

EJEMPLOS DE PRUEBAS

Ejercicio 1. Hallar una prueba de $\emptyset \vdash (\neg\neg\rho \rightarrow \rho)$.

Demostración. Por el Teorema de Deducción, lo que nos piden equivale a probar

$$\{\neg\neg\rho\} \vdash \rho$$

- 1) $(\neg\neg\rho \rightarrow (\neg\rho \rightarrow \neg\neg\rho))$ (AX1)
- 2) $\neg\neg\rho$ (Hip)
- 3) $(\neg\rho \rightarrow \neg\neg\rho)$ (MP 1 y 2)
- 4) $((\neg\rho \rightarrow \neg\neg\rho) \rightarrow ((\neg\rho \rightarrow \neg\rho) \rightarrow \rho))$ (AX3)
- 5) $((\neg\rho \rightarrow \neg\rho) \rightarrow \rho)$ (MP 3 y 4)
- 6) $(\neg\rho \rightarrow \neg\rho)$ (Probado en la teoría)
- 7) ρ (MP 5 y 6)

□

Ejercicio 2. Hallar una prueba de $\emptyset \vdash ((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$.

Demostración. Por el Teorema de la Deducción, lo que nos piden equivale a probar

$$\{(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha), \alpha\} \vdash \beta$$

- 1) $((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta))$. (AX3)
- 2) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$. (Hip)
- 3) $(\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$. (MP 1 y 2)
- 4) $\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$ (AX1)
- 5) α (Hip)
- 6) $(\neg\beta \rightarrow \alpha)$ (MP 4 y 5)
- 7) β (MP 3 y 6)

□

Ejercicio 3. Hallar una prueba de $\emptyset \vdash (\neg\neg\neg\rho \rightarrow \neg\rho)$.

Demostración. Por el Teorema de la Deducción, lo que nos piden equivale a probar

$$\{\neg\neg\neg\rho\} \vdash \neg\rho$$

- 1) $(\neg\neg\neg\rho \rightarrow (\neg\neg\rho \rightarrow \neg\neg\neg\rho))$. (AX1)
- 2) $\neg\neg\neg\rho$ (Hip)
- 3) $(\neg\neg\rho \rightarrow \neg\neg\neg\rho)$ (MP 1 y 2)
- 4) $((\neg\neg\rho \rightarrow \neg\neg\neg\rho) \rightarrow ((\neg\neg\rho \rightarrow \neg\neg\rho) \rightarrow \neg\rho))$ (AX3)
- 5) $(\neg\neg\rho \rightarrow \neg\neg\rho) \rightarrow \neg\rho$ (MP 3 y 4)
- 6) $(\neg\neg\rho \rightarrow \neg\neg\rho)$ (Probado en la teoría)
- 7) $\neg\rho$ (MP 5 y 6)

□

Ejercicio 4. Hallar una prueba de $\emptyset \vdash (\rho \rightarrow \neg\neg\rho)$.

Demostración. .

- 1) $(\neg\neg\rho \rightarrow \neg\rho)$ (Probado en (3))
- 2) $((\neg\neg\rho \rightarrow \neg\rho) \rightarrow (\rho \rightarrow \neg\neg\rho))$ (Probado en el ejercicio (2))
- 3) $(\rho \rightarrow \neg\neg\rho)$ (MP 1 y 2). □

Ejercicio 5. Hallar una prueba de $\emptyset \vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta))$

Demostración. Por el Teorema de la Deducción, lo que nos piden equivale a probar:

$$\{(\alpha \rightarrow \beta), \neg\neg\alpha\}$$

- 1) $(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ (Probado en el ejercicio (1)).
- 2) $\neg\neg\alpha$ (Hip)
- 3) α (MP 1 y 2)
- 4) $(\alpha \rightarrow \beta)$ (Hip)
- 5) β (MP 3 y 4)
- 6) $(\beta \rightarrow \neg\neg\beta)$ (Probado en el ejercicio (4)).
- 7) $\neg\neg\beta$ (MP 5 y 6) □

Ejercicio 6. Hallar una prueba de $\emptyset \vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha))$.

Demostración. Por el Teorema de la Deducción, lo que nos piden equivale a probar

$$\{(\alpha \rightarrow \beta), \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$$

- 1) $((\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))$ (AX3)
- 2) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta))$ (Probado en ejercicio (5)).
- 3) $(\alpha \rightarrow \beta)$ (Hip)
- 4) $(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta)$ (MP 2 y 3)
- 5) $((\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ (MP 4 y 1)
- 6) $(\neg\beta \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta))$ (AX1)
- 7) $\neg\beta$ (Hip)
- 8) $(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$ (MP 6 y 7)
- 9) $\neg\alpha$ (MP 5 y 8) □

Ejercicio 7. Probar que si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Demostración. Como $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, existe ψ tal que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$, por lo tanto por el Teorema de la Deducción:

$$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \quad y \quad \Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

- 1) $((\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow ((\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi))$ (AX3)
- 2) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi))$ (Probado en el ejercicio (5))
- 3) $(\varphi \rightarrow \psi)$ (Dato)
- 4) $(\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ (MP 2 y 3)
- 5) $((\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$ (MP 1 y 4)
- 6) $((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi))$ (Hecho en la práctica).
- 7) $(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (Dato)
- 8) $(\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (MP 6 y 7)
- 9) $\neg\varphi$ (MP 5 y 8)

□