ÁLEGEBRA DE BOOLE

Definición. Álgebra de Boole

Un álgebra de Boole B es un conjunto B en el cual se pueden distinguir dos elementos notados 0 y 1, y hay tres operaciones: $\vee$, $\wedge$ y $\neg$, que verifican las siguientes propiedades:

1. Conmutatividad:
   $x \wedge y = y \wedge x$
   $x \vee y = y \vee x$
2. Asociatividad:
   $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
   $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
3. Idempotencia:
   $x \vee x = x$
   $x \wedge x = x$
4. Absorción:
   $x \wedge (x \vee y) = x$
   $x \vee (x \wedge y) = x$
5. Distributividad doble:
   $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
   $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
6. Elemento neutro:
   $x \vee 0 = x$
   $x \wedge 1 = x$
7. Elemento absorvente:
   $x \wedge 0 = 0$
   $x \vee 1 = 1$
8. Complementación:
   $x \vee \neg x = 1$
   $x \wedge \neg x = 0$

Ejemplos.

1. E conjunto no vacío.

   $$B =< P(E), \wedge = \cap, \vee = \cup, \neg = complemento\, de\, conjuntos, 0 = \emptyset, 1 = E >$$

2. $B =< \{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 >$

Propiedad. Propiedad fundamental de un Álgebra de Boole

Sea $B =< B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 >$ un álgebra de Boole cualquiera:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$$

Notas:

1. La relación $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
2. $0 \leq x \leq 1 \ \forall x \in B$

Definición. Álgebra de Boole de Lindembaum para el cálculo proposicional

Sea F = *conjunto de fórmulas de la lógica proposicional.*

$$\alpha \, R \, \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$$

Nota: R es una relación de equivalencia.

Álgebra de Boole de Lindembaum.

$$B =< F/R, \, \underline{\wedge}, \, \underline{\vee}, \, \underline{\neg}, \, 0 \, = \, [p_1 \wedge \neg o_1], \, 1 \, = \, [p_1 \vee \neg p_1] >$$

donde para $[\alpha]$ y $[\beta] \in F/R$, $\underline{\wedge}$, $\underline{\vee}$ y $\underline{\neg}$ se definen de la siguiente manera:

1. $[\alpha]\underline{\wedge}[\beta] = [\alpha \wedge \beta]$
2. $[\alpha]\underline{\vee}[\beta] = [\alpha \vee \beta]$
3. $\underline{\neg}[\alpha] = [\neg\alpha]$

Nota: B es un álgebra de Boole.

Ejemplo de clase.

$$[p_1] = \{p_1, (p_1 \wedge p_1), (p_1 \vee p_1), ...\} = \{\alpha \in F/\alpha \equiv p_1\}$$