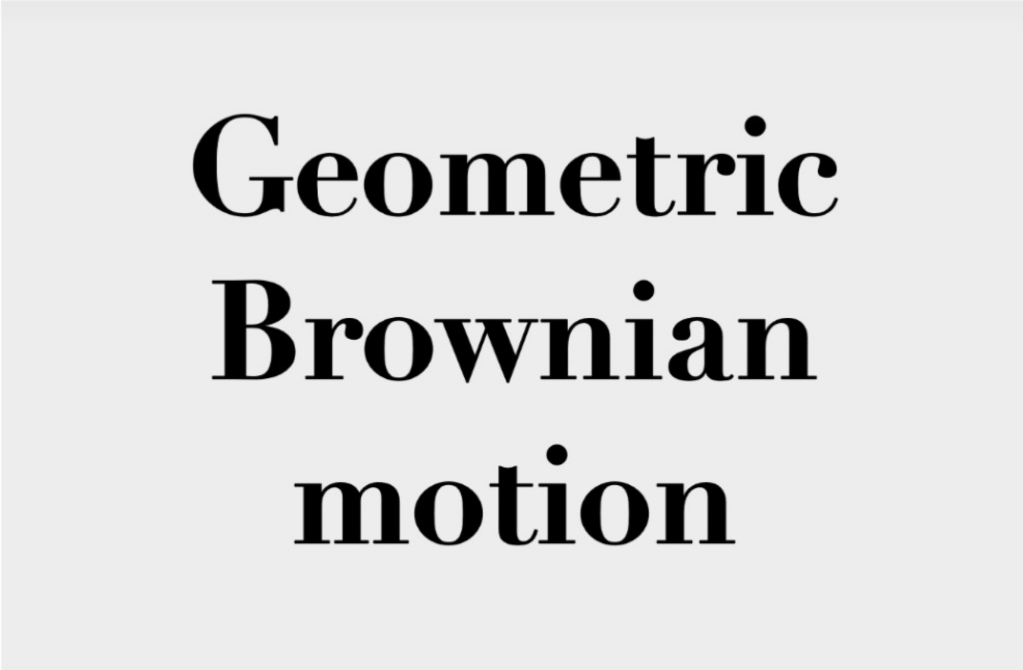

期权定价1-资产的几何布朗运动

蛋尼蛋尼往前冲 已关注

引言

“期权定价”这个系列主要是针对John Hull "Options, Futures, and Other Derivatives"的后半本书。北大光华学院的刘琦老师开设的《衍生品定价》是国内为数不多把后半本书讲清楚的课程。我连续两年蹭过他的这门课，在一定程度上把后半本书了解了一下。事实上，后半本书没有想象中

很简单的语言，把复杂的知识细细讲给我们听；而且刘老师有一个重要的特点，每节课前半节内容都是带着大家复习上节课的内容。我深深体会到了，一个好的大学老师不仅仅能够开设高深的课程，还能够把高深的课程用浅显的语言讲给不理解的人。感谢刘老师允许我蹭课，受益匪浅~如果大家对于John Hull后半本书感兴趣，又苦于没有资源，也许我的整理能够给你带来一些曙光~

复习期权定价中的几何布朗运动。

1. 特殊的马尔科夫过程-维纳过程z

$$\Delta z=\epsilon\sqrt{\Delta t},\epsilon\sim N(0,1)$$

因此任何两端不重叠的过程是相互独立的。

$z_T-z_t=\Delta z=\epsilon\sqrt{T-t}\sim N(0,T-t)$，这个性质极为重要。下面我们推导股价的时候，也是用这个公式。

1. 维纳过程

$$dx=a(x,t)dt+b(x,t)dz$$

- 算术布朗运动：$dx=adt+bdz$，从而有 $x_T-x_0=\int_0^T(adt+bdz)=aT+b(z_T-z_0)\sim N(aT,b^2T)$，缺点：可以是负数，违背股价全部为正数的现实。
- 几何布朗运动：$dx=axdt+bxdz$，能够保证股价都是正数

2. 泰勒展开

$$\Delta G(S,t)=\frac{\partial G}{\partial S}\Delta S+\frac{\partial G}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\Delta S^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S\partial t}\Delta S\Delta t+\dots$$

- 因为 $\Delta S=S\mu\Delta t+S\sigma\Delta z$；且 Δt很小的时候，Δt的高阶项全部接近0；
- $\Delta S^2=\underbrace{S^2\mu^2\Delta t^2+2S^2\mu\sigma\epsilon(\Delta)^{\frac{3}{2}}}_{\Delta t\text{的高阶项全部近似0}}+S^2\sigma^2\epsilon^2\Delta t$
  $E(\epsilon^2)=E^2(\epsilon)+Var(\epsilon)=1$
  $\therefore\Delta S^2\approx S^2\sigma^2\Delta t$
- $\Delta G(S,t)=\frac{\partial G}{\partial S}(S\mu\Delta t+S\sigma\Delta z)+\frac{\partial G}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}*\left(S^2\sigma^2\Delta t\right)$
  $=\Delta t\left(\frac{\partial G}{\partial S}S\mu+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}S^2\sigma^2\right)+\frac{\partial G}{\partial S}S\sigma\Delta z$

3. 例子

（1）股票的远期合约为 $G_t=S_te^{r(T-t)}$

$$\Delta G_t=\Delta t\left(\frac{\partial G_t}{\partial S_t}S_t\mu+\frac{\partial G_t}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2\right)+\frac{\partial G_t}{\partial S_t}S_t\sigma\Delta z$$
$$\because\frac{\partial G_t}{\partial S_t}=e^{r(T-t)},\frac{\partial G_t}{\partial t}=-rS_te^{r(T-t)}=-rG_t,\frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2}=0$$
$$\therefore\Delta G_t=\Delta t\left(e^{r(T-t)}S_t\mu-rG_t\right)+e^{r(T-t)}S_t\sigma\Delta z$$
$$=(\mu-r)G_t*\Delta t+G_t\sigma\Delta z$$

远期依然是一个GBM。

（2）求出股票的股价 $G_t=ln(S_t)$

$$\Delta G_t=\Delta t\left(\frac{\partial G_t}{\partial S_t}S_t\mu+\frac{\partial G_t}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2\right)+\frac{\partial G_t}{\partial S_t}S_t\sigma\Delta z$$
$$\because\frac{\partial G_t}{\partial S_t}=\frac{1}{S_t},\frac{\partial G_t}{\partial t}=0,\frac{\partial^2 G_t}{\partial S_t^2}=-\frac{1}{S_t^2}$$
$$\therefore\Delta G_t=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\Delta z$$
$$\therefore\Delta\ln(S_t)=\ln S_T-\ln S_t=\ln\frac{S_T}{S_t}=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\epsilon\sqrt{T-t}$$
$$\therefore S_T=S_t\exp\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\epsilon\sqrt{T-t}\right)$$

其中，控制 S_T 的关键变量是 $\epsilon\sim N(0,1)$。通过对 ϵ 采样，我们能够对股价行进模拟。

（3）均值回复过程mean-reverting process

- 适合利率的变化过程。
- $dr_t=\theta(\mu-r_t)dt+\sigma dz_t$
- $G_t=r_te^{\theta*t}$
  $\Delta G_t=\Delta t\left(\frac{\partial G_t}{\partial r_t}\theta(\mu-r_t)+\frac{\partial G_t}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_t}{\partial r_t^2}\sigma^2\right)+\frac{\partial G_t}{\partial r_t}\sigma\Delta z$
  $\because\frac{\partial G_t}{\partial r_t}=e^{\theta*t},\frac{\partial G_t}{\partial t}=r_t\theta e^{\theta*t}=\theta G_t,\frac{\partial^2 G_t}{\partial r_t^2}=0$
  $\therefore\Delta G_t=\Delta t\left(e^{\theta*t}*\theta(\mu-r_t)+\theta G_t\right)+e^{\theta*t}\sigma\Delta z$
  $=\theta\mu e^{\theta t}\Delta t+e^{\theta*t}\sigma\Delta z$
  $\therefore G_T-G_0=\int_0^T\left(\theta\mu e^{\theta t}dt+e^{\theta t}\sigma dz\right)$
  $=\mu\left(e^{\theta t}-1\right)+e^{\theta t}\sigma\int_0^Tdz$
  $\because G_T=S_Te^{\theta T},G_0=S_0$
  $\therefore S_Te^{\theta T}-S_0=\mu\left(e^{\theta t}-1\right)+e^{\theta t}\sigma\int_0^Tdz$
  $\therefore S_T-S_0e^{-\theta T}=\mu\left(1-e^{-\theta T}\right)+\sigma\int_0^Tdz$
  $\therefore E(S_T)=e^{-\theta T}S_0+\mu\left(1-e^{-\theta T}\right)$, we have $E(dz)=0$
- $\therefore$ 当T无穷大的时候，$E(S_T)=\mu$, 从而是均值回复。

（4）双重布朗运动

P是物价指数，M是货币供给量。假设两者服从GBM。

$\frac{dP}{P}=\mu_Pdt+\sigma_Pdz_P$
$\frac{dM}{M}=\mu_Mdt+\sigma_Mdz_M$，且 $dz_Pdz_M=\rho dt$；定义 $m=\frac{M}{P}$ 即为实际货币供给量，那么我们能够推导出m的随机过程。

- $cov\left(\frac{dP}{P},\frac{dM}{M}\right)=cov\left(\sigma_Pdz_P,\sigma_Mdz_M\right)=\sigma_P\sigma_M\rho dt$
- 注意：此处的 ρ 全称是“M和P的变化率的相关系数”。

- 建模：
  - 例如，CPI每月进行公布，因此 $dt=\frac{1}{12}$，我们可以获取两年的月度数据，时间长度是24；P和M时间序列各为24个样本；
  - 那么 dP/P 就是本月相对于上月的CPI变化百分比，dM/M 就是本月相对于上月的名以货币供给量变化百分比，那么dP/P和dM/M各有23个样本；
  - 同时能计算mu的时间序列 $\mu_i=\frac{P_i-P_{i-1}}{P_{i-1}}$，即有 $\overrightarrow{\mu_P}=(\mu_{p,1}\ \ \mu_{p,2}\ \ \dots\ \ \mu_{p,23}),\mu_p=\frac{sum(\overrightarrow{\mu_P})}{23},\sigma_P=std(\overrightarrow{\mu_P})$，同样能够计算M的各种数值。
  - 最后计算ρ。

- $$dm=\frac{\partial m}{\partial M}dM+\frac{\partial m}{\partial P}dP+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial M^2}dM^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial P^2}dP^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial P\partial M}dPdM$$
  $$=\frac{1}{P}dM-\frac{M}{P^2}dP+0+\frac{M}{P^3}\sigma_P^2P^2dt-\frac{1}{P^2}\rho\sigma_P\sigma_MPMdt$$
  $$=m\frac{dM}{M}-m\frac{dP}{P}+m\sigma_P^2dt-m\sigma_P\sigma_Mdt$$
  $$\therefore\frac{dm}{m}=\mu_Mdt+\sigma_Mdz_M-\mu_Pdt-\sigma_Pdz_P+\sigma_P^2dt-\rho\sigma_P\sigma_Mdt$$
  $$=(\mu_M-\mu_P+\sigma_P^2-\rho\sigma_P\sigma_M)dt+(\sigma_Mdz_M-\sigma_Pdz_P)$$
- 也服从几何布朗运动

Options, Futures, and Other Derivatives, 9th Edition, Copyright © John C. Hull 2014

编辑于 2021-08-24 13:38