Κυρτή Βελτιστοποίηση

Ασκηση 5

Ημερομηνία παράδοσης: 14 Ιανουαρίου 2022

Διδάσκων: Αθανάσιος Π. Λιάβας

Μονάδες: 100/1000

Σε αυτή την άσκηση, θα μελετήσουμε το σημαντικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή – δείτε τα εδάφια 11.3.2 (A family of standard LPs) και 11.8.1 ((Standard form linear programming) του βιβλίου των B&V.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, με $\mathbf{rank}(\mathbf{A}) = p$, και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$. Για να δημιουργήσετε εύκολα εφικτά προβλήματα, δείτε στη σελίδα 575 του βιβλίου των B&V.

1. Να λύσετε το πρόβλημα με το cvx.
2. (50) Να λύσετε το πρόβλημα με τον αλγόριθμο εσωτερικού σημείου λογαριθμικού φράγματος, με εκκίνηση απο εφικτό σημείο, με τους εξής τρόπους:
   (α΄) Να υπολογίσετε το αρχικό εφικτό σημείο με το cvx.
   (β΄) Να υπολογίσετε το αρχικό εφικτό σημείο μέσω υλοποίησης της Φάσης Ι.
3. (50) Να λύσετε το πρόβλημα με τον αλγόριθμο πρωτογενούς–δυϊκού βήματος.

Αν καταφέρετε να υλοποιήσετε τους αλγορίθμους, τότε, προαιρετικά, να εργαστείτε με τα παρακάτω.

1. Να σχεδιάσετε το βέλτιστο διάνυσμα, να μετρήσετε το πλήθος των μη μηδενικών του στοιχείων, και να το συγκρίνετε με το p.
2. Να θέσετε $n = 2$ και $p = 1$ και να σχεδιάσετε το θετικό τεταρτημόριο, το εφικτό σύνολο, και τις τροχιές των $\{\mathbf{x}_k\}$ για τους δύο αλγορίθμους.
3. Να προσπαθήσετε να μελετήσετε πειραματικά τη συμπεριφορά των αλγορίθμων (δείτε B&V, εδάφιο 11.3.2).

1 Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με την μέθοδο barrier

Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε *κανονική μορφή*:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}, \end{array} \tag{2}$$

με $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{A}$ τυχαία, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ (ενδεικτικά $n = 100, 200$), $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ (ενδεικτικά $p = 30, 50$), και $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

1.1 Φάση I - Εύρεση εφικτού σημείου

Για να βρούμε ένα σημείο το οποίο ικανοποιεί την ισότητα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ και την ανισότητα $\mathbf{x} \succeq \mathbf{0}$, εκκινούμε από ένα σημείο το οποίο ικανοποιεί την ισότητα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, έστω το $\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^\sharp\mathbf{b}$, και λύνουμε το εξής πρόβλημα (γραμμικού προγραμματισμού):

$$\begin{array}{ll} \text{minimize}_{\mathbf{x},s} & f_0(\mathbf{x}, s) := s \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & f_i(\mathbf{x}, s) := -x_i - s \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{3}$$

Η επίλυση του προβλήματος (3) μέσω της μεθόδου barrier, για δεδομένο t, γίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize}_{x,s} & f_t(\mathbf{x}, s) := tf_0(\mathbf{x}, s) - \sum_{i=1}^n \log\left(-f_i(\mathbf{x}, s)\right) \\ \text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{array} \tag{4}$$

Ορίζουμε

$$\phi(\mathbf{x}, s) := -\sum_{i=1}^n \log(-f_i(\mathbf{x}, s)). \tag{5}$$

Έστω ότι βρισκόμαστε στο σημείο $(\mathbf{x}, s)$. Ορίζουμε τον $(p \times (n+1))$ πίνακα $\mathcal{A} = [\,\mathbf{A}\ \mathbf{0}\,]$. Τότε το βήμα Newton υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f_t(\mathbf{x}, s) & \mathcal{A}^T \\ \mathcal{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta s \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_t(\mathbf{x}, s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

όπου

$$
\begin{aligned}
\nabla f_t(\mathbf{x}, s) &= t\nabla f_0(\mathbf{x}, s) + \nabla\phi(\mathbf{x}, s), \\
\nabla^2 f_t(\mathbf{x}, s) &= t\nabla^2 f_0(\mathbf{x}, s) + \nabla^2\phi(\mathbf{x}, s).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Ορίζοντας $\mathbf{e}_k$ το διάνυσμα διάστασης $(n+1)$ με 1 στην k-οστή θέση και μηδενικά αλλού,[1] έχουμε

$$
\begin{aligned}
\nabla f_0(\mathbf{x}, s) &= \mathbf{e}_{n+1}, \\
\nabla^2 f_0(\mathbf{x}, s) &= \mathbf{O}, \\
\nabla f_i(\mathbf{x}, s) &= -\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{n+1}, \\
\nabla^2 f_i(\mathbf{x}, s) &= \mathbf{O}, \\
\nabla\phi(\mathbf{x}, s) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{-f_i(\mathbf{x}, s)} \nabla f_i(\mathbf{x}, s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + s} \left(-\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{n+1}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + s} \left(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1}\right), \\
\nabla^2\phi(\mathbf{x}, s) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_i^2(\mathbf{x}, s)} \nabla f_i(\mathbf{x}, s) \nabla^T f_i(\mathbf{x}, s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{-f_i(\mathbf{x}, s)} \nabla^2 f_i(\mathbf{x}, s), \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i + s)^2} \left(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1}\right)(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1})^T.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
\nabla f_t(\mathbf{x}, s) &= t\mathbf{e}_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + s} \left(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1}\right), \\
\nabla^2 f_t(\mathbf{x}, s) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i + s)^2} \left(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1}\right)(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1})^T.
\end{aligned} \tag{9}
$$

1.2 Φάση II - Βελτιστοποίηση

Εκκινώντας από εφικτό $\mathbf{x}_0$, λύνουμε το

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize}_x & f_t(\mathbf{x}) := t\,\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} \log\left(x_i\right) \\
\text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.
\end{array} \tag{10}
$$

[1] Στο Matlab, το $\mathbf{e}_i$ ισούται με `I(:,i)` όπου `I` = eye(n + 1).

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}) &:= \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \\ f_i(\mathbf{x}) &:= -x_i, \quad i = 1, \ldots, n \\ \phi(\mathbf{x}) &:= -\sum_{i=1}^{n} \log(-f_i(\mathbf{x})). \end{aligned} \tag{11}$$

Έστω ότι βρισκόμαστε στο σημείο $\mathbf{x}$. Τότε, το βήμα Newton υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f_t(\mathbf{x}) & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_t(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{12}$$

όπου

$$\begin{aligned} \nabla f_t(\mathbf{x}) &= t\nabla f_0(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 f_t(\mathbf{x}) &= t\nabla^2 f_0(\mathbf{x}) + \nabla^2\phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{13}$$

Υπολογίζοντας αναλυτικά τις παραγώγους, λαμβάνουμε (σε αυτή την περίπτωση, τα $\mathbf{e}_i$ έχουν διάσταση n)

$$\begin{aligned} \nabla f_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}, \\ \nabla^2 f_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{O}, \\ \nabla f_i(\mathbf{x}) &= -\mathbf{e}_i, \\ \nabla^2 f_i(\mathbf{x}) &= \mathbf{O} \\ \nabla\phi(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{-f_i(\mathbf{x}, s)} \nabla f_i(\mathbf{x}, s) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\,\mathbf{e}_i \\ \nabla^2\phi(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_i^2(\mathbf{x})} \nabla f_i(\mathbf{x}) \nabla^T f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{-f_i(\mathbf{x})} \nabla^2 f_i(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T. \end{aligned} \tag{14}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \nabla f_t(\mathbf{x}) &= t\mathbf{c} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\,\mathbf{e}_i \\ \nabla^2 f_t(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T. \end{aligned} \tag{15}$$