

# Классическая криптография Квантовые вычисления

Мурашко И. В.

# Введение

- Квантовая механика
- Квантовые вычисления
- Методы симметричного шифрования и алгоритм Гровера
- Методы несимметричного шифрования (RSA, Diffie-Hellman, Elliptic curve) и алгоритм Шора.

## Двухуровневый атом



$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |b\rangle$$

**Рис.:** Процесс измерения энергии двухуровневого атома находящегося в чистом состоянии  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |b\rangle$ . Прибором регистрируется значение энергии  $E_a$  или  $E_b$ .

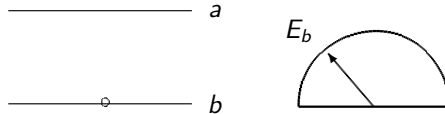
## Двухуровневый атом. Измерение $E_a$



$$|\psi\rangle \rightarrow |a\rangle$$

**Рис.:** Процесс измерения энергии двухуровневого атома находящегося в чистом состоянии  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle$ . Прибором регистрируется значение энергии  $E_a$ . При измерении происходит следующая редукция  $|\psi\rangle \rightarrow |a\rangle$

## Двухуровневый атом. Измерение $E_b$



$$|\psi\rangle \rightarrow |b\rangle$$

**Рис.:** Процесс измерения энергии двухуровневого атома находящегося в чистом состоянии  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle$ . Прибором регистрируется значение энергии  $E_b$ . При измерении происходит следующая редукция  $|\psi\rangle \rightarrow |b\rangle$

# Кот Шредингера



## Эксперимент Белла. Классический случай

$$f = \frac{1}{2} (ab + a'b + ab' - a'b'), a, a', b, b' \in \{-1, +1\}.$$

следовательно  $f \in \{-1, +1\}$  и  $|\langle f \rangle| \leq 1$

# Эксперимент Белла. Квантовый случай

$$|\langle f \rangle| = \sqrt{2} > 1$$



# Отрицательные вероятности

$$\langle f \rangle = \sum_{a, a', b, b'} p(a, a', b, b') f(a, a', b, b').$$

следовательно для  $|\langle f \rangle| > 1$  необходимо

$$\exists a, a', b, b' : p(a, a', b, b') < 0$$

# Классические вычисления



Рис.: Классические вычисления. На вход подается число  $x$  состоящее из  $n$  бит, а на выходе имеем результат  $y = f(x)$  описываемый  $m$  битами

# Квантовые вычисления



**Рис.:** Квантовые обратимые вычисления. На вход подается число  $|x\rangle$  состоящее из  $n$  кубит и заправка из нулевых состояний ( $m$  кубит), а на выходе имеем результат  $|y\rangle = |f(x)\rangle$  описываемый  $m$  кубитами и исходное состояние  $|x\rangle$

# Квантовые вычисления

Классический случай

$$x \rightarrow f(x)$$

Квантовый случай

$$\begin{aligned} &|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |0\rangle + |2\rangle |0\rangle + \dots + |x\rangle |0\rangle + \dots \rightarrow \\ &\rightarrow |0\rangle |f(0)\rangle + |1\rangle |f(1)\rangle + |2\rangle |f(2)\rangle + \dots + |x\rangle |f(x)\rangle + \dots \end{aligned}$$

## Задача о поиске иголки в стоге сена



Рис.: Поиск в неструктурированном объеме данных (поиск "иголки в стоге сена"). Классическая сложность  $O(N)$

## Алгоритм Гровера. Схема



Рис.: Алгоритм Гровера. Сложность  $O(\sqrt{N})$

# Алгоритм Гровера. Схема повторяющегося элемента



Рис.: Алгоритм Гровера. Повторяющийся элемент

# Алгоритм Гровера. Принцип работы

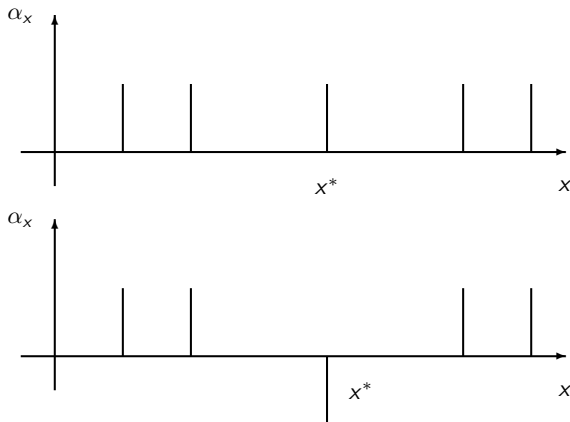


Рис.: Алгоритм Гровера. Инверсия фазы



# Алгоритм Гровера. Принцип работы



Рис.: Алгоритм Гровера. Обращение относительно среднего.

## Влияние на рекомендации к использованию

$O(N) \rightarrow O(\sqrt{N})$  ведет например к следующей рекомендации  
 $AES_{128} \rightarrow AES_{256}$

# Несимметричное шифрование

- RSA и задача факторизации чисел
- Diffie-Hellman и дискретный логарифм
- Elliptic curve и дискретный логарифм

## RSA и задача о нахождении периода функций

$$N = p \cdot q$$

$$f(x, a) = a^x \mod N.$$

Период функции  $T = 2r$ , т.е.

$$a^{x+2r} \mod N = a^x \mod N,$$

$$a^{2r} \equiv 1 \mod N,$$

$$(a^r + 1)(a^r - 1) \equiv 0 \mod N$$

# Алгоритм Шора



Рис.: Определение периода функций с помощью квантового преобразования Фурье

# Алгоритм Шора. Нахождение периода функции $f(x, a) = a^x \bmod N$



Рис.: Алгоритм Шора. Нахождение периода функции  $f(x, a) = a^x \bmod N$  при  $a = 2$ ,  $N = 21$ .

# Алгоритм Шора. Нахождение периода функции $f(x, a) = a^x \bmod N$



Рис.: Алгоритм Шора. Нахождение периода функции  $f(x, a) = a^x \bmod N$  при  $a = 2$ , Значение функции 1 повторяется с периодом  $r = 6$ .

# Алгоритм Шора. Нахождение периода функции $f(x, a) = a^x \bmod N$



Рис.: Алгоритм Шора. Нахождение периода функции  $f(x, a) = a^x \bmod N$  при  $a = 2$ . Локальные максимумы преобразования Фурье идут с периодом  $\frac{M}{r} \approx 10.67$  ( $M = 64$  - число отсчетов для преобразования Фурье)



# Рекомендованные значения для длины ключа

All key sizes are provided in bits. These are the minimal sizes for security.

*Click on a value to compare it with other methods.*

Year	Symmetric	Factoring (modulus)		Discrete Logarithm		Elliptic Curve	Hash
		Optimistic	Conservative	Key	Group		
2015	78	1245	1350	156	1245	156	156
2016	79	1273	1392	158	1273	158	158
<b>2017</b>	<b>80</b>	<b>1300</b>	<b>1435</b>	<b>159</b>	<b>1300</b>	<b>159</b>	<b>159</b>
2018	80	1329	1478	160	1329	160	160
2019	81	1358	1523	162	1358	162	162



To resist until year 2017, you may consider using a minimum of 80-bit key for symmetric systems (e.g. AES-128) and a minimum of 1440-bit key for asymmetric systems (e.g. RSA).

## Влияние на рекомендации к использованию

- RSA: 4096
- DH: 2048/256
- Elliptic curve: 512/256 (bitcoin)

NSA не рекомендует использование алгоритмов на эллиптических кривых для внутреннего использования.

# Что дальше?

- Линейная алгебра (Матрицы)
- Дискретная математика (Операции с остатком)

# Что дальше?

<https://github.com/ivanmurashko/lectures/tree/master/pdfs>

Branch: master ▾

lectures / pdfs /

Create new file

Upload files

Find file

History

ivanmurashko

crypto: presentation

Latest commit 8b01fa5 3 days ago

..

crypto\_present

crypto: presentation

3 days ago

crypto.pdf

makefile: cleanup updated

4 days ago

no.pdf

makefile: cleanup updated

4 days ago

qo.pdf

makefile: cleanup updated

4 days ago

## Вопросы

SHRODINGER VS. HEISENBERG



CAT-DEAD OR ALIVE?  
WHAT DO YOU THINK?

I DON'T KNOW

[cloudcomics.blogspot.com](http://cloudcomics.blogspot.com)

Cloud Comics © 2012