Respostas da Primeira Lista Quinzenal

Daniel Alves de Lima

Exercício 1. *Semigrupo:* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \sim (b \sim c) = a \sim (b+c-bc) = a+(b+c-bc)-a(b+c-bc) = a+b+c-bc-ab-ac+abc = (a+b-ab)+c-(a+b-ab)c = (a+b-ab) \sim c = (a \sim b) \sim c$

Monoide: Temos que 0 *é o elemento neutro:* $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \sim 0 = a+0-a0 = 0+a-0a = 0 \sim a = a$

Por último, $(\mathbb{R}, \sim)$ *não é grupo pois* 1 *não possui inverso. Com efeito, se houvesse um inverso* $x \in \mathbb{R}$ *de* 1*, teríamos* $1 \sim x = 0$ *ou seja* $1 = 1+x-1x = 0$ *um absurdo.*

Exercício 2. *Se* $\sim$ *é uma relação de equivalência, então são satisfeitas as condições:*

1. $e = aa^{-1} \in S$
2. $ab^{-1} \in S \Longrightarrow ba^{-1} \in S$
3. $ab^{-1} \in S$ *e* $bc^{-1} \in S \Longrightarrow ac^{-1} \in S$

Temos que $S \neq \emptyset$*, pois* $e \in S$*. Sejam dados* $a \in S$ *e* $b \in S$*. Pelo item 2, temos* $b = be = be^{-1} \in S \Longrightarrow b^{-1} = eb^{-1} \in S$*. Pelo item 3, temos* $a = ae^{-1} \in S$ *e* $b^{-1} = eb^{-1} \in S$ *que implica* $ab^{-1} \in S$*. Logo,* S *é subgrupo de* G*.*

Reciprocamente, por S *ser subgrupo, temos:*

1. $e = aa^{-1} \in S$
2. $ab^{-1} \in S \Longrightarrow ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in S$
3. $ab^{-1} \in S$ *e* $bc^{-1} \in S \Longrightarrow ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) \in S$

Logo, $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

Exercício 3. *O grupo* H *gerado pelos elementos* C *e* D *é* $\{I, C, C^2, C^3, D, CD, C^2D, C^3D\}$ *bastando calcular as potencias do tipo* C^iD^j *e* D^iC^j *para determinar estes elementos. Com efeito,*

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C^4 = D^2 = I$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = DC^3, C^2D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = DC^2$$

$C^3D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = DC$

Sendo $D_4 = \{R, R^2, R^3, id, T_x, T_y, T_{1,3}, T_{2,4}\}$ *o grupo de simetrias do quadrado, definimos uma bijeção do seguinte modo:*
$id \mapsto I$
$R \mapsto C$
$R^2 \mapsto C^2$
$R^3 \mapsto C^3$
$T_x \mapsto D$
$T_{1,3} \mapsto CD$
$T_y \mapsto C^2D$
$T_{2,4} \mapsto C^3D$

Notando que $RT_x = T_xR^3 = T_{1,3}$, $R^2T_x = T_xR^2 = T_y$ *e* $R^3T_x = T_xR = T_{2,4}$, *vemos que esta função é um isomorfismo entre* H *e* D_4.

Exercício 4. *A ida é trivial. Vejamos a recíproca. Dados* $a \in S$ *e* $b \in S$, *temos que* $b^{-1} \in S$, *e portanto,* $ab^{-1} \in S$. *Logo,* S *é subgrupo de* G *(Teorema 2.5 do capitulo 1, Hungerford).*

Exercício 5. *a)* $(AutG, \circ)$ *é associativa:* $\forall f, g, h \in AutG, \forall x \in G$; $f \circ (g \circ h)(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g) \circ h(x)$, *ou seja,* $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Como a função identidade é o elemento neutro e todo $f \in AutG$ *possui inversa* $f^{-1} \in AutG$ *à esquerda e direita, logo* $(AutG, \circ)$ *é um grupo.*

b) $Aut\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$: *Dado* $f \in Aut\mathbb{Z}$, *temos que* $f(n) = nf(1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. *Se fosse* $f(1) \neq -1$, *teríamos* $f(\mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$ *um absurdo. Então, deve ser* $f(1) = 1$ *ou* $f(1) = -1$. *Se* $f(1) = 1$, *temos* $f(n) = n = id(n)$ *donde* $f = id$. *Se* $f(1) = -1$, *temos* $f(n) = -n = -id(n)$ *donde* $f = -id$. *Logo,* $Aut\mathbb{Z} = \{id, -id\}$. *É fácil verificar que a função* $\varphi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Aut\mathbb{Z}$, *onde* $\varphi(\bar{0}) = id$ *e* $\varphi(\bar{1}) = -id$, *é um isomorfismo.*

$Aut\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2$: *Dado* $f \in Aut\mathbb{Z}_6$, *temos que* $f(\bar{n}) = \bar{n}f(\bar{1})$. *Temos que* $f(\bar{1}) = \bar{0} \Longrightarrow f(\mathbb{Z}_6) = \{0\}$, $f(\bar{1}) = \bar{2} \Longrightarrow f(\mathbb{Z}_6) = \{0, 2, 4\}$, $f(\bar{1}) = \bar{3} \Longrightarrow f(\mathbb{Z}_6) = \{0, 3\}$, $f(\bar{1}) = \bar{4} \Longrightarrow f(\mathbb{Z}_6) = \{0, 2, 4\}$ *e por último,* $f(\bar{1}) = \bar{5} = \bar{-1} \Longrightarrow f(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$. *Portanto, devemos ter* $f(\bar{1}) = \bar{1}$ *ou* $f(\bar{1}) = \bar{-1}$ *(que são os únicos casos no qual se tem* $f(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$*). Por um argumento análogo ao da letra a), conclui-se que* $Aut\mathbb{Z}_6 = \{id, -id\}$ *e* $Aut\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2$.