Lema 1. *O conjunto vazio é uma barreira de todo grafo hypomatchable.*

Demonstração. Como $G - v$ é emparelhado qualquer que seja $v \in V$, G possui apenas uma componente impar. Portanto, qualquer emparelhamento máximo de G não cobre exatamente um vértice. Então tomando $S := \emptyset$, segue $|U| = o(G) = 1$. Logo, $\emptyset$ é uma barreira de G.

$\square$

Lema 2. *Seja v um vértice essencial de um grafo G e seja B uma barreira de $G - v$. Então $B \cup v$ é uma barreira de G.*

Demonstração. Primeiro note que $(G - v) - B = G - (B \cup \{v\})$. Como B é barreira de $G - v$, temos $|U| = o(G - (B \cup \{v\})) - |B|$ com U o conjunto de vértices não cobertos por algum emparelhamento máximo de $G - v$. Seja U' um conjunto de vértices não cobertos por algum emparelhamento máximo de G. Então, $|U'| = |V(G)| - 2\alpha'(G)$; como v é essencial, $\alpha'(G) = \alpha'(G - v) + 1$. Segue que $|U'| = |V(G)| - 2\alpha'(G - v) - 2$; usando $|V(G - v)| = |V(G)| - 1$, obtemos $|U'| = |V(G - v)| - 2\alpha'(G - v) - 1$. Como $|U| = |V(G - v)| - 2\alpha'(G - v)$, segue o resultado $|U'| = |U| - 1$. Finalmente, sabendo que $|B \cup \{v\}| = |B| + 1$, podemos concluir $|U'| = o(G - (B \cup \{v\})) - |B \cup \{v\}|$. Logo, $B \cup \{v\}$ é uma barreira de G.

$\square$

Lema 3. *Seja G um grafo conexo sem vértices essenciais. Dada a tripla (M, x, y) tal que M é um emparelhamento máximo, x e y são vértices de G, temos que pelo menos um destes vértices é coberto por M.*

Demonstração. Como G é conexo, a distância entre quaisquer dois vértices é finita. Vamos mostrar por indução em $d(x, y)$. Se (M, x, y) é tal que $d(x, y) = 1$, temos que x e y são adjacentes com ambos não podendo serem descobertos por M. Vamos estabelecer a hipótese de indução da seguinte forma: Dada qualquer tripla (N, u, v) tal que $d(u, v) \leq n$ com $n \geq 1$, temos que u ou v é coberto por N. Seja uma tripla (M, x, y) com $d(x, y) = n + 1$. Suponha por absurdo que x e y são descobertos por M. Seja xPy um caminho de x a y de menor tamanho em G. Como $d(x, y) = n + 1 \geq 2$, então existe um vértice interno v de P. Como xPv é de menor que P, pela hipótese da indução temos que v é coberto por M. Como não há vértices essenciais, em particular v não é essencial e, portanto, G possui emparelhamento M' que não cobre v. Segue que M' cobre ambos x e y, pois xPv e vPy são de tamanho menores que P. Considerando $G[M \triangle M']$, note que suas componentes acíclicas são caminhos de tamanho par, caso contrario haveria um caminho de aumento para M ou M'. Cada vértice x, v, y é coberto por exatamente por um dos emparelhamentos e assim cada um é vértice final de um de tais caminhos. Como os caminhos são pares, x e y não são vértices finais do mesmo caminho. Além disso, os caminhos que começam em x e y não podem terminar ambos em v. Portanto, se um caminho começa em x e termina em v, então y é vértice terminal de um caminho que não termina em v; raciocínio análogo para caminho que começa em y e termina em v. Podemos portanto supor, sem perda de generalidade, que um caminho Q de $G[M \triangle M']$ que começa em x não termine em v. Observe que $M' \triangle E(Q)$ é um emparelhamento máximo que não cobre x nem v. Assim, teríamos uma tripla $(M' \triangle E(Q), x, v)$ tal que $d(x, v) \leq n$

mas com $M' \triangle E(Q)$ deixando x e v descobertos, que é uma contradição com a hipótese de indução. Logo, pelo menos um dos vértices x ou y deve ser coberto por M.

□

Lema 4. *Um grafo G conexo não tem vértices essenciais se, e somente se, G é hypomatchable.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo sem vértices essenciais. Considere x um vértice qualquer de G. Como x não é essencial, existe um emparelhamento M que não cobre x. Fixe um vértice y diferente de x e forme a tripla (M, x, y). Pelo Lema 3, M deve cobrir y, já que não cobre x. Como y foi tomado arbitrariamente, segue que M cobre todo vértice de $V(G) - x$, ou seja, M é um emparelhamento perfeito de $G - x$. Finalmente, como x foi tomado arbitrariamente no início, então dado um vértice x existe um emparelhamento perfeito em $G - x$. Logo, G é hypomatchable.

Reciprocamente, dado $v \in V$, $G - v$ possui um emparelhamento perfeito M que é um emparelhamento máximo de G que não cobre v. Então v não é essencial. Como v foi tomado arbitrariamente, concluímos que G não possui vértices essenciais.

□

Teorema de Tutte-Berge. *Todo grafo tem uma barreira.*

Demonstração. Vamos provar por indução na ordem de G. O caso $|V(G)| = 1$ é trivialmente verdadeiro, pois $\emptyset$ é uma barreira pra G. Suponha que todo grafo G de ordem n possui barreira B. Agora adicionando um vértice u em um grafo arbitrário G de ordem n, de modo que a adjacência de u com outros vértices de G seja arbitraria, obtendo $F := G + u$ (note que F é um grafo arbitrário de ordem $n + 1$). Se existe vértice essencial v em F, então pela hipótese de indução $F - v$ é um grafo de ordem n que possui barreira B. Então pelo lema 2, $B \cup \{v\}$ é uma barreira de F. Se todo vértice de F não é essencial, então F possui $\emptyset$ como barreira (exercício 16.3.6). Em qualquer caso temos que F é um grafo arbitrário de ordem $n + 1$ que possui uma barreira. Logo, todo grafo possui uma barreira.

□

Corolário. *Para qualquer grafo G:*

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2} min\{|V(G)| - (o(G - S) - |S|); S \subset V(G)\}$$

Demonstração. Seja U o conjunto de vértices não cobertos por algum emparelhamento máximo. Temos que $|U| \geq o(G - S) - |S|, \forall S \subset V(G)$. Como $|U| = |V(G)| - 2\alpha'(G)$, segue que $\alpha'(G) \leq \frac{1}{2}[|V(G)| - (o(G - S) - |S|)], \forall S \subset V(G)$. Pelo teorema anterior, G tem uma barreira, digamos B, e ao tomar $S := B$ obtemos a igualdade $\alpha'(G) = \frac{1}{2}[|V(G)| - (o(G - B) - |B|)]$. Ou seja, $S := B$ é o caso em que $|V(G)| - (o(G - S) - |S|)$ é o menor valor possível. Logo, $\alpha'(G) = \frac{1}{2} min\{|V(G)| - (o(G - S) - |S|); S \subset V(G)\}$.

□

Teorema de Tutte. *Um grafo G possui emparelhamento perfeito se, e somente se*

$$o(G-S) \leq |S|, \forall S \subseteq V(G)$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$): Óbvio.
($\Longleftarrow$): Suponha que G não possui emparelhamento perfeito. Seja U o conjunto de vértices não cobertos por algum emparelhamento máximo de G, temos $|U| > 0$. Pelo teorema de Tutte-Berge, G tem uma barreira B. Então, $|U| = o(G-B) - |B| > 0$ que implica $o(G-B) > |B|$, um absurdo. Logo, G possui emparelhamento perfeito.

□

Alguns observações/curiosidades:

- Um emparelhamento máximo de grafo hypomatchable deixa exatamente um vértice exposto.
- Exatamente um emparelhamento máximo não cobre cada vértice de um grafo hypomatchable.
- Se G é conexo com um único vértice não coberto por um emparelhamento M. Então M é máximo e a ordem G é impar.

  Claramente M não pode possuir um caminho de aumento, portanto é máximo. Além do mais, $|V(G)| = 2\alpha'(G) + 1$.
- Todos os vértices de um grafo são essenciais se, e somente se o grafo admite emparelhamento perfeito.

  Seja G um grafo. Suponha que G não admite emparelhamento perfeito. Seja M um emparelhamento máximo, então existe $u \in V$ tal que M não cobre u. Ou seja, u não é essencial; um absurdo. Reciprocamente, como todo emparelhamento máximo cobre todos os vértices, então todos os vértices são essenciais.

Alguns exercícios resolvidos do livro:

Exercício 16.3.1. *Seja M um emparelhamento em um grafo G, e seja B um conjunto de vértices de G tal que $|U| = o(G-B) - |B|$, onde U é o conjunto de vértices de G não cobertos por M. Mostre que M é um emparelhamento máximo de G.*

Demonstração. Seja M' outro emparelhamento com U' o conjunto de vértices expostos. Temos que $|U'| \geq o(G-S) - |S|, \forall S \subset V(G)$. Tomando $S := B$, concluímos que $|U'| \geq |U|$. Portanto, U é um caso com menor numero de vértices expostos, ou seja, M cobre o maior numero de vértices possível. Logo, M é máximo.

□

Exercício 16.3.2. *Seja G um grafo e S um subconjunto próprio de V. Mostre que $O(G-S) - |S| \equiv |V(G)| \,(mod\, 2)$*

Demonstração. Sejam P e I os conjuntos das componentes de ordem par e impar de $G - S$, respectivamente. O numero de vértices de $G - S$ é a soma de vértices das componentes de P e I. Portanto, $|V(G)| - |S| = \sum_{H \in P} |V(H)| + \sum_{J \in I} |V(J)|$; onde $|V(H)| \equiv 0 \,(mod\, 2)$, $\forall H \in P$, e $|V(J)| \equiv 1 \,(mod\, 2)$, $\forall J \in I$. Realizando o somatório nas congruências obtemos, $\sum_{H \in P} |V(H)| \equiv 0 \,(mod\, 2)$ e $\sum_{J \in I} |V(J)| \equiv o(G - S) \,(mod\, 2)$; segue que $|V(G)| - |S| \equiv o(G - S) \,(mod\, 2)$. Subtraindo $|S|$ em ambos os lados obtemos o resultado desejado $|V(G)| \equiv |V(G)| - 2|S| \equiv o(G - S) - |S| \,(mod\, 2)$.

□

Exercício 16.3.3. *Mostre que a união das barreiras dos componentes de um grafo é uma barreira do grafo.*

Demonstração. Seja M um emparelhamento máximo. Para cada componente H_i de G temos $|U_i| = o(H_i - B_i) - |B_i|$, $1 \leq i \leq c(G)$ onde U_i é um conjunto de vértices não cobertos por M na componente i e B_i sua respectiva barreira. Claramente (U_i) e (B_i), $1 \leq i \leq c(G)$ são famílias de conjuntos disjuntos. Portanto, $|U| = \sum_{i=1}^{c(G)} o(G_i - B_i) - |B|$ com $B := \cup_{i=1}^{c(G)} B_i$. A soma do numero de componentes de ordem impar gerado ao remover cada B_i é o mesmo na remoção de B, ou seja, $\sum_{i=1}^{c(G)} o(H_i - B_i) = o(G - B)$. Segue que $|U| = o(G - B) - |B|$. Logo, B é uma barreira de G.

□

Exercício 16.3.5. *Provar o lema 2.*

Demonstração. Já feito.

□

Exercício 16.3.6. *Deduzir a partir do lema 4 que o conjunto vazio é uma barreira de todo grafo sem vértices essenciais.*

Demonstração. Seja G um grafo sem vértices essenciais. Claramente cada componente de G é hypomatchable e possui conjunto vazio como barreira. Por 16.3.3, uma barreira de G é o conjunto vazio, pois a união de conjuntos vazios é o conjunto vazio.

□

Exercício 16.3.7. *a) Provar o Teorema de Tutte-Berge por indução no numero de vértices.*
b)Deduzir o corolário logo após o Teorema de Tutte-Berge.

Demonstração. Já feito.

□

Exercício 16.4.1. *Mostre que uma arvore G tem um emparelhamento perfeito se, e somente se $o(G - v) = 1$, $\forall v \in V(G)$.*

Demonstração. Dado $v \in V$; como G é par, $G - v$ é impar e possui pelo menos uma componente de ordem impar, $1 \leq o(G - v)$. Tome $S := \{v\}$, então $o(G - v) \leq 1$ pelo Teorema de Tutte. Logo, $o(G - v) = 1$.

Reciprocamente, seja G uma arvore tal que $o(G-v)$, $\forall v \in V(G)$. Primeiro note que $\sum_{v\in S} o(G-v) = |S|$ para qualquer $S \subseteq V(G)$. Queremos provar por indução no numero de vértices de um conjunto de vértices qualquer $S \subseteq V(G)$, que $\sum_{v\in S} o(G-v) \geq o(G-S)$, para concluir que G tem emparelhamento perfeito pelo teorema de Tutte. Se S possui apenas um vértice, claramente a desigualdade anterior é satisfeita. Vamos estabelecer a seguinte hipótese de indução: Para todo $S \subseteq V(G)$ com $|S| = n$, temos que $\sum_{v\in S} o(G-v) \geq o(G-S)$. Dado $S \subseteq V(G)$ com $|S| = n$ e $u \in V(G)\backslash S$, tome $S' := S \cup \{u\}$. Temos que $\sum_{v\in S} o(G-v) \geq o(G-S)$, somando $o(G-u) = 1$ a ambos os lados, segue que $\sum_{v\in S'} o(G-v) \geq o(G-S)+1$. Note que u pertence a alguma componente, digamos H, de $G-S$. Como H é uma arvore, $o(H-u) = 1$. Vamos analisar a seguinte situação; seja F uma componente de um grafo G', se F for de ordem impar a remoção de algum vértice x de F gera um numero par de componentes de ordem impar, satisfazendo $o(G'-x) = o(G') + o(F-x) - 1$. Se F for de ordem par a remoção gera um numero impar de componentes de ordem impar satisfazendo $o(G'-x) = o(G') + o(F-x)$. Fazendo $G' := G-S$, $F := H$ e $x := u$; se H for impar, então $o(G-S') = o(G-S)$. Segue que $\sum_{v\in S'} o(G-v) \geq o(G-S')+1$. Se H for par, então $o(G-S') = o(G-S)+1$; segue $\sum_{v\in S'} o(G-v) \geq o(G-S')$. Em qualquer caso a hipótese é valida para $|S'| = n+1$. Então, $\sum_{v\in S} o(G-v) \geq o(G-S)$ para todo $S \subseteq V(G)$. Como $\sum_{v\in S} o(G-v) = |S|$, temos que $|S| \geq o(G-S)$, $\forall S \subseteq V(G)$. Logo, G possui um emparelhamento perfeito.

$\square$