1. 矩阵的基本运算

1.1 基本运算

- 加法 / 减法

$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

- 数乘

$$\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$$
$$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$$
$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$
$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

矩阵的加减法和数乘合成为矩阵的线性运算。

- 转置：把矩阵 A 的行和列互相交换所产生的矩阵称为 A 的转置矩阵，记为：A^T。

$$(A^T)^T=A$$
$$(\lambda A)^T=\lambda A^T$$
$$(AB)^T=B^TA^T$$

- 共轭：把矩阵 A 的各个元素换为其对应的共轭复数生成的矩阵称为 A 的共轭矩阵，记为：$\bar{A}$。
- 共轭转置：对矩阵先转置再共轭或者先共轭再转置得到的矩阵，记为 $A^*\ or\ A^H$。

1.2 特殊的矩阵

	名称	实数域	名称	复数
$m \times n$	正规矩阵	$A^TA = AA^T$	正规矩阵	$A^HA = AA^H$
$n \times n$	对称矩阵	$A^T = A$	厄米特矩阵	$A^H = A$
$n \times n$	斜对称矩阵	$A^T = -A$	斜厄米特矩阵	$A^H = -A$
$n \times n$	正交矩阵	$Q^TQ = QQ^T = I$ $Q^T = Q^{-1}$	酉矩阵	$U^HU = UU^H = I$ $U^H = U^{-1}$

2. 行列式、逆、秩、迹

- **行列式**：一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的行列式记为 $\det(A)\ or\ |A|$，表示**对线性变换的度量**。一个矩阵的行列式等于其任意行（或列）的元素与对应的代数与代数余子式乘积之和。

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$
$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

  其中：代数余子式为 A_{ij}；余子式为 M_{ij}。

- **逆**：一个 $n \times n$ 的矩阵 A，若在相同数域上存在另一个 n 阶矩阵 B，使得：$AB = BA = I$，则我们称 B 是 A 的逆矩阵，而 A 则被称为可逆矩阵。(A^*：伴随矩阵)

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, \quad A^* = (A_{ij})^T$$
$$初等变换：[A|I] \rightarrow 行（或列）初等变换 \rightarrow [I|A^{-1}]$$

- **秩**：一个矩阵 A 的**列秩**是 A 的线性无关的纵列的极大数目；类似地，行秩是A 的线性无关的横行的极大数目。表示的是：**变换后空间的维数**，即**列空间的维数**，记为：$rank(A)\ or\ r(A)$。

  以下三种表示等效（针对方阵）：**行列式不为零**，**矩阵可逆**，**矩阵满秩**。

- **迹**：一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的主对角线上各个元素的总和称为矩阵 A 的迹。

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3. 特征值与特征向量

- **特征值与特征向量**：向量 $\vec{v}$ 在变换 A 下没有离开自己张成的空间。用数学表达式表示为：

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

  其中：λ 为**特征值**，$\vec{v}$ 为**特征向量**。矩阵的特征值有如下性质：

$$det(A) = \prod \lambda_i$$
$$r(A) = 非零特征值的个数$$
$$tr(A) = \sum \lambda_i$$

4. 矩阵的分解

4.1 与求解线性方程组有关的分解

- 三**角分解**：设矩阵 $A \in F^{n\times n}$，若 $L,U \in F^{n\times n}$ 分别是下三角和上三角矩阵，满足 $A = LU$，则称矩阵 A 可作 LU 分解；若 $L,V \in F^{n\times n}$ 分别是对角线元素为 1 的下三角和上三角矩阵，D 为对角矩阵，满足 $A = LDV$，则称矩阵 A 可作 LDV 分解。LDV 分解是 LU 分解的更近一步，即把 L,U 对角线上的元素提取出来组成 D。三角分解可以通过高斯消元法求解，过程如下：

$$(A \mid I) \rightarrow \text{行初等变换} \rightarrow (U \mid P)$$
$$L = P^{-1}$$

  故可解得 L,U，即 $A = LU$，然后再把对角线提取出来，即可得到 $A = LDV$。

- 满秩分解：
- QR 分解

4.2 基于特征值及相关概念的分解

- 谱分解
- 奇异值分解（SVD 分解）