Cómputo Distribuido - Tarea 1

Dalia Camacho, Gabriela Vargas

Enero 2019

Pregunta 1

Demuestra que los enteros son numerables

Demostración. Proponemos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, donde $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & x \ impar \\ \frac{-x}{2}, & x \ par. \end{cases}$

Si f es inyectiva y suprayectiva, entonces el conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$, es numerable.

Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$, entonces tenemos los siguientes casos:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - 1}{2} &= \frac{x_2 - 1}{2} \\ x_1 &= x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{-x_1}{2} &= \frac{-x_2}{2} \\ x_1 = x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{-x_2}{2} x_1 + x_2 = 1 \tag{3}$$

En el primer y segundo caso se tiene que para que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. En el tercer caso no existen $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 + x_2 = 1$, por lo que sólo pueden ocurrir los primeros dos casos. Con esto se tiene que f es inyectiva.

Ahora mostramos que $f(x)$ es suprayectiva. Para $y \in \mathbb{Z}$ tenemos tres casos, cuando $y = 0$, $y > 0$ y $y < 0$. Si y es igual a cero entonces existe $x = 1$ tal que $(1-1)/2 = 0$, si $y > 0$ existe $x \in \mathbb{N}$, donde $x = 2y - 1$ tal que $(2y - 1 + 1)/2 = y$ y por último si $y < 0$ existe $x \in \mathbb{N}$, donde $x = -2y$ tal que $-(-2y)/2 = y$. Por lo tanto $f(x)$ es suprayectiva.

Como $f(x) : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z}$ es inyectiva y suprayectiva entonces existe al menos una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$ y por lo tanto es numerable.

□

Demuestra que los números racionales son numerables[1]

Demostración. Consideremos el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ y el siguiente arreglo, donde a partir de la segunda fila, la la fila i corresponde a la enumeración de todos los números naturales divididos entre $i-1$.

$$
\begin{array}{llllll}
0 \\
\frac{\pm 1}{1} & \frac{\pm 2}{1} & \frac{\pm 2}{1} & \frac{\pm 3}{1} & \frac{\pm 4}{1} & \frac{\pm 5}{1} \dots \\
\frac{\pm 1}{2} & \frac{\pm 2}{2} & \frac{\pm 2}{2} & \frac{\pm 3}{2} & \frac{\pm 4}{2} & \frac{\pm 5}{2} \dots \\
\frac{\pm 1}{3} & \frac{\pm 2}{3} & \frac{\pm 2}{3} & \frac{\pm 3}{3} & \frac{\pm 4}{3} & \frac{\pm 5}{3} \dots \\
\frac{\pm 1}{4} & \frac{\pm 2}{4} & \frac{\pm 2}{4} & \frac{\pm 3}{4} & \frac{\pm 4}{4} & \frac{\pm 5}{4} \dots \\
\frac{\pm 1}{5} & \frac{\pm 2}{5} & \frac{\pm 2}{5} & \frac{\pm 3}{5} & \frac{\pm 4}{5} & \frac{\pm 5}{5} \dots \\
\vdots
\end{array}
$$

Este arreglo contiene todos los posibles valores de $\mathbb{Q}$ y representaciones repetidas. Para hacer la enumeración (o función biyectiva de $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}$) se hace lo siguiente:

- Se inicia con el cero
- Se van enumerando los valores de acuerdo al valor de la suma del valor absoluto del numerador con el denominador .
- Si el número siguiente tiene factores comunes nos saltamos al número siguiente.

La enumeración queda de la siguiente forma:

1. 0
2. 1
3. -1
4. 2
5. -2
6. $\frac{1}{2}$
7. $\frac{-1}{2}$
8. 3
9. -3

[1]La demostración fue tomada de `https://www.youtube.com/watch?v=Q6xe0IPMFeM`

10. $\frac{1}{3}$ (Notemos que nos saltamos el $\frac{2}{2} = 1$, ya que ya teníamos el 1)
11. $\frac{-1}{3}$

$\vdots$

Esta forma de enumerar $\mathbb{Q}$ es suprayectiva ya que todo $q \in \mathbb{Q}$ está dentro de la numeración. Además esta forma de enumerar es inyectiva ya que nos saltamos las representaciones de los racionales con factores comunes, por lo que no se enumera dos veces al mismo racional. Por lo tanto esta forma de enumerar $\mathbb{Q}$ es una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$. Por lo tanto $\mathbb{Q}$ es numerable. $\square$

Demuestra que los números reales no son numerables [2]

Demostración. El argumento de diagonalización de Cantor plantea que no existe una relación de correspondencia uno a uno entre el conjunto de numeros naturales $\mathbb{N}$ y el conjunto de números reales $\mathbb{R}$, por lo que la cardinalidad de los números naturales será menor que la de los números reales.

Esta demostración se hace por contradicción. Por ello, suponemos que $\mathbb{R}$ es numerable, lo que implica encontrar una relación uno a uno entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$.

Ahora, suponemos que el conjunto $(0, 1) \in \mathbb{R}$ es numerable y que existe una relación biyectiva $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ elementos pertenecientes al intervalo $(0, 1)$, asociamos un número natural con cada uno de estos elementos.

$$\begin{aligned}
0 \to a_0 \quad &= 0.a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}a_{0,3}a_{0,4}\ldots \\
1 \to a_1 \quad &= 0.a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\ldots \\
2 \to a_2 \quad &= 0.a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\ldots \\
3 \to a_3 \quad &= 0.a_{3,0}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\ldots \\
4 \to a_4 \quad &= 0.a_{4,0}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\ldots \\
\vdots \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned} \tag{4}$$

Queremos encontrar un número perteneciente a $(0, 1)$ para el que no existe mapeo con un número natural. Para ello, consideramos a_0, nos quedamos con su primer decimal y le sumamos 1 obteniendo un nuevo número $b_0 = a_{0,0} + 1$; de forma similar, tomamos a_1, tomamos su segundo decimal y le sumamos 1 obteniendo $b_1 = a_{1,1} + 1$. Continuamos con los siguientes elementos donde $b_n = 0$ solo en el caso de que $a_{n,n} = 9$ obteniendo el número $b = 0.b_0b_1b_2b_3b_4\ldots$

De esta forma, b no correspondería con ningún número natural, ya que difiere con los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ en al menos un decimal (elementos de la diagonal) y por lo tanto $(0, 1) \in \mathbb{R}$ no es numerable. $\square$

[2] Ideas para la demostración tomadas de `http://www.math.cmu.edu/~wgunther/127m12/notes/CSB.pdf` y `https://www.gaussianos.com/la-diagonalizacion-de-cantor/`

Desmuestra que el conjunto de máquinas de Turing es numerable [3]

Demostración. La idea es encontrar una relación de correspondencia uno a uno entre el conjunto de máquinas de Turing y el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$.

Consideremos que una máquina de Turing puede ser descrita por una cadena de símbolos definidos en un alfabeto Σ y dada una longitud de cadena k existen $\mid \Sigma \mid^k$ cadenas diferentes para definir esta máquina. De igual forma, existen $\mid \Sigma \mid^k$ máquinas de Turing descritas por una cadena de símbolos con longitud k definidos en un alfabeto Σ.

Al existir una relación uno a uno entre el conjunto de cadenas $\mid \Sigma \mid^k$ y el conjunto de número naturales $\mathbb{N}$ también existe una relación uno a uno con el conjunto de máquinas de Turing descrito por esas cadenas, y por lo tanto, el conjunto de máquinas de Turing es numerable.

□

Demuestra que el conjunto de problemas (o lenguajes) es no numerable [4]

Demostración. Supongamos que el conjunto de lenguajes $\mathbb{L}$ sobre $\Sigma \in \{0,1\}$ es numerable por lo tanto los podemos tener la siguiente enumeración. Cada fila corresponde a un lenguaje y cada columna a una cadena cuyos caracteres pertenecen a Σ. Notemos que todas las cadenas son finitas y que el conjunto con todas las cadenas es numerable. Para el lenguaje L_i y la cadena s_j al arreglo le asignamos un uno si $s_j \in L_i$ o un cero en caso contrario, por ejemplo:

$$\begin{array}{cccccc}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \dots \\
L_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \dots \\
L_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \dots \\
L_3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \dots \\
L_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots \\
L_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \dots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Supongamos que el arreglo anterior contiene todos los lenguajes sobre Σ, consideremos el lenguaje L_k de la siguiente forma $s_j \in L_k \Leftrightarrow s_j \notin L_j, \ \forall j \in \mathbb{N}$. Con esto tenemos que L_k es distinto a todos los lenguajes numerados previamente. Por lo tanto llegamos a la contradicción de que existe una forma de enumerar los lenguajes y no existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{L}$. Por lo tanto el conjunto de lenguajes $\mathbb{L}$ es no numerable. □

[3] Ideas para la demostración tomadas de `https://www.youtube.com/watch?v=wD8RgGi-Jig` y Viso, Elisa. Introducción a la Teoría de la Computación. UNAM, 2008.

[4] Idea de la demostración tomada de `https://www.youtube.com/watch?v=Cus7aiA23nU`.

Resumen de la clase

Para establecer el área en que se enfoca el curso, se iniciió con la historia de las computadoras. Una computadora es una máquina que resuleve uno o varios problemas. En un inicio las computadoras estaban enfocadas en un único objetivo y estaban construidas con materiales distintos tales como la madera, el metal, electromecánicas o con electro imanes. Cada una tenía un propósito y un nombre distinto. Incluso el cerebro humano es considerado una computadora ya que puede solucionar problemas distintos.

Sin embargo la ciencia de la computación no estudia las computadoras, si no la resolución de problemas con un procedimiento algorítmico haciendo uso de las computadoras y con la capacidad de abstraer los distintos niveles en que puede encontrarse un problema. La ciencia de la computación inició en 1936 cuando Alan Turing definió la computadora universal, conocida como máquina de Turing, de forma teórica.

Una máquina de Turing consiste en un conjunto finito de estados, una banda no acotada (o infinita) dividida en una cuadrícula en la que se pueden leer o escribir símbolos de un alfabeto finito Σ, una cabeza de lectura y escritura y una función que determina el cambio de estado, el símbolo de Σ a escribir y el movimiento a la izquierda o a la derecha a partir del estado actual y el símbolo observado.

El conjunto de máquinas de Turing es infinito y numerable, sin embargo el número de problemas es no numerable, por lo tanto existe un conjunto infinito no numerable de problemas que no pueden ser resueltos con una computadora. Ejemplos de problemas que no pueden ser resueltos con una computadora son el problema de paro y el poder debuggear un programa. Además determinar qué problemas no pueden resolverse es a su vez un problema que no se puede resolver.

El problema no es únicamente si existe una computadora capaz de resolver un problema, si no el tiempo en que se resuelve, ya que problemas de la clase exponencial no pueden resolverse en un tiempo razonable, incluso podría tomar más tiempo que la edad del universo en algunos casos.

Gran parte del avance en las computadoras fue incrementar su velocidad hasta que se llegó a un límite físico en el que se sobrecalientan las computadoras y ya no pueden hacerse más rápidas. A partir de esto surgió el cómputo en paralelo, el cuál permite dividir tareas entre distintas computadoras, sin embargo este enfoque está limitado a que no haya fallos y que todas las computadoras ejecuten las cosas en un tiempo similar. Si una computadora es más lenta, entonces las otras deben esperar y si una falla todo el proceso falla. Esto dio lugar al cómputo distribuido que da soluciones ante fallos, fallas malignas y distintos tiempos de ejecución, se tiene que trabajar con la incertidumbre y con una comunicación imperfecta. Esto tiene una naturaleza topológica deformable. El cómputo distribuido está relacionado con la comunicación de perspectivas distintas, y se trata de llegar a una mejor solución dado que no hay una verdad absoluta.

Como ejemplo vimos el two-phase commit donde se realiza una transacción distribuida, es decir los componentes se encuentran en lugares distintos. Hay una transacción global T con componentes locales T_i, donde T_0 es el coordinador o master. T_0 envía un mensaje a los demás T_i's preguntando por su inventario y espera su respuesta, las T_i's envían información sobre su inventario a T_0, T_0 hace un cálculo local sobre las transacciones necesarias, T_0 envía las insstrucciones de la transacción a las distintas T_i's si todas las T_i's responden y están de acuerdo se realiza la transacción, en otro caso se aborta la transacción. En este protocolo se pueden observar distintos problemas que pueden surgir si una de las T_i's falla, si T_0 falla, o si la comunicación falla.