Primeira Avaliação - Análise na Reta

Daniel Alves de Lima

Questão 1. *Óbvio que* $(1+r)^1 \geq 1+r$. *Suponhamos por hipótese que vale* $(1+r)^n \geq 1+nr+n(n-1)\frac{r^2}{2}$. *Segue que,* $(1+r)^{n+1} \geq (1+nr+n(n-1)\frac{r^2}{2})(1+r) = 1+nr+n(n-1)\frac{r^2}{2}+r+nr^2+n(n-1)\frac{r^3}{2} = 1+(n+1)r+(n+1)n\frac{r^2}{2}+n(n-1)\frac{r^3}{2} \geq 1+(n+1)r+(n+1)n\frac{r^2}{2}$. *Logo, a hipótese vale para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Questão 2. *Pondo* $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ *(note que* $x_n \geq 0$*), segue que* $n = (1+x_n)^n > n(n-1)\frac{x_n^2}{2} \implies \frac{2}{n-1} > x_n^2$, *ou seja,* $\sqrt{\frac{2}{n-1}} > x_n$. *Então, tem-se* $\lim x_n = 0$, *e portanto,* $\lim \sqrt[n]{n} = 1 + \lim x_n = 1$.

Questão 3.

1. *Multiplicando por* c^n *em ambos os lados da primeira desigualdade, segue que* $(x_{n+1}/x_n)c^n \leq c^{n+1} \implies x_n/c^n \geq x_{n+1}/c^{n+1}$ *com* $x_{n_0+1}/c^{n_0+1} \geq x_n/c^n$ *para todo* $n > n_0$. *Portanto, esta subsequencia de* x_n/c^n *de índices* $n > n_0$ *é monótona, e, limitada inferiormente por* 0 *(pois seus termos são positivos) e pelo seu primeiro termo. Então, existe* $\lim x_{n+n_0}/c^{n+n_0}$, *que implica também existir* $\lim x_n/c^n$. *Sabendo que* $\lim c^n = 0$, *e por ser* $x_n = (x_n/c^n)c^n$, *podemos concluir* $\lim x_n = \lim(x_n/c^n)\lim c^n = 0$, *isto é,* $\lim x_n = 0$.

2. *Sejam* $c' = 1/c$ *e* $y_n = 1/x_n$. *Segue que* $(1/y_{n+1})/(1/y_n) \geq 1/c' > 1$ *implica* $0 < y_{n+1}/y_n \leq c' < 1$ *para todo* $n > n_0$. *Pelo o que foi provado no primeiro item, tem-se* $\lim y_n = 0$, *isto é,* $\lim 1/x_n = 0$. *Logo,* $\lim x_n = \infty$.

Questão 4.

1. *Seja* $b = sup\{x_n\}$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $b - \varepsilon < x_{n_0}$. *Segue que,* $n > n_0 \implies b-\varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq b < b+\varepsilon \implies |x_n - b| < \varepsilon$. *Logo,* $\lim x_n = b$.

2. *Vejamos, por indução, que* (x_n) *é não-decrescente. Simplesmente,* $2 < 2+\sqrt{2} \implies \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}}$, *isto é,* $x_1 < x_2$. *Suponhamos que vale* $x_n < x_{n+1}$. *Segue que,* $x_n+2 < x_{n+1}+2 \implies \sqrt{x_n+2} < \sqrt{x_{n+1}+2} \implies x_{n+1} < x_{n+2}$.

   Novamente por indução, vejamos que (x_n) *é limitada superiormente por* 2. *Temos que,* $\sqrt{2} < 2$, *isto é,* $x_1 < 2$. *Suponhamos que vale* $x_n < 2$. *Segue que,* $x_n + 2 < 4 \implies \sqrt{x_n+2} < 2 \implies x_{n+1} < 2$.

   Seja $b = sup\{x_n\}$, *pelo primeiro item tem-se* $\lim x_n = b$. *Então, segue que* $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \implies x_{n+1}^2 = 2 + x_n \implies (\lim x_n)^2 = 2 + \lim x_n \implies b^2 = 2+b$. *Como a sequencia é formada apenas por termos positivos (pois é limitada inferiormente por* $\sqrt{2}$*) e a equação* $b^2 - b - 2 = 0$ *possui soluções* $b = 2$ *ou* $b = -1$, *só pode ser* $\lim x_n = b = 2$.

Questão 5. *(a) Primeiramente, observe que* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \implies a^2+b^2 \geq 2ab \implies a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \implies (a+b)^2 \geq 4ab \implies \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. *Suponhamos que vale* $x_n \leq y_n$. *Segue que,* $y_n - x_n \geq 0 \implies (y_n - x_n)^2 \geq 0 \implies x_n^2 - 2x_ny_n + y_n^2 \geq 0 \implies x_n^2 + y_n^2 \geq 2x_ny_n \implies x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2 \geq 4x_ny_n \implies (x_n+y_n)^2 \geq 4x_ny_n \implies \dfrac{x_n+y_n}{2} \geq \sqrt{x_ny_n}$, *ou seja,* $x_{n+1} \leq y_{n+1}$.

(b) *Simplesmente,* $x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n} = \sqrt{x_n}\sqrt{\dfrac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}} \geq \sqrt{x_n}\sqrt{\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}} = \sqrt{x_n}\sqrt{x_n} = x_n$, *ou seja,* $x_{n+1} \geq x_n$. *Por (a), tem-se* $y_{n+1} = \dfrac{x_n+y_n}{2} \leq \dfrac{2y_n}{2} = y_n$. *As sequências são limitadas, pois* $\sqrt{ab} \leq x_n \leq y_n \leq \dfrac{a+b}{2}$.

(c) *Por (b), existem* $\lim x_n$ *e* $\lim y_n$. *Então, segue que* $\lim y_n = \dfrac{\lim x_n + \lim y_n}{2} \implies \lim y_n = \lim x_n$.

Questão 6. *Sabendo que* $\lim \sqrt[n]{n} = 1 < e/2$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \implies \sqrt[n]{n} < e/2 \implies \ln \sqrt[n]{n} < \ln(e/2) = 1 - \ln(2) < 1 \implies \dfrac{\ln n}{n} < 1 - \ln(2) < 1$. *Pelo teste da raiz, temos que* $\sum \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$ *converge.*

Questão 7. *Caso* $r \leq 1$: *Temos que* $n > n^r \implies \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n^r}$. *Pelo teste da comparação,* $\sum \dfrac{1}{n^r}$ *diverge. Caso* $r > 1$: *Como a sequência das reduzidas é monótona, para ver que esta sequência é limitada bastar mostrar que há uma subsequência limitada. Daí, sendo monótona e limitada, a sequencia das reduzidas converge (isto é, a série converge). Vejamos que* S_{2n+1} *é limitada. Simplesmente,* $S_{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{(2k)^r} + \dfrac{1}{(2k+1)^r}\right) < 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2}{(2k)^r} = 1 + 2^{1-r}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^r} = 1 + 2^{1-r}S_n < 1 + 2^{1-r}S_{2n+1}$, *ou seja,* $S_{2n+1} < 1 + 2^{1-r}S_{2n+1}$. *Resolvendo a desigualdade, tem-se* $S_{2n+1} < \dfrac{1}{1-2^{1-r}}$ *como queríamos.*

Questão 8.

- *Verdadeiro.*

  Considere a função sobrejetiva $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} :\to \mathbb{Q}$, *definida por* $f(p,q) = \dfrac{p}{q}$. *Como* $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *é enumerável, então* $\mathbb{Q}$ *é enumerável.*

- *Verdadeiro.*

  Seja um intervalo aberto (a,b) *qualquer. Basta mostrar que existe irracional* x *em* (a,b). *Caso* a *seja irracional: Temos que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{1}{n} < b - a$, *ou seja,* $a < a + \dfrac{1}{n} < b$ *(pois* $\dfrac{1}{n} > 0$*). Tomando* $x = a + \dfrac{1}{n}$, *temos* $x \in (a,b)$ *com* x *irracional. Caso* a *seja racional: Existe natural* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{\sqrt{3}}{n} < b - a$, *ou seja,* $a < a + \dfrac{\sqrt{3}}{n} < b$. *Tomando* $x = a + \dfrac{\sqrt{3}}{n}$, *temos* $x \in (a,b)$ *com* x *irracional.*

- *Verdadeiro.*

  Suponhamos que há $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $r^2 = 2$*. Ponhamos* r *na forma de fração, de modo que* $r = p/q$ *seja uma fração irredutível, onde* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \in \mathbb{Z}/\{0\}$*. Segue que,* $(p/q)^2 = 2 \implies p^2 = 2q^2$*. Então,* p *deve ser par sob a forma* $p = 2k$*. Mas daí, poderíamos também concluir que* $(2k)^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies 2k^2 = q^2$*, isto é,* q *também é par, e portanto, a fração* p/q *não seria irredutível, um absurdo. Logo, não existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $r^2 = 2$*.*

- *Falso.*

  A sequência de termos $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$ *é limitada e possui duas subsequências convergindo para valores diferentes. Basta ver que* $x_{2n} = 1$ *e* $x_{2n-1} = 0$*.*

- *Verdadeiro.*

  Irei simplesmente demonstrar a questão 15 do capitulo 4 do livro "curso de análise real":

  Dada uma sequência (x_n)*, um termo* x_p *chama-se um "termo destacado" quando* $x_p \geq x_n$ *para todo* $n > p$*. Seja* $P = \{p \in \mathbb{N}; x_p \text{ é destacado}\}$*. Se* $P = \{p_1 < p_2 < ...\}$ *for infinito,* $(x_p)_{p \in P}$ *é uma subsequência não-crescente de* (x_n)*. Se* P *for finito (em particular, vazio), mostre que existe uma subsequência crescente de* (x_n)*. Conclua que toda sequência possui uma subsequência monótona.*

  Demonstração. O caso P infinito é óbvio. Vejamos o caso P finito: Tome $t = \text{máx} P$. Temos que x_n não é destacado, para todo $n > t$. Portanto, se $n_1 > t$ então existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$. Novamente, por ser $n_2 > t$, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_2} < x_{n_3}$. Assim sucessivamente, podemos obter um subconjunto infinito $N' = \{n_1 < n_2 < n_3 < ...\}$ dos naturais com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < ...$, isto é, uma subsequência crescente de (x_n).

  Dada uma sequência (x_n), P pode ser finito ou infinito. Em qualquer caso, temos a existência de uma subsequência monótona.

  □

- *Falso.*

  A sequência $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ *diverge para* $+\infty$*, e* $y_n = -n$ *diverge para* $-\infty$*. Mas, sua soma* $x_n + y_n = \dfrac{1}{n}$ *converge para* 0*.*

- *Falso.*

  As sequências de termos $x_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$ *e* $y_n = \dfrac{1}{n}$ *são tais que* $x_n < y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, mas* $\lim x_n = \lim y_n = 0$*.*

- *Falso.*

  A sequência $x_n = (-1)^n$ *possui valores de aderência* 1 *e* -1 *(ou seja, não converge), mas* $|x_n| = 1$ *obviamente converge para* 1*.*

- *Verdadeiro.*

  Simplesmente, $(a_n - b_n)^2 = a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2 \geq 0 \implies (a_n^2 + b_n^2)(1/2) \geq a_nb_n$. *Pelo teste da comparação, temos que* $\sum a_nb_n$ *converge.*

- *Verdadeiro.*

  Basta usar a desigualdade $(|a_n| - \frac{1}{n})^2 \geq 0$ *e usar o teste da comparação. Segue que,* $(|a_n| - \frac{1}{n})^2 = a_n^2 - \frac{2|a_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0 \implies (a_n^2 + \frac{1}{n^2})(1/2) \geq \frac{|a_n|}{n}$. *Como* $\sum a_n^2$ *e* $\sum \frac{1}{n^2}$ *convergem, logo* $\sum \frac{a_n}{n}$ *é (absolutamente) convergente.*