Algorithm-homework2

孔静—2014K8009929022

October 21, 2016

Contents

1 Largest Divisible Subset

a

考虑从小到大排列的数，不妨设 a<b<c, 若 b 能整除 c，a 能整除 b，那么由于传递性，a 也能整除 c。在整除关系传递性的基础上，考虑最长整除序列，就可以类比算法研讨课上最长递增序列一样。所以我们第一步排序；第二步考虑 S_i，在前面已经有了 i-1 个数，对每一个满足 j<i 的 $Opt(j)$，若 $s_i\%s_j = 0$ 满足，则可以将其增加在 s_j 所在整除序列上，因此：

$$O\text{pt}(i) = \max\{f(1), f(2), f(3), ...f(i-1)\}$$

其中

$$f(i) = \begin{cases} 1, \quad 0 \le j < i \quad s_i\%s_j \neq 0 \\ Opt(i)+1, \quad 0 \le j < i \quad s_i\%s_j = 0 \end{cases}$$

b

即利用上述公式对数据先排序后遍历，由于需要输出该序列，我设了两个参量，Opt[i][1] 来记录当前序列长度。Opt[i][2] 来记录他的当前最大序列的上一个数。

Algorithm 1 Find The Largest Divisible Subset

```
procedure SEARCH(n)
    quicksort(S) * 快速排序 *
    i = 1
    for i <= n do
        j = 1
        Opt[i][1] = 1
        for j < i do
            if  S[i] % S[j] == 0 then
                if Opt[i][0] < Opt[j][0] + 1 then
                    Opt[i][1] = Opt[j][0] + 1
                    Opt[i][2] = S[j]
                end if
            end if
            m = max(Opt) * 找到令 Opt[i][1] 最大的 i*
            j = j + 1
        end for
        i = i + 1
    end for
    printsubset(m) * 利用 [2] 存的数据及传递性输出该最长序列 *
end procedure
```

c

显然正确，首先已经从小到大排序好，对于 i>j，若 s_i 能被 s_j 整除，那么也必然能被其他 s_j 序列中的数整除，因为其他数比 s_j 更小，利用整除的传递性，能寻找出最长序列。

d

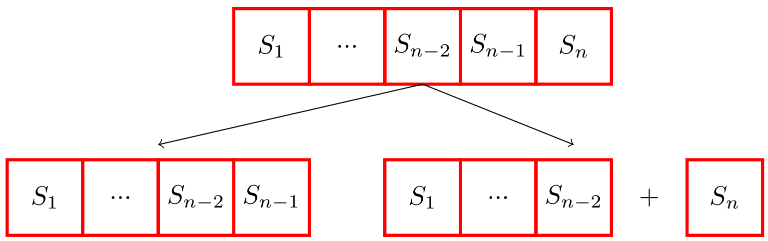
快排 O(nlogn)，遍历 O(n^2)，找到最大的数 O(n)。

综上算法复杂度是 O(n^2)。

2 Money Robbing

a

不妨将房子编号，并将金额记为 S[i]。



$$\mathrm{Opt}(i) = \max\{\mathrm{Opt(i-1)}, \mathrm{Opt(i-2)}+\mathrm{S}_i\}$$

b

Algorithm 2 Money Robbing

```
procedure MoreMoney(n)
    Opt[1] = S[1]
    Opt[2] = max(S[1], S[2])
    i = 3
    for i <= n do
        Opt[i] = max(Opt[i-1], Opt[i-2] + S[i])
        i = i + 1
    end for
    return <Opt[n]>
end procedure
```

c

对于每个 S[i] 来说，只有被抢和没被抢两种情况，没被抢那么 Opt[i] = Opt[i-1]，S[i] 被抢，那么 S[i-1] 必然没被抢，所以 Opt[i] = Opt[i-2] + S[i]。因此是这两种情况的最大值。

d

该程序只是进行一次大小比较，遍历即可，子问题 O(1)，遍历 O(n)。
综上算法复杂度是 O(n).

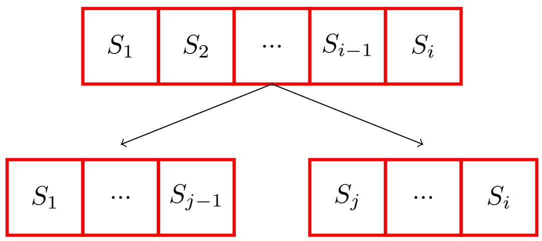
circle

删去任意一点，剩下部分仍可看作一条直线，区别在于 n 个点删去该点后，就只需要返回 Opt[n-1] 即可。但并不能确认哪个点可以被删去。不过任意 2 个连续的点必然有 1 个点不被选中可删去，所以可以在直线基础上，以任意 2 个连续的 2 个点为起点 S[1]，返回 Opt[n-1]，比较 2 个返回值，选择最大的即可。
计算了 2 次直线情况，所以算法复杂度仍为 O(n)。

3 Partition

a

对于末尾字符 S[i]，它与它前面字符可能形成多种情况的回文序列，形成回文后，即可切断扔掉，然后计算剩下的字符仍需要切几刀即可。



$$\mathrm{Opt}(i) = \max_{\mathrm{j} \in P}\{\mathrm{Opt}(\mathrm{j}-1)+1\}$$

其中，j 满足条件：第 j 个字符到第 i 个字符为回文子序列

b

Algorithm 3 Partition

```
procedure PARTITION(n)
    Opt[0] = -1
    i = 2
    for i <= n do
        j = 1
        for j <= i do
            if judge(j,i)==1 then * 判断 S 序列第 j 到 i 个字符是否是回文 *
                Opt[i] = min(Opt[i], Opt[j - 1] + 1)
            end if
        end for
    end for
    return <Opt[n]>
end procedure
```

c

考虑字符 S[i]，判断其与之前字符是否能成为回文，有至多 i 种情况，对每种情况进行遍历，选最小值，即是这 i 个字符的最小切分，遍历到 n，即可得到最终结果。

d

子问题有 O(n)，遍历是 O(n)。
综上算法复杂度是 O(n^2).

4 Decoding

a

对于末尾数字 S[i]，它与 S[i-1] 如果可以组成一个编码是一种情况；它单独成一个编码也是一种情况。

$$\text{Opt}(i) = \begin{cases} Opt(i-1) + Opt(i-2), S_{i-1}S_i \notin P \\ Opt(i-1), S_{i-1}S_i \in P \end{cases}$$

$$\text{P} = \{1, 2, 3...26\}$$

b

Algorithm 4 Decoding

```
procedure PARTITION(n)
    Opt[0] = 0
    Opt[1] = 1
    i = 2
    for i <= n do
        if 27 > S[i-1] * 10 + S[i] > 0 then
            Opt[i] = Opt[i-1] + Opt[i-2]
        else
            Opt[i] = Opt[i-1]
        end if
        i = i + 1
    end for
    return <Opt[n]>
end procedure
```

---

c

类比斐波那契数列，但与之不同的是，$S_{i-1}S_i$ 不一定有对应的字母，所以有两种情况，遍历一遍即可得到结果。

d

子问题有 O(2)，遍历是 O(n)。

综上算法复杂度是 O(n).

5 Minimum path sum

a

在第 i 层，i 个数据，每个数据向上至多 2 条路，即对每个数据来说有 1 2 种情况可以走。

$$\mathrm{Opt}[i][j] = \begin{cases} num[i][j] + \min(Opt[i-1][j-1], Opt[i-1][j]), 1 < j < i \\ num[i][j] + Opt[i-1][1], j = 0 \\ num[i][j] + Opt[i-1][i-1], j = i \end{cases}$$

b

Algorithm 5 Minimum path sum

procedure PARTITION(S,n)
  Opt[1] = 1
  i = 2
  for i <= n **do**
    Opt[i][1] = num[i][1] + Opt[i-1][1]
    Opt[i][i] = num[i][i] + Opt[i-1][i-1]
    j = 2
    for j <= i **do**
      Opt[i][j] = num[i][j] + min(Opt[i-1][j], Opt[i-1][j+1])
      j = j + 1
    end for
    i = i + 1
  end for
  answer = minOpt , n * 对第 n 层 n 个结果找出最小值 **return** <answer>
end procedure

c

除了首末两个数据只有一条路可走，其他数据具有选择权利，然后对最后结果找出最小，即最终到达该层的最小值。

d

子问题有 O(2)，遍历是 O(n^2)。
综上算法复杂度是 O(n^2).