmente continua*, condición suficiente de la *proposición 3.1*. Las definiciones fueron tomadas del libro [Rudin].

La noción de *límite* se utiliza en el *capítulo 3*, *límite superior* e *inferior* están presentes en la *existencia* y en la *persistencia en la media* de los modelos SIS–estocástico y SEIR–estocástico.

**Definición A.1.** (i) Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Se dice que el **límite** de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  es  $L$ , si y sólo si; para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que si  $\|x_0 - a\| < \delta$  entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Esto se escribe como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

(ii) Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que si  $x_0 > a$  entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , se dice que  $L$  es el **límite por izquierda** de  $f(x)$ . Esto se escribe como  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ . De la definición anterior si  $x_0 < a$  implica que  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , se dice que  $L$  es el **límite por derecha** de  $f(x)$ . Esto se escribe como  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ .

Los límites que utilizados en este trabajo son todos el límites cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  (infinito), definición correspondiente a

**Definición A.2.** Sean  $f$  una función real y  $b \in \mathbb{R}$ . Se dice que el **límite** de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  es  $b$  si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que si  $x > K$ , entonces  $|f(x) - b| < \varepsilon$ . Esto se escribe como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .

Se define a continuación *límite superior* e *inferior* para toda constante real y para el infinito.

**Definición A.3.** Sea  $f(x)$  una función real definida en  $E \subseteq \mathbb{R}$  y sean  $b, c \in \mathbb{R}$ .

(i) Se dice que el **límite superior** (si existe) de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  es  $b$  si y sólo

$$b = \inf_{r>0} \left( \sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \{f(x) : |x - x_0| < r\} \right)$$

y se escribe como  $b = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

(ii) Se dice que el **límite inferior** (si existe) de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  es  $c$  si y sólo

$$c = \sup_{r>0} \left( \inf_{x \in E \setminus \{x_0\}} \{f(x) : |x - x_0| < r\} \right)$$

y se escribe como  $c = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

(iii) Se dice que el **límite superior** (si existe) de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  es  $b$  si y sólo

$$b = \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) := \inf_{K \in \mathbb{R}} \left( \sup_{x \in E \setminus \{x_0\}} \{f(x) : x > K\} \right)$$

(iv) Se dice que el **límite inferior** (si existe) de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  es  $b$  si y sólo

$$b = \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) := \sup_{K \in \mathbb{R}} \left( \inf_{x \in E \setminus \{x_0\}} \{f(x) : x > K\} \right)$$

El ítem (iii) de la *proposición A.1.* es utilizado en las pruebas de *existencia y persistencia en la media*.

**Proposición A.1.** Sea  $f(x)$  una función real definida en  $E \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  y  $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$  para algunos  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces se cumple que

(i)  $b < a$

(ii) Si  $a = b$  entonces  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ .

(iii) Si  $f(x) < c$  para todo  $x \in E$  con  $c$  una constante, entonces  $b < c$ . Análogamente si  $f(x) > c$  para todo  $x \in E$ , entonces  $a > c$ .

En el lema 3.2. se habla de dominios (conjunto de salida de una función) *acotados y abiertos*. Se definen tales conjuntos como

**Definición A.4.** (i) Se dice que  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es un **conjunto abierto** si y sólo si para todo  $a \in A$ , existe  $r > 0$  tal que  $B_{a,r} := \{x : \|x - a\| < r\} \cap A \neq \emptyset$ .

(ii) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  se define el **interior** de  $A$  como  $\text{Int}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : B_{x,s} \subseteq A \text{ para algún } s > 0\}$ .

(iii)  $A$  es un **conjunto cerrado** si y sólo si  $\mathbb{R}^n \setminus A$  es un conjunto abierto.

(iv)  $A$  es un **conjunto acotado** si y sólo si para algún  $s > 0$  y algún  $c \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $A \subseteq B_{c,s}$ .

(v)  $V_z$  es una **vecindad** de  $z \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si existe  $r > 0$  tal que  $B_{a,r} \subseteq V_z$ .

**Definición A.5.** Se dice que  $a \in \mathbb{R}^n$  es un **punto frontera** de  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si y sólo si para todo  $r > 0$  se tiene que  $B_{a,r} \cap A \neq \emptyset$  y  $B_{a,r} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$ . Se define la frontera de  $A$  como

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es un punto frontera de } A\}.$$

En el teorema de *existencia* del capítulo 3 se utiliza que los coeficientes (en realidad, funciones) de las *ecuaciones diferenciales estocásticas* de los modelos epidemiológicos estocásticos presentados son *Lipschitz localmente continuas*. Las siguientes definiciones llegan a tal concepto.

**Definición A.6.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $f$  es **continua** en  $x = a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Definición A.7.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $E$  un conjunto abierto. Se dice que  $f$  es **localmente continua** en  $E$  si para todo  $z \in E$  existe una vecindad  $V_z \subseteq E$  tal que  $f$  es continua para todo  $x \in V_z$ .

**Definición A.8.** (i) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que  $f$  es de **tipo Lipschitz** si y sólo si existe  $l > 0$

$$|f(x) - f(y)| \leq l \|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Se dice que  $f$  es **Lipchizt localmente continua** si y sólo si es localmente continua y Liptchitz.

La condición de Lipschitz es importante para demostrar la existencia y la unicidad de una solución única de una ecuación diferencial ordinaria, y también estocástica. A pesar de no hacerse mucho hincapié en este trabajo sobre este concepto, el no tener tal condición impediría demostrar la unicidad.

El siguiente concepto se utiliza en lema 3.2. y se trata de una condición suficiente para la existencia de una única distribución estacionaria (capítulo 3).

**Definición A.9.** Sean  $K \subsetneq \mathbb{R}^n$  y una colección de conjuntos abiertos  $A = \{A_i\}_{i \in I}$  indexados por el conjunto  $I$ . Se dice que  $A$  es **recubrimiento abierto** de  $K$  si y sólo si  $K \subseteq \cup_{i \in I} A_i$ . Se dice que  $K$  es un conjunto **compacto** si y sólo si para todo recubrimiento abierto de  $K$ ,  $A = \{A_i\}_{i \in I}$ , existen  $i_1, \dots, i_n \in I$  tal que  $K \subseteq \cup_{j=1}^n A_{i_j}$ .

En  $\mathbb{R}$  los únicos conjuntos compactos son los intervalos cerrados. Este hecho se utiliza en la demostración de la existencia de la distribución estacionaria del modelo SIS-estocástico y SEIR-estocástico.



# Anexo B: Códigos utilizados

Códigos en *Python*:

```
from numpy import arange
from numpy import random
from math import sqrt
from matplotlib import pyplot as plt

"""
PARA SIMULAR UN MOVIMIENTO BROWNIANO
"""

Bcero = 0
Dt = 2**-10
T = 0.05
n = T/Dt
t = arange(0, T+Dt, Dt)

B = [0.0 for i in range(int(n+1))]
B1 = [0.0 for i in range(int(n+1))]
B2 = [0.0 for i in range(int(n+1))]
B3 = [0.0 for i in range(int(n+1))]
B4 = [0.0 for i in range(int(n+1))]

B[0] = Bcero

for i in range(1, int(n+1)):
    W = random.normal(0, 1)
    B1[i] = sqrt(Dt)*W

for i in range(1, int(n + 1)):
    V = random.normal(0, 1)
    B2[i] = sqrt(Dt) * V

for i in range(1, int(n + 1)):
    X = random.normal(0, 1)
    B3[i] = sqrt(Dt) * X

for i in range(1, int(n + 1)):
    Y= random.normal(0, 1)
    B4[i] = sqrt(Dt) * Y

for i in range(1, int(n + 1)):
    Z = random.normal(0, 1)
    B[i] = sqrt(Dt) * Z

plt.plot(B, "blue")
plt.plot(B1, "violet")
plt.plot(B2, "green")
plt.plot(B3, "orange")
plt.plot(B4, "red")
plt.show()
```

```

nabla = 0.002
beta = 0.5
mu = 0.001
gama = 0.24
sigma = 0.3
Scero = 10.25
Icero = 2
Rcero = 0.0
Dt = 2**-6
T = 10
n = T/Dt
t = arange(0, T+Dt, Dt)

EMS = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMI = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMR = [0.0 for i in range(int(n+1))]

EMS[0] = Scero
EMI[0] = Icero
EMR[0] = Rcero

for i in range(1, int(n+1)):
    Z = random.normal(0, 1)
    EMS[i] = EMS[i-1] + (-beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - mu*EMS[i-1] + nabla*Scero)*Dt - sigma*EMI[i-1]*EMS[i-1]*sqrt(Dt)*Z
    EMI[i] = EMI[i-1] + (beta * EMI[i-1] * EMS[i-1] - gama * EMI[i-1] + mu * EMI[i-1]) * Dt + sigma * EMI[i-1] * EMS[i-1] * sqrt(Dt) * Z
    EMR[i] = EMR[i-1] + (gama * EMI[i-1] - mu * EMR[i-1]) * Dt

print(Z)
plt.plot(EMS, "blue")
plt.plot(EMI, "red")
plt.plot(EMR, "green")
plt.show()

"""
PARA SIMULAR EL MODELO SIS-ESTOCASTICO
"""

nabla = 0.23
beta = 0.4
mu = 0.3
gama = 0.6
sigma = 0.5
Scero = 1
Icero = 0.2
Dt = 1
T = 10
n = T/Dt
t = arange(0, T+Dt, Dt)

EMS = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMI = [0.0 for i in range(int(n+1))]

EMS[0] = Scero
EMI[0] = Icero

for i in range(1, int(n+1)):
    Z = random.normal(0, 1)
    EMS[i] = EMS[i-1] + (-beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - mu*EMS[i-1] + nabla*Scero + gama * EMI[i-1])*Dt - sigma*EMI[i-1]*EMS[i-1]*sqrt(Dt)*Z

```



```

EMI[i] = EMI[i - 1] + (beta * EMI[i - 1] * EMS[i - 1] - gama * EMI[i - 1] +
mu * EMI[i - 1]) * Dt + sigma * EMI[i - 1] * EMS[i - 1] * sqrt(Dt) * Z

plt.plot(EMS, "blue")
plt.plot(EMI, "red")
plt.show()

"""
PARA SIMULAR EL MODELO SEIR-ESTOCASTICO
"""

nabla = 0.001
beta = 0.9
mu = 0.001
ny = 0.2
gama = 0.1
sigma = 0.2
Scero = 1.5
Ecero = 0.0
Icero = 0.2
Rcero = 0
Dt = 10
Dt = 2**-6
T = 500
n = T/Dt
t = arange(0, T+Dt, Dt)

EMS = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMI = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMR = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EME = [0.0 for i in range(int(n+1))]

EMS[0] = Scero
EMI[0] = Icero
EMR[0] = Rcero
EME[0] = Ecero

for i in range(1, int(n+1)):
    Z = random.normal(0, 1)
    EMS[i] = EMS[i-1] + (-beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - mu*EMS[i-1] + nabla*EMS[1])*Dt
    - sigma*EMI[i-1]*EMS[i-1]*sqrt(Dt)*Z
    EME[i] = EME[i-1] + (beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - ny*EME[i-1] - mu*EME[i-1])*Dt+
    sigma*EMI[i-1]*EMS[i-1]*sqrt(Dt)*Z
    EMI[i] = EMI[i-1] + (ny*EME[i-1] - gama*EMI[i-1] - mu*EME[i-1])*Dt
    EMR[i] = EMR[i-1] + (gama*EMI[i-1] - mu*EMR[i-1])*Dt

print(Z)
plt.plot(EMS, "blue")
plt.plot(EME, "orange")
plt.plot(EMI, "red")
plt.plot(EMR, "green")
plt.show()

"""
PARA SIMULAR VERIFICAR LA ESTABILIDAD DEL MODELO SIS-ESTOCASTICO
"""

nabla = 0.005
beta = 0.5

```

```

mu = 0.005
gama = 0.2
sigma = 0.3
Scero = 1
Icero = 0
Rcero = 0
Dt = 2 ** -6
T = 10
n = T / Dt
t = arange(0, T + Dt, Dt)

EMS = [0.0 for i in range(int(n + 1))]
EMI = [0.0 for i in range(int(n + 1))]
EMR = [0.0 for i in range(int(n + 1))]
EMSa = [0.0 for i in range(int(n + 1))]
EMIa = [0.0 for i in range(int(n + 1))]
EMRa = [0.0 for i in range(int(n + 1))]
EMSb = [0.0 for i in range(int(n + 1))]
EM Ib = [0.0 for i in range(int(n + 1))]
EMRb = [0.0 for i in range(int(n + 1))]

EMS[0] = Scero
EMI[0] = Icero
EMR[0] = Rcero
EMSa[0] = Scero + 0.005
EMIa[0] = Icero + 0.005
EMRa[0] = Rcero + 0.005
EMSb[0] = Scero - 0.005
EM Ib[0] = Icero - 0.005
EMRb[0] = Rcero - 0.005

for i in range(1, int(n + 1)):
    Z = random.normal(0, 1)
    EMS[i] = EMS[i - 1] + (
        -beta * EMI[i - 1] * EMS[i - 1] - mu * EMS[i - 1] + nabla * Scero
        + gama * EMI[i - 1]) * Dt - sigma * \
        EMI[i - 1] * EMS[i - 1] * sqrt(Dt) * Z
    EMI[i] = EMI[i - 1] + (beta * EMI[i - 1] * EMS[i - 1] - gama * EMI[i - 1] +
    mu * EMI[i - 1]) * Dt + sigma * EMI[
        i - 1] * EMS[i - 1] * sqrt(Dt) * Z

    EMSa[i] = EMSa[i - 1] + (
        -beta * EMIa[i - 1] * EMSa[i - 1] - mu * EMSa[i - 1] + nabla * (
        Scero + 0.001) + gama * EMIa[
            i - 1]) * Dt - sigma * EMIa[i - 1] * EMSa[i - 1] * sqrt(Dt) * Z
    EMIa[i] = EMIa[i - 1] + (beta * EMIa[i - 1] * EMSa[i - 1] - gama * EMIa[i -
    1] + mu * EMIa[i - 1]) * Dt + sigma * \
        EMIa[i - 1] * EMSa[i - 1] * sqrt(Dt) * Z

    EMSb[i] = EMSb[i - 1] + (
        -beta * EM Ib[i - 1] * EMSb[i - 1] - mu * EMSb[i - 1] + nabla * (Scero
        + 0.001) + gama * EM Ib[
            i - 1]) * Dt - sigma * EM Ib[i - 1] * EMSb[i - 1] * sqrt(Dt) * Z
    EM Ib[i] = EM Ib[i - 1] + (beta * EM Ib[i - 1] * EMSb[i - 1] - gama * EM Ib[i -
    1] + mu * EM Ib[i - 1]) * Dt + sigma * \
        EM Ib[i - 1] * EMSb[i - 1] * sqrt(Dt) * Z

plt.plot(EMS, "blue")
plt.plot(EMI, "red")
plt.plot(EMSa, "c")
plt.plot(EMIa, "violet")
plt.plot(EMSb, "purple")
plt.plot(EM Ib, "magenta")

```

```

plt.show()

"""
PARA SIMULAR VERIFICAR LA ESTABILIDAD DEL MODELO SEIR-ESTOCASTICO
"""

nabla = 0.1
beta = 1.9
mu = 0.1
ny = 0.2
gama = 0.6
sigma = 0.8
Scero = 1
Ecero = 0
Icero = 0
Rcero = 0
Dt = 1
Dt = 2**-6
T = 50
n = T/Dt
t = arange(0, T+Dt, Dt)

EMS = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMI = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMR = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EME = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMSa = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMIa = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMRa = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMEa = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMSb = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMIb = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMRb = [0.0 for i in range(int(n+1))]
EMEb = [0.0 for i in range(int(n+1))]

EMS[0] = Scero
EMI[0] = Icero
EMR[0] = Rcero
EME[0] = Ecero
EMSa[0] = Scero + 0.005
EMIa[0] = Icero + 0.005
EMRa[0] = Rcero + 0.005
EMEa[0] = Ecero + 0.005
EMSb[0] = Scero - 0.005
EMIb[0] = Icero - 0.005
EMRb[0] = Rcero - 0.005
EMEb[0] = Ecero - 0.005

for i in range(1, int(n+1)):
    Z = random.normal(0, 1)
    EMS[i] = EMS[i-1] + (-beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - mu*EMS[i-1] + nabla*EMS[1])*Dt - sigma*EMI[i-1]*EMS[i-1]*sqrt(Dt)*Z
    EME[i] = EME[i-1] + (beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - ny*EME[i-1] - mu*EME[i-1])*Dt + sigma*EMI[i-1]*EMS[i-1]*sqrt(Dt)*Z
    EMI[i] = EMI[i-1] + (ny*EME[i-1] - gama*EMI[i-1] - mu*EME[i-1])*Dt
    EMR[i] = EMR[i-1] + (gama*EMI[i-1] - mu*EMR[i-1])*Dt

    EMSa[i] = EMSa[i-1] + (-beta * EMIa[i-1] * EMSa[i-1] - mu * EMSa[i-1] + nabla * EMSa[1]) * Dt - sigma * EMIa[i-1] * EMSa[i-1] * sqrt(Dt) * Z

```

```

EMEa[i] = EMEa[i - 1] + (beta * EMia[i - 1] * EMSa[i - 1] - ny * EMEa[i - 1]
- mu * EMEa[i - 1]) * Dt + sigma * EMia[
    i - 1] * EMSa[i - 1] * sqrt(Dt) * Z
EMia[i] = EMia[i - 1] + (ny * EMEa[i - 1] - gama * EMia[i - 1] - mu * EMEa[i
- 1]) * Dt
EMRa[i] = EMRa[i - 1] + (gama * EMia[i - 1] - mu * EMRa[i - 1]) * Dt

EMSb[i] = EMSb[i - 1] + (-beta * EMib[i - 1] * EMSb[i - 1] - mu * EMSb[i - 1]
+ nabra * EMSb[1]) * Dt - sigma * EMib[
    i - 1] * EMSb[i - 1] * sqrt(Dt) * Z
EMEb[i] = EMEb[i - 1] + (beta * EMib[i - 1] * EMSb[i - 1] - ny * EMEb[i - 1]
- mu * EMEb[i - 1]) * Dt + sigma * EMib[
    i - 1] * EMSb[i - 1] * sqrt(Dt) * Z
EMib[i] = EMib[i - 1] + (ny * EMEb[i - 1] - gama * EMib[i - 1] - mu * EMEb[i
- 1]) * Dt
EMRb[i] = EMRb[i - 1] + (gama * EMib[i - 1] - mu * EMRb[i - 1]) * Dt

plt.plot(EMSa, "c", linestyle = '—')
plt.plot(EMEa, "olive", linestyle = '—')
plt.plot(EMia, "violet", linestyle = '—')
plt.plot(EMRa, "black", linestyle = '—')
plt.plot(EMSb, "purple", linestyle = ':')
plt.plot(EMEb, "green", linestyle = ':')
plt.plot(EMib, "magenta", linestyle = ':')
plt.plot(EMRb, "black", linestyle = ':')
plt.plot(EMS, "blue")
plt.plot(EMR, "brown")
plt.plot(EMI, "red")
plt.plot(EME, "orange")
plt.show()

```

**Códigos en *RStudio*:**

**## PARA SIMULAR LOS MODELOS DETERMINISTAS**

**# Para simular el modelo SIR con nacimientos y Muertes**

```

nabra = 0
beta = 0.8
mu = 0
gama = 0.6
sigma = 0
Scero = 2
Icero = 0.1
Rcero = 0
Dt = 2^(-6)
T = 500
n = T/Dt
t = seq(0,T,by=Dt)
seq(0,10,by=1)

EMS = numeric(n+1)
EMI = numeric(n+1)
EMR = numeric(n+1)
EMS[1] = Scero
EMI[1] = Icero
EMR[1] = Rcero

for (i in 2:{n+1}){
    EMS[i] = EMS[i-1] + (-beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - mu*EMS[i-1] + nabra*EMS[i-1])*Dt
}

```

```

plot(t,EMS,t="I",col="blue",lwd=2, xlim=c(1,9), ylim=c(0,2), ylab="Individuos",
     xlab="Tiempo")

legend("right", legend=c("Infectados", "Susceptibles", "Recuperados"),col=c("red",
    "blue", "green"), lwd=2:2:2, cex=0.6)

for (j in 2:{n+1}){
  EMI[j] = EMI[j-1] + (beta*EMI[j-1]*EMS[j-1] - gama*EMI[j-1] - mu*EMI[j-1])*Dt}
lines(t,EMI,lwd=2,col="red", xlim=c(1,9), ylim=c(0,2))

for (k in 2:{n+1}){
  EMR[k] = EMR[k-1] + (gama*EMI[k-1] - mu*EMR[k-1])*Dt }
lines(t,EMR,lwd=2,col="green", xlim=c(1,9), ylim=c(0,2))

# Para simular el modelo SIS con nacimientos y muertes

nabla = 0
beta = 0.9
mu = 0
gama = 0.6
Scero = 2
Icero = 0.1
Rcero = 0
Dt = 2^(-6)
T = 500
n = T/Dt
t = seq(0,T,by=Dt)
seq(0,10,by=1)

EMS = numeric(n+1)
EMI = numeric(n+1)
EMR = numeric(n+1)
EMS[1] = Scero
EMI[1] = Icero
EMR[1] = Rcero

for (i in 2:{n+1}){
  EMS[i] = EMS[i-1] + (-beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - mu*EMS[i-1] + nabla*EMS[i-1]
    +gama*EMI[i-1])*Dt}

plot(t,EMS,t="I",col="blue",lwd=2, xlim=c(1,6.5), ylim=c(0,2), ylab="Individuos",
     xlab="Tiempo")

legend("right", legend=c("Infectados", "Susceptibles"),
     col=c("red", "blue", "green"), lwd=2:2, cex=0.6)

for (j in 2:{n+1}){
  EMI[j] = EMI[j-1] + (beta*EMI[j-1]*EMS[j-1] - gama*EMI[j-1] - mu*EMI[j-1])*Dt -
    + sigma*EMI[j-1]*EMS[j-1]*sqrt(Dt)*Z }

lines(t,EMI,lwd=2,col="red", xlim=c(1,6.5), ylim=c(0,2))

# Para simular el modelo SEIR con nacimientos y muertes

nabla = 0
beta = 0.8
mu = 0
gama = 0.25
ve = 0.6
Scero = 2
Ecero = 0.3
Icero = 0.1

```

```

Rcero = 0
Dt = 2^(-6)
T = 500
n = T/Dt
t = seq(0,T,by=Dt)
seq(0,10,by=1)

EMS = numeric(n+1)
EMI = numeric(n+1)
EMR = numeric(n+1)
EMS[1] = Scero
EMI[1] = Icero
EMR[1] = Rcero

for (i in 2:{n+1}){
  EMS[i] = EMS[i-1] + (-beta*EMI[i-1]*EMS[i-1] - mu*EMS[i-1] + nabla*EMS[i-1])*Dt
}
plot(t,EMS,t="I",col="blue",lwd=2, xlim=c(1,20), ylim=c(0,2), ylab="Individuos",
      xlab="Tiempo")

legend("right", c("Infectados", "Expuestos", "Susceptibles", "Recuperados"),col=c(
  "red", "orange", "blue", "green"), lwd=2:2:2:2, cex=0.6)

for (j in 2:{n+1}){
  EME[j] = EME[j-1] + (beta*EMI[j-1]*EMS[j-1] - ve*EME[j-1] - mu*EME[j-1])*Dt}
lines(t,EMI,lwd=2,col="orange", xlim=c(1,20), ylim=c(0,2))

for (l in 2:{n+1}){
  EMI[l] = EMI[l-1] + (ve*EME[l-1] - gama*EMI[l-1] - mu*EMI[l-1])*Dt}

lines(t,EMI,lwd=2,col="red", xlim=c(1,20), ylim=c(0,2))
for (k in 2:{n+1}){
  EMR[k] = EMR[k-1] + (gama*EMI[k-1] - mu*EMR[k-1])*Dt}
lines(t,EMR,lwd=2,col="green", xlim=c(1,20), ylim=c(0,2))

## PARA ESTIMAR TODOS LOS PARAMETROS DEL MODELO

# Primero escribimos los datos dados por Sj e Ij:

S<-c(rep(0,3))
I<-c(rep(0,3))

for(i in 1:3){
  S[1]<-22204754
  S[2]<-22467246
  S[3]<-22731228
  I[1]<-6469
  I[2]<-5918
  I[3]<-8332}
N=22204754

# Para los sistemas de ecuaciones necesitamos los promedios de por ejemplo 1/S
SI=c(rep(0,3))
for(i in 1:3){
  SI[i]=S[i]*I[i]}
1/SI

S2=c(rep(0,3))
for(i in 1:3){
  S2[i]=S[i]*S[i]}
1/S2

```

```

S2I=c(rep(0,3))
for(i in 1:3){
  S2I[i]=S[i]*S[i]*I[i]}
1/S2I

I2=c(rep(0,3))
for(i in 1:3){
  I2[i]=I[i]*I[i]}
1/I2

SI2=c(rep(0,3))
for(i in 1:3){
  SI2[i]=S[i]*I[i]*I[i]}
1/SI2

S2I2=c(rep(0,3))
for(i in 1:3){
  S2I2[i]=S[i]*S[i]*I[i]*I[i]}
1/S2I2

muI=c(rep(0,3))
muS=c(rep(0,3))
for(j in 1:3){
  muS[j]=S[j]+nabla*N-beta*S[j]*I[j]+gama*I[j]-mu*S[j]
  muI[j]=I[j]+beta*S[j]*I[j]-gama*I[j]-mu*I[j]}

RI=c(rep(0,3))
RS=c(rep(0,3))
for(k in 1:3){
  RS[k]=(S[k]-muS[k])^2
  RI[k]=(I[k]-muI[k])^2}

U=c(rep(0,3))
US=c(rep(0,3))
UI=c(rep(0,3))
for(l in 1:3){
  US[l]=RS[l]/((S[l]*I[l])^2)
  UI[l]=RI[l]/((S[l]*I[l])^2)
  U[l]=US[l]+UI[l]}

sigma=sqrt(0.5*mean(U))

# Instalamos el paquete BB

# Utilizamos la funcion BBSolve
library(BB)
?BBSolve

# Ahora escribimos los correspondientes sistemas de ecuaciones

sistema = function(x){
  f = rep(NA, 5)
  f[1] = 0.5*(x[2]*N*mean(1/SI)+x[3]*(mean(1/S)-mean(1/I))+2*x[4]*mean(1/S))-x[1]
  f[2] = 0.5*(x[3]*(mean(1/S2)-mean(1/SI))+2*x[4]*mean(1/S2)+x[2]*N*mean(1/S2I))-
    mean(1/S)*x[1]
  f[3] = x[3]*(mean(1/S2)-mean(1/I2))+x[4]*(mean(1/S2)-mean(1/S2I))
    +x[2]*N*mean(1/SI2)-x[1]*(mean(1/I)-mean(1/S))
  f[4] = -x[2]*N*mean(1/S2I2)+x[1]*mean(1/SI)-x[4]*mean(1/S2I)+x[3]*mean(1/SI2)
  f[5] = x[5]-sqrt(0.5*mean(U))
  f}
x0=c(0,0,0,0,0)
BBSolve(par=x0, fn=sistema)

```

```

# De esta forma tenemos que los datos corresponden a:

nabla=-2.457295e-04
beta=-1.038560e+00
gama=3.882654e-05
mu=7.237712e-04
sigma=sqrt(3.447426e-05)

# Tomando los parametros nabla, mu y beta conocidos como:

nabla= 0.01567987
mu= 0.00434582
beta=0.00030709

# Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones

sistema = function(x){
  f = rep(NA, 2)
  f[1] = 0.5*(mu*(mean(1/S2)-mean(1/SI))+2*x[2]*mean(1/S2)+nabla*N*mean(1/S2I))
  -mean(1/S)*beta
  f[2] = x[1]-sqrt(0.5*mean(U))
  f}

x0=c(0,0)
BBSolve(par=x0, fn=sistema)

# Obtenido los valores para sigma y para gama dados por

sigma<-1.07774281
gama<--0.08313723

# El numero reproductivo basico corresponden a:

R0<-(nabla*N*beta)/(mu*(mu+gama))-(sigma*nabla*N)^2/(2*mu^2*(gama+mu))
R0

# Los parametros de la distribucion estacionaria corresponden a:

media=(2*beta*(R0-1)*(mu+gama))/(2*beta*(beta-(sigma)^2*N+
(sigma)^2*(beta*N-mu-gama)))
varianza=((2*(R0-1)*(mu+gama)*(mu+gama)*(beta*N-mu-gama))/
(2*beta*(beta-(sigma)^2*N+(sigma)^2*(beta*N-mu-gama))))-media^2

```



# Bibliografía

- [Al Hokayem] Hokayem, P. & Gallestey E. (2015). “*Lyapunov Stability Theory*”. *Nonlinear Systems and Control*, pág. 1 – 15.
- [Anderson] Anderson, D. (2014). “*Connections, similarities and differences between stochastic and deterministic models of biochemical reaction systems*”. SysBioM Seminar, Universidad de Winconsin. Estados Unidos.
- [Aranda] Aranda, P. *Apuntes de ecuaciones diferenciales I*. Universidad Complutense de Madrid. 8ª Edición. 2008.
- [Bain] Bain, Alan. *Stochastic Calculus*, Chiark.
- [Basáñez] Basáñez, M. G., & Rodríguez, D. J.(2004). “*Dinámica de transmisión y modelos matemáticos en enfermedades transmitidas por vectores*”.
- [Bastin] Bastin, G. *Lectures on Mathematical Modelling of Biological Systems*. Department of Mathematical Engineering, ICTEAM, Université catholique de Louvain (2018)
- [Bibby] Bibby, M., Jacobsen, M. & Sørensen, M. *Estimating Functions for Discretely Sampled Diffusion-Type Models*. University of Copenhagen. 2004
- [Bickel] Bickel, P. & Doksum, K. *Mathematical Statistics. Basic Ideas and selected Topics*. CRC Press. 2ª Edición, vol 1. 2006.
- [Blanco] Blanco, L. *Probabilidad*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias. 2ª edición. 2010.
- [Broek] Broek, Jan Van Den. (2006) “*Nonhomogeneous birth and death models for epidemic outbreak data*”. *Biostatistics*, Volume 8, pág. 453 – 467.
- [Cabrera] Cabrera Rode, E., & Licea Puig, M. E.(2008). “*Nueva definición, prevalencia, caracterización y tratamiento de la diabetes autoinmune latente del adulto*”. *Revista Cubana de Endocrinología*, 19(3), 0 – 0.
- [Cantó] Cantó, B., Coll, C. & Sánchez E. (2005) “*Modelos matemáticos en epidemiología. Parámetros significativos*”. I congreso *I+D+i* Campus de Alcoi, pág. 55 – 58.
- [Cao] Cao, H., Zhou, Y., & Song, B. (2011). “*Complex dynamics of discrete SEIS models with simple demography*”. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2011.
- [Capasso] Capasso, V. & Bakstein, D. *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes*. Birkhäuser, 2ª Edición. 2002.
- [Carrillo] Carrillo, H. *Teoría de estabilidad de sistemas dinámicos*. Laboratorio de Dinámica no Lineal, Universidad Nacional Autónoma de México. México DF.

- [Casela] Casela, G. & Berger, R. *Statistical inference*. Duxbury Advanced Series. 2ª Edición. 2002.
- [Chang] Chang, Fwu-Ranq. *Stochastic Optimization in Continuous Time*. Cambridge University Press. 2004
- [Ho Choe] Ho Choe, G. *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*. Springer, 2016.
- [Dai] Dai, Yu–Hong. (2002) “A New Analysis on the Barzilai-Borwin Gradient Method”. *IMA Journal of Numerical Analysis* 22, 1 – 10.
- [Díaz] Díaz, L. & Morales, M. *Análisis estadístico de datos multivariados*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias. 1ª edición. 2012.
- [Diprima] Boyce, W. & Diprima, R. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Ed. John Wiley and Sons. 7ª edición. 2001
- [Fernandez] Fernández, J., Groisman P., & Rossi J. (2006) “Continuity of the Explosion Time in Stochastic Differential Equations”. CONICET, Universidad de Buenos Aires, pág. 1 – 14.
- [Galindo] Galindo, S., Rodríguez, M. & Cervantes, J. (2013) “Las matemáticas de las epidemias: caso México 2009 y otros”. Espacio del divulgador, Departamento de Física del Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares de México, pág. 238 – 246.
- [Gelman] Gelman, A., Leenen, I., Mechelen., I.V., De Boeck, P., & Poblome, J. (2010) “Bridges between deterministic and probabilistic models for binary data”. *Journal of Statistical Methodology*, 7, pág. 187 – 209
- [Gray] Gray, A., Greenhalgh, D., Hu, L., Mao, X & Pan, J. (2017) “A Stochastic Differential Equation SIS Epidemic Model”. *SIAM J. Appl. Math.*, 71(3), 876 – 902.
- [Gordillo] Greenwood, P. & Gordillo, L. (2009) “Stochastic Epidemic Modeling”. American Institute of Mathematics, pág. 3 – 22.
- [Has ’minskii] Has ’minskii, R.Z., *Stochastic Stability of Differential Equations*. Springer-Verlag. Sijtho and Noordh, 1980.
- [Heffernan] Heffernan, J. M., Smith, R. J. & Wahl, L. M. (2005) “Perspectives on the basic reproductive ratio”. *J. R. Soc. Interface* 2, pág. 281 – 293
- [Hethcote] Hethcote, H. W., & Van den Driessche, P. (1995). *An SIS epidemic model with variable population size and a delay*. *Journal of mathematical biology*, 34(2), 177 – 194.
- [Holland] Holland, J. (2007) “Notes on  $\mathcal{R}_0$ ”. Department of Anthropological Sciences, Stanford University, pág. 1 – 19
- [Jacod] Jacod, J. & Protter, P. *Probability Essentials*, Springer-Verlag, 2000.
- [Jiang] Ji, C., Jiang, N. & Shi, N. (2012) “The behavior of an SIR epidemic model with stochastic perturbation”. *Sthoc. Anal. Appl.*, pág. 755 – 773.
- [Karatzas] Karatzas, I. & Shreve, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1998.
- [Kenmack] Kenmack, W. & McKendrick, A. (1927). “Contributions to the mathematical theory of epidemics”. *Proc. Soc. London Ser. A* 115, parte I, pág. 700 – 721.

- [Kessler] Kessler, Mathew. (2000). *“Simple and Explicit Estimating Functions for a Discretely Observed Diffusion Process”*. Blackwell Publishers Ltd. Vol 27, pág. 1 – 20
- [Klebaner] Klebaner, F. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, 2ª edición, 2005.
- [Korobe] Korobeinikov, A. (2009). *“Global properties of SIR and SEIR epidemic models with multiple parallel infectious stages”*. Bulletin of mathematical biology, 71(1), 75 – 83.
- [Lahrouz] Lahrouz, A. & Settati, A. (2014) *“Necessary and sufficient condition for extinction and persistence of SIRS system with random perturbation”*. Appl. Math. Comput. 233, pág. 10 – 19.
- [Linder] Kessler, M., Linder, A. & Sørensen, M. *Statistical Methods for Stochastic Differential Equations*. University of Copenhagen. 2000
- [Liu] Liu, Q. & Chen, Q. (2017). *“Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with saturated incidence”*. Applied Mathematics and Computation 282, pág. 142 – 166.
- [Lloyd] Lloyd, A. *Introduction to Epidemiological Modeling: Basic Models and Their Properties*. Department of Mathematics, North Carolina State University. 2017
- [Lu] Lu, Qiuying. (2009) *“Stability of SIRS system with random perturbations”*. Physica A, Vol. 388, pág. 3677 – 3686.
- [Maki] Maki, H. & Hirose, H. (2013). *“Infectious Disease Spread Analysis Using Stochastic Differential Equations for SIR model”*. 4th International Conference on Intelligent Systems, Modeling and Simulation, pág. 152 – 156.
- [Marín] Marín, D. *“Ecuaciones diferenciales estocásticas y casos de aplicación en finanzas”*. Trabajo en investigación en Magister en Matemáticas aplicadas, Universidad EAFIT. 2007
- [Mao] Mao, X. R. *Stochastic Differential Equations and their Applications*, Horwood publishing. Chichester, England. 1997.
- [Morris] Morris, Q. (2008). *“Analysis of a Co-Epidemic Model”*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 4, pág. 121 – 133.
- [McLeish] McLeish, Don. *Probability*. University of Waterloo, Department of Statistics and Actuarial Science. 2005.
- [Øksendal] Øksendal, Bernt. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Springer-Verlag. 6ª edición. 2003
- [Omari] Omari, L., Lahrouz, A. & Kiouach, D. (2011) *“Global analysis of a deterministic and stochastic nonlinear SIRS epidemic model”*. Nonlinear Analysis: Modeling and Control, Vol. 16, No. 1, 59 – 76.
- [Papani] Papanicolaou, A. *Introduction to Stochastic Differential Equations for Finance*. New York University, Department of Finance and Risk Engineering. 2017
- [Ospina] González, L., Ospina, O. & Villavicencio, G. (2016). *“Oscillations in seasonal SIR models with saturated treatment”*. Revista Integración, Universidad Industrial de Santander 34 Vol. 2, pág. 125 – 231.

- [Rossi] Groisman, P. & Rossi, J. “*Explosion time in stochastic differential equations with small diffusion*”. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2007 (2007), No. 140, pág. 1 – 9.
- [Pereda] Diego de Pereda, “*Modelización matemática de la difusión de una epidemia de peste porcina entre granjas*”, Proyecto fin de Máster en Investigación Matemática, Universidad Complutense de Madrid, 2009 – 2010.
- [Resnick] Resnick, Sidney. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser. 1999.
- [Rincón] Rincón, L. *Introducción a los procesos estocásticos*. UNAM, Facultad de Ciencias. México D.F. 2012.
- [Rudin] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure & Applied Mathematics. 3ª edición. 1976.
- [Rustom] Rustom, A. Estadística Descriptiva, Probabilidad e Inferencia: una visión conceptual y aplicada. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Agronómicas. Edición 2012.2012.
- [Salleras] Salleras, S., Vidal, J., Plans, P., Navas, E., Campins, M., Espuñes, J. & Bayas Rodríguez, J. M. (1998). “*Bajo grado de protección inmunitaria frente a la difteria en la población adulta de Cataluña*”. Medicina clínica, 111(18), 692 – 695.
- [Sauer] Sauer, T. “*Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance*”. George Mason University, Department of Mathematics, pág. 1 – 20.
- [Shalizi] Shalizi, C. *Continuity of Stochastic processes. Class Notes in Stochastic Processes*. Carnegie Mellon University, 2005.
- [Shulgin] Shulgin, B., Stone, L., & Agur, Z. (1998). “*Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. Bulletin of mathematical biology*”, 60(6), 1123 – 1148.
- [Soto] Soto, María. (1986) “*La inversa de Penrose*”. Anales de estudios económicos y empresariales, ISSN 0213-7569, N° 1, 1986, págs. 299 – 308
- [Strang] Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Learning Inc. 4ª edición. 2006.
- [Sturrock] Sturrock, R. N., Frankel, S. J., Brown, A. V., Hennon, P. E., Kliejunas, J. T., Lewis, K. J., ... & Woods, A. J. (2011). *Climate change and forest diseases. Plant Pathology*, 60(1), pág. 133 – 149.
- [Tornatore] Tornatore, E., Buccellato, S & Vetro, P. (2005) “*Stability of a Stochastic SIS System*” Physica A. 354, pág. 111 – 126.
- [Torres] Aguirre, P., González-Olivares, E. & Torres, S. (2013) “*Stochastic predator-prey model with Allee effect on prey*”. Journal Applied Mathematics and Computation 282, pág. 142 – 166
- [Tsukuma] Tsukuma, H. & Kubokawa, T. (2014) “*Estimation of the Mean Vector in a Singular Multivariate Normal Distribution*”. CIRJE-F-930, pág. 1 – 22, Japón.
- [Velasco] Velasco, Jorge. (2007). “*Modelos matemáticos en epidemiología*”. Miscelánea Matemática 44, pág. 11 – 27.
- [Wehrly] Wehrly, T. *Introduction to Stochastic Population Models*. Texas A&M University, Department of Statistics. 2005.

- [Zaman] Zaman, G & Kang, Y. (2008). “*Stability analysis and optimal vaccination of an SIR epidemic model*”. Biosystems 93, pág. 240 – 249.
- [Zhou] Zhou, Y., Zhang, W., Yuan, S. (2014) “*Survival and stationary distribution of a SIR epidemic model with stochastic perturbations*”. Appl. Math. Comput. 244, pág. 118 – 131.
- [Banrep] “*Se calcula que dos terceras partes de la población mundial menor de 50 años está infectada por un virus de herpes simple de tipo 1*” (2017) Centro de Prensa, Organización Mundial de la Salud. Recuperado de <http://obieebr.banrep.gov.co/analytics/saw.dll?Go>
- [CDC] “*Sífilis: hoja informativa de los CDC*” (2012) Centro para el Control y la Prevención de Enfermedades. Recuperado de <https://www.cdc.gov/std/spanish/sifilis/default.htm>
- [DANE] Sistema de de consulta Información Censal, Censo básico. *Definición de parámetros: Población por edad* Recuperado de <http://systema59.dane.gov.co/cgi-bin/RpWebEngine.exe/PortalAction?&MODE=MAIN&BASE=CG2005BASICO&MAIN=WebServerMain.inl>
- [El Mundo] El primer mes de 2016 fue el enero más cálido en el registro histórico. (2016) El mundo - Diario. Recuperado de <https://www.elmundo.es/ciencia/2016/02/17/56c45c0b22601db9138b45b2.html>
- [Min] “*Situaciones de las infecciones de transmisión sexual diferentes al VIH. Colombia 2009-2011*” (2012) Vigilancia epidemiológica, Ministerio de Salud y Protección Social de Colombia. Recuperado de [https://www.minsalud.gov.co/salud/Documents/observatorio\\_vih/documentos/monitoreo\\_evaluacion/1\\_vigilancia\\_salud\\_publica/a\\_situacion\\_epidimiologica/SITUACION%20DE%20LAS%20INFECCIONES%20DE%20TRANSMISION1.pdf](https://www.minsalud.gov.co/salud/Documents/observatorio_vih/documentos/monitoreo_evaluacion/1_vigilancia_salud_publica/a_situacion_epidimiologica/SITUACION%20DE%20LAS%20INFECCIONES%20DE%20TRANSMISION1.pdf)
- [Min1] “*Análisis de mortalidad en Colombia 1998-2011*” (2014) Repositorio Institucional Digital del Ministerio de Salud de Colombia. Recuperado de: <https://www.minsalud.gov.co/sites/rid/Lists/BibliotecaDigital/RIDE/IA/SSA/12.Analisis-de-mortalidad-en-Colombia-1998-2011.pdf>
- [OMS] “*Se calcula que dos terceras partes de la población mundial menor de 50 años está infectada por un virus de herpes simple de tipo 1*” (2012) Centro de Prensa, Organización Mundial de la Salud. Recuperado de <http://www.who.int/mediacentre/news/releases/2015/herpes/es/>