这个不难，但是要用到一些向量和矩阵运算的技巧。

首先，我们假设预期组合收益是给定的，不妨设其为 μ_*，可以看作是一个参数，后面会允许其变动。

首先将输入向量化：

$$\begin{cases}\mathbf{w}=(w_1,w_2,\ldots,w_m)\\ \boldsymbol{\mu}=(R_1,R_2,\ldots,R_m)\end{cases}$$

令方差协方差矩阵为 Σ，其(i,j)元素为 $\Sigma_{i,j}=\rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$。

我们的问题是给定约束条件(期望回报率向量和权重归一), 求方差的最小值:

$$\min_{\mathbf{w}}\sigma^2(\mathbf{w})=\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w} \quad (0)$$

s.t.

$$\begin{cases}\mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu}=\mu_*\\ \mathbf{w}^T\mathbf{1}=1\end{cases} \quad (1)$$

引入拉格朗日因子 λ,δ 我们求下列函数的无约束最小值:

$$F(\mathbf{w},\lambda,\delta)=\mathbf{w}^T\Sigma\mathbf{w}-\lambda\left(\mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu}-\mu_*\right)-\delta\left(\mathbf{w}^T\mathbf{1}-1\right)$$

令其对权重向量的梯度为零向量，即

$$\nabla_{\mathbf{w}}\sigma^2=\Sigma\mathbf{w}-\lambda\boldsymbol{\mu}-\delta\mathbf{1}=\mathbf{0}$$

解得

$$\mathbf{w}=\Sigma^{-1}\left(\lambda\boldsymbol{\mu}+\delta\mathbf{1}\right) \quad (2)$$

带入约束条件(1), 整理可得

$$\begin{cases}\lambda B+\delta A=\mu_*\\ \lambda A+\delta C=1\end{cases}$$

这里我们定义了 $A=\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}=\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu},B=\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu},C=\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$。

解上述的线性方程组得到

$$\begin{cases}\lambda=\frac{\mu_*C-A}{D}\\ \delta=\frac{B-\mu_*A}{D}\end{cases} \quad (3)$$

其中 $D=BC-A^2$。

结合(0)-(3), 求得此时的最优权重

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{\text{opt}}&=\Sigma^{-1}\left(\lambda\boldsymbol{\mu}+\delta\mathbf{1}\right)\\&=\frac{\mu_*C-A}{D}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}+\frac{B-\mu_*A}{D}\Sigma^{-1}\mathbf{1}\\&=\frac{B\Sigma^{-1}\mathbf{1}-A\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}+\mu_*\left(C\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-A\Sigma^{-1}\mathbf{1}\right)}{D}\end{aligned}$$

对应的方差为

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\mathbf{w}^T\Sigma^{-1}\mathbf{w}=\left(\lambda\boldsymbol{\mu}^T+\delta\mathbf{1}^T\right)\Sigma^{-1}\left(\lambda\boldsymbol{\mu}+\delta\mathbf{1}\right)\\&=\lambda^2B+2\lambda\delta A+\delta^2C\\&=\frac{1}{D^2}\left[B(\mu_*C-A)^2+2A\left(\mu_*C-A\right)\left(B-\mu_*A\right)+C(B-\mu_*A)^2\right]\\&=\frac{1}{D^2}\left(BC-A^2\right)\left[C\mu_*^2-2\mu_*A+B\right]\\&=\frac{1}{D}\left[C\mu_*^2-2\mu_*A+B\right]\end{aligned}$$

可以看到方差与预期回报 μ_* 之间是一个抛物线的关系。其上半段就是我们熟知的efficient frontier。抛物线左端点对应的是最小方差 $\sigma_{\min}$。可以求出此时对应的预期回报为

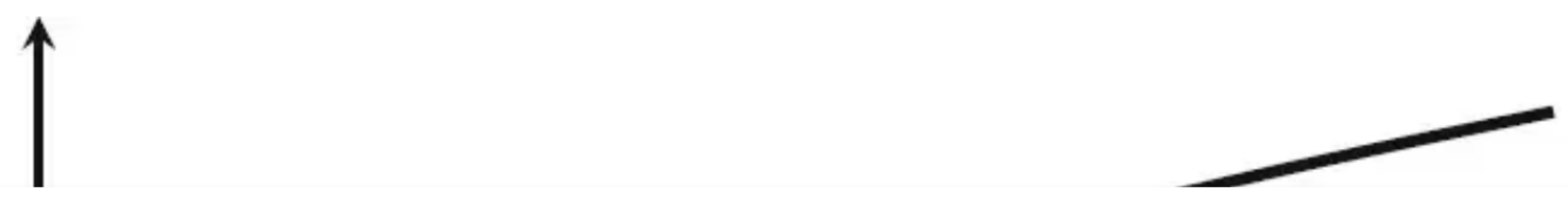
$$\frac{\partial\sigma^2_{\min}}{\partial\mu_*}=0\Longrightarrow C\mu_*=A\Longrightarrow\mu_*^{\text{opt}}=\frac{A}{C},$$

其值为

$$\sigma^2_{\min}=(BC-A^2)\left(\frac{A^2}{C}-2\frac{A^2}{C}+B\right)=\frac{1}{C}$$

此时对应权重为

$$\mathbf{w}_{\text{minopt}}=\frac{B\Sigma^{-1}\mathbf{1}-A\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}+\frac{A}{C}\left(C\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}-A\Sigma^{-1}\mathbf{1}\right)}{D}=\frac{1}{D}\left(B-\frac{A^2}{C}\right)\Sigma^{-1}\mathbf{1}=\frac{1}{C}\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$



怎样求 m 支股票组成的最小方差投资组合?