Respostas da Terceira Lista Quinzenal

Daniel Alves de Lima

Exercício 1.

Exercício 2. *Primeiro, note que* $\theta_{ab} = \theta_a\theta_b$, $\theta_e = id$ *e* $\theta_{a^{-1}} = \theta_a^{-1}$. *Vejamos que* $G \times_\theta H$ *é grupo:*

(i) Associativa: $((x,a)(y,b))(z,c) = (x\theta_a(y), ab)(z,c) = (x\theta_a(y)\theta_{ab}(z), abc) = (x\theta_a(y)\theta_a(\theta_b(z)), abc) = (x\theta_a(y\theta_b(z)), abc) = (x,a)(y\theta_b(z), bc) = (x,a)((y,b)(z,c))$ *para todo* $(x,a),(y,b),(z,c) \in G \times_\theta H$.

(ii) (e,e) *é o elemento neutro:* $\forall (x,a) \in G \times_\theta H$, $(e,e)(x,a) = (e\theta_e(x), a) = (ex, a) = (x,a)$ *e* $(x,a)(e,e) = (x\theta_a(e), a) = (xe, a) = (x,a)$.

(iii) Todo elemento (x,a) *possui* $(\theta_a^{-1}(x^{-1}), a^{-1})$ *como inverso, pois* $(x,a)(\theta_a^{-1}(x^{-1}), a^{-1}) = (x\theta_e(x^{-1}), aa^{-1}) = (xx^{-1}, e) = (e,e)$ *e* $(\theta_a^{-1}(x^{-1}), a^{-1})(x,a) = (\theta_a^{-1}(x^{-1})\theta_{a^{-1}}(x), e) = (\theta_a^{-1}(x^{-1})\theta_a^{-1}(x), e) = (\theta_a^{-1}(x^{-1}x), e) = (\theta_a^{-1}(e), e) = (e,e)$.

Exercício 3. *(a) O centro* $C(G)$ *de um* p*-grupo finito não-trivial* G *contem pelo menos* p *elementos.*

(b) Claramente, só pode ser $|C(G)| = p^i$, $i \geq 1$. *Por cauchy, existe* $H_1 < C(G)$ *tal que* $|H_1| = p$.

(c) Todo subgrupo de $C(G)$ *é normal em* G. *Com efeito, sejam* $H < C(G)$, $g \in G$ *e* $h \in H$, *tem-se* $ghg^{-1} = h$ *donde* $H \lhd G$. *Em particular,* $H_1 \lhd G$.

(d) Se $f : G \to H$ *é um epimorfismo de grupos, então a atribuição* $K \mapsto f(K)$ *define uma correspondência biunívoca entre o conjunto* $S_f(G)$ *de todos os subgrupos* K *de* G *que contem* $Kerf$ *e o conjunto* $S(H)$ *de todos os subgrupos de* H. *Sob esta correspondência, subgrupos normais levam à subgrupos normais.*

(e) Temos que $|G/H_1| = p^{m-1}$ *por Lagrange. Se* $m = 1$, *então* $<e>= H_0 \subseteq H_1 = G$. *Se* $m > 1$, *existe* $H_2/H_1 < G/H_1$ *tal que* $|H_2/H_1| = p$, $H_1 \subseteq H_2$ *e* $|H_2| = |H_1||H_2/H_1| = p^2$. *Mas como mostro que* $H_2 \lhd G$*?*