Lógica Probabilística

Contenido

1. Lógica probabilística (Nilsson 1986)
    a. Mundos posibles y deducción probabilística (Probabilistic entailment)
2. Deducción Anytime (Frisch y Haddawy 1994)
    a. Lenguaje $\mathcal{L}_{PL}$
    b. Deducción anytime

Lógica probabilística

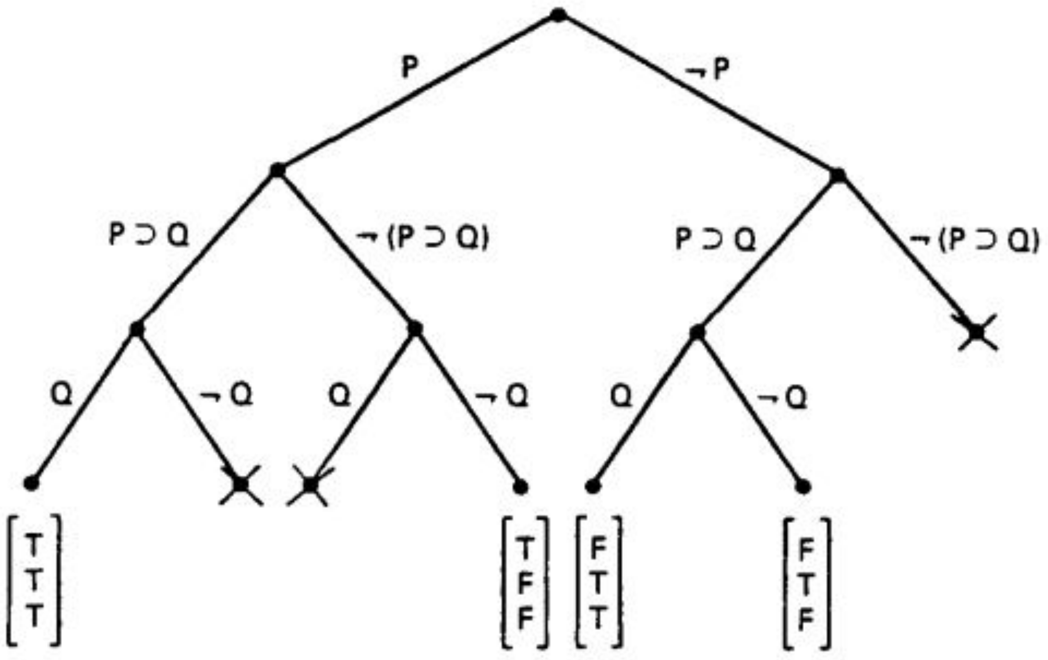
Mundos posibles

Nilsson 1986

- Un enunciado S es verdadero o falso, si no lo sabemos podemos considerar dos mundos posibles, uno en que S es verdadero y otro en el que S es falso.
- Si tenemos n enunciados a lo más hay 2^n
- Sin embargo los 2^n mundos no son necesariamente consistentes. Sólo aquellos mundos consistentes son mundos posibles

Mundos posibles

$S = \{P, P \supset Q, Q\}$



Mundos posibles

La probabilidad de cada enunciado puede escribirse en términos de los mundos posibles y de la probabilidad de cada mundo.

1. Para cada mundo W_i se ordenan las oraciones de forma arbitraria.
2. Se define el vector columna V_i tal que si la oración S_j es falsa, entonces V_{ij}=0, si S_j es verdadera entonces V_{ij}=1.
3. Uniendo los Vij en una matriz V.
4. De esta forma el vector $\mathbf{\Pi}$ que contiene la probabilidad de cada enunciado se define como: $\mathbf{\Pi}$**=VP**, donde P es el vector columna que contiene la probabilidad de cada mundo posible.

Mundos posibles

Casi nunca se conoce la probabilidad de cada mundo, pero se pueden inferir dada la opinión experta sobre los valores en $\mathbf{\Pi}$ y el conjunto de mundos posibles.

Nilsson define 2 problemas:

1. Se conoce la probabilidad de un conjunto de enunciados B y se desea conocer la probabilidad de un nuevo enunciado S.
2. Se conoce la probabilidad de un conjunto de enunciados B y se desea conocer la probabilidad de un enunciado S dado que se conoce el valor de S_0.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

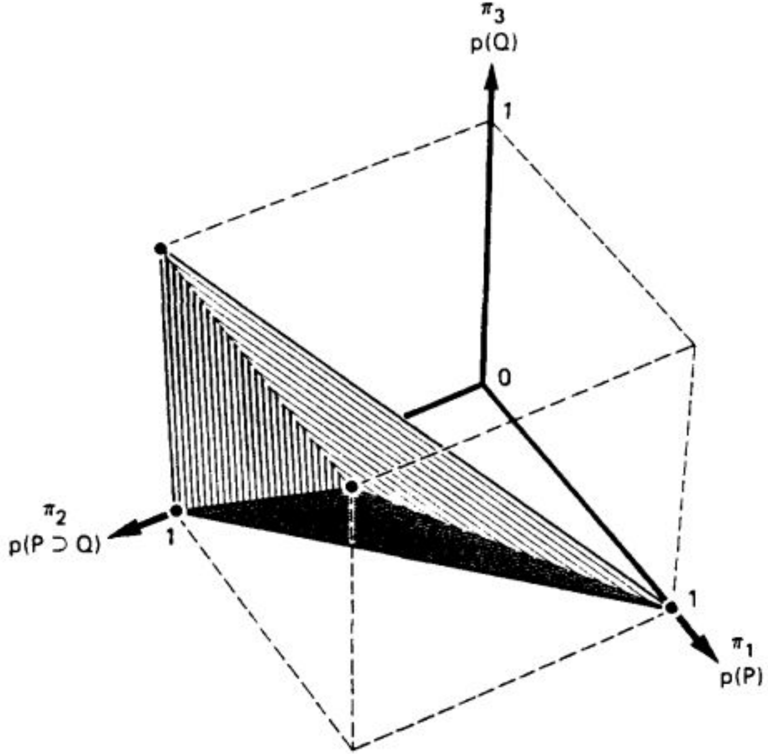
Para el primer problema Nilsson propone acotar la probabilidad del enunciado S a partir de una técnica conocida como *probabilistic entailment.*

1. Dado el conjunto de mundos posibles para el conjunto $B \cup \{S\}$ se calculan **todos** los mundos posibles. De entrada la probabilidad de S está restringida a la envoltura convexa (*convex hull*) definida por los extremos en que sólo uno de los mundos posibles puede ocurrir y lo hace con probabilidad 1.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

{P, P→Q, Q}

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Mundos posibles: Probabilistic entailment

2. Una vez que se tienen los mundos posibles se puede escribir la matriz V, donde la última fila corresponde al enunciado S.

3. Se conoce las probabilidades de los enunciados en V y se ordenan en un vector $\mathbf{\Pi}'$.

4. Como la suma de las probabilidades de los mundos debe ser uno se agrega una fila de 1's al inicio de V y un uno al inicio del vector $\mathbf{\Pi}'$.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

5. Se elimina el último renglón de V (correspondiente a S) y da lugar a V'.

6. Se encuentra el vector P a partir del sistema $\mathbf{\Pi' = V'P}$.

7. Para encontrar la probabilidad de S, se hace la multiplicación $\mathbf{V_s P}$, donde V_s es el último renglón de la matriz original V correspondiente al enunciado S.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

La solución que da la probabilidad de S no es única, por lo que el problema se puede plantear como un problema de optimización donde se busca maximizar la entropía. $H = -\sum_i p_i \log p_i = -P^t \log P,$

Al convertirlo en un problema de optimización es posible usar técnicas como multiplicadores de Lagrange para resolverlo.

Mundos posibles: Probabilistic entailment

Para el segundo problema hace uso de la probabilidad condicional donde:

$P(S|S0)=P(S \wedge S_0)/P(S_0)$

Con la solución del problema anterior es posible aproximar la probabilidad de los enunciados S, $S \wedge S_0$ y la de S_0.

Deducción Anytime de Frisch y Haddawy (1994)

Críticas a Nilsson

El problema de resolver *probabilistic entailment* con el método de Nilsson es

- NP completo en lógica proposicional
- No computable en lógica de primer orden
- No muestra que la deducción que propone sea sólida y completa.

Propuesta

Proponer un método que:

- Pueda arrojar resultados parciales en cualquier momento
- Que la información en cada iteración incremente de forma monótona creciente
- Que contenga reglas bien definidas.
- Se puede definir un subconjunto de problemas donde el método de deducción es completo.

Lenguaje $\mathcal{L}_{PL}$

Enunciados son de la forma: $P(\phi|\varepsilon) \in I$. Donde I es un intervalo cerrado en [0,1] y ϕ y ε son enunciados de lógica proposicional.

$P(\phi|\varepsilon) \in I$ es verdadero o es falso.

Los enunciados no condicionales se pueden reescribir como $P(\phi|T) \in I = P(\phi) \in I$, donde T es una tautología.

Los enunciados $P(\phi|\varepsilon) \in \emptyset$ y $P(\varepsilon) \in [0,0]$ son equivalentes.

Deducción anytime

A partir de enunciados verdaderos en $\mathscr{L}_{PL}$ es posible acotar las probabilidades de un nuevo enunciado.

1. Se inicia con un intervalo de probabilidad [0,1].
2. Con cada enunciado se restringe la probabilidad.
3. Si se obtienen dos intervalos I_1 e I_2, entonces la probabilidad está acotada por $I_1 \cap I_2$.
4. Se define qué tanto tiempo se va realizar el proceso de acotamiento. De esta forma el programa termina

Ejemplo

Ejemplo:

1. $P(B \rightarrow A) \in [1, 1]$
2. $P(A \rightarrow C) \in [1, 1]$
3. $P(B) \in [0.2, 0.2]$
4. $P(C) \in [0.6, 0.6]$

Dados 1 y 3 $A \in [0.2, 1]$ y dados 2 y 4 $A \in [0, 0.6]$, por lo tanto $A \in [0.2, 0.6]$. Lo que se busca es irse acercando a una probabilidad puntual para A

Reglas de inferencia: Probabilidad no condicional

(i)

$$
\begin{array}{l}
P(\alpha \mid \delta) \in [x \; y] \\
P(\alpha \vee \beta \mid \delta) \in [u \; v] \\
P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [w \; z] \\
\hline
P(\beta \mid \delta) \in [\max(w, u-y+w) \\
\qquad\qquad \min(v, v-x+z)]
\end{array}
$$

provided $w \leqslant y$, $x \leqslant v$, $w \leqslant v$

(ii)

$$
\begin{array}{l}
P(\alpha \mid \delta) \in [x \; y] \\
P(\beta \mid \delta) \in [u \; v] \\
P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [w \; z] \\
\hline
P(\alpha \vee \beta \mid \delta) \in [\max(x, u, w, x+u-z) \\
\qquad\qquad \lfloor y+v-w \rfloor_1]
\end{array}
$$

provided $w \leqslant y$, $w \leqslant v$, $z \geqslant x+u-1$

(iii)

$$
\begin{array}{l}
P(\beta \mid \delta) \in [x \; y] \\
P(\alpha \mid \delta) \in [u \; v] \\
P(\alpha \vee \beta \mid \delta) \in [w \; z] \\
\hline
P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-z \rceil^0 \\
\qquad\qquad \min(y, v, z, y+v-w)]
\end{array}
$$

provided $z \geqslant x$, $z \geqslant u$

(iv)

$$
\begin{array}{l}
P(\alpha \mid \delta) \in [x \; y] \\
\hline
P(\neg\alpha \mid \delta) \in [1-y \;\; 1-x]
\end{array}
$$

Reglas de inferencia: Condicionales

(v)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \mid \beta \wedge \delta) \in [x/v\ z]}$$

$$\text{where } z = \begin{cases} 1, & \text{if } y > u \\ 0, & \text{if } y = u = 0 \\ y/u, & \text{otherwise} \end{cases}$$

provided $x \leqslant v$, $v > 0$.

(vi)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\beta \mid \alpha \wedge \delta) \in [x\ y] \\ P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \mid \delta) \in [u/y\ \lfloor v/x \rfloor_1]}$$

provided $y \geqslant u$, $x > 0$, $y > 0$

(vii)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\beta \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\alpha \mid \beta \wedge \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x \cdot u\ y \cdot v]}$$

(viii)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha_k \mid \alpha_1 \wedge \delta) \in [w\ z] \\ P(\alpha_i \mid \alpha_{i+1} \wedge \delta) \in [x_i\ y_i],\ 1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ P(\alpha_{i+1} \mid \alpha_i \wedge \delta) \in [u_i\ v_i],\ 1 \leqslant i \leqslant k-1 \end{array}}{P(\alpha_1 | \alpha_k \wedge \delta) \in [(w \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_i}{v_i})\ (z \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{y_i}{u_i})]}$$

(ix)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \mid \beta \wedge \delta) \in [x_1\ y_1] \\ P(\beta \mid \alpha \wedge \delta) \in [x_2\ y_2] \\ P(\gamma \mid \beta \wedge \delta) \in [u_1\ v_1] \\ P(\beta \mid \gamma \wedge \delta) \in [u_2\ v_2] \end{array}}{P(\gamma \mid \alpha \wedge \delta) \in [x_2 \cdot \lceil \frac{1-u_1}{x_1} \rceil^0\ \min(1,\ 1 - x_2 + \frac{x_2 \cdot v_1}{x_1}, z)]}$$

$$\text{where } z = \begin{cases} 1, & \text{if } u_2 = 0 \\ \frac{y_2}{x_1} \cdot (\frac{v_1}{u_2} + \min(0, x_1 - v_1)), & \text{otherwise} \end{cases}$$

Reglas de inferencia: Reglas generales

(x)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [0\ 0]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \beta \wedge \delta) \in \emptyset}$$

(xi)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \beta) \in \emptyset}{\boldsymbol{P}(\beta \mid T) \in [0\ 0]}$$

(xii)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \beta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y]}$$

provided β logically equivalent to δ

(xiii)

$$\frac{}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [1\ 1]}$$

provided δ entails α

(xiv)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [x\ 1]}$$

provided α entails β

(xv)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [0\ y]}$$

provided α entails β

Reglas de inferencia: Reglas generales

(xvi)

$$\frac{}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [0\ 1]}$$

(xvii)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [\max(x, u)\ \ \min(y, v)]}$$

(xviii)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \mid T) \in \emptyset}{\boldsymbol{P}(\beta \mid \gamma) \in \emptyset}$$

(xix)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in I}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in J}$$

provided $I \subset J$

Reglas de inferencia: Reglas derivadas

(xx)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\beta \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^{0}\ v]}$$

provided $y \geqslant 1-v$

(xxi)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\beta \mid \delta) \in [1-v\ \lfloor y+1-u \rfloor_{1}]}$$

provided $x \leqslant v$

(xxii)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^{0}\ \min(y,v)]}$$

(xxiii)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \rightarrow \beta \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\alpha \rightarrow \gamma \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^{0}\ \min(y,v)]}$$

(xxiv)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\gamma \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\beta \wedge \gamma \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [\max(x,u)\ \lfloor y+v \rfloor_{1}]}$$

(xxv)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^{0}\ \min(y,v)]}$$

Reglas de inferencia: Independencia

(xxxiii)

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x \; y] \\
\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u \; v] \\
\mathsf{Indep}(\alpha, \delta, \beta) \\
\hline
\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x \cdot u \;\; y \cdot v]
\end{array}
$$

(xxxiv)

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x \; y] \\
\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [u \; v] \\
\mathsf{Indep}(\alpha, \delta, \beta) \\
\hline
\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u/y \;\; \lfloor v/x \rfloor_1]
\end{array}
$$

(xxxv)

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x \; y] \\
\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u \; v] \\
\mathsf{Indep}(\alpha, \delta, \beta) \\
\hline
\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x + u - x \cdot u \;\;\; y + v - y \cdot v]
\end{array}
$$

(xxxvi)

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x \; y] \\
\boldsymbol{P}(\alpha \vee \beta \mid \delta) \in [u \; v] \\
\mathsf{Indep}(\alpha, \delta, \beta) \\
\hline
\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [\lceil (u - y)/(1 - y) \rceil^0 \\
\qquad\qquad\qquad (v - x)/(1 - x)]
\end{array}
$$

(xxxvii)

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{Indep}(\alpha, \delta, \beta) \\
\hline
\mathsf{Indep}(\beta, \delta, \alpha)
\end{array}
$$

(xxxviii)

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{Indep}(\alpha, \delta, \gamma) \\
\hline
\mathsf{Indep}(\beta, \delta \gamma)
\end{array}
$$

provided α and β are equivalent

Reglas de inferencia: Reglas derivadas

(xxvi)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ 1]}$$

(xxvii)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \vee \beta \mid \delta) \in [\max(x,u)\ \lfloor y+v \rfloor_1]}$$

(xxviii)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \vee \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [0\ y]}$$

(xxix)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\alpha \wedge \neg\beta \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x+u\ \lfloor y+v \rfloor_1]}$$

provided $v \leqslant 1-x,\ y \leqslant 1-u$

(xxx)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [x\ y]}$$

provided β logically equivalent to α

(xxxi)

$$\frac{}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [0\ 0]}$$

provided α is unsatisfiable

(xxxii)

$$\frac{}{\boldsymbol{P}(T \mid \delta) \in [1\ 1]}$$

Ejemplo: Encontrar un intervalo para A ∧ D

$\boldsymbol{P}(B \rightarrow A) \in [.9\ 1]$,

$\boldsymbol{P}(D \rightarrow B) \in [.8\ .9]$,

$\boldsymbol{P}(A \rightarrow C) \in [.6\ .8]$,

$\boldsymbol{P}(D) \in [.8\ 1]$,

$\boldsymbol{P}(C) \in [.2\ .4]$.

(xxi)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [1-v\ \lfloor y+1-u \rfloor_1]}$$

provided $x \leqslant v$

(xxii)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxv)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxvi)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ 1]}$$

Ejemplo: Encontrar un intervalo para A ∧ D

$\boldsymbol{P}(B \rightarrow A) \in [.9\ 1],$

$\boldsymbol{P}(D \rightarrow B) \in [.8\ .9],$

$\boxed{\boldsymbol{P}(A \rightarrow C) \in [.6\ .8],}$

$\boldsymbol{P}(D) \in [.8\ 1],$

$\boxed{\boldsymbol{P}(C) \in [.2\ .4].}$

$\boxed{\boldsymbol{P}(A) \in [.2\ .8]}$

(xxi)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [1-v\ \lfloor y+1-u \rfloor_1]}$$

provided $x \leqslant v$

(xxii)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxv)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxvi)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ 1]}$$

Ejemplo: Encontrar un intervalo para A ∧ D

$\boldsymbol{P}(B \rightarrow A) \in [.9\ 1]$,

$\boldsymbol{P}(D \rightarrow B) \in [.8\ .9]$,

$\boldsymbol{P}(A \rightarrow C) \in [.6\ .8]$,

$\boxed{\boldsymbol{P}(D) \in [.8\ 1],}$

$\boldsymbol{P}(C) \in [.2\ .4]$.

$\boxed{\boldsymbol{P}(A) \in [.2\ .8]}$

$\boxed{\boldsymbol{P}(A \wedge D) \in [0\ .8]}$

(xxi)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [1-v\ \lfloor y+1-u \rfloor_1]}$$

provided $x \leqslant v$

(xxii)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \rightarrow \alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxv)

$$\boxed{\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ \boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}}$$

(xxvi)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ 1]}$$

Ejemplo: Encontrar un intervalo para A ∧ D

$\boldsymbol{P}(B \to A) \in [.9\ 1]$,

$\boxed{\boldsymbol{P}(D \to B) \in [.8\ .9]}$,

$\boldsymbol{P}(A \to C) \in [.6\ .8]$,

$\boxed{\boldsymbol{P}(D) \in [.8\ 1]}$,

$\boldsymbol{P}(C) \in [.2\ .4]$.

$\boldsymbol{P}(A) \in [.2\ .8]$

$\boldsymbol{P}(A \wedge D) \in [0\ .8]$

$\boxed{\boldsymbol{P}(B \wedge D) \in [.6\ .9]}$

(xxi)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y]\\ \boldsymbol{P}(\beta \to \alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [1-v\ \lfloor y+1-u \rfloor_1]}$$

provided $x \leqslant v$

(xxii)

$$\boxed{\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [x\ y]\\ \boldsymbol{P}(\beta \to \alpha \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}}$$

(xxv)

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y]\\ \boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u\ v]\end{array}}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxvi)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ 1]}$$

Ejemplo: Encontrar un intervalo para A ∧ D

$\boxed{P(B \to A) \in [.9\ 1],}$

$P(D \to B) \in [.8\ .9],$

$P(A \to C) \in [.6\ .8],$

$P(D) \in [.8\ 1],$

$P(C) \in [.2\ .4].$

$P(A) \in [.2\ .8]$

$P(A \wedge D) \in [0\ .8]$

$\boxed{P(B \wedge D) \in [.6\ .9]}$

$\boxed{P(A \wedge B \wedge D) \in [.5\ .9]}$

(xxi)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \to \alpha \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\beta \mid \delta) \in [1-v\ \lfloor y+1-u \rfloor_1]}$$

provided $x \leqslant v$

(xxii)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \to \alpha \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxv)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxvi)

$$\frac{P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{P(\alpha \mid \delta) \in [x\ 1]}$$

Ejemplo: Encontrar un intervalo para A ∧ D

$P(B \to A) \in [.9\ 1]$,

$P(D \to B) \in [.8\ .9]$,

$P(A \to C) \in [.6\ .8]$,

$P(D) \in [.8\ 1]$,

$P(C) \in [.2\ .4]$.

$P(A) \in [.2\ .8]$

$P(A \wedge D) \in [0\ .8]$

$P(B \wedge D) \in [.6\ .9]$

$\boxed{P(A \wedge B \wedge D) \in [.5\ .9]}$

$\boxed{P(A \wedge D) \in [.5\ 1]}$

(xxi)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \to \alpha \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\beta \mid \delta) \in [1-v\ \lfloor y+1-u \rfloor_1]}$$

provided $x \leqslant v$

(xxii)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \to \alpha \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxv)

$$\frac{\begin{array}{l} P(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \\ P(\beta \mid \delta) \in [u\ v] \end{array}}{P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y, v)]}$$

(xxvi)

$$\boxed{\frac{P(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{P(\alpha \mid \delta) \in [x\ 1]}}$$

Ejemplo: Encontrar un intervalo para A ∧ D

$\boldsymbol{P}(B \to A) \in [.9\ 1]$,

$\boldsymbol{P}(D \to B) \in [.8\ .9]$,

$\boldsymbol{P}(A \to C) \in [.6\ .8]$,

$\boldsymbol{P}(D) \in [.8\ 1]$,

$\boldsymbol{P}(C) \in [.2\ .4]$.

$\boldsymbol{P}(A) \in [.2\ .8]$

$\boxed{\boldsymbol{P}(A \wedge D) \in [0\ .8]}$

$\boldsymbol{P}(B \wedge D) \in [.6\ .9]$

$\boldsymbol{P}(A \wedge B \wedge D) \in [.5\ .9]$

$\boxed{\boldsymbol{P}(A \wedge D) \in [.5\ 1]}$

(xxi)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \qquad \boldsymbol{P}(\beta \to \alpha \mid \delta) \in [u\ v]}{\boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [1-v\ \lfloor y+1-u \rfloor_1]}$$

provided $x \leqslant v$

(xxii)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [x\ y] \qquad \boldsymbol{P}(\beta \to \alpha \mid \delta) \in [u\ v]}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y,v)]}$$

(xxv)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ y] \qquad \boldsymbol{P}(\beta \mid \delta) \in [u\ v]}{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [\lceil x+u-1 \rceil^0\ \min(y,v)]}$$

(xxvi)

$$\frac{\boldsymbol{P}(\alpha \wedge \beta \mid \delta) \in [x\ y]}{\boldsymbol{P}(\alpha \mid \delta) \in [x\ 1]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{P}(A \wedge D) \in [.5\ .8]}$$

Problemas tipo A y tipo B

Son casos particulares en que no se consideran probabilidades condicionales.

Tipo A

- **Las implicaciones toman probabilidad 1.**
- **La conclusión es la probabilidad de una proposición atómica de $\mathcal{L}_{pro}$**
- **Es un método de deducción completo con las reglas xx, xxi, xvi y xvii**

Tipo B

- **La conclusión es la probabilidad de una conjunción de proposiciones atómica de $\mathcal{L}_{pro.}$**
- **Se conjetura completo con las reglas xx a xxvi, xvi y xvii**

Conclusiones

- Frisch y Haddawy logran definir reglas de inferencia para lograr acotar los intervalos posibles.
- Se puede tener soluciones intermedias en tiempo razonable.
- Para problemas de tipo A el método de deducción es completo (todo lo que es verdadero se puede deducir).