1. 矩阵的基本运算

1.1 基本运算

- 加法 / 减法

$$A + B = B + A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

- 数乘

$$\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$$
$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$
$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

  矩阵的加减法和数乘合成为矩阵的线性运算。

- 转置：把矩阵 A 的行和列互相交换所产生的矩阵称为 A 的转置矩阵，记为：A^T。

$$(A^T)^T = A$$
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

- 共轭：把矩阵 A 的各个元素换为其对应的共轭复数生成的矩阵称为 A 的共轭矩阵，记为：$\bar{A}$。
- 共轭转置：对矩阵先转置再共轭或者先共轭再转置得到的矩阵，记为 $A^* \ or \ A^H$。

1.2 特殊的矩阵

	名称	实数域	名称	复数
$m \times n$	正规矩阵	$A^TA = AA^T$	正规矩阵	$A^HA = AA^H$
$n \times n$	对称矩阵	$A^T = A$	厄米特矩阵	$A^H = A$
$n \times n$	斜对称矩阵	$A^T = -A$	斜厄米特矩阵	$A^H = -A$
$n \times n$	正交矩阵	$Q^TQ = QQ^T = I$ $Q^T = Q^{-1}$	酉矩阵	$U^HU = UU^H = I$ $U^H = U^{-1}$

2. 行列式、逆、秩、迹

- **行列式**：一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的行列式记为 $\det(A)\ or\ |A|$，表示**对线性变换的度量**。一个矩阵的行列式等于其任意行（或列）的元素与对应的代数与代数余子式乘积之和。

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$
$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

  其中：代数余子式为 A_{ij}；余子式为 M_{ij}。

- **逆**：一个 $n \times n$ 的矩阵 A，若在相同数域上存在另一个 n 阶矩阵 B，使得：$AB = BA = I$，则我们称 B 是 A 的逆矩阵，而 A 则被称为可逆矩阵。(A^*：伴随矩阵)

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, \quad A^* = (A_{ij})^T$$
$$初等变换：[A|I] \rightarrow 行（或列）初等变换 \rightarrow [I|A^{-1}]$$

- **秩**：一个矩阵 A 的**列秩**是 A 的线性无关的纵列的极大数目；类似地，行秩是A 的线性无关的横行的极大数目。表示的是：**变换后空间的维数**，即**列空间的维数**，记为：$rank(A)\ or\ r(A)$。

  以下三种表示等效（针对方阵）：**行列式不为零**，**矩阵可逆**，**矩阵满秩**。

- **迹**：一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的主对角线上各个元素的总和称为矩阵 A 的迹。

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

3. 特征值与特征向量

- **特征值与特征向量**：向量 $\vec{v}$ 在变换 A 下没有离开自己张成的空间。用数学表达式表示为：

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

  其中：λ 为**特征值**，$\vec{v}$ 为**特征向量**。矩阵的特征值有如下性质：

$$det(A) = \prod \lambda_i$$
$$r(A) = 非零特征值的个数$$
$$tr(A) = \sum \lambda_i$$

4. 矩阵的分解

我们一般考虑矩阵为实矩阵。

4.1 与求解线性方程组有关的分解

- **三角分解**：设矩阵 $A \in F^{n\times n}$，若 $L, U \in F^{n\times n}$ 分别是下三角和上三角矩阵，满足 $A = LU$，则称矩阵 A 可作三角分解；若 $L, V \in F^{n\times n}$ 分别是对角线元素为 1 的下三角和上三角矩阵，D 为对角矩阵，满足 $A = LDV$，则称矩阵 A 可作 LDV 分解。LDV 分解是 LU 分解的更近一步，即把 L, U 对角线上的元素提取出来组成 D。三角分解可以通过高斯消元法求解，过程如下：

  $$(A \mid I) \rightarrow 行初等变换 \rightarrow (U \mid P)$$
  $$L = P^{-1}$$

  故可解得 L, U，即 $A = LU$，然后再把对角线提取出来，即可得到 $A = LDV$。

  如果方阵 A 是非奇异的，即行列式不为 0，三角分解总是存在的。

- **满秩分解**：设矩阵 $A \in F^{m\times n}$，$rank(A) = r$，若存在秩为 r 的矩阵 $B \in F^{m\times r}$(列满秩)，$C \in F^{r\times n}$(行满秩)，满足 $A = BC$，则称矩阵 A 可做满秩分解。计算方法如下：

  方法一：

  $$\begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \rightarrow 行初等变换 \rightarrow \begin{pmatrix} C & P \\ 0 & \end{pmatrix}$$

  B 为 P^{-1} 的前 r 列，C 为 A 化为阶梯形的非零行，$A = BC$。

  方法二：

  首先定义 **Hermite 标准型**：就是阶梯型中的每一个行第一个非零元素为 1，而且该元素所在列中其他元素为 0 的特殊的一种。计算不走如下：

  - 用行初等变换把 A 化为 Hermite 标准型；
  - 依 Hermite 标准型中的列向量 e_i 所在列的位置即 j_i 列，相应取出 A 的第 j_i 列 a_{j_i}，得到 A 的极大线性无关组 $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_r}\}$；则矩阵 $B = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_r}\}$。
  - Hermite 标准型中非零行构成矩阵 C，即得到 A 的满秩分解 $A = BC$。

  满秩分解一定存在，但不唯一。

- **QR 分解**：设矩阵 $A \in F^{m\times n}$，若存在正交矩阵 $Q \in F^{m\times m}$，上三角矩阵 $R \in F^{m\times n}$，满足 $A = QR$，则称矩阵 A 可做 QR 分解。

  如果矩阵 A 列满秩且要求矩阵 R 的对角线元素为正，则 QR 分解存在且唯一。

4.2 基于特征值及相关概念的分解

- **特征分解**：特征分解，又称谱分解，是将矩阵分解为由其特征值和特征向量表示的矩阵之积的方法。只有可对角化矩阵才能进行特征分解。（可对角化矩阵：矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量）

  设 $A \in F^{n\times n}$，且有 n 个线性无关的特征向量 q_i。这样，矩阵 A 可以被分解为：

  $$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

  其中 $Q \in F^{n\times n}$，且且第 i 列为 A 的特征向量 q_i；Λ 是对角矩阵，其对角线上的元素为对应的特征值。s

- **奇异值分解**：矩阵值分解，又称 SVD 分解。设矩阵 $A \in C^{m\times n}$，$rank(A)=r$，$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是矩阵 A 的奇异值，则存在酉矩阵 $U \in C^{m\times m}, V \in C^{n\times n}$，分块矩阵 $\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C^{m\times n}$，满足

  $$A = U\Sigma V = U \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H$$

  其中：

  $$\Delta = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{pmatrix}$$

  计算过程如下：

  - 求矩阵 A^HA 的特征值，大于 0 的特征值按从大到小的顺序组成对角矩阵 Δ，得到矩阵 Σ；
  - 求矩阵 A^HA 的特征向量，然后进行标准正交化，得到矩阵 V；
  - 令 $u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_i, i=1,2,\ldots,r$，得到 C^m 中的 $\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}$，把它扩充为 C^m 中的标准正交基，就得到矩阵 U。计算完成。