Respostas da Segunda Lista Quinzenal

Daniel Alves de Lima

Exercício 1. *A ideia da demonstração é relacionar os números* $\sigma(i_1), ..., \sigma(i_n)$ *com os* $i_1 i_2, ..., i_n$ *através de* $\Delta(\sigma(i_1), ..., \sigma(i_n)) = -\Delta(i_1, ..., i_n)$ *para determinar algo sobre a paridade das permutações.*

Exercício 2. *Questão 1: a) Dado* $\sigma \in S_n$*, pelo corolário 6.5 e usando a dica, temos* $\sigma = (i_1 j_1)(i_2 j_2)...(i_r j_r) = (1 i_1)(1 j_1)(1 i_1)(1 i_2)(1 j_2)(1 i_2)...(1 i_r)(1 j_r)(1 i_r)$ *donde* $\sigma \in \, < (12), (13), ..., (1n) >$*. Logo,* $S_n = \, < (12), (13), ..., (1n) >$
b) Podemos aplicar/iterar a identidade $(1j) = (1 \; j-1)(j-1 \; j)(1 \; j-1)$ *várias vezes até obter* $(1j)$ *como produto de elementos* $(12), (23), ..., (j-1 \; j)$*. Pela letra a), qualquer permutação pode ser escrita como produto de elementos da forma* $(1j)$*, e que portanto, também pode ser escrita como produto de elementos* $(12), (23), ..., (j-1 \; j)$*, ou seja,* $S_n = < (12), (23), ..., (n-1 \; n) >$*.*

Questão 3: Primeiro, note que $\tau(i_1 i_2, ..., i_r)\tau^{-1} = \tau(i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})...(i_1 i_2)\tau^{-1} = (\tau(i_1 i_r)\tau^{-1})(\tau(i_1 i_{r-1})\tau^{-1})...(\tau(i_1 i_2)\tau^{-1})$*. Vamos determinar a forma de cada* $\alpha_j = \tau(i_1 i_j)\tau^{-1}$*,* $j \in \{2, 3, ..., r\}$*. Podemos por* $\alpha_j \tau = \tau(i_1 i_j)$*, e ver que se tivermos* $k \neq i_1$ *e* $k \neq i_j$*, então* $\alpha_j \tau_{(k)} = \tau(i_1 i_j)_{(k)} = \tau_{(k)}$*. Ou seja,* α_j *manda* $\tau_{(k)}$ *em* $\tau_{(k)}$*. Também, tem-se* $\alpha_j \tau_{(i_1)} = \tau(i_1 i_j)_{(i_1)} = \tau_{(i_j)}$ *e* $\alpha_j \tau_{(i_j)} = \tau(i_1 i_j)_{(i_j)} = \tau_{(i_1)}$*, ou seja,* α_j *manda* $\tau_{(i_1)}$ *em* $\tau_{(i_j)}$ *e vice-versa. Portanto,* α_j *é um 2-ciclo da forma* $\alpha_j = (\tau(i_1)\tau(i_j))$*. Segue que,* $\tau(i_1 i_2, ..., i_r)\tau^{-1} = (\tau(i_1)\tau(i_r))(\tau(i_1)\tau(i_{r-1}))...(\tau(i_1)\tau(i_2)) = (\tau(i_1)\tau(i_2)...\tau(i_r))$ *é um r-ciclo da forma desejada.*

Questão 4: a) Simplesmente, $\sigma_{k+1} = \tau\sigma_k\tau^{-1} = \tau^k\sigma_1\tau^{-k} = \tau^k(12)\tau^{-k} = (\tau^k(1)\tau^k(2))$ *para* $1 \leq k \leq n-2$*. Segue que,* $\sigma_1 = (12)$*,* $\sigma_2 = (23)$*,* $\sigma_3 = (34)$*,...,* $\sigma_{n-1} = (n-1 \; n)$*. Portanto, como cada permutação de* S_n *é produto de elementos* $(12), (23), .., (n-1 \; n)$*, cada permutação também será produto de* σ_1 *e* τ*, ou seja, tem-se* $S_n = < \sigma_1, \tau >$*.*
b) É só notar que $(123...n) = (12)(23..n)$ *e fazer argumento análogo ao de cima.*

Questão 9: