

Errores Comunes(Practicas 1 y 2)

A continuación se detallan una serie de errores que son muy comunes de cometer. En cada uno de los distintos ejercicios, primero se intentara resolver el problema en forma errónea (letra itálica), luego se analizará por qué está mal la resolución y finalmente se dará una recomendación para encarar el ejercicio de forma correcta.

Es importante que antes de leer el análisis del error, se piense por qué está mal la resolución.

Los ejercicios se realizan con el propósito de marcar los errores, no deben ser tomados como modelo de resolución.

Errores de Practica 1: Cardinalidad

Ejercicio 3. Inciso 3.: Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos numerables. Probar que $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es numerable.

Solución errónea: se realiza el ejercicio mediante el uso de inducción en la variable m .

Análisis de error: el error se encuentra en que la unión que plantea el ejercicio es una unión de infinitos conjuntos, y NO de un número finito de ellos. Al realizar inducción se está probando algo totalmente distinto que es: “La unión finita de conjuntos numerables es numerable”. Es importante que quede clara la diferencia entre el enunciado original y el citado anteriormente.

Recomendación: una forma posible para encarar el ejercicio es: como los conjuntos son numerables por hipótesis, y la unión es numerable, se puede pensar en 2 índices uno para indicar el conjunto y otro para indicar un elemento dentro de este. Con la idea anterior se puede pensar en armar una función entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y S .

Ejercicio 10.7: Demostrar que $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} = \mathbb{C}$.

Otra forma de enunciar el problema sería: Demostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es coordinable con \mathbb{R} .

Solución errónea: ya habiendo probado que $\# \mathbb{R} \leq \#(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, solo queda probar la “otra” desigualdad, para luego utilizar el teorema de Bernstein. Entonces, teniendo en mente la prueba de “ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ” realizada en la clase, se define la siguiente función:

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y) = 2^{|x|} \cdot 3^{|y|} \cdot 5^{\alpha(x)} \cdot 7^{\alpha(y)}$$

$$\text{siendo } \alpha: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \mid \alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Como se puede ver la función está correctamente definida, entonces se pasa a la prueba de inyectividad:

$$\begin{aligned} f(a, b) = f(c, d) &\rightarrow 2^{|a|} \cdot 3^{|b|} \cdot 5^{\alpha(a)} \cdot 7^{\alpha(b)} = 2^{|c|} \cdot 3^{|d|} \cdot 5^{\alpha(c)} \cdot 7^{\alpha(d)} \xrightarrow{TFA} \\ &\rightarrow |a| = |c| \text{ y } |b| = |d| \text{ y } \alpha(a) = \alpha(c) \text{ y } \alpha(b) = \alpha(d) \rightarrow (a, b) = (c, d) \end{aligned}$$

Análisis del error: el error se encuentra en la aplicación del TFA(Teorema Fundamental de la Aritmética) para los números reales. Para aquellos que todavía tengan dudas acerca de la inyectividad propongo el siguiente ejemplo que muestra que la función f NO ES inyectiva:

$$\text{Sean } (a, b) = (\log_2 3, \log_3 2) \text{ y } (c, d) = (\log_2 2, \log_3 3) \text{ notemos que } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\text{es facil ver que } f(a, b) = 6 \text{ y } f(c, d) = 6 \text{ y } (a, b) \neq (c, d)$$

Queda demostrado que f **NO ES** inyectiva!!

Recomendación: una forma de encarar el problema es utilizando la prueba realizada en clase de $(0,1) \times (0,1) \sim (0,1)$. Con lo anterior y sabiendo que (o probándolo) $(0,1) \sim \mathbb{R}$ queda demostrado.

Errores de Practica 2: Calculo Proposicional

Ejercicio 10: Sea α **una formula**. Probar que $\#s(\alpha) \leq c(\alpha) + \#VarR(\alpha)$

En el caso de este ejercicio, el error no se encuentra en el método de resolución: este ejercicio se puede resolver utilizando inducción en $c(\alpha)$. A continuación se realiza la prueba:

Caso base) $c(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = p_i \in \text{Var}$. Entonces, $\#s(\alpha) = 1$, $c(\alpha) = 0$ y $\#VarR(\alpha) = 1$. Por lo tanto queda probado el predicado.

Hipótesis Inductiva) $\#s(\alpha) \leq c(\alpha) + \#VarR(\alpha)$; $\alpha \in \text{Form}$ y $c(\alpha) \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Tesis Inductiva) $c(\alpha) = n + 1$. Aclaración: la tesis se realizara sobre el caso $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ con el objetivo de mostrar el error en la resolución.

Para el caso aclarado anteriormente se cumple:

$$n + 1 = c(\alpha) = \frac{c(\beta)}{\geq 0} + \frac{c(\gamma)}{\geq 0} + 1 \rightarrow c(\beta) \leq n \text{ y } c(\gamma) \leq n \text{ y } \alpha, \beta \in \text{Form} \xrightarrow{\text{HI}} \text{se cumple que:}$$

$$\#s(\beta) \leq c(\beta) + \#VarR(\beta)$$

$$\#s(\gamma) \leq c(\gamma) + \#VarR(\gamma)$$

Sumando miembro a miembro de ambas desigualdades se obtiene:

$$\#s(\beta) + \#s(\gamma) \leq c(\beta) + c(\gamma) + \#VarR(\beta) + \#VarR(\gamma)$$

Con la expresión anterior y usando que $\#VarR(\alpha) = \#VarR(\beta) + \#VarR(\gamma)$ y que $c(\alpha) = c(\beta) + c(\gamma) + 1$, se obtiene:

$$\#s(\beta) + \#s(\gamma) \leq c(\alpha) - 1 + \#VarR(\alpha)$$

Por último y AQUÍ ES DONDE ESTA EL ERROR se utiliza la siguiente expresión:

$$\#s(\alpha) = \#s(\beta) + \#s(\gamma) + 1.$$

Reemplazando esto último en la expresión anterior se completa la prueba **ERRONEA**.

Análisis del error: el error, como fue mencionado anteriormente se encuentra en la expresión:

$\#s(\alpha) = \#s(\beta) + \#s(\gamma) + 1$. Esta expresión es incorrecta pues los conjuntos $s(\beta)$ y $s(\gamma)$ podrían no ser disjuntos, por lo que habría subformulas que estarían siendo “contadas” 2 veces. A continuación un ejemplo:

Sea $\alpha = (p_1 \wedge p_1)$, el conjunto $s(\alpha) = \{p_1, \alpha\}$ y $\#s(\alpha) = 2$. Sin embargo si se realizara la cuenta con la expresión anterior se hubiera llegado a:

$$\#s(\alpha) = \#s(p_1) + \#s(p_1) + 1 = 3!!!$$

Recomendación: para realizar el ejercicio es suficiente el uso de la siguiente desigualdad:

$\#s(\alpha) \leq \#s(\beta) + \#s(\gamma) + 1$ cuya validez queda demostrada por la propia definición del conjunto de subformulas:

$$s(\beta \wedge \gamma) = \{\alpha\} \cup s(\beta) \cup s(\gamma)$$

En el ejercicio 9.2 sucede algo similar, es importante realizar ambos ejercicios para que quede claro el concepto.