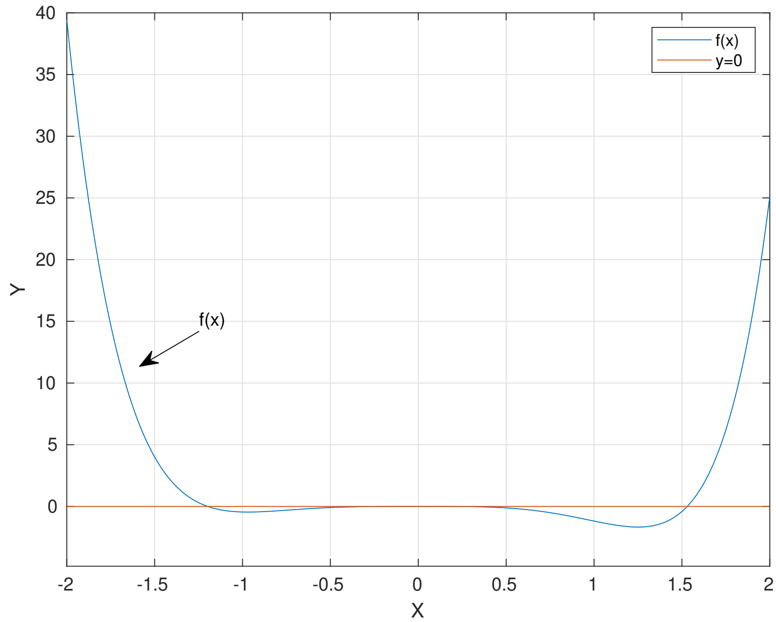
1η Υποχρεωτική Εργασία
Στο Μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης

Όνοματεπώνυμο: Γεώργιος Δάλλας
ΑΕΜ: 4116

5 Μαΐου 2024

1 Πρώτη Άσκηση

Γραφική παράσταση της $f(x) = \mathrm{e}^{\sin^3(x)} + x^6 - 2x^4 - x^3 - 1$.



Μετά απο την εφαρμογή των μεθόδων διχοτόμησης, Newton-Raphson και τέμνουσας στην συνάρτηση $f(x) = e^{\sin^3(x)} + x^6 - 2x^4 - x^3 - 1$, οι 3 ρίζες που βρέθηκαν είναι οι εξής:

1. $x_1 = -1.19762$
2. $x_2 = 0$
3. $x_3 = 1.53013$

Τα διαστήματα που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση της κάθε ρίζας είναι τα εξής:

1. $x_1 : [-2, -1]$
2. $x_2 : [-1, 1]$
3. $x_3 : [\frac{13}{10}, 2]$

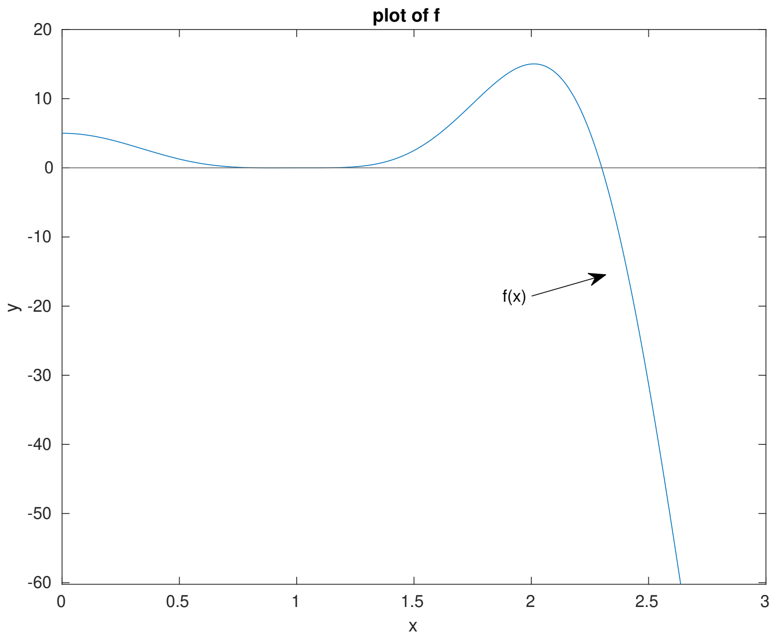
Για την ρίζα x_1, στην μέθοδο διχοτόμησης, χρειάστηκαν 18 επαναλήψεις για την επίτευξη της ακρίβειας 5 δεκαδικών ψηφίων. Για την μέθοδο Newton-Raphson χρησιμοποιήθηκαν 9 επαναλήψεις και για την μέθοδο τέμνουσας 14. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, καθώς η μέθοδος Newton- Raphson θεωρείται γρηγορότερη με την μέθοδο της τέμνουσας να ακολουθεί. Η μέθοδος της διχοτόμησης είναι αργή αλλά αξιόπιστη.

Για την χρήση της μεθόδου διχοτόμησης, η συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής και τα άκρα του διαστήματος που χρησιμοποιούνται να είναι αντίθετου προσήμου. Δυστηχώς, για την ρίζα $x_2 = 0$, δεν είναι δυνατή η εύρεση ενός τέτοιου διαστήματος, οπότε η χρήση της μεθόδου διχοτόμησης καθίσταται αδύνατη. Ακόμη, για $x = 0$ η $f'(x) = 3e^{\sin^3(x)} \cos(x) \sin^2(x) + 6x^5 - 8x^3 - 3x^2$ ισούται με 0, άρα ενώ στις υπόλοιπες τετραγωνικές ρίζες ($f'(x_1), f'(x_2) \neq 0$) η μέθοδος Newton-Raphson είναι η πιο αποδοτική, στην συγκεκριμένη ρίζα, καταφέρνει και φτάνει σε μια ικανοποιητική προσέγγιση μετά απο 32 επαναλήψεις. Αυτό παρατηρείται γενικά σαν πρόβλημα με τις ρίζες που δεν συγκλίνουν τετραγωνικά στην μέθοδο αυτή. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να εξηγηθεί εύκολα, καθώς με την μέθοδο του Newton- Raphson , χρησιμοποιείται εφαπτομένη της κάθε προσέγγισης στη συνάρτηση, για να βρεθεί η επόμενη προσέγγιση. Άρα με παράγωγο 0, η εφαπτομένη προφανώς θα οδηγήσει σε μια πολύ πιο μακρινή προσέγγιση από την επιθυμητή.. Επίσης προβληματική είναι και η μέθοδος της τέμνουσας, καθώς όταν $f' = 0$, μπορεί να χαλάσει η σύγκλιση του αλγορίθμου. Οπότε και με την μέθοδο της τέμνουσας, η μέθοδος καταλήγει σε μια κοντινή προσέγγιση έπειτα από 53 επαναλήψεις.

Τέλος, για την ρίζα x_3, η μέθοδος της διχοτόμησης χρειάστηκε 18 επαναλήψεις, η μέθοδος Newton-Raphson 8 και η μέθοδος της τέμνουσας 10, που είναι παρόμοια αποτελέσματα με την πρώτη ρίζα και αναμενόμενα, γνωρίζοντας την αποδοτικότητα των παραπάνω μεθόδων.

2 Δεύτερη Άσκηση

Γραφική παράσταση της
$f(x) =$
$94cos(x)^3 - 24*cos(x) + 177sin(x)^2 - 108*sin(x)^4 - 72*cos(x)^3sin(x)^2 - 65.$



Μετά απο την εφαρμογή των τροποποιημένων μεθόδων διχοτόμησης, Newton-Raphson και τέμνουσας στην συνάρτηση $f(x) = 94cos(x)^3 - 24*cos(x) + 177sin(x)^2 - 108*sin(x)^4 - 72*cos(x)^3sin(x)^2 - 65$, οι 3 ρίζες που βρέθηκαν είναι οι εξής:

1. $x_1 = 0.84106$
2. $x_2 = 1.04720$
3. $x_3 = 2.30052$

Τα διαστήματα που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση της κάθε ρίζας είναι τα εξής:

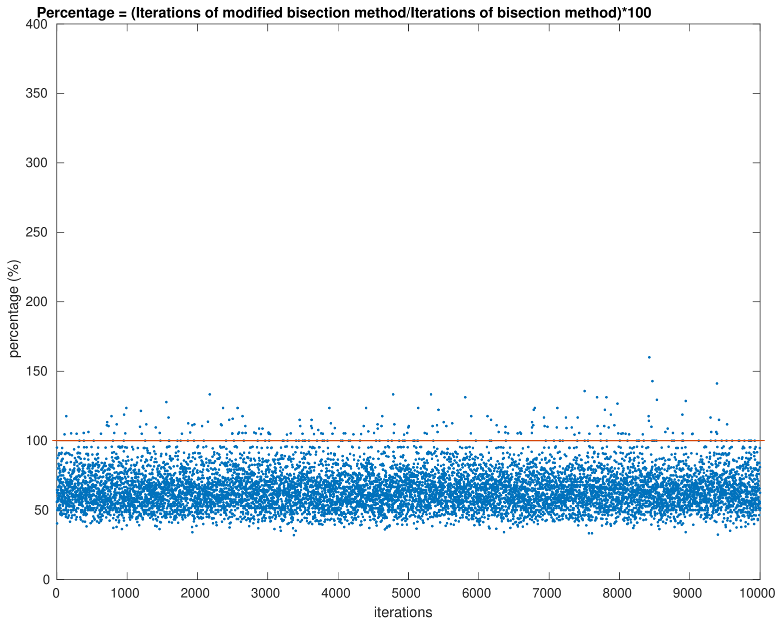
1. $x_1 : [0, \frac{7}{8}]$
2. $x_2 : [\frac{9}{10}, 2]$
3. $x_3 : [\frac{21}{10}, 3]$

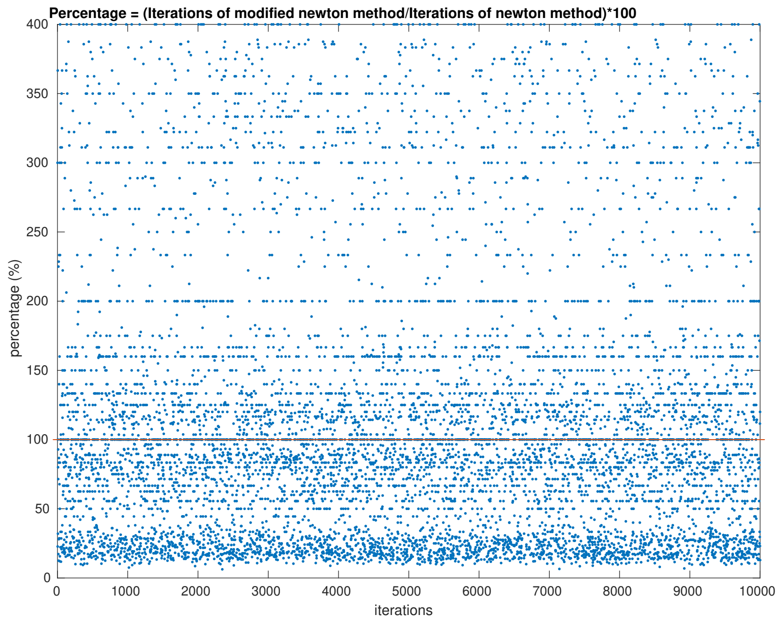
Για την τροποποιημένη μέθοδο τέμνουσας το τρίτο σημείο που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε διάστημα, είναι το μέσο του διαστήματος αυτού. Μετά από την εκτέλεση του τροποποιημένου αλγορίθμου διχοτόμησης 10 φορές, καταγράφηκαν τα εξής αποτελέσματα για της επαναλήψεις που χρειάστηκαν στην εύρεση της ρίζας:

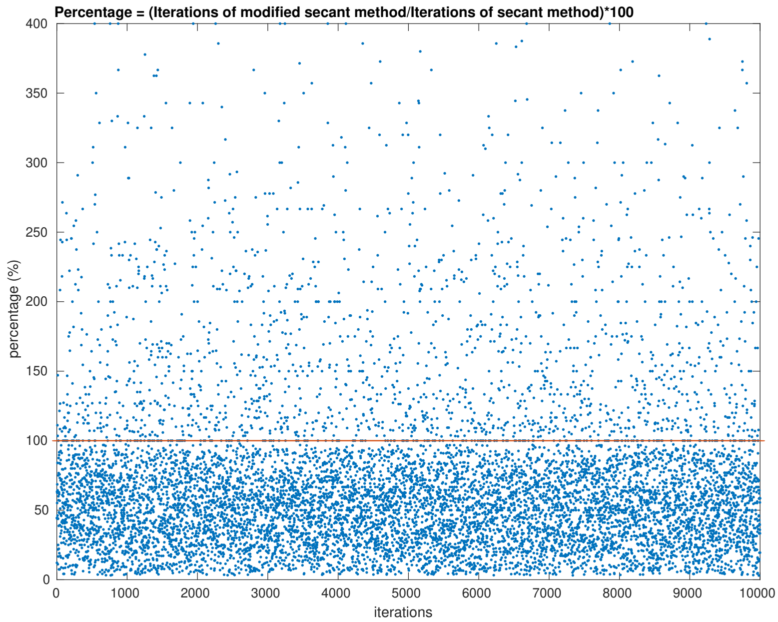
x_1	x_2	x_3
18	23	18
27	24	29
26	25	24
14	21	30
29	21	25
27	37	24
20	25	32
29	20	30
22	20	22
24	20	28

Όπως εύκολα παρατηρείται, ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει πάντα στο ίδιο σημείο. Το χαρακτηριστικό αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στον καθορισμό του επόμενου διαστήματος που χρησιμοποιείται σε κάθε επανάληψη, επιλέγεται πάντα ένα τυχαίο σημείο που ανήκει στο προηγούμενο διάστημα.

Για την σύγκριση ταχύτητας σύγκλισης των τροποποιημένων με των κλασικών μεθόδων, χρησιμοποιήθηκαν 1000 τυχαία διανύσματα. Έπειτα από την καταγραφή των αποτελεσμάτων, συμπεραίνεται ότι η τροποποιημένη μέθοδος διχοτόμησης είναι 35.04% πιο αργή από την κλασική. Η τροποποιημένη μέθοδος τέμνουσας είναι 35.73% πιο αργή και η τροποποιημένη μέθοδος Νεωτον-Ραπησον 59.9% πιο γρήγορη.


Percentage = (Iterations of modified bisection method/Iterations of bisection method)*100
percentage (%)
iterations
0
50
100
150
200
250
300
350
400
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000


Percentage = (Iterations of modified newton method/Iterations of newton method)*100
percentage (%)
iterations
0
50
100
150
200
250
300
350
400
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000



3 Τρίτη Άσκηση

Για την παραγοντοποίηση PA=LU ζητείται ενας πίνακας A και ένα δυάνισμα b. Ο πίνακας A που χρησιμοποιήθηκε είναι ο εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Το δυάνισμα b που χρησημοποιήηκε είναι το παρακάτω:

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα αγνώστων x που παρήγαγε η συνάρτηση έχει τις εξής τιμές:

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ -16 \\ 25.5 \end{bmatrix}$$

Ελέγχοντας τις τιμές, λύνεται το παραπάνω γραμμικό σύστημα, επιβεβαιώνοντας έτσι ότι η συνάρτηση λειτουργεί σωστά.

Για την συνάρτηση Cholesky , αρχικά γράφτηκε ένας έλεγχος για τον πίνακα εισόδου, καθώς η μέθοδος λειτουργεί μόνο για θετικά ορισμένους συμμετρικούς πίνακες.

Για είσοδο στην συνάρτηση εισάγεται ο παρακάτω πίνακας:

$$MatrixForCholesky = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{bmatrix}$$

και η έξοδος που παράγει είναι ο κάτω τριγωνικός πίνακας

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

όπου είναι και το αναμενόμενο αποτέλεσμα, επιβεβαιώνοντας την ορθή λειτουργία της συνάρτησης.

Για την μέθοδο Γαυσσ-Σειδελ, αρχικά δημιουργείται ένας nxn μηδενικός πίνακας στην συνάρτηση GaussSeidelMakeMatrix(n) και στην συνέχεια αλλάζουν συγκεκριμένες τιμές του πίνακα για την δημιουργία του απαιτούμενου αραιού συστήματος. Η ίδια συνάρτηση εκτός από τον πίνακα A που απαιτείται για την λύση του συστήματος επιστρέφει και το διάνυσμα b . Στο πρόγραμμα εμφανίζεται η λύση του συστήματος για $n = 10$ αλλά καθώς για $n = 10000$, παράγονται 10000 λύσεις, για τον έλεγχο των τιμών απαιτείται η προβολή του πίνακα x στο workspace του Matlab μετά την εκτέλεση του προγράμματος.

4 Τέταρτη Άσκηση

Για την στοχαστικότητα του πίνακα G , αρκεί είτε το άθροισμα κάθε γραμμής είτε στήλης του πίνακα να ισούται με 1. Μετά από αυτόν τον έλεγχο στο πρόγραμμα εμφανίζει ότι ο πίνακας είναι δεξιά στοχαστικός, άρα το ότι το άθροισμα κάθε στήλης είναι ίσο με 1.

Προφανώς για την απόδειξη της στοχαστικότητας έχει δημιουργηθεί ήδη ο πίνακας G και μετά των υπολογισμό του ιδιοδιανύσματος της μέγιστης ιδιοτιμής με την μέθοδο της δυνάμεως και εμφανίζοντας το στην οθόνη ως p , επιβεβαιώνεται ότι είναι ίδιο με αυτό της εκφώνησης.

Για το ερώτημα 3, η σύνδεση που αφαιρέθηκε είναι από τον κόμβο 13 στον 14. Στην συνέχεια προστέθηκαν συνδέσεις από τον 13 στον 10, από τον 11 στον 10, από τον 8 στον 10 και από τον 15 στον 10. Εν τέλει, ο βαθμός σημαντικότητας του κόμβου 10 από 0.106320 αυξήθηκε σε 0.243154 και έγινε ο μεγαλύτερος από όλους.

Η αλλαγή του q σε 0.02, φαίνεται να μειώνει τον βαθμό σημαντικότητας των σελίδων που κατατάσσονται χαμηλά και να αυξάνει την σημαντικότητα των δημοφιλέστερων σελίδων αντίστοιχα. Η αλλαγή του q σε 0.6, εξισορροπεί τις τιμές, καθώς αυξάνεται η τυχαιότητα, με αποτέλεσμα την αύξηση του βαθμού σημαντικότητας μη δημοφιλών σελίδων και την μείωση των υψηλά καταταςσόμενων αντίστοιχα. Η πιθανότητα μεταπήδησης είναι αναγκαία καθώς μπορεί όλες οι σελίδες να μην είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους. Έτσι ο αλγόριθμος δεν θα υπολογίσει ποτέ τον βαθμό σημαντικότητας των σελίδων που δεν είναι συνδεδεμένες με τις υπόλοιπες.

Αντικαθιστώντας το A(8,11) και το A(12,11) με 3 στον πίνακα γειτνίασης, πετυχαίνεται ο στόχος βελτίωσης του βαθμού σημαντικότητας της σελίδας 11, αλλά όχι τόσο αποτελεσματικά. Αυτό συμβαίνει λόγω της συνδεσιμότητας που υπάρχει με την σελίδα 11, με αποτέλεσμα να μεταφέρεται η σημαντικότητα και να μοιράζεται σε άλλους κόμβους όπως την σελίδα 15, που παρουσιάζει σχεδόν την ίδια αύξηση με την σελίδα 11.

Η αφαίρεση του κόμβου 10, έχει ως αναμενόμενο αποτέλεσμα, την αύξηση της τάξης των σελίδων 1,2,3,4,5,6,7,8,11. Η τάξη των υπόλοιπων σελίδων μειώνεται. Η μεγαλύτερη αύξηση παρατηρείται στην σελίδα 11. Αυτό είναι λογικό καθώς οι σελίδες 6,7 και 14 που συνδεόταν και με την σελίδα 10 και με την 11, πλέον έχουν μια σύνδεση λιγότερη, αυξάνοντας την σημαντικότητα της σύνδεσης αυτής. Η μεγαλύτερη μείωση τάξης που παρατηρείται είναι για την σελίδα 13. Προηγουμένως, η μοναδική σύνδεση που είχε η σελίδα 10 προς μια άλλη σελίδα ήταν η 13, οπότε με την αφαίρεση της σελίδας 10, χάνεται αυτό το σημαντικό κομμάτι της τάξης της σελίδας 13.