# TEOREMA DE HALL

Daniel Alves de Lima

Um grafo bipartido $G := G[X, Y]$ possui um emparelhamento que cobre todo vértice de $X$ se, e somente se $|N(S)| \geq |S|, \forall S \subseteq X$.

*Demonstração.* Seja $G := G[X, Y]$ um grafo bipartido com um emparelhamento $M$ que cobre todo vértice de de $X$. Dado $S \subseteq X$, temos que cada $x \in S$ está ligado a um único vértice $y \in N(S)$ por uma aresta do emparelhamento (veja Figura 1). Tomando $f(x) = y$ com $xy \in M$, obtemos uma função injetora $f : S \to N(S)$. Logo, $|N(S)| \geq |S|$.

Reciprocamente, seja $G := G[X, Y]$ um grafo bipartido em que não há emparelhamento cobrindo todo vértice de $X$. Sejam $M^*$ um emparelhamento máximo e $u \in X$ um vértice não coberto por $M^*$. Considere $T$ o conjunto de vértices que são conectados a $u$ através de caminhos alternados de $M^*$. Tome $U := T \cap X$ e $W := T \cap Y$. Nenhum desses caminhos alternados são de aumento o que torna $u$ o único vértice que não é coberto em $U$ (veja Figura 2). Como os vértices de $U \setminus \{u\}$ estão emparelhados com os vértices de $W$ obtemos $|U \setminus \{u\}| = |W| = |U| - 1$. Note que os vértices que estão em $W$ são conectados a vértices que estão em $U$ por definição, portanto $W \subseteq N(U)$. Se existir algum vértice $v \in N(U)$ fora de $W$ temos que $v$ não é coberto por $M^*$; pois se fosse, ou teríamos duas arestas adjacentes de $M^*$, ou $u$ seria coberto por $M^*$. Em qualquer caso em que $v$ for adjacente a $u$ ou a qualquer outro vértice de $U$ (onde $v$ é adjacente a um vértice que é coberto por $M^*$ e conectado a $u$ por um caminho alternado, veja Figura 3) obtemos um caminho de aumento com $u$ e $v$ como seus vértices finais, um absurdo. Portanto todo vértice $v \in N(U)$ deve estar em $W$, ou seja, $N(U) = W$. Logo, $|N(U)| = |U| - 1 < |U|$ com $U \subseteq X$ contradizendo a hipótese inicial.

□

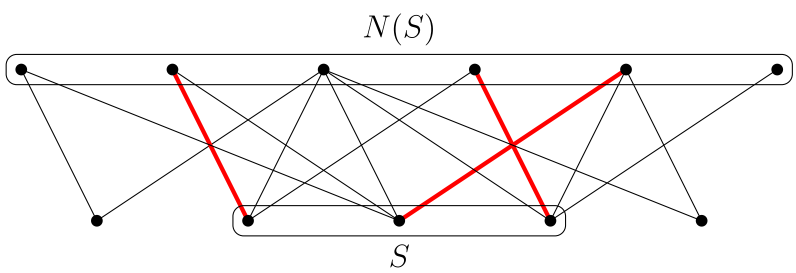


**Fig. 1.** Um exemplo da injetividade de $f : S \to N(S)$ em um grafo bipartido. As arestas que fazem parte do emparelhamento $M^*$ estão em vermelho.

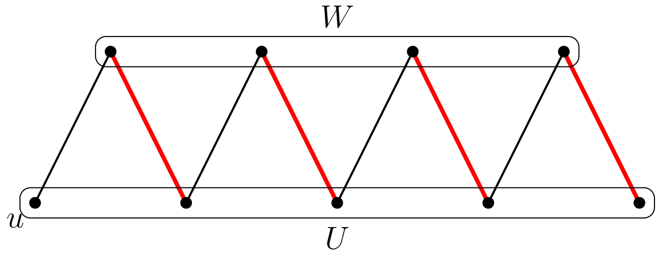


**Fig. 2.** Exemplo de um caminho alternado com vértices de T.

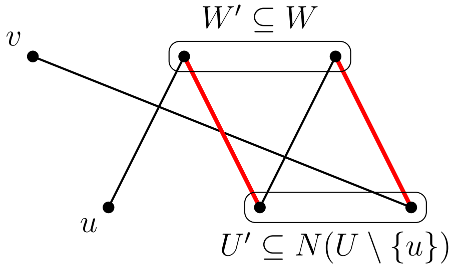


**Fig. 3.** Caminho de aumento de $v$ até $u$, onde $W'$ e $U'$ são subconjuntos de vértices que são cobertos por $M^*$.