已关注

Geometric Brownian motion

期权定价1-资产的几何布朗运动

蛋尼蛋尼往前冲

23 人赞同了该文章

引言

本书。北大光华学院的刘琦老师开设的《衍生品定价》是国内为数不多把后半本书讲清楚的课程。 我连续两年蹭过他的这门课,在一定程度上把后半本书了解了一下。事实上,后半本书没有想象中

"期权定价"这个系列主要是针对John Hull "Options, Futures, and Other Derivatives"的后半

▲ 赞同 23 ▼ ● 4 条评论 4 分享 ● 喜欢 ★ 收藏 □ 申请转载 … 很简单的语言,把复杂的知识细细讲给找们听;而且对老帅有一个重要的特点,每节课前半节内容

都是带着大家复习上节课的内容。我深深体会到了,一个好的大学老师不仅仅能够开设高深的课 程,还能够把高深的课程用浅显的语言讲给不理解的人。感谢刘老师允许我蹭课,受益匪浅~如果 大家对于John Hull后半本书感兴趣,又苦于没有资源,也许我的整理能够给你带来一些曙光~

复习期权定价中的几何布朗运动。

1. 特殊的马尔科夫过程-维纳过程z

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t}, \epsilon \sim N(0,1)$$

因此任何两端不重叠的过程是相互独立的。

 $z_T - z_t = \Delta z = \epsilon \sqrt{T - t} \sim N(0, T - t)$,这个性质极为重要。下面我们推导股价的时 候, 也是用这个公式。

1. 维纳过程

dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz

• 算术布朗运动: dx = adt + bdz, 从而有 $x_T - x_0 = \int_0^T (adt + bdz) = aT + b(z_T - z_0) \sim N(aT, b^2T)$, 缺点:可以是负数, 违背股价全部为正数的现实。

• 几何布朗运动: dx = axdt + bxdz, 能够保证股价都是正数

2. 泰勒展开

$$\Delta G(S,t) = rac{\partial G}{\partial S} \Delta S + rac{\partial G}{\partial t} \Delta t + rac{1}{2} rac{\partial^2 G}{\partial S^2} \Delta S^2 + rac{1}{2} rac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + rac{1}{2} rac{\partial^2 G}{\partial S \partial t} \Delta S \Delta t + \dots$$

• $\Delta S^2 = S^2 \mu^2 \Delta t^2 + 2 S^2 \mu \sigma \epsilon (\Delta)^{rac{3}{2}} + S^2 \sigma^2 \epsilon^2 \Delta t$

• 因为 $\Delta S = S\mu\Delta t + S\sigma\Delta z$; 且 Δt 很小的时候, Δt 的高阶项全部接近0;

 $E(\epsilon^2) = E^2(\epsilon) + Var(\epsilon) = 1$ $\Delta S^2 \approx S^2 \sigma^2 \Delta t$

• $\Delta G(S,t) = rac{\partial G}{\partial S}(S\mu\Delta t + S\sigma\Delta z) + rac{\partial G}{\partial t}\Delta t + rac{1}{2}rac{\partial^2 G}{\partial S^2}*\left(S^2\sigma^2\Delta t
ight)$

 $=\Delta t\left(rac{\partial G}{\partial S}S\mu+rac{\partial G}{\partial t}+rac{1}{2}rac{\partial^2 G}{\partial S^2}S^2\sigma^2
ight)+rac{\partial G}{\partial S}S\sigma\Delta z$

3. 例子 (1) 股票的远期合约为 $G_t = S_t e^{r(T-t)}$

 $\Delta G_t = \Delta t \left(rac{\partial G_t}{\partial S_t} S_t \mu + rac{\partial G_t}{\partial t} + rac{1}{2} rac{\partial^2 G_t}{\partial S^2} S_t^2 \sigma^2
ight) + rac{\partial G_t}{\partial S_t} S_t \sigma \Delta z$ $\therefore \frac{\partial G_t}{\partial S_t} = e^{r(T-t)}, \frac{\partial G_t}{\partial t} = -rS_t e^{r(T-t)} = -rG_t, \frac{\partial^2 G_t}{\partial S^2} = 0$

 $\Delta G_t = \Delta t \left(e^{r(T-t)} S_t \mu - r G_t \right) + e^{r(T-t)} S_t \sigma \Delta z$ $= (\mu - r) G_t * \Delta t + G_t \sigma \Delta z$

(2) 求出股票的股价 $G_t = ln(S_t)$

远期依然是一个GBM。

$$\Delta G_t = \Delta t \left(\frac{\partial G_t}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{\partial G_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma^2 \right) + \frac{\partial G_t}{\partial S_t} S_t \sigma \Delta z$$

$$\therefore \frac{\partial G_t}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \frac{\partial G_t}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}$$

$$\therefore \Delta G_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \Delta z$$

$$\therefore \Delta \ln(S_t) = \ln S_T - \ln S_t = \ln \frac{S_T}{S_t} = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma \epsilon \sqrt{T - t}$$

$$\therefore S_T = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma \epsilon \sqrt{T - t} \right)$$

$$\therefore S_T = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\epsilon\sqrt{T-t}\right)$$
其中,控制 S_T 的关键变量是 $\epsilon \sim N(0,1)$ 。通过对 ϵ 采样,我们能够对股价行进模拟。

(3) 均值回复过程mean-reverting process

• 适合利率的变化过程。

• $dr_t = \theta(\mu - r_t)dt + \sigma dz_t$ • $G_t = r_t e^{\theta * t}$

 $\Delta G_t = \Delta t \left(rac{\partial G_t}{\partial r_t} heta(\mu - r_t) + rac{\partial G_t}{\partial t} + rac{1}{2} rac{\partial^2 G_t}{\partial r_t^2} \sigma^2
ight) + rac{\partial G_t}{\partial r_t} \sigma \Delta z$

 $\because rac{\partial G_t}{\partial r_t} = e^{ heta*t}, rac{\partial G_t}{\partial t} = r_t heta e^{ heta*t} = heta G_t, rac{\partial^2 G_t}{\partial r_t^2} = 0$ $\therefore \Delta G_t = \Delta t \left(e^{\theta * t} * \theta (\mu - r_t) + \theta G_t \right) + e^{\theta * t} \sigma \Delta z$

 $= heta \mu e^{ heta t} \Delta t + e^{ heta * t} \sigma \Delta z$ $G_T - G_0 = \int_0^T \left(\theta \mu e^{\theta t} dt + e^{\theta t} \sigma dz\right)$

 $=\mu\left(e^{ heta t}-1
ight)+e^{ heta t}\sigma\int_0^Tdz$ $G_T = S_T e^{\theta T}, G_0 = S_0$

(4) 双重布朗运动

 $\therefore S_T e^{\theta T} - S_0 = \mu \left(e^{\theta t} - 1 \right) + e^{\theta t} \sigma \int_0^T dz$

 $\therefore S_T - S_0 e^{-\theta T} = \mu \left(1 - e^{-\theta T}\right) + \sigma \int_0^T dz$ $E(S_T) = e^{-\theta T} S_0 + \mu \left(1 - e^{-\theta T} \right), \text{ we have } E(dz) = 0$ • .:. 当T无穷大的时候, $E(S_T) = \mu$,从而是均值回复。

• 注意: 此处的 ρ 全称是 "M和P的变化率的相关系数"。

P是物价指数,M是货币供给量。假设两者服从GBM。

$$rac{dP}{P}=\mu_Pdt+\sigma_Pdz_P$$
 ,且 $dz_Pdz_M=
ho dt$;定义 $m=rac{M}{P}$ 即为实际货币供给量,那 $rac{dM}{M}=\mu_Mdt+\sigma_Mdz_M$ 么我们能够推导出m的随机过程。
$$cov\left(rac{dP}{P},rac{dM}{M}
ight)=cov\left(\sigma_Pdz_P,\sigma_Mdz_M
ight)=\sigma_P\sigma_M
ho dt$$

• 建模:

• 例如,CPI每月进行公布,因此 $dt=rac{1}{12}$,我们可以获取两年的月度数据,时间长度是24; P 和M时间序列各为24个样本; • 那么 dP/P 就是本月相对于上月的CPI变化百分比, dM/M 就是本月相对于上月的名以货

币供给量变化百分比,那么dP/P和dM/M各有23个样本; • 同时能计算mu的时间序列 $\mu_i = rac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}}$, 即有 $\overrightarrow{\mu_{\mathbf{P}}} = (\mu_{p,1} \ \mu_{p,2} \ \dots \ \mu_{p,23}), \mu_p = \frac{sum(\overrightarrow{\mu_{\mathbf{P}}})}{23}, \sigma_P = std(\overrightarrow{\mu_{\mathbf{P}}})$,同样能够计算M的各

种数值。

• 最后计算 ρ 。

 $dm = rac{\partial m}{\partial M} dM + rac{\partial m}{\partial P} dP + rac{1}{2} rac{\partial^2 m}{\partial M^2} dM^2 + rac{1}{2} rac{\partial^2 m}{\partial P^2} dP^2 + rac{1}{2} rac{\partial^2 m}{\partial P \partial M} dP dM$

 $=rac{1}{P}dM-rac{M}{P^2}dP+0+rac{M}{P^3}\sigma_P^2P^2dt-rac{1}{P^2}
ho\sigma_P\sigma_MPMdt$

 $=mrac{dM}{M}-mrac{dP}{P}+m\sigma_P^2dt-m\sigma_P\sigma_Mdt$ $\therefore \frac{dm}{m} = \mu_M dt + \sigma_M dz_M - \mu_P dt - \sigma_P dz_P + \sigma_P^2 dt - \rho \sigma_P \sigma_M dt$ $=(\mu_M-\mu_P+\sigma_P^2ho\sigma_P\sigma_M)dt+(\sigma_M dz_M-\sigma_P dz_P)$

• 也服从几何布朗运动

编辑于 2021-08-24 13:38 内容所属专栏

Options, Futures, and Other Derivatives, 9th Edition, Copyright © John C. Hull 2014

做自己喜欢的事儿~

理性发言, 友善互动

● 回复 ● 喜欢

订阅专栏



● 回复 ● 喜欢 2020-05-23 Daniel 蛋尼蛋尼往前冲 作者 第二个问题: sigma_x是X的收益率的波动率,而不是X本身的波动率。两者绝对不一 样;两者的关系不太能够使用数学表达式写出来。。 ● 回复 ● 喜欢 2020-05-23

蛋尼蛋尼往前冲 作者 第一个问题:①不用加上期望;②rho定义为两个资产价格变动率的相关系数,建模时, 首先取协方差cov(dP/P, dM/M)=sigma_P*sigma_M*rho*dt; dP/P dM/M即为本月较 上月的变化率,dt=1/12, sigma_P和sigma_M也能够从mu_p和mu_M的时间序列中

2020-05-23 不想秃头

得到;从而能够计算得到rho。

dz1•dz2=pdt? 另外这个dz1•dz2=pdt 是不是左式应该加上E(*)。 ● 回复 ● 喜欢 2020-05-23

我可以问一下,那个双重布朗运动那块。如果两个资产的相关系数是p,为什么能直接说

推荐阅读



量子金服







