

PRIMERA TAREA INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINÁMICOS

MAURO ARTIGIANI

Los ejercicios valen todos 1 punto. La tarea se puede escribir en inglés o en español, o en una mezcla de idiomas. Se puede entregar en físico en mi buzón (H-100) o en pdf a mi correo (m.artigiani@uniandes.edu.co). La colaboración en equipos pequeños está incentivado. Cada uno tiene que entregar su tarea, escribiendo claramente con quien trabajó.

La fecha limite para la entrega es **lunes 18 febrero a las 5pm (17.00)**. *Cada día de retraso causa una penalidad del 15 % en la nota.*

1. Sea $E_m: S^1 \rightarrow S^1$ el mapeo $x \mapsto mx \pmod{1}$.
 - a) Demuestre que $E_m \circ E_l = E_l \circ E_m = E_{ml}$.
 - b) ¿Cuándo $R_\alpha \circ E_m = E_m \circ R_\alpha$?
2. Considere el mapeo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2; \\ 3 - 3x, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Sea $C \subset [0, 1]$ un conjunto invariante por f , es decir

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}([0, 1]).$$

Demuestre que C es el conjunto de Cantor ternario.

Sugerencia: Utilize la expansión en base 3.

3. Sea G el mapeo de Gauss.
 - a) ¿Cuáles son los puntos fijos de G ?
 - b) Demuestre que los números con fracción continua periódica satisfacen una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.
Sugerencia: Escriba x en fracciones continuas y empiece con el caso $G^2(x) = x$.
4. Demuestre que los valores propios de un automorfismo continuo del toro son irracionales.
5. Construya un punto $x \in [0, 1]$ que tiene órbita $\mathcal{O}^+(x)$ densa bajo el mapeo de duplicación y cuya órbita *no* sea equidistribuida.
Sugerencia: La órbita que hemos construido en clase es equidistribuida. Para convencerse mire cuanto tiempo pasa, por ejemplo, en $[0, 1/4]$ entre los tiempos 0 y 10 y entre 0 y 34 el punto
$$x = 01\,00011011\,000001010011100101110111\dots$$