Lógica Probabilística

Contenido

1. Proposiciones indefinidas (Lukasiewicz 1913)
    a. Operaciones
        i. $\vee$, $\wedge$, $\neg$
        ii. $\rightarrow$
        iii. Valores de verdad relativos y valores de verdad independientes
    b. Probabilidad como valores de verdad de proposiciones indefinidas
2. Lógica probabilística (Nilsson 1986)
    a. Mundos posibles y deducción probabilística (Probabilistic entailment)
    b. Críticas a Nilsson y propuesta de Frisch y Hadday (1993)
3. Dificultades de la noción de probabilidad (Lukasiewicz 1913)

Proposiciones indefinidas (Lukasiewicz 1913)

Proposiciones indefinidas

1. Sea $x \in X$, donde X es el conjunto de alumnos de lógica (inicio de semestre).
   - x es mujer: $3/5$
   - x tiene 8 años: 0
   - x tiene más de 8 años: 1
   - x estudió la licenciatura en el ITAM: $2/5$
2. Si el conjunto X cambia, entonces los valores de verdad cambian. Si X es el conjunto de alumnos de lógica ahora :(
   - x es mujer: $3/4$
   - x tiene 8 años: 0
   - x tiene más de 8 años: 1
   - x estudió la licenciatura en el ITAM: $1/2$
3. Si definimos x=María
   - María es mujer: 1
   - María estudió la licenciatura en el ITAM: 1

Proposiciones indefinidas

El valor de verdad de una proposición indefinida se calcula como la fracción del número de evaluaciones donde la proposición es verdadera entre la cardinalidad del conjunto. Para que esto sea posible el conjunto debe ser finito y los valores de verdad están sujetos al conjunto en cuestión.

Proposiciones indefinidas: $\vee, \wedge, \neg$

Sea X el conjunto de alumnos de la clase de lógica ahora, a=x es mujer y b=x estudió la licenciatura en el ITAM. Las operaciones $\vee, \wedge, \neg$ se calculan de la misma forma:

- $w(a \vee b)$: ¾
- $w(a \wedge b)$: ½
- $w(\neg a)$: ¼

Además $(a \vee b)$ se puede escribir como la suma lógica $(a+b)$ y $(a \wedge b)$ como el producto lógico (ab).

Proposiciones indefinidas: Implicación $a \rightarrow b$

1. Si a es falso entonces $a \rightarrow b$ es verdadero
2. Si b es verdadero entonces $a \rightarrow b$ es verdadero
3. Si a y b tienen valores de verdad fraccionales, entonces a y b deben depender del mismo valor indeterminado x.
    - No son válidos enunciados como: x es mujer y y estudió la licenciatura en el ITAM.
4. Para que $a \rightarrow b$ sea verdadero, entonces todas las evaluaciones donde a es verdadero, b también debe ser verdadero.
    - Dado x los alumnos de lógica tenemos a= x estudió la licenciatura en el ITAM y b= x es mujer. En nuestro conjunto X $a \rightarrow b$ es verdadero.

Proposiciones indefinidas: Implicación $a \rightarrow b$

El valor de verdad de b es mayor o igual que el valor de verdad de a.

Ejemplo:

Sea $X=\{1,2,\ldots, 6\}$, a=x es mayor a 5 y b= x es mayor a 4. La proposición $a \rightarrow b$ es verdadera y el valor de verdad de a es $\frac{1}{6}$ y el valor de verdad de b es $\frac{1}{3}$.

Por lo que la implicación se denota como $a<b$.

Proposiciones indefinidas: Implicación a→b

Nota: La implicación en proposiciones indefinidas **no** resuelve los problemas de la lógica clásica, ya que no se puede considerar como causalidad.

Ejemplos: Sea X el conjunto de los alumnos de lógica

- x tiene 8 años → x es mujer
- x tiene 8 años → x es hombre
- x estudió la licenciatura en el ITAM → x es mujer
- x es mujer → x tiene más de 8 años
- x tiene 8 años → x tiene más de 8 años

Proposiciones indefinidas: Principios básicos

1. $(a=0)=[w(a)=0]$
2. $(a=1)=[w(a)=1]$
3. $(a<b)<[w(a)+w(a'b)=w(b)]$, es decir que si a implica b, entonces el valor de verdad de b contiene al valor de verdad de a (por que si a es verdadero, b también lo es) más la conjunción del negado de a y b.

Proposiciones indefinidas: Valores de verdad relativos y valores de verdad independientes

Valores de verdad relativos:

- $w_a(b)=w(ab)/w(a)$, dado $w(a)\neq 0$

Valores de verdad independientes

- $aUb=[w_a(b)=w_{a'}(b)=w(b)]$

Proposiciones indefinidas: Probabilidad como valores de verdad

“If the expressions w(a), w(b), etc., are **interpreted** not as truth values of statements but as **probabilities** of events, then the theory of truth values becomes the **theory of probability**.”--Lukasiewicz

Además, la idea subyacente de valores de verdad es menos problemática que el concepto de probabilidad. Por lo que Lukasiewicz propone considerar a la probabilidad como una propiedad de las proposiciones indefinidas.

Lógica probabilística

Mundos posibles y deducción probabilística (Nilsson 1986)

Mundos posibles

Ejemplo: Sea el conjunto de enunciados {P, P→Q, Q}, los mundos posibles están dados por:

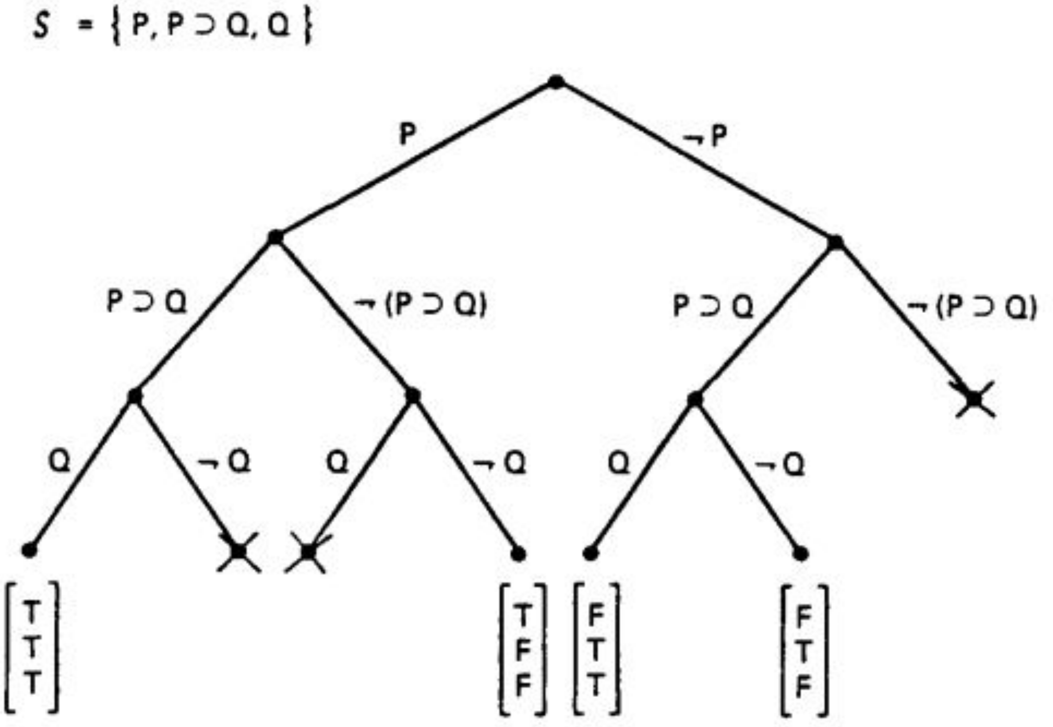
P	verdadero	verdadero	falso	falso
P→ Q	verdadero	falso	verdadero	verdadero
Q	verdadero	falso	verdadero	falso

Mundos posibles

Nilsson 1986

- Un enunciado S es verdadero o falso, si no lo sabemos podemos considerar dos mundos posibles, uno en que S es verdadero y otro en el que S es falso.
- Si tenemos n enunciados a lo más hay 2^n
- Sin embargo los 2^n mundos no son necesariamente consistentes. Sólo aquellos mundos consistentes son mundos posibles

Mundos posibles



Mundos posibles

La probabilidad de cada enunciado puede escribirse en términos de los mundos posibles y de la probabilidad de cada mundo.

1. Para cada mundo W_i se ordenan las oraciones de forma arbitraria.
2. Se define el vector columna V_i tal que si la oración S_j es falsa, entonces $V_{ij}=0$, si S_j es verdadera entonces $V_{ij}=1$.
3. Uniendo los Vij en una matriz V.
4. De esta forma el vector $\mathbf{\Pi}$ que contiene la probabilidad de cada enunciado se define como: $\mathbf{\Pi=VP}$, donde P es el vector columna que contiene la probabilidad de cada mundo posible.

Mundos posibles

Casi nunca se conoce la probabilidad de cada mundo, pero se pueden inferir dada la opinión experta sobre los valores en Π y el conjunto de mundos posibles.

Nilsson define 2 problemas:

1. Se conoce la probabilidad de un conjunto de enunciados B y se desea conocer la probabilidad de un nuevo enunciado S.
2. Se conoce la probabilidad de un conjunto de enunciados B y se desea conocer la probabilidad de un enunciado S dado que se conoce el valor de S_0.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

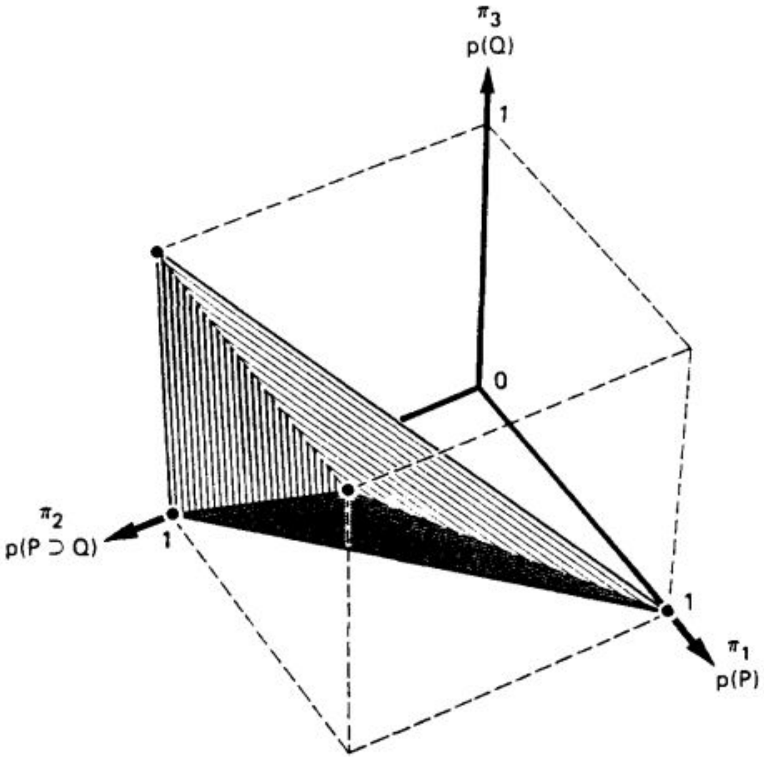
Para el primer problema Nilsson propone acotar la probabilidad del enunciado S a partir de una técnica conocida como *probabilistic entailment.*

1. Dado el conjunto de mundos posibles para el conjunto $B \cup \{S\}$ se calculan **todos** los mundos posibles. De entrada la probabilidad de S está restringida a la envoltura convexa (*convex hull*) definida por los extremos en que sólo uno de los mundos posibles puede ocurrir y lo hace con probabilidad 1.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

{P, P→Q, Q}

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Mundos posibles: Probabilistic entailment

2. Una vez que se tienen los mundos posibles se puede escribir la matriz V, donde la última fila corresponde al enunciado S.

3. Se conoce las probabilidades de los enunciados en V y se ordenan en un vector **Π**'.

4. Como la suma de las probabilidades de los mundos debe ser uno se agrega una fila de 1's al inicio de V y un uno al inicio del vector **Π**'.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

5. Se elimina el último renglón de V (correspondiente a S) y da lugar a V'.

6. Se encuentra el vector P a partir del sistema $\mathbf{\Pi' = V'P}$.

7. Para encontrar la probabilidad de S, se hace la multiplicación $\mathbf{V_s P}$, donde V_s es el último renglón de la matriz original V correspondiente al enunciado S.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

La solución que da la probabilidad de S no es única, por lo que el problema se puede plantear como un problema de optimización donde se busca maximizar la entropía. $H = -\sum_i p_i \log p_i = -\boldsymbol{P}^t \log \boldsymbol{P},$

Al convertirlo en un problema de optimización es posible usar técnicas como multiplicadores de Lagrange para resolverlo.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

Para el segundo problema hace uso de la probabilidad condicional donde:

$P(S|S0)=P(S \wedge S_0)/P(S_0)$

Con la solución del problema anterior es posible aproximar la probabilidad de los enunciados S, $S \wedge S_0$ y la de S_0.

Críticas a Nilsson y propuesta de Frisch y Hadday (1993)

Críticas a Nilsson

1. El problema de resolver *probabilistic entailment* es: (Frisch y Hadday, 1993)
    - NP completo en lógica proposicional
    - No computable en lógica de primer orden
2. La implicación lógica no es consistente con lo que pensamos con la frase ‘Si… entonces...’, por lo que en vez de tratar la implicación como ejemplo, debió utilizar probabilidad condicional, es decir $P(Q|P)$. (Pearl, 1992)

Propuesta de Frisch y Hadday 1993

Definición del lenguaje $\mathscr{L}_{PL}$ en el cual los enunciados son de la forma: $P(\phi|\varepsilon) \in I$. Donde I es un intervalo cerrado en [0,1] y ϕ y ε son enunciados de lógica proposicional.

De esta manera se tiene que $P(\phi|\varepsilon) \in I$ es verdadero o es falso.

Propuesta de Frisch y Hadday 1993

A partir de enunciados verdaderos en $\mathscr{L}_{PL}$ es posible acotar las probabilidades de un nuevo enunciado.

1. Se inicia con un intervalo de probabilidad [0,1].
2. Con cada enunciado se restringe la probabilidad.
3. Si se obtienen dos intervalos I_1 e I_2, entonces la probabilidad está acotada por $I_1 \cap I_2$.
4. Se define qué tanto tiempo se va realizar el proceso de acotamiento. De esta forma el programa termina

Propuesta de Frisch y Hadday 1993

Ejemplo:

1. $P(B \rightarrow A) \in [1, 1]$
2. $P(A \rightarrow C) \in [1, 1]$
3. $P(B) \in [0.2, 0.2]$
4. $P(C) \in [0.6, 0.6]$

Dados 1 y 3 $A \in [0.2, 1]$ y dados 2 y 4 $A \in [0, 0.6]$, por lo tanto $A \in [0.2, 0.6]$. Lo que se busca es irse acercando a una probabilidad puntual para A

Propuesta de Frisch y Hadday 1993

Frisch y Hadday dan 38 reglas de inferencia que son congruentes con la teoría de probabilidad a partir de las cuáles se puede acotar la probabilidad de nuevos enunciados.

Dificultades de la noción de probabilidad

Probabilidad objetiva

- La probabilidad depende del fenómeno.
- La probabilidad es considerar que algo no es completamente cierto ni completamente falso.
- La probabilidad de que llueva en la tarde es del 40%. Una vez que llegue la tarde esto será verdadero o falso, no tendrá una calidad de pseudo verdad.
- La probabilidad real no existe, todo es consecuencia causal de algún proceso aún cuando no conocemos todas las variables.

Probabilidad subjetiva

- La probabilidad depende de la incertidumbre que tenemos sobre el fenómeno.
- La probabilidad no estudia procesos mentales.
- El que yo no sepa algo no cambia su valor de verdad.
  - Si hay una urna con 100 pelotas negras y blancas ¿cuál es la probabilidad de sacar una pelota negra?
  - Yo creo que hay 50 y 50, pero hay 99 blancas y una negra, ¿la probabilidad subjetiva es ½? o ¿1/99?.

Otros problemas de la probabilidad

- Cambia con el tiempo
- Cambia según el conjunto donde se define la probabilidad.
- No siempre es intuitiva.
- Cae en paradojas (Paradoja de niña o niño)
  - Mr. Jones has two children. The older child is a girl. What is the probability that both children are girls?
  - Mr. Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys?