金融工程笔记(1)--状态价格

孙孟越
量化交易/清华数学/金融

『状态价格』可以用来给证券定价。这个概念我感觉挺不一样的。

概率论中有一个用于定价的自然定义，通过计算期望 Expectation 来给资产进行定价。比如有 50% 概率得到 100 元 50% 概率得到 80 元，就定价为 90 元。在其上发展出了更多衍生的定价策略，比如用效用函数代替直接的价格。这些无非是在不同的情况中取得了一个加权平均。而利用『状态价格』的定价，确是完全不一样的概念。

我现在利用数学的语言，解释一下『状态价格』的理念，使之符合数学直觉。这里需要大学二年级概率论和泛函的基本知识。

未来的经济状况构成一个概率空间 $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$，每个证券未来的价格其实都是一个**随机变量**，也就是一个 $\Omega \to \mathbb{R}$ 的函数。

考虑全体的证券组合（Ω 上的全体随机变量）构成一个实线性空间 V。而**现价函数** F 就是一个定义在 V 上的线性泛函。

现在假设 Ω 是有限集合，也就是说，未来只有有限种经济情况。那么 $\dim V$ 也是有限的，而且还可以把每个 Ω 上的随机变量，分解为基本随机变量的之和。

具体地，假设 $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$，即未来有 n 种可能，那么每个随机变量可以分解为这 n 个随机变量 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 的线性组合。这里的 $Y_i(j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$。我们就把 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 叫做基本证券。

比如 $X(\omega) = a_1 Y_1(\omega) + \cdots + a_n Y_n(\omega)$，分别取 $\omega = 1, 2, \ldots, n$ 知道，a_k 就是第 k 种经济情况下的证券的未来价格。

举个例子看看，比如未来只有两种经济状况，1 和 2。比如第一种情况下，证券 X_1 的回报是 $X_1(1) = 100$；而第二种情况下，证券 X_1 的回报是 $X(2) = 40$。那么就可以分解为 $X_1 = 100Y_1 + 40Y_2$。如果是无风险证券，那可能就分解为 $X_2 = 1.02Y_1 + 1.02Y_2$。

我们终于可以定价了，两边作用上**现价函数** F，就是 $F(X) = a_1 F(Y_1) + \cdots + a_n F(Y_n)$。利用它，我们就得到了 $F(Y_1), \ldots, F(Y_n)$ 的方程组。从而解出$F(Y_1), \ldots, F(Y_n)$，**这就叫 $Y_1, \ldots, Y_n$ 的状态价格。**

回到刚才的例子，比如证券 X_1 现在卖 60 元，证券 X_2 现在卖 1 元，那么就是

$$\begin{cases} 60 = F(X_1) = 100F(Y_1) + 40F(Y_2) \\ 1 = F(X_2) = 1.02F(Y_1) + 1.02F(Y_2) \end{cases}$$

解出 $F(Y_1) = 0.346405, F(Y_2) = 0.633987$ 就得到了状态价格。

这个理论的用处在哪呢。比如你现在有了第三个证券 X_3，你知道他第一个状态会得到 200 元，第二个状态下会得到 120 元，那你就可以使用 $200F(Y_1) + 120F(Y_2)$ 的值 145.359 为证券 X_3 定价。

发布于 2020-09-24 22:39