Κεφάλαιο 5

Προβλήματα Κυρτής Βελτιστοποίησης

5.1 Προβλήματα Βελτιστοποίησης

Ορισμός 5.1.1. Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται ως

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f_0(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} && f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & && h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, p, \end{aligned} \tag{5.1}$$

όπου

1. το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται μεταβλητή βελτιστοποίησης,
2. η συνάρτηση $f_0 : \mathbf{dom}\, f_0 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, καλείται **συνάρτηση κόστους** (cost function),
3. οι ανισότητες $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$, με $f_i : \mathbf{dom}\, f_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, για $i = 1, \ldots, m$, καλούνται **περιορισμοί ανισοτήτων** (inequality constraints), και
4. οι ισότητες $h_i(\mathbf{x}) = 0$, με $h_i : \mathbf{dom}\, h_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, για $i = 1, \ldots, p$, καλούνται **περιορισμοί ισοτήτων** (equality constraints).

Το σύνολο των σημείων για τα οποία ορίζονται όλες οι συναρτήσεις είναι το

$$\mathbb{D} := \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_i \cap \bigcap_{i=1}^{p} \mathbf{dom}\, h_i. \tag{5.2}$$

Ορισμός 5.1.2. Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ καλείται **εφικτό** (feasible) αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης καλείται εφικτό αν υπάρχει εφικτό σημείο για το πρόβλημα αυτό.

Διαφορετικά, καλείται ανέφικτο (infeasible).

Το σύνολο των εφικτών σημείων ενός προβλήματος καλείται **εφικτό σύνολο** (feasible set) του προβλήματος.

Το εφικτό σύνολο του προβλήματος βελτιστοποίησης (5.1) είναι το

$$\mathbb{X} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{D} \,|\, f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, p\}. \tag{5.3}$$

Η βέλτιστη τιμή του προβλήματος (5.1) ορίζεται ως

$$p_* = \inf \{f_0(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{X}\}. \tag{5.4}$$

Το p_* μπορεί να πάρει τις τιμές $\pm\infty$.

Αν το πρόβλημα είναι ανέφικτο, τότε $p_* = \infty$.

Αν υπάρχουν εφικτά σημεία $\mathbf{x}_k$ με $f_0(\mathbf{x}_k) \to -\infty$, όταν $k \to \infty$, τότε $p_* = -\infty$ και το πρόβλημα ελαχιστοποίησης καλείται μη-φραγμένο από κάτω.

5.1.1 Τοπικά και ολικά ελάχιστα σημεία

Ορισμός 5.1.3. Ένα σημείο $\mathbf{x}_* \in \mathbb{X}$ καλείται **βέλτιστο σημείο** (optimal point) αν $f_0(\mathbf{x}_*) = p_*$. Το σύνολο

$$\mathbb{X}_{\text{opt}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \,|\, f(\mathbf{x}) = p_*\} \tag{5.5}$$

καλείται **βέλτιστο σύνολο** (optimal set).

Εναλλακτικά, λέμε ότι το $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ είναι βέλτιστο σημείο αν $f_0(\mathbf{x}) \leq f_0(\mathbf{y})$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$.

Αν υπάρχει βέλτιστο σημείο για το πρόβλημα (5.1), τότε λέμε ότι το πρόβλημα έχει λύση και η βέλτιστη τιμή επιτυγχάνεται.

Αν το σύνολο $\mathbb{X}_{\text{opt}}$ είναι κενό, τότε λέμε ότι η βέλτιστη τιμή δεν επιτυγχάνεται (αυτό συμβαίνει πάντα όταν το πρόβλημα είναι μη-φραγμένο από κάτω).

Ορισμός 5.1.4. Το $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ καλείται **τοπικά βέλτιστο** (locally optimal) αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f_0(\mathbf{x}) \leq f_0(\mathbf{y})$ για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$, με $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2 < \epsilon$.

Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ και $f_i(\mathbf{x}) = 0$, για $i = 1, \ldots, m$, τότε λέμε ότι ο i-οστός περιορισμός ανισότητας είναι **ενεργός** (active) στο σημείο $\mathbf{x}$.

Αν $f_i(\mathbf{x}) < 0$, τότε λέμε ότι ο i-οστός περιορισμός ανισότητας είναι ανενεργός στο σημείο $\mathbf{x}$.

Ένας περιορισμός καλείται **πλεονάζων** (redundant) αν η διαγραφή του δεν μεταβάλλει το εφικτό σύνολο.

5.2 Προβλήματα κυρτής βελτιστοποίησης

Ορισμός 5.2.1. Ένα πρόβλημα της μορφής

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i = 1, \ldots, p, \end{array} \tag{5.6}$$

καλείται **πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης** (convex optimization problem) αν οι συναρτήσεις f_i, για $i = 0, \ldots, m$, είναι κυρτές.

Το εφικτό σύνολο του προβλήματος βελτιστοποίησης (5.6) είναι το

$$\mathbb{X} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{D} \,|\, f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m, \ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \ i = 1, \ldots, p\}. \tag{5.7}$$

Θεώρημα 5.2.1. Το εφικτό σύνολο ενός προβλήματος κυρτής βελτιστοποίησης είναι κυρτό.

Απόδειξη. Το εφικτό σύνολο ενός προβλήματος κυρτής βελτιστοποίησης είναι η τομή των (κυρτών) πεδίων ορισμού των συναρτήσεων f_i, για $i = 0, \ldots, m$, των (κυρτών) συνόλων 0-υποστάθμης $\{\mathbf{x} \,|\, f_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$, για $i = 1, \ldots, m$, και των υπερεπιπέδων $\{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i\}$, για $i = 1, \ldots, p$. Συνεπώς, είναι κυρτό. □

Θεώρημα 5.2.2. Έστω το κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης (5.6). Τότε, το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ τα οποία ελαχιστοποιούν την f_0 είναι κυρτό. Επιπλέον, κάθε τοπικό ελάχιστο σημείο της f_0 είναι ολικό ελάχιστο.

Απόδειξη. Έστω ότι το πρόβλημα έχει λύση p_*.

Τότε, το σύνολο των βέλτιστων σημείων είναι το κυρτό σύνολο p_*-υποστάθμης, $\mathbb{C}_{p_*} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \,|\, f_0(\mathbf{x}) \leq p_*\}$.

Έστω ότι το $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ είναι τοπικό αλλά όχι ολικό ελάχιστο της f_0. Τότε υπάρχει $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ τέτοιο ώστε $f_0(\mathbf{y}) < f_0(\mathbf{x})$. Αν θεωρήσουμε την f_0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\theta\mathbf{y} + (1-\theta)\mathbf{x}$, με $0 \leq \theta \leq 1$, έχουμε

$$f_0(\theta\mathbf{y} + (1-\theta)\mathbf{x}) \leq \theta f_0(\mathbf{y}) + (1-\theta) f_0(\mathbf{x}) < f_0(\mathbf{x}), \tag{5.8}$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{x}$ δεν είναι τοπικό ελάχιστο (γιατί;). Άτοπο. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

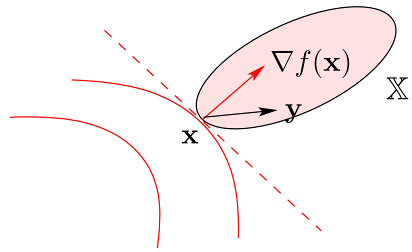
5.3 Ένα κριτήριο βελτιστότητας για διαφορίσιμες συναρτήσεις κόστους

Έστω $f_0 : \mathbf{dom}\, f_0 \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή και διαφορίσιμη συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{dom}\, f_0$, ισχύει η ανισότητα

$$f_0(\mathbf{y}) \geq f_0(\mathbf{x}) + \nabla f_0(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}). \tag{5.9}$$

Θεώρημα 5.3.1. Έστω $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{D} \,|\, f_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m,\ \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i,\ i = 1, \ldots, p\}$. Το σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ είναι βέλτιστο για το πρόβλημα κυρτής βελτιστοποίησης (5.6) αν, και μόνο αν,

$$\nabla f_0(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0, \text{ για κάθε } \mathbf{y} \in \mathbb{X}. \tag{5.10}$$



Σχήμα 5.1: Γεωμετρική ερμηνεία της συνθήκης βελτιστότητας (5.10).

Απόδειξη. (*Ευθύ, μέσω εις άτοπον απαγωγής*) Ας υποθέσουμε ότι το $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ είναι βέλτιστο αλλά υπάρχει σημείο $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ τέτοιο ώστε $\nabla f_0(\mathbf{x})^T(\mathbf{y}-\mathbf{x}) < 0$. Αν ορίσουμε, για $0 \le \theta \le 1$,

$$\mathbf{z}(\theta) := \theta\mathbf{y} + (1-\theta)\mathbf{x} = \mathbf{x} + \theta(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \tag{5.11}$$

έχουμε ότι $\mathbf{z}(\theta) \in \mathbb{X}$, για κάθε $0 \le \theta \le 1$.

Για μικρό και θετικό θ, θα πρέπει να έχουμε ότι $f_0(\mathbf{z}(\theta)) < f_0(\mathbf{x})$ διότι

$$\frac{d}{d\theta} f_0(\mathbf{z}(\theta))\bigg|_{\theta=0} = \nabla f_0(\mathbf{x})^T(\mathbf{y}-\mathbf{x}) < 0. \tag{5.12}$$

Συνεπώς, το $\mathbf{x}$ δεν είναι βέλτιστο. Άτοπο.

(*Αντίστροφο*) Αν ισχύει η (5.10), τότε, εξαιτίας της (5.9), έχουμε ότι

$$f_0(\mathbf{y}) \ge f_0(\mathbf{x}), \quad \text{για κάθε } \mathbf{y} \in \mathbb{X}, \tag{5.13}$$

δηλαδή, το $\mathbf{x}$ είναι βέλτιστο σημείο για το πρόβλημα (5.6). Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

5.3.1 Προβλήματα χωρίς περιορισμούς

Θεώρημα 5.3.2. Έστω $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή διαφορίσιμη συνάρτηση. Το $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι βέλτιστο σημείο για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της f_0 χωρίς περιορισμούς αν, και μόνο αν,

$$\nabla f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{5.14}$$

Απόδειξη. Με βάση το Θεώρημα 5.3.1, θα πρέπει να έχουμε

$$\nabla f_0(\mathbf{x})^T \mathbf{h} \geq 0, \quad \text{για κάθε } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n. \tag{5.15}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\nabla f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Διότι αν $\nabla f_0(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ και επιλέξουμε $\mathbf{h} = -\nabla f_0(\mathbf{x})$, τότε λαμβάνουμε ότι

$$-\|\nabla f_0(\mathbf{x})\|_2^2 \geq 0, \tag{5.16}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

5.3.2 Προβλήματα με γραμμικούς περιορισμούς

Έστω το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Η σχέση

$$\nabla f_0(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0, \ \text{για κάθε } \mathbf{y} \in \mathbb{X}, \tag{5.18}$$

θα πρέπει να ισχύει για κάθε $\mathbf{y}$ με $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Συμπλήρωσε...

5.3.3 Βελτιστοποίηση στο μη-αρνητικό 'τεταρτημόριο'

Έστω το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Συνθήκες βελτιστότητας

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{0}, \quad \nabla f_0(\mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0, \ \text{για κάθε } \mathbf{y} \succeq \mathbf{0}. \tag{5.20}$$

Συμπλήρωσε...

5.4 Ισοδύναμα προβλήματα

Με απλά λόγια, θα λέγαμε ότι δύο προβλήματα βελτιστοποίησης είναι ισοδύναμα όταν "από τη λύση του ενός μπορούμε να υπολογίσουμε τη λύση του άλλου."

Παράδειγμα. Το πρόβλημα

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2 \le r, \end{array} \tag{5.21}$$

είναι ισοδύναμο πρόβλημα

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} & \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2 \le r^2 \end{array} \tag{5.22}$$

Προφανώς, τα δύο προβλήματα έχουν την ίδια λύση.

Όμως, ο περιορισμός στο πρώτο πρόβλημα είναι μη διαφορίσιμη συνάρτηση (παρατηρήστε ότι για $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ η παράγωγος δεν ορίζεται) ενώ ο αντίστοιχος περιορισμός για το δεύτερο πρόβλημα είναι διαφορίσιμη συνάρτηση.

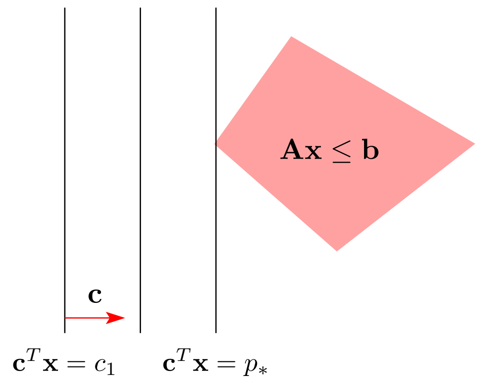
Πιο πολύπλοκα (και πιο ενδιαφέροντα) παραδείγματα ισοδύναμων προβλημάτων θα αναφερθούν στη συνέχεια του μαθήματος.

5.4.1 Προβλήματα επιγραφήματος

Το πρόβλημα

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x},t}{\text{minimize}} & t \\ \text{subject to} & f_0(\mathbf{x}) - t \le 0 \\ & f_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad i = 1\ldots, m, \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array} \tag{5.23}$$

είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα (5.6) και καλείται πρόβλημα **σε μορφή επιγραφήματος** (epigraph form).



Σχήμα 5.2: Γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

5.5 Γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης με γραμμική συνάρτηση κόστους και αφφινικούς περιορισμούς ισοτήτων και ανισοτήτων

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{Gx} \preceq \mathbf{h} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{aligned} \tag{5.24}$$

καλείται **πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού** (linear programming problem).

Δύο μορφές προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι πολύ διαδεδομένες.

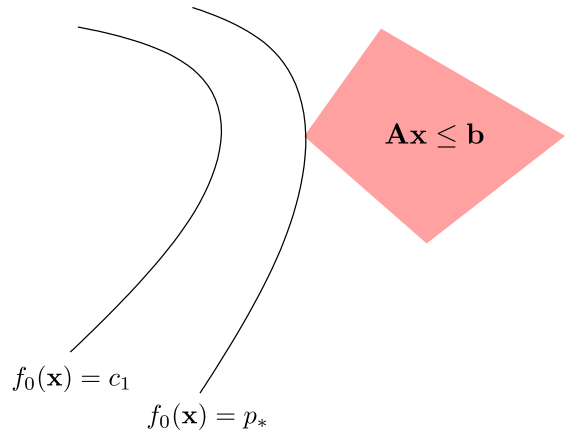
Η **κανονική μορφή** (standard form), στην οποία το πρόβλημα εκφράζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

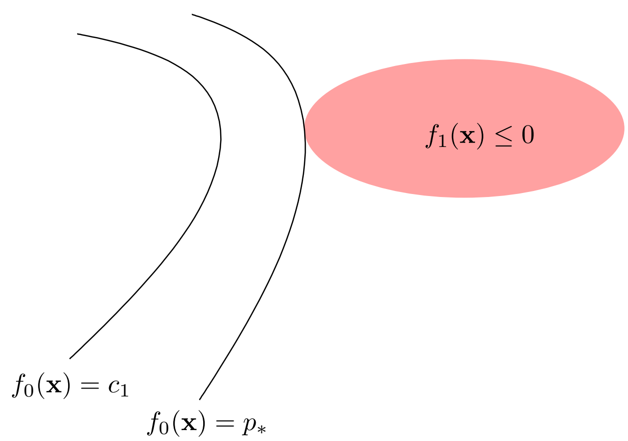
Η **μορφή ανισότητας** (inequality form), στην οποία το πρόβλημα εκφράζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{Ax} \preceq \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να εκφραστεί σε κανονική μορφή με χρήση μεταβλητών χαλάρωσης (slack variables).



Σχήμα 5.3: Τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης.



Σχήμα 5.4: Τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με έναν τετραγωνικό περιορισμό.

5.6 Τετραγωνικά προβλήματα βελτιστοποίησης

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^T\mathbf{x} + r \\ \text{subject to} & \mathbf{G}\mathbf{x} \preceq \mathbf{h} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{array} \tag{5.27}$$

καλείται **τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης** (quadratic optimization problem).

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}_0\mathbf{x} + \mathbf{q}_0^T\mathbf{x} + r_0 \\ \text{subject to} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}_i\mathbf{x} + \mathbf{q}_i^T\mathbf{x} + r_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array} \tag{5.28}$$

καλείται **τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης με τετραγωνικούς περιορισμούς** (quadratically constrained quadratic programming).

5.6.1 Παραδείγματα τετραγωνικών προβλημάτων

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\text{minimize} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \tag{5.29}$$

καλείται **πρόβλημα γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων** (linear least-squares problem).

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ \text{subject to} & l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \end{array} \tag{5.30}$$

καλείται πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς.

Παράρτημα

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι $f(x) = O(g(x))$, για $x \to a$, αν υπάρχουν σταθερές $\delta > 0$ και $K := K(a, \delta) > 0$ ή $K := K(\delta) > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(x)| \leq K|g(x)|, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } |x - a| < \delta. \tag{5.31}$$

Θεώρημα 5.6.1. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και $\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} < 0$. Τότε, για $0 < t \in \mathbb{R}$ αρκετά μικρό, έχουμε ότι $f(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}) < f(\mathbf{x})$.

Απόδειξη. Από το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης και τον ορισμό της έκφρασης $O(t^2)$, έχουμε για t αρκετά μικρό, έστω $0 < t < t_0$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + t\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} + O(t^2) \\ &\leq f(\mathbf{x}) + t\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} + K_{t_0} t^2, \end{aligned} \tag{5.32}$$

με $K_{t_0} \in \mathbb{R}_{++}$. Αν

$$t\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} + K_{t_0} t^2 < 0, \tag{5.33}$$

τότε $f(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}) < f(\mathbf{x})$. Η ανισότητα (5.33) είναι αληθής για

$$t < -\frac{1}{K_{t_0}} \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x}, \tag{5.34}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Εναλλακτικά

$$f(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + t\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} + \frac{t^2}{2} \Delta\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{w}) \Delta\mathbf{x}, \tag{5.35}$$

με $\mathbf{w} = \theta\mathbf{x} + (1 - \theta)(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x})$, για κάποιο $\theta \in [0, 1]$. Αν θέσουμε

$$z(\theta) = \Delta\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}))\Delta\mathbf{x} \tag{5.36}$$

και ορίσουμε $z^* = \max_{\theta\in[0,1]} z(\theta)$, τότε έχουμε

$$f(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) + t\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} + \frac{t^2}{2} z^*. \tag{5.37}$$

Η συνέχεια είναι ή ίδια όπως στην αρχική απόδειξη, με $K_{t_0} = \frac{z^*}{2}$.

□