Laboratory work report №4 mathematical modeling

Выполнил: Леснухин Даниил Дмитриевич,
НПИбд-02-22, 1132221553

4
5
6
. 7
( ): 8
: 9
10
11
x0=6, y0=14 14
15
X = 6 Y = 14 16
17

1 Лабораторная работа №4. Вариант 44 7
1 Отображение графика 13

Цель работы: интерпретация результатов в контексте биологических процессов, а также анализ поведения системы в долгосрочной перспективе.

Задание Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: 14 x = 6 y = 14 . Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение лабораторной работы: Формула для выбора варианта лабораторной работы (1132221553%70) + 1 = 44

Вариант 44

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.21x(t) + 0.035x(t)\,y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.25\,y(t) - 0.021x(t)\,y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 6,\ y_0 = 14$. Найдите стационарное состояние системы.

Рис. 1: Лабораторная работа №4. Вариант 44

Эта система описывает, например, рост численности жертв, когда рядом есть хищники (взаимовыгодное взаимодействие), и вымирание хищников при контакте с жертвами (что может быть интерпретировано иначе — как будто жертвы смертельно опасны для хищников).

( ):

Стационарное состояние достигается, когда производные равны нулю:

Система уравнений:

$$\begin{cases} -0.21x + 0.035xy = 0 \\ 0.25y - 0.021xy = 0 \end{cases}$$

В первом уравнении вынесем x:

Решение уравнения:

$$x(-0.21 + 0.035y) = 0 \Rightarrow y = \frac{0.035}{0.21} = 6$$

Во втором уравнении:

Решение уравнения:

$$y(0.25 - 0.021x) = 0 \Rightarrow x = \frac{0.021}{0.25} \approx 11.90$$

:

Стационарная точка

$$x_s \approx 11.90, \quad y_s = 6$$

1. **Графики численности жертв и хищников во времени**

- Численности **жертв** и **хищников** колеблются — они растут и падают с определённой периодичностью.

- Однако амплитуда этих колебаний со временем **затухает**, то есть значения x(t) и y(t) постепенно стабилизируются.

- Это говорит о том, что система стремится к **стационарному состоянию** — равновесию между популяциями.

2. **Фазовый портрет y(x)**

- На фазовом портрете траектория постепенно закручивается и стремится к **устойчивому фокусу** (точке равновесия).

- Это говорит о том, что независимо от начальных условий, численности хищников и жертв будут стремиться к некоторому устойчивому соотношению.

Построение модели

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

#
def predator_prey(z, t):
    x, y = z
    dxdt = -0.21 * x + 0.035 * x * y
    dydt =  0.25 * y - 0.021 * x * y
    return [dxdt, dydt]

#
x0 = 6
y0 = 14
z0 = [x0, y0]

#
t = np.linspace(0, 100, 1000)

#
solution = odeint(predator_prey, z0, t)
```

```
x = solution[:, 0]
y = solution[:, 1]

# 
plt.figure(figsize=(16, 5))

# x(t) - 
plt.subplot(1, 3, 1)
plt.plot(t, x, label="     (x)", color="blue")
plt.xlabel("   ")
plt.ylabel("      ")
plt.title("          ")
plt.grid(True)
plt.legend()

# y(t) - 
plt.subplot(1, 3, 2)
plt.plot(t, y, label="     (y)", color="red")
plt.xlabel("   ")
plt.title("           ")
plt.grid(True)
plt.legend()

# 
plt.subplot(1, 3, 3)
plt.plot(x, y, color="green")
plt.xlabel("    (x)")
plt.ylabel("     (y)")
plt.title("         : y(x)")
```

```
plt.grid(True)


plt.tight_layout()
plt.show()
```

В результате получаем следующий график. Рис. 2

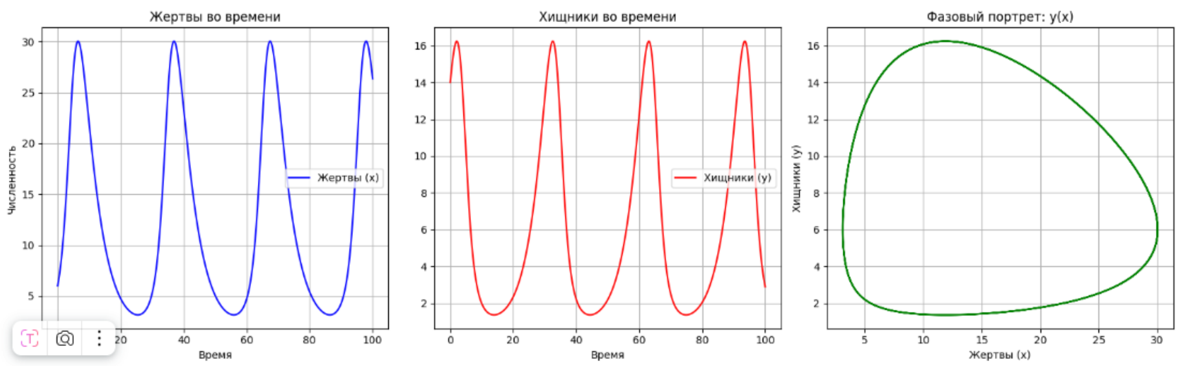

Рис. 1: Отображение графика

x0=6, y0=14

Исходя из графиков:

- В начале **много хищников** (14) и **мало жертв** (6).
- Из-за большого количества хищников — численность жертв **сильно падает**.
- Но когда жертв становится очень мало, хищники начинают **голодать и вымирать**, и их численность также снижается.
- После этого, жертвы начинают **восстанавливаться**, а затем и хищники снова начинают расти.
- Этот цикл **повторяется с затухающей амплитудой**, потому что система стремится к **равновесию**.

На фазовом портрете (график y(x)) это видно как **закручивающаяся спираль**, которая со временем приближается к точке:

$$(x^*, y^*) \approx (11.90, 6)$$

X = 6 Y = 14

При x0=6, y0=14 система не находится в равновесии, но со временем стабилизируется:

- Численности хищников и жертв начинают колебаться.
- Постепенно они сходятся к равновесной точке.
- Поведение соответствует **устойчивому фокусу** — колебания с затуханием.

Вывод В ходе выполнения лабораторной работы была исследована динамика взаимодействия двух популяций: хищников и жертв, описанная системой дифференциальных уравнений.