Tarea 9 - Cómputo distribuido

Dalia Camacho, Gabriela Vargas

1 Describir lo visto en clase

En esta clase revisamos el teorema que dice que el problema de consenso se puede resolver si y solo si se puede resolver el problema de Total Order Broadcast. Sin embargo, por el teorema de imposibilidad FLP, el problema de consenso no se puede resolver en un sistema asíncrono donde los procesos pueden fallar, por lo que el Total Order Broadcast tampoco se puede resolver en un sistema asíncrono donde hay procesos que presentan fallas.

Por otra parte, vimos el modelo que considera a un servidor como una máquina de estado, de la que los distintos clientes invocan operaciones. Para tolerar fallas, cada cliente tiene una réplica de esta máquina de estado. Después de que un cliente invoca una operación, la máquina pasa de un estado q a un estado q' y este estado se deberá actualizar en todas las copias existentes.

Posteriormente se mencionó otro resultado derivado del teorema FLP. Éste considera que así como el problema de consenso no se puede resolver en un sistema asíncrono donde hay fallas, tampoco es posible resolver el problema con un acuerdo de tipo $k - setagreement$, en el que la propiedad de agreement se cumple si el número de valores decididos iguales es $\geq k$. La imposibilidad de resolver este problema se justifica con el lemma de Sperner, en el que cada triángulo representa una ejecución del sistema y su representación gráfica indica que siempre habrá al menos una ejecución en que se decidan tres valores diferentes (caso de dimensión dos).

En la clase del viernes 15/03 revisamos las propiedades de un sistema con tolerancia a fallas bizantinas. El problema tiene solución en un entorno síncrono con tolerancia a fallas menor a 1/3. En este problema se pretende evitar que el nodo traidor comunique dos cosas diferentes a dos grupos de nodos y que esto provoque que cada grupo decida una cosa distinta. Una solución para evitar que el traidor se filtre en los grupos es la regla de firmas, donde cada nodo enviará su voto junto con un identificador o firma. Bajo este esquema los nodos se tardarán $f + 1$ rondas en tomar una decisión. Otra estrategia para resolver el problema de fallas bizantinas es el *splitsecret*, en el que un *secreto* se distribuye entre n servidores de tal forma que, en conjunto, k particiones del secreto serán capaces de reconstruirlo, pero ninguna partición individual podrá reconstruirlo por si sola. Esta estrategia viene de la idea de que $k + 1$ puntos distintos bastan para identificar un polinomio de orden k. Siguiendo esta analogía, el polinomio es el secreto y cada servidor tendrá un punto necesario para reconstruirlo.

2 Probar el lemma de Sperner, en dimensión 2 (triangulación de un triángulo)

2.1 Enunciar el lemma de Sperner

Lemma *Sea $T = v_1v_2v_3$ un triángulo y sea τ una tirangulación de T. Los vértices de T son marcados por los colores 1, 2 y 3. Los vértices de τ son marcados con los mismos colores tales que si un vértice está en un lado de T, este se debe marcar por uno de los dos colores que tienen los extremos de este lado. Entonces, existe al menos una cara de τ con los vértices marcados por los diferentes colores $\{1, 2, 3\}$. Además, el número de tales caras es impar*

Explicación Sea $T = v_1v_2v_3$ un triángulo con vértices $v1$, $v2$ y $v3$. Obtenemos una triangulación τ al dividir T en triángulos más pequeños; es decir, añadimos vértices y aristas de tal manera que cada cara interna tendrá exactamente tres vértices en sus bordes. Además, si tomamos dos de los triángulos más pequeños, éstos podrán ser disjuntos, tener un vértice en común o tener un arista en común.

Consideremos las siguientes figuras, en donde el triángulo de la izquierda no tiene una división válida de acuerdo con el lema anteriormente mencionado, ya que el sub-triángulo marcado en rosa tiene cuatro vértices en sus bordes $\{v_2, a, c, f\}$.

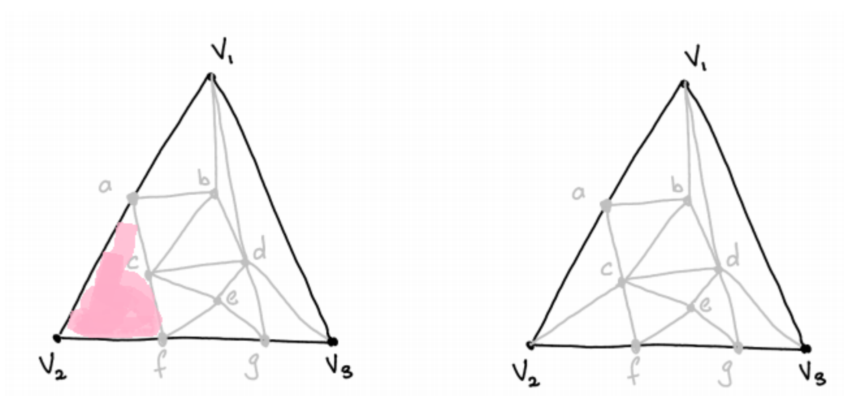

Figure 1: Divisiones de un triángulo con vértices v_1, v_2 y v_3.

Ahora, si coloreamos los vértices de τ con los colores $\{1, 2, 3\}$, el lema de Sperner nos indica que encontraremos al menos una triangulación multicolor, que es un triángulo interno cuyos vértices tienen diferentes colores [1]. Para obtener este tipo de divisiones se consideran las siguientes restricciones sobre T:

- Para cada $1 \leq i \leq 3$, el vértice v_i es coloreado con i.
- Para cada $1 \leq i < j \leq 3$, cualquier vértice en cada lado de T entre v_i y v_j es coloreado con i o j.

2.2 Probar que el número de vértices de grado impar es par, en cualquier gráfica

Hay dos formas de probar que hay un número par de vértices de orden impar. La primera es a partir del número total de vértices en una gráfica y la segunda es por construcción.

2.2.1 Vértices totales

Consideremos una gráfica $G(V, E)$ con m aristas entonces

$$2m = \sum_{v_i \in V} deg(v_i).$$

Ya que cada arista aumenta el grado de dos vértices en una unidad. Por lo tanto tenemos que la suma de los grados de todos los vértices en una gráfica es par. Podemos dividir los vértices en dos conjuntos los que tienen grado par y los que tienen grado impar entonces tenemos

$$2m = \sum_{v_{i\,par}} deg(v_i) + \sum_{v_j \in V_{impar}} deg(v_j).$$

El grado de los vértices de grado par es par y por lo tanto $\sum_{v_{i\,par}} deg(v_i)$ es par. Para que la suma de los grados sea par, entonces $\sum_{v_j \in V_{impar}} deg(v_j)$ debe ser par. Como el grado de los vértices en V_{impar} es impar tiene que haber un número par de vértices de grado impar para que $\sum_{v_j \in V_{impar}} deg(v_j)$ sea par. Por lo tanto hay un número par de vértices de grado impar.[3]

2.2.2 Por construcción

Supongamos que previo a colocar las aristas colocamos todos los vértices en este caso todos son de grado 0 (par) y hay 0 vértices de grado impar. Cuando se coloca una arista entre dos vértices de grado par, el número de vértices de grado impar incrementa en 2 (par). Si la arista se coloca entre dos vértices de grado impar, el número de vértices de grado impar disminuty en 2 (par). Mientras que si la arista se coloca entre un vértice de grado impar y uno de grado par, el de grado impar se convierte en grado par y el de par en grado impar con lo que el número de vértices de grado impar no cambia. Todos los cambios posibles al agregar aristas conllevan a un número par de vértices de grado impar. Por lo tanto hay un número par de vértices de grado impar. [2]

2.3 Probar que en una gráfica que consiste de un camino, cuyos extremos están coloreados 0,1, y los vértices internos con colores dentro de {0,1}, existen un número de aristas bi-coloreadas impar

Sin pérdida de generalidad consideremos la base del triángulo cuyos vértices en los extremos toman los valores 0 y 1. Además de los vértices de los extremos hay dos vértices internos que pueden tomar los valores 0 o 1. Al menos hay una arista en la frontera que tiene un vértice con valor 0 y otro con valor 1, ya que en algún punto se deben encontrar los valores 0 y 1. Si hay más de una arista con vértices bicolores, entonces tiene que haber un número impar de aristas con vértices bicolores en la frontera. Esto se puede probar por inducción sobre el número de vértices. Consideremos que siempre hay un número par de aristas, entonces si $n = 2$ sólo hay una arista cuyos vértices son cero y uno. Para $n = 4$ hay dos vértices internos más, si estos toman un único valor sólo hay una arista bicolor, si son distintos pero no alternan el orden sigue habiendo una sola arista bicolor. En cambio si alternan todas las aristas en la frontera son bicolores y son tres. Supongamos que para $n = 2k$ hay un número impar de aristas bicolores, ahora probemos para $n_2 = 2(k+1)$ vértices. Sin pérdida de generalidad supongamos que las nuevas aristas se encuentran junto al extremo con el cero. Si ambas toman valor cero, ambas toman el valor del vértice junto al cero en la configuración anterior $(2k)$ o bien si la más cercana al cero toma valor cero y la otra toma el valor de la que estaba junto al cero en la configuración anterior $(2k)$ entonces se tiene el mismo número (impar) de aristas bicolores. Otro caso es en el que el cero y el uno se alternan en los 4 vértices del extremo cercano al cero con lo que se agregan dos aristas bicolores. El último caso es que en la configuración anterior se hayan tenido dos ceros juntos en el extremo y los nuevos vértices tomen el valor uno, nuevamente se agregan dos aristas bicolores. Por lo que en cualquier caso se mantiene un número impar de aristas bicolores.

2.4 Definir la gráfica dual a la triangulación

Para generar la gráfica dual a la triangulación, en el interior de cada triángulo se agrega un nodo y se define un nodo exterior. El nodo exterior se une a los nodos de los triángulos en la frontera cuya arista en la frontera es bicolor. Como hay un número impar de aristas en la frontera, el nodo exterior es de grado impar. Los nodos interiores se conectan a otros nodos interiores siempre y cuando la arista colindante sea bicolor.

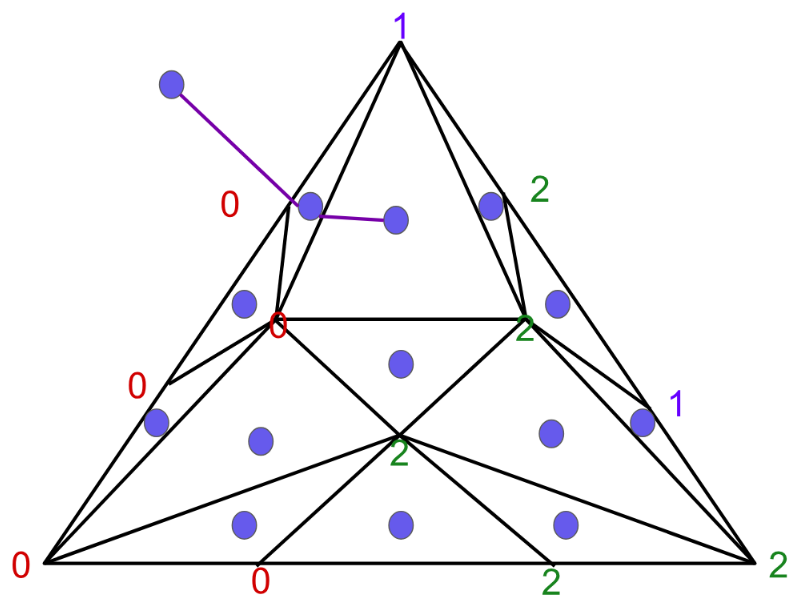

Figure 2: Triangulación y Gráfica Dual

2.5 Probar que los vertices internos de grado impar de la grafica dual corresponden exactamente a los triángulos tri-colores

Ahora analizamos el grado que tienen los vértices de la gráfica dual a partir de las aristas. Si el triángulo no cuenta con al menos un vértice 0 y un vértice 1 entonces el nodo en este triángulo es de grado 0. Si hay dos vértices 0 y un vértice 1 o bien un vértice 0 y dos vértices 1 entonces el nodo de este triángulo es de grado dos, ya que hay dos aristas bicolores $0, 1$. En estos dos casos los vértices son de grado par. El único caso en que se tiene un nodo de grado impar es cuando los triángulos tienen en sus aristas 0, 1 y 2 de esta forma sólo hay una arista bicolor 0 y 1. Por lo tanto los únicos nodos internos con grado impar se encuentran dentro de triángulos tricolores.

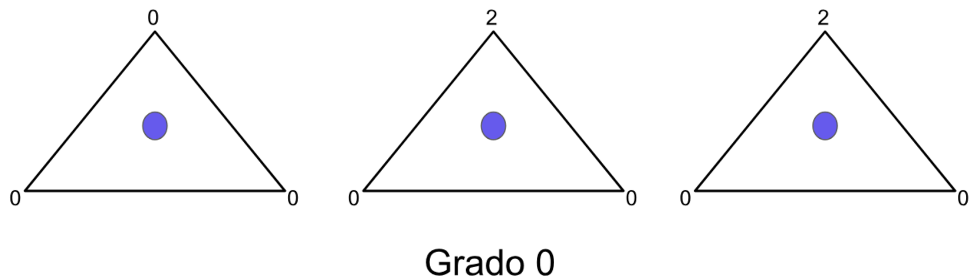

Figure 3: Triángulos con nodo interno de grado cero

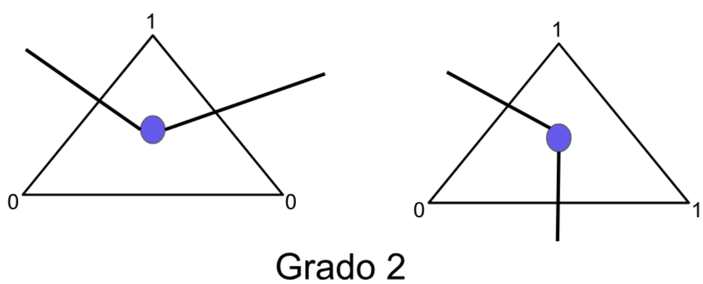

Figure 4: Triángulos con nodo interno de grado dos

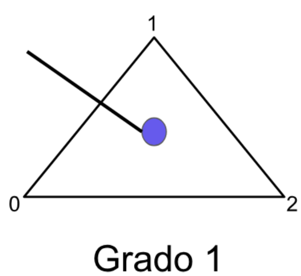

Figure 5: Triángulo con nodo interno de grado uno. Triángulo tricolor

2.6 Concluir que existe un numero impar de ellos

Ahora consideremos la gráfica dual, ya sabemos que el nodo exterior es de grado impar, por lo tanto al interior debe haber un número impar de vértices de grado impar para que se cumpla que el número de vértices de grado impar es par como vimos en la Sección 2.2. Como vimos en la Sección 2.5, los nodos de internos de grado impar son forzosamente tricolores, por lo tanto para que se cumpla que el número de nodos de grado impar sea par debe haber un número impar de triángulos tricolores, además con esto se tiene que hay al menos un triángulo tricolor.

References

[1] Shagnik Das. Sperner's lemma and its applications. 2017.

[2] Damian RedingDamian Reding. Number of graph vertices of odd degree is even.

[3] Ken Rosen. Graph theory (part2).