Prova 1 - Métodos Numéricos

Daniel Alves de Lima

Questão 1. *(a) A área de um polígono regular de m lados inscrito em um circulo de raio R é* $A_m = mR^2\sin(\frac{\pi}{m})\cos(\frac{\pi}{m})$. *Tomando* $m = 3\cdot 2^n$, *formemos uma sequencia de termo* $a_n = 3\cdot 2^n R^2 \sin(\frac{\pi}{3\cdot 2^n})\cos(\frac{\pi}{3\cdot 2^n})$. *Segue que,* $a_{n+1} - a_n = 3\cdot 2^{n+1}R^2\sin(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}})\cos(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}) - 3\cdot 2^n R^2\sin(\frac{\pi}{3\cdot 2^n})\cos(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}) = 3\cdot 2^n R^2(2\sin(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}})\cos(\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}) - \sin(\frac{\pi}{3\cdot 2^n})\cos(\frac{\pi}{3\cdot 2^n})) = 3\cdot 2^n R^2(\sin(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n}) - \sin(\frac{\pi}{3\cdot 2^n})\cos(\frac{\pi}{3\cdot 2^n})) = 3\cdot 2^n R^2\sin(\frac{\pi}{3\cdot 2^n})(1-\cos(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}))$.

(b) *Testei o código que fiz com* $R = 1$ *já que a área seria* π *para melhor visualização, e o código obteve os valores próximos a* π *como esperado. Pela maneira que escrevi o código, basta alterar o valor de R para obter o valor aproximado da área da circunferência de raio R.*

(c) *Para n grande, temos que* $a_{n+1} \approx a_n + 3\cdot 2^n R^2(\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n})(1-1) = a_n + R^2\pi\cdot 0 = a_n$, *ou seja,* $a_{n+1}\approx a_n$. *Não há perda de exatidão numérica porque os valores dos termos ficam cada vez mais próximos um do outro.*

Questão 2. *Vejamos que* (x_n) *é limitado: Primeiro, temos que* $0 \le x_0 = 10^{-2} \le 1$. *Supondo por hipótese* $0 \le x_n \le 1$, *segue que* $x_n^3 \le x_n^2 \le x_n \Rightarrow 0 \le x_n - x_n^3 = x_{n+1}$ *e* $0 \le x_n^3 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - x_n^3 \le 1 - x_n^3 \le 1$, *isto é,* $0 \le x_{n+1} \le 1$. *Logo, a hipótese vale para todo n. Agora basta ver que* (x_n) *é monótona, e portanto, convergente. Simplesmente,* $x_{n+1} = x_n - x_n^3 \le x_n$ *para todo n. Seja* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda$, *tem-se* $\lambda = \lambda - \lambda^3 \Rightarrow -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Pelo algoritmo feito no scilab para calcular os valores dos termos de (x_n), *o numero mínimo de passos para que os termos da sequencia se tornem menores que* $0.9x_0$ *é 1173.*

Questão 3. *Façamos* $g(x_n) = x_{n+1}$. *Pela série de Taylor temos a seguinte aproximação* $g(x) \approx g(x^*) + g'(x^*)(x - x^*)$ *donde* $x_{n+1} \approx x^* + g'(x^*)(x_n - x^*)$. *Então,* $x_{n+1} - x^* \approx g'(x^*)(x_n - x^*)$, *e portanto,* $|x_{n+1} - x^*| \approx |g'(x^*)||x_n - x^*|$.

(i) $|g'(x^*)| < 1 \Rightarrow |x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*|$.

(ii) $|g'(x^*)| > 1 \Rightarrow |x_{n+1} - x^*| > |x_n - x^*|$.

(iii) $|g'(x^*)| = 1 \Rightarrow |x_{n+1} - x^*| \approx |x_n - x^*|$.

No primeiro caso (resp. segundo caso), fica claro que os termos da sequencia se aproximam (resp. se afastam). No terceiro caso, o comportamento da sequencia é indeterminado.

Questão 4. *Para o sistema ser indeterminado devemos ter* $\lambda = \dfrac{71 \times 30}{41} \approx 51,9512$. *Para* $\lambda = 51$, *tem-se* $k_1 = k_\infty \approx 350,356$ *e* $k_2 \approx 262,124$. *Para* $\lambda = 52$, *tem-se* $k_1 = k_\infty \approx 6888$ *e* $k_2 \approx 5163$. *Como os valores são muito maiores que* 1 *em todos os casos conclui-se que o sistema é mal condicionado.*

Questão 5. *Pondo* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda$, *temos que* $\lambda = \dfrac{(3\lambda-1)e^{3\lambda}+(1-\lambda)e^{\lambda}+(1-2\lambda)e^{2\lambda}}{3e^{3\lambda}-e^{\lambda}-2e^{2\lambda}}$. *Manipulando esta expressão facilmente se chega a* $e^{3\lambda} - e^{2\lambda} - e^{\lambda} = 0$ *donde* $e^{2\lambda} - e^{\lambda} - 1 = 0$. *Fazendo* $e^{\lambda} = u$, *tem-se* $u^2 - u - 1 = 0$ *com solução* $u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *(pois* $u > 0$*), ou seja,* $e^{\lambda} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Logo,* $\lambda = \ln(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$.