

## Relações

### Definição de relação

Uma **relação**  $R$ , definida de um conjunto  $A$  para um conjunto  $B$ , é um subconjunto de  $A \times B$  (produto cartesiano entre  $A$  e  $B$ ). Podemos definir  $R$  da seguinte forma:

$$R = \{(a, b) \in A \times B : a \text{ está } R\text{-relacionado com } b\}.$$

**Exemplo 1** Se  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{0, 1, 2\}$  então podemos definir uma relação  $R$  do conjunto  $A$  para o conjunto  $B$  da seguinte forma:

$$R = \{(a, 0), (a, 1), (c, 2), (b, 1)\}.$$

**Exemplo 2** Seja  $A = \mathbb{N}$ . Podemos definir uma relação  $S$ , de  $\mathbb{N}$  para  $\mathbb{N}$ , da seguinte forma:

$$S = \left\{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{a}{b} = 2 \right\}.$$

O par  $(6, 3)$  e o par  $(10, 5)$  pertencem à relação  $S$ .

### Relação inversa

Para toda a relação  $R$ , definida de um conjunto  $A$  para um conjunto  $B$ , é possível definir a **relação inversa** de  $R$ , que se denota por  $R^{-1}$ . Deste modo, se

$$R = \{(a, b) \in A \times B : a \text{ é } R\text{-relacionado com } b\}$$

temos

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : a \text{ é } R\text{-relacionado com } b\}.$$

### Formas de representar uma relação

Existem diferentes **formas de representar uma relação**. Podemos representar uma relação  $R$  de um conjunto  $A$  para um conjunto  $B$  através de:

1. Diagrama de setas;
2. Matriz da relação;
3. Grafo orientado (caso  $A = B$ , com  $A$  um conjunto finito).

**Exemplo 3** Se  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{0, 1, 2\}$  então podemos representar a relação  $R = \{(a, 0), (a, 1), (c, 2), (b, 1)\}$ , definida de  $A$  para  $B$ , através da seguinte matriz:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Composição de relações

Sejam  $A, B$  e  $C$  conjuntos, seja  $R$  uma relação de  $A$  para  $B$  e seja  $S$  uma relação de  $B$  para  $C$ . A relação  $R \circ S$ , **relação  $R$  em composição com  $S$** , é uma relação do conjunto  $A$  para o conjunto  $C$  definida por

$$R \circ S = \{(a, c) \in A \times C : a \text{ está } R\text{-relacionado com } b \text{ e } b \text{ está } S\text{-relacionado com } c\}.$$

Nota:  $R^2 = R \circ R$ , ...,  $R^n = R^{n-1} \circ R$ .

Podemos determinar a **matriz da relação  $R \circ S$**  através da multiplicação da matriz da relação  $R$ ,  $M_R$ , com a matriz da relação  $S$ ,  $M_S$ . Primeiro calculamos  $M_R \times M_S$ ; de seguida, nesta matriz resultante, denotada por  $M_{R \circ S}$ , substituímos todos os elementos não nulos por 1, obtendo assim a matriz da relação  $R \circ S$ .

## Tipos de relações

Seja  $R$  uma relação definida sobre um conjunto  $A$ , ou seja,  $R = \{(a, b) \in A \times A : aRb\}$ . A relação  $R$  diz-se:

1. **reflexiva** se  $\forall a \in A, aRa$ ;
2. **simétrica** se,  $\forall a, b \in A, aRb \implies bRa$ ;
3. **antissimétrica** se,  $\forall a, b \in A, aRb \wedge bRa \implies a = b$ ;
4. **transitiva** se  $\forall a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \implies aRc$ .

## Relação de equivalência e relação de ordem parcial

Uma relação  $R$ , definida em  $A$ , diz-se uma **relação de equivalência** se e só se  $R$  é reflexiva, simétrica e transitiva.

Uma relação  $R$ , definida em  $A$ , diz-se uma **relação de ordem parcial** se e só se  $R$  é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Neste caso, o par  $(A, R)$  diz-se um conjunto parcialmente ordenado.

## Propriedades de fecho

Consideremos uma relação  $R$  definida sobre um conjunto  $A$ .

1. O **fecho reflexivo de  $R$**  é dado por  $reflexivo(R) = R \cup \{(a, a) : a \in A\}$ ;
2. O **fecho simétrico de  $R$**  é dado por  $simetrico(R) = R \cup R^{-1}$ ;
3. O **fecho transitivo de  $R$**  é dado por  $transitivo(R) = \bigcup_{i=1}^m R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^m$ , onde  $m$  é o número de elementos do conjunto  $A$ .

## Classes de equivalência e Conjunto quociente

Seja  $R$  uma relação de equivalência sobre um conjunto não vazio  $A$ . Para cada  $a \in A$ , define-se a **classe de equivalência de  $a$  em  $A$**  como o conjunto

$$[a]_R = \{x \in A : aRx\}.$$

Qualquer elemento  $x \in [a]_R$  diz-se um **representante desta classe de equivalência**.

O conjunto de todas as classes de equivalência de  $R$  designa-se por **conjunto quociente de  $A$  por  $R$**  e é representado por  $A/R$ . Ou seja,

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}.$$

De salientar que o conjunto quociente  $A/R$  é uma partição do conjunto  $A$ .

## Exercícios propostos

1. Seja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $R$  a relação em  $A$  definida por:

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 4)\}.$$

- (a) Indique a matriz que representa a relação  $R$ ,  $M_R$ .
  - (b) Determine a matriz da relação  $R^{-1}$ .
  - (c) Determine a matriz da relação  $R^2$  e a matriz da relação  $R^3$ .
  - (d) Indique, justificando, se  $R$  é uma relação reflexiva, simétrica, antissimétrica e/ou transitiva.
  - (e) Determine:
    - i. o fecho reflexivo de  $R$ ;
    - ii. o fecho simétrico de  $R$ ;
    - iii. o fecho transitivo de  $R$ .
  - (f) Determine a menor relação de equivalência definida em  $A$  que contém o conjunto  $R$ .
  - (g) Seja  $S$  a relação de equivalência determinada na alínea anterior. Determine as classes de equivalência de  $S$ , o conjunto quociente  $A/S$  e a partição do conjunto  $A$  determinada através de  $A/S$ .
2. Sejam  $R$  e  $S$  relações definidas num conjunto  $D = \{a, b, c\}$  cujas matrizes de relação  $M_R$  e  $M_S$  são dadas por:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine a matriz associada à relação  $R \circ S$ .
  - (b) Indique, justificando, se  $c$  é  $R \circ S$ -relacionado com  $a$ .
3. Construa uma função com o nome `relcomp(MR, MS)`, em que  $M_R$  é a matriz de uma relação  $R$  e  $M_S$  é a matriz de uma relação  $S$ , que devolva a matriz da relação  $R \circ S$ .
4. A partir da matriz  $M_R$  de uma relação  $R$ , construa uma função:
- (a) com o nome `is_reflexiva(MR)` que verifique se a relação  $R$  é uma relação reflexiva;
  - (b) com o nome `is_simetrica(MR)` que verifique se a relação  $R$  é uma relação simétrica;
  - (c) com o nome `is_transitiva(MR)` que verifique se a relação  $R$  é uma relação transitiva.
5. A partir da função `is_reflexiva(MR)`, implementada na alínea (a) do exercício anterior, construa uma função com o nome `fecho_reflexivo(MR)` que, caso a relação  $R$  não seja reflexiva, devolva a matriz do fecho reflexivo de  $R$ .

6. Construa uma função com o nome `equival(MR)`, em que  $M_R$  é a matriz de uma relação  $R$ , que verifique se a relação  $R$  é ou não uma relação de equivalência e, em caso negativo, devolva a matriz da menor relação de equivalência que contém a relação  $R$ .
7. Construa uma função com o nome `orparcial(MR)`, em que  $M_R$  é a matriz de uma relação  $R$ , que verifique se a relação  $R$  é ou não uma relação de ordem parcial.

**Nota:** Os exercícios 8 e 9 deverão ser resolvidos por análise dos algoritmos (sem recorrer ao Scilab); deverá justificar convenientemente as suas respostas.

8. Dada a matriz  $M$  de uma relação  $R$ , indique qual(is) das seguintes funções `permite(m)` determinar se uma relação é reflexiva:

- Função 1:

```
function reflexiva(M)
    [a b]=size(M)
    for i=1:a
        if M(i,i)==1 then
            disp("A relação é reflexiva")
        else
            disp("A relação não é reflexiva")
        end
    end
endfunction
```

- Função 2:

```
function reflexiva(M)
    [a b]=size(M)
    if trace(M)==a then
        disp("A relação é reflexiva")
    else
        disp("A relação não é reflexiva")
    end
endfunction
```

- Função 3:

```
function reflexiva(M)
    [a b]=size(M)
    if isequal(M, bool2s(M+eye(a,a))) then
        disp("A relação é reflexiva")
    else
        disp("A relação não é reflexiva")
    end
endfunction
```

9. Dada a matriz  $M$  de uma relação  $R$ , indique qual(is) das seguintes funções permite(m) obter a matriz do fecho simétrico da relação  $R$ :

- Função 1:

```
function S=fecho_sim(M)
    [a b]=size(M)
    for i=1:a
        for j=1:b
            if M(i,j)==1 then
                M(j,i)=1
            end
        end
    end
    S=M
endfunction
```

- Função 2:

```
function S=fecho_sim(M)
    [a b]=size(M)
    S=M+M'
endfunction
```

- Função 3:

```
function S=fecho_sim(M)
    [a b]=size(M)
    S=bool2s(M+M')
endfunction
```