Introdução à Teoria da Relatividade Geral

Pedro Henrique Dalprá

2 de dezembro de 2025

Este documento reúne notas sobre os aspectos fundamentais da formulação matemática e física da Teoria da Relatividade Geral, baseadas na obra *Sapacetime and Geometry*, de Sean M. Carroll (2004). Para um estudo mais aprofundado, recomenda-se a leitura integral da obra citada ou de livros consagrados sobre o tema. Além disso, uma familiaridade prévio com Relatividade Especial facilita substancialmente o entendimento dos tópicos aqui apresentados.

1 Relatividade especial e espaço-tempo plano

A maioria dos fatos geométricos interessantes sobre o plano são independentes da nossa escolha de coordenadas. Como um exemplo simples podemos considerar a distância entre dois pontos, dada por:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \tag{1}$$

Em um sistema de coordenadas x' e y' que são rotacionadas em relação ao sistema de coordenadas original, a fórmula da distância permanece inalterada:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2. \tag{2}$$

Dizemos, portanto, que a distância é invariante sob tais mudanças de coordenadas.

Um evento é definido como um único instante no espaço e no tempo, caracterizado por (t, x, y, z). Então o intervalo espaço-temporal entre dois eventos é:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{3}$$

Se estabelecermos um novo referencial inercial (t', x', y', z'), o intervalo permanece inalterado:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2. \tag{4}$$

É por isso que faz sentido pensar na Relatividade Especial como uma teoria do espaço-tempo quadridimensional, conhecido como espaço de Minkowski.

Vamos introduzir uma notação conveniente para vetores:

$$x^\mu : \begin{aligned} x^0 &= ct, \\ x^1 &= x, \\ x^2 &= y, \\ x^3 &= z. \end{aligned}$$

Às vezes será útil referir-se às componentes de espaço e tempo de x^μ separadamente, portanto usaremos sobrescritos latinos para representar apenas as componentes espaciais:

$$x^i : \begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^2 &= y, \\ x^3 &= z. \end{aligned}$$

Também é conveniente escrever o intervalo espaço-temporal de forma mais compacta, portanto introduziremos uma matriz 4×4, chamada de métrica:

$$n_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos então

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{5}$$

Esta fórmula introduz a convenção de somatório, na qual os índices são somados. Note que esta expressão recupera o intervalo espaço-temporal do espaço de Minkowski:

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= \eta_{00} \Delta x^0 \Delta x^0 + \eta_{10} \Delta x^1 \Delta x^0 + \cdots + \eta_{33} \Delta x^3 \Delta x^3 \\ &= -1 \cdot c\Delta t \cdot c\Delta t + 0 \cdot \Delta x \cdot c\Delta t + \cdots + 1 \cdot \Delta z \cdot \Delta z \\ &= -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Porém, nem todas as trajetórias são suficientemente boas para serem construídas a partir de segmentos de linhas retas. Em circunstâncias mais gerais, é útil introduzir o intervalo infinitesimal, ou elemento de linha:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{7}$$

1.1 Transformações de Lorentz

Surge então uma questão fundamental: quais transformações mantêm ds^2 invariante? Um tipo simples são as translações, que apenas deslocam as coordenadas:

$$x^\mu \to x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu, \tag{8}$$

onde a^μ é um conjunto de quatro números fixos. As translações deixam as diferenças Δx^μ inalteradas, portanto é notável que o intervalo Δs^2 permaneça inalterado.

O outro único tipo de transformação é multiplicar x^μ por uma matriz (independente do espaço-tempo):

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^\mu \tag{9}$$

ou, convencionalmente,

$$x' = \Lambda x. \tag{10}$$

As matrizes que satisfazem essa transformação são conhecidas como transformações de Lorentz. O exemplo mais simples é uma rotação no plano xy:

$$\Lambda^{\mu'}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1. Mostre que o intervalo ds^2 permanece invariante sob a transformação representada pela matriz de rotação acima.

Resolução: dx^μ se transforma pela regra

$$dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} dx^\mu, \tag{11}$$

escrevendo na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \tag{12}$$

na forma de sistemas, escrevemos

$$\begin{cases} cdt' = 1\cdot cdt + 0\cdot dx + 0\cdot dy + 0\cdot dz \\ dx' = 0\cdot cdt + \cos\theta\cdot dx + \sin\theta\cdot dy + 0\cdot dz \\ dy' = 0\cdot cdt - \sin\theta\cdot dx + \cos\theta\cdot dy + 0\cdot dz \\ dz' = 0\cdot cdt + 0\cdot dx + 0\cdot dy + 1\cdot dz \end{cases} \tag{13}$$

$$\therefore \begin{cases} dt' = dt \\ dx' = \cos\theta dx + \sin\theta dy \\ dy' = -\sin\theta dx + \cos\theta dy \\ dz' = dz \end{cases} \tag{14}$$

por fim, note que

$$dt'^2 = dt^2, \qquad dx'^2 = dx^2, \qquad dy'^2 = dy^2 \qquad \text{e} \qquad dz'^2 = dz^2. \tag{15}$$

Logo,

$$ds'^2 = ds^2. \tag{16}$$

Quod erat demonstrandum!
(Como queríamos demonstrar!)

1.2 Vetores

Os vetores no espaço de Minkowski são frequentemente chamados de quadrivetores. Nesse espaço, além de não existir produto vetorial entre dois quadrivetores, perde-se o sentido em pensar na translação desses quadrivetores no espaço-tempo. Esses não são conceitos úteis em relatividade. Em vez disso, a cada ponto p no espaço-tempo associamos o conjunto de todos os vetores possíveis localizados nesse ponto. Esse conjunto é conhecido como espaço tangente T_p.

Muitas vezes é útil para propósitos concretos decompor vetores em componentes em relação a algum conjunto de vetores de base. Uma base é qualquer conjunto de vetores que tanto gera o espaço vetorial quanto é linearmente independente. Qualquer vetor é uma combinação linear de vetores da base. Para qualquer espaço vetorial dado, haverá um número infinito de bases legítimas. Para um espaço tangente associado a um ponto no espaço de Minkowski, a dimensão é obviamente 4.

Qualquer vetor A pode ser escrito como uma combinação linear de vetores da base:

$$A = A^{\mu}(\hat{e}_{(\mu)}). \tag{17}$$

Uma curva ou trajetória parametrizada através do espaço-tempo é escrita como uma função de um parâmetro, $x^{\mu}(\lambda)$. O vetor tangente a essa curva possui componentes

$$V^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}. \tag{18}$$

O vetor completo é portanto

$$V = V^{\mu}(\hat{e}_{(\mu)}). \tag{19}$$

Sob uma transformação de Lorentz o parâmetro λ permanece inalterado, assim V^{μ} deve se transformar como:

$$V^{\mu} \to V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} V^{\nu}. \tag{20}$$

Logo

$$\begin{aligned} V = V^{\mu}(\hat{e}_{(\mu)}) &= V^{\nu'}(\hat{e}_{(\nu')}) \\ &= \Lambda^{\nu'}_{\mu} V^{\mu}(\hat{e}_{(\nu')}) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\therefore \hat{e}_{(\mu)} = \Lambda^{\nu'}_{\mu} \hat{e}_{(\nu')}. \tag{22}$$

Usaremos a seguinte notação:

$$(\Lambda^{-1})^{\nu'}_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu'}. \tag{23}$$

ou

$$\Lambda^{\mu}_{\nu'} \Lambda^{\nu'}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}, \tag{24}$$

onde δ^{μ}_{ρ} é o delta de Kronecker

$$\delta^{\mu}_{\rho} = \begin{cases} 1, \text{ se } \mu = \rho \\ 0, \text{ se } \mu \neq \rho \end{cases}$$