

Introdução à Teoria da Relatividade Geral

Pedro Henrique Dalprá

1 de dezembro de 2025

Este documento reúne notas sobre os aspectos fundamentais da formulação matemática e física da Teoria da Relatividade Geral, baseadas na obra *Spacetime and Geometry*, de Sean M. Carroll (2004). Para um estudo mais aprofundado, recomenda-se a leitura integral da obra citada ou de livros consagrados sobre o tema. Além disso, uma familiaridade prévio com Relatividade Especial facilita substancialmente o entendimento dos tópicos aqui apresentados.

1 Relatividade especial e espaço-tempo plano

A maioria dos fatos geométricos interessantes sobre o plano são independentes da nossa escolha de coordenadas. Como um exemplo simples podemos considerar a distância entre dois pontos, dada por:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \quad (1)$$

Em um sistema de coordenadas x' e y' que são rotacionadas em relação ao sistema de coordenadas original, a fórmula da distância permanece inalterada:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2. \quad (2)$$

Dizemos, portanto, que a distância é invariante sob tais mudanças de coordenadas.

Um evento é definido como um único instante no espaço e no tempo, caracterizado por (t, x, y, z) . Então o intervalo espaço-temporal entre dois eventos é:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (3)$$

Se estabelecermos um novo referencial inercial (t', x', y', z') , o intervalo permanece inalte-

rado:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2. \quad (4)$$

É por isso que faz sentido pensar na Relatividade Especial como uma teoria do espaço-tempo quadridimensional, conhecido como espaço de Minkowski.

Vamos introduzir uma notação conveniente para vetores:

$$\begin{aligned} x^0 &= ct, \\ x^\mu : &\quad x^1 = x, \\ &\quad x^2 = y, \\ &\quad x^3 = z. \end{aligned}$$

Às vezes será útil referir-se às componentes de espaço e tempo de x^μ separadamente, portanto usaremos sobrescritos latinos para representar apenas as componentes espaciais:

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^i : &\quad x^2 = y, \\ &\quad x^3 = z. \end{aligned}$$

Também é conveniente escrever o intervalo espaço-temporal de forma mais compacta, portanto introduziremos uma matriz 4×4 , chamada de métrica:

$$n_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos então

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \quad (5)$$

Esta fórmula introduz a convenção de somatório, na qual os índices são somados. Note que esta expressão recupera o intervalo espaço-temporal do espaço de Minkowski:

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= \eta_{00} \Delta x^0 \Delta x^0 + \eta_{10} \Delta x^1 \Delta x^0 + \cdots + \eta_{30} \Delta x^3 \Delta x^0 \\ &= -1 \cdot c\Delta t \cdot c\Delta t + 0 \cdot \Delta x \cdot c\Delta t + \cdots + 1 \cdot \Delta z \cdot \Delta z \\ &= -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Porém, nem todas as trajetórias são suficientemente boas para serem construídas a partir de segmentos de linhas retas. Em circunstâncias mais gerais, é útil introduzir o intervalo

infinitesimal, ou elemento de linha:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7)$$

1.1 Transformações de Lorentz