Construção dos Números Reais via Cortes de Dedekind

Daniel Alves de Lima

Cortes de Dedekind

Definição: Seja $\alpha \subset \mathbb{Q}$. Dizemos que α é um corte se satisfaz as condições:

1. $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$.
2. Seja $q \in \mathbb{Q}$. Se $p \in \alpha$ e $q < p$, então $q \in \alpha$.
3. α não possui elemento máximo.

Vamos representar por $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os cortes.

Proposição. *Seja $r \in \mathbb{Q}$. O conjunto $r^* = \{x \in \mathbb{Q}; x < r\}$ é um corte.*

Demonstração. Temos que $\dfrac{r}{2} \in r^*$ e $r + 1 \notin r^*$. Então, $\emptyset \neq r^* \neq \mathbb{Q}$. Sejam $x \in \alpha$ e $y \in \mathbb{Q}$ tal que $y < x$, então $y < r$, e portanto, $y \in r^*$. Assim, fica satisfeita a segunda condição. Dado $x \in \alpha$, tem-se $x < \dfrac{x+r}{2} < r$ onde $\dfrac{x+r}{2} \in r^*$. Então, α não possui elemento máximo e vale a terceira condição.

□

Relação de Ordem em $\mathcal{C}$

Definição: Sejam $\alpha \in \mathcal{C}$ e $\beta \in \mathcal{C}$. Definimos

1. $\alpha \leq \beta$ se, e só se, $\alpha \subset \beta$.
2. $\alpha < \beta$ se, e só se, $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$.

É fácil verificar "$\leq$" é uma relação de ordem.

Lema 1. *Sejam $\alpha \in \mathcal{C}$ e $x \in \mathbb{Q}$ com $x \notin \alpha$. Então $p < x$ para todo $p \in \alpha$.*

Demonstração. Suponha que vale a hipótese e que existe $p \in \alpha$ tal que $p \geq x$. Como $x \notin \alpha$, só pode ser $p > x$. Então, tem-se $x \in \alpha$ um absurdo. Logo, deve ser $p < x$ para todo $p \in \alpha$.

□

Propriedade: *Sejam $\alpha \in \mathcal{C}$ e $\beta \in \mathcal{C}$. Então, $\alpha \leq \beta$ ou $\alpha \geq \beta$.*

Demonstração. Se $\alpha \subset \beta$, então $\alpha \leq \beta$. Se $\alpha \not\subset \beta$, então existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in \alpha$ e $x \notin \beta$. Segue do lema que $p < x$ para todo $p \in \beta$. Segue que $p \in \alpha$ para todo $p \in \beta$, ou seja, $\beta \leq \alpha$.

□

Adição em $\mathcal{C}$

Teorema 1. *Se α e β são cortes, então $\alpha + \beta = \{a + b; a \in \alpha, b \in \beta\}$ (chama-se soma de α e β) também é um corte.*

Demonstração.

1. Como α e β não são vazios, existem $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ tais que $a + b \in \alpha + \beta$. Então, $\alpha + \beta \neq \emptyset$. Como $\alpha \neq \mathbb{Q}$ e $\beta \neq \mathbb{Q}$, existem racionais s e t com $s \notin \alpha$ e $t \notin \beta$. Pelo lema 1, tem-se $a < s$ para todo $a \in \alpha$ e $b < t$ para todo $b \in \beta$. Então, $a + b < s + t$ para todo $a \in \alpha$ e todo $b \in \beta$. Logo, $s + t \notin \alpha + \beta$, e portanto, $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.

2. Dado $x \in \alpha + \beta$, existem $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ tal que $x = a + b$. Seja $y \in \mathbb{Q}$ tal que $y < x$. Segue que, $y < a + b \implies y - a < b \implies y - a \in \beta$. Então, tem-se $y = a + (y - a) \in \alpha + \beta$.

3. Dado $x \in \alpha + \beta$, existem $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ tal que $x = a + b$. Como α e β não possuem máximo, existem racionais $s \in \alpha$ e $t \in \beta$ tal que $a < s$ e $b < t$. Então, tem-se $x = a + b < s + t$ onde $s + t \in \alpha + \beta$. Logo, $\alpha + \beta$ não possui elemento máximo.

Assim, fica provado as três condições necessárias para que se tenha $\alpha + \beta \in \mathcal{C}$.

□

Propriedades da Adição

A operação que associa a cada par (α, β) de elementos de $\mathcal{C}$ a sua soma $\alpha + \beta$ chamamos de adição e indicamos por $+$.

Lema 2. *Sejam $\alpha \in \mathcal{C}$, um racional $u < 0$ e M_α o conjunto das cotas superiores de α. Então, existem $p \in \alpha$, $q \in M_\alpha$, $q \neq \text{mín} M_\alpha$ (caso exista este mínimo), tais que $p - q = u$.*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 2. *A adição satisfaz as propriedades:*

1. *Associativa:* $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$.

2. *Comutatividade:* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}$.

3. *Existência de Elemento Neutro:* $\alpha + 0^* = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathcal{C}$.

4. *Inverso aditivo:* $\forall \alpha \in \mathcal{C}$, $\exists \beta \in \mathcal{C}$; $\alpha + \beta = 0^*$.

5. *Compatibilidade da adição com a ordem:* $\alpha \leq \beta \implies \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$.

Demonstração. As duas primeiras propriedades são triviais decorrendo da associatividade e comutatividade em $\mathbb{Q}$.

Dado $x \in \alpha + 0^*$, existem $a \in \alpha$ e $u < 0$, $u \in \mathbb{Q}$ tais que $x = a + u$. Segue que, $a + u < a \implies x < a \implies x \in \alpha$. Então, $\alpha + 0^* \subset \alpha$. Vejamos a inclusão contraria. Dado $x \in \alpha$, existe $a \in \alpha$ tal que $x < a$. Segue que, $x < a \implies x = a + (x - a) \in \alpha + 0^*$ donde $\alpha \subset \alpha + 0^*$. Assim fica provado a terceira propriedade.

Seja $\alpha \in \mathcal{C}$. Considere o corte $\beta = \{p \in \mathbb{Q}; -p \in M_\alpha \text{ e } -p \neq \text{mín} M_\alpha\}$ (Exercício!). Dado $x \in \alpha + \beta$, existem $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ tais que $x = a + b$. Segue que, $b \in \beta \implies -b > a \implies a + b < 0 \implies x < 0 \implies x \in 0^*$. Então, $\alpha + \beta \subset 0^*$. Vejamos a inclusão contraria. Dado $x \in 0^*$, pelo lema anterior, existem $a \in \alpha$ e $-b \in M_\alpha$ com $-b \neq \text{mín} M_\alpha$, tais que $x = a - (-b)$ donde $x = a + b \in \alpha + \beta$. Então, $0* \subset \alpha + \beta$. Assim fica provado a quarta propriedade.

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$, com $\alpha \leq \beta$. Dado $x \in \alpha + \gamma$, existem $a \in \alpha$ e $c \in \gamma$ tais que $x = a + c$. Como $a \in \alpha \implies a \in \beta$. Logo, $x = a + c \in \beta + \gamma$. Ficando provado a quinta propriedade.

□

Teorema 3. *O inverso aditivo é único. Ou seja, se $\alpha + \beta = 0^*$ e $\alpha + \gamma = 0^*$, então $\beta = \gamma$.*

Demonstração. $\beta = 0^* + \beta = (\gamma + \alpha) + \beta = \gamma + (\alpha + \beta) = \gamma + 0^* = \gamma$

□

Teorema 4. *Unicidade do elemento neutro. Ou seja, se $\alpha + \gamma = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{C}$, então $\gamma = 0^*$.*

Demonstração. Simplesmente, $0^* + \gamma = 0^* \implies \gamma = 0^*$.

□

Multiplicação em $\mathcal{C}$

Teorema 5. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, com $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$. Então, $\gamma = \mathbb{Q}_{\leq 0} \cup \{ab; a \in \alpha, b \in \beta, a > 0, b > 0\}$ é um corte.*

Demonstração. Exercício.

□

Definição: Sejam $\alpha \in \mathcal{C}$ e $\beta \in \mathcal{C}$. Definimos a multiplicação (ou produto) de α e β por:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \mathbb{Q}_{\leq 0} \cup \{ab; a \in \alpha, b \in \beta, a > 0, b > 0\}, & \text{se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ 0^*, & \text{se } \alpha = 0^* \text{ ou } \beta = 0^* \\ -\{(-\alpha)\beta\}, & \text{se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ -\{\alpha(-\beta)\}, & \text{se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \\ (-\alpha)(-\beta), & \text{se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases} \tag{1}$$

Propriedades da Multiplicação

Lema 3. *Sejam $\alpha > 0^*$ um corte e $u \in \mathbb{Q}$ com $0 < u < 1$. Então, existem racionais $p \in \alpha, q \in M_\alpha$, com $q \neq mín M_\alpha$ (caso exista), tais que $\frac{p}{q} = u$.*

Demonstração. Exercício.

□

Teorema 6. *Sejam α, β e γ cortes quaisquer. A multiplicação possui as seguintes propriedades:*

1. $(\alpha \cdot \beta)\gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
2. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
3. $\alpha \cdot 1^* = \alpha$.
4. *Se* $\alpha \neq 0^*$, *existe* $\beta \in \mathcal{C}$ *tal que* $\alpha \cdot \beta = 1^*$.
5. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
6. $\alpha \leq \beta$ *e* $0^* \leq \gamma \implies \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

Demonstração. As duas primeiras propriedades são triviais.

Se $\alpha > 0^*$, note que $\alpha \cdot 1^* = \mathbb{Q}_{\leq 0} \cup \{ab; a \in \alpha, a > 0, 1 > b > 0\}$. Tem-se $x \in \alpha \cdot 1^*$ e $x \leq 0 \implies x \in \alpha$. Também, $x \in \alpha \cdot 1^*$ e $x > 0 \implies x = au$ com $a \in \alpha$, $a > 0$, e $0 < u < 1$. Então, $au < a \implies x = au \in \alpha$, ou seja, $\alpha \subset \alpha \cdot 1^*$. Para a inclusão contraria, temos que $x \in \alpha$ e $x \leq 0 \implies x \in \alpha \cdot 1^*$, também $x \in \alpha e x > 0 \implies \exists a \in \alpha$, com $x < a$. Assim, $x = a \cdot \frac{x}{a} \in \alpha \cdot 1^*$. Então, tem-se $\alpha \subset \alpha \cdot 1^*$. Se $\alpha = 0^*$, pela definição temos $\alpha \cdot 1^* = 0^* \cdot 1^* = 0^* = \alpha$. Se $\alpha < 0^*$, então $\alpha \cdot 1^* = -[(-\alpha) \cdot 1^*] = -[-\alpha] = \alpha$. Fica provado a terceira propriedade.

□

As outras propriedades ficam como exercício.

Teorema do Supremo

Um subconjunto $A \subset \mathcal{C}$ é dito *limitado superiormente* se existe um corte m tal que $\alpha \leq m$, para todo $\alpha \in A$.

Lema 4. *Seja A um subconjunto de $\mathcal{C}$, não-vazio e limitado superiormente. Então,*

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$$

é um corte.

Demonstração. Sendo $A \neq \emptyset$, existe $\alpha \in A$, e, como $\alpha \neq \phi$, então $\gamma \neq \phi$. Sendo A limitado superiormente, existe um corte m tal que $\alpha \leq m$, para todo $\alpha \in A$. Como m é um corte, existe $x \in \mathbb{Q}$ com $x \notin m$. Daí, para todo $\alpha \in A$, $x \notin \alpha \implies x \notin \gamma$, e portanto, $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Assim, fica satisfeita a primeira condição.

Sejam $p \in \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{Q}$, com $p \in \gamma$ e $q < p$. Temos que $p \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$ e $q < p \implies q \in \alpha \implies q \in \gamma$. Assim, fica satisfeita a segunda condição.

Dado $p \in \gamma$, existe $\alpha \in A$ tal que $p \in \alpha$. Como α não tem máximo, existe $t \in \alpha$, com $t > p$. Note que $t \in \gamma$. Assim, para todo $p \in \gamma$, existe $t \in \gamma$ tal que $p < t$. Logo, γ não possui máximo, sendo satisfeita a terceira condição.

□

Teorema 7. *Se $A \subset \mathcal{C}$ é não-vazio e limitado superiormente, então A admite supremo.*

Demonstração. Seja $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. Pelo lema anterior, γ é um corte. Segue que, para todo $\alpha \in A$ tem-se $\gamma \supset \alpha$, ou seja, $\gamma \geq \alpha$. Então, α é cota superior de A. Por outro lado, se γ' é uma cota superior qualquer de A, temos que $\gamma' \geq \alpha$ para todo $\alpha \in A$, e portanto, $\gamma' \supset \alpha$ para todo $\alpha \in A$. Então, $\gamma' \supset \gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$, ou seja, $\gamma' \geq \gamma$. Logo, γ é a menor cota superior de A, isto é, $\gamma = \sup A$.

$\square$

Com a propriedade do supremo em mãos, podemos então definir $\mathcal{C}$ como o *conjunto dos números reais* que denotaremos por $\mathbb{R}$.