

PRIMERA TAREA INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DINÁMICOS

MAURO ARTIGIANI

Los ejercicios valen todos 1 punto. La tarea se puede escribir en inglés o en español, o en una mezcla de idiomas. Se puede entregar en físico en mi buzón (H-100) o en pdf a mi correo (m.artigiani@uniandes.edu.co). La colaboración en equipos pequeños está incentivado. Cada uno tiene que entregar su tarea, escribiendo claramente con quien trabajó.

La fecha limite para la entrega es **viernes 15 febrero a las 5pm (17.00)**. *Cada día de retraso causa una penalidad del 15% en la nota.*

1. Demuestre que R_α y R_β son conjugados por un homeomorfismo si y solo si $\alpha = \pm\beta \pmod{1}$.
2. Considere el mapeo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2; \\ 3 - 3x, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Sea $C \subset [0, 1]$ un conjunto invariante por f , es decir

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}([0, 1]).$$

Demuestre que C es el conjunto de Cantor ternario. *Sugerencia: Utilize la expansión en base 3.*

3. Sea G el mapeo de Gauss.
 - a) ¿Cuáles son los puntos fijos de G ?
 - b) Demuestre que los números con fracción continua periódica satisfacen una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.
4. Demuestre que los valores propios de un automorfismo toral continuo son irracionales.
5. Construya un punto $x \in [0, 1]$ que tiene órbita $\mathcal{O}^+(x)$ densa bajo el mapeo de duplicación y cuya órbita *no* sea equidistribuida.