

# Introdução à Teoria da Relatividade Geral

Pedro Henrique Dalprá

3 de dezembro de 2025

Este documento reúne notas sobre os aspectos fundamentais da formulação matemática e física da Teoria da Relatividade Geral, baseadas na obra *Spacetime and Geometry*, de Sean M. Carroll (2004). Para um estudo mais aprofundado, recomenda-se a leitura integral da obra citada ou de livros consagrados sobre o tema. Além disso, uma familiaridade prévio com Relatividade Especial facilita substancialmente o entendimento dos tópicos aqui apresentados.

## 1 Relatividade especial e espaço-tempo plano

A maioria dos fatos geométricos interessantes sobre o plano são independentes da nossa escolha de coordenadas. Como um exemplo simples podemos considerar a distância entre dois pontos, dada por:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \quad (1)$$

Em um sistema de coordenadas  $x'$  e  $y'$  que são rotacionadas em relação ao sistema de coordenadas original, a fórmula da distância permanece inalterada:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2. \quad (2)$$

Dizemos, portanto, que a distância é invariante sob tais mudanças de coordenadas.

Um evento é definido como um único instante no espaço e no tempo, caracterizado por  $(t, x, y, z)$ . Então o intervalo espaço-temporal entre dois eventos é:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (3)$$

Se estabelecermos um novo referencial inercial  $(t', x', y', z')$ , o intervalo permanece inalte-

rado:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2. \quad (4)$$

É por isso que faz sentido pensar na Relatividade Especial como uma teoria do espaço-tempo quadridimensional, conhecido como espaço de Minkowski.

Vamos introduzir uma notação conveniente para vetores:

$$\begin{aligned} x^0 &= ct, \\ x^\mu : &\quad x^1 = x, \\ &\quad x^2 = y, \\ &\quad x^3 = z. \end{aligned}$$

Às vezes será útil referir-se às componentes de espaço e tempo de  $x^\mu$  separadamente, portanto usaremos sobrescritos latinos para representar apenas as componentes espaciais:

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^i : &\quad x^2 = y, \\ &\quad x^3 = z. \end{aligned}$$

Também é conveniente escrever o intervalo espaço-temporal de forma mais compacta, portanto introduziremos uma matriz  $4 \times 4$ , chamada de métrica:

$$n_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos então

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \quad (5)$$

Esta fórmula introduz a convenção de somatório, na qual os índices são somados. Note que esta expressão recupera o intervalo espaço-temporal do espaço de Minkowski:

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= \eta_{00} \Delta x^0 \Delta x^0 + \eta_{10} \Delta x^1 \Delta x^0 + \cdots + \eta_{30} \Delta x^3 \Delta x^0 \\ &= -1 \cdot c\Delta t \cdot c\Delta t + 0 \cdot \Delta x \cdot c\Delta t + \cdots + 1 \cdot \Delta z \cdot \Delta z \\ &= -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Porém, nem todas as trajetórias são suficientemente boas para serem construídas a partir de segmentos de linhas retas. Em circunstâncias mais gerais, é útil introduzir o intervalo

infinitesimal, ou elemento de linha:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7)$$

## 1.1 Transformações de Lorentz

Surge então uma questão fundamental: quais transformações mantêm  $ds^2$  invariante? Um tipo simples são as translações, que apenas deslocam as coordenadas:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu, \quad (8)$$

onde  $a^\mu$  é um conjunto de quatro números fixos. As translações deixam as diferenças  $\Delta x^\mu$  inalteradas, portanto é notável que o intervalo  $\Delta s^2$  permaneça inalterado.

O outro único tipo de transformação é multiplicar  $x^\mu$  por uma matriz (independente do espaço-tempo):

$$x^{\mu'} = \Lambda_\mu^{\mu'} x^\mu \quad (9)$$

ou, convencionalmente,

$$x' = \Lambda x. \quad (10)$$

As matrizes que satisfazem essa transformação são conhecidas como transformações de Lorentz. O exemplo mais simples é uma rotação no plano  $xy$ :

$$\Lambda_\mu^{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercício 1.** Mostre que o intervalo  $ds^2$  permanece invariante sob a transformação representada pela matriz de rotação acima.

**Resolução:**  $dx^\mu$  se transforma pela regra

$$dx^{\mu'} = \Lambda_\mu^{\mu'} dx^\mu, \quad (11)$$

escrevendo na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (12)$$

na forma de sistemas, escrevemos

$$\begin{cases} cdt' = 1 \cdot cdt + 0 \cdot dx + 0 \cdot dy + 0 \cdot dz \\ dx' = 0 \cdot cdt + \cos \theta \cdot dx + \sin \theta \cdot dy + 0 \cdot dz \\ dy' = 0 \cdot cdt - \sin \theta \cdot dx + \cos \theta \cdot dy + 0 \cdot dz \\ dz' = 0 \cdot cdt + 0 \cdot dx + 0 \cdot dy + 1 \cdot dz \end{cases} \quad (13)$$

$$\therefore \begin{cases} dt' = dt \\ dx' = \cos \theta dx + \sin \theta dy \\ dy' = -\sin \theta dx + \cos \theta dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (14)$$

por fim, note que

$$dt'^2 = dt^2, \quad dx'^2 = dx^2, \quad dy'^2 = dy^2 \quad \text{e} \quad dz'^2 = dz^2. \quad (15)$$

Logo,

$$ds'^2 = ds^2. \quad (16)$$

*Quod erat demonstrandum!*  
(Como queríamos demonstrar!)

## 1.2 Vetores

Os vetores no espaço de Minkowski são frequentemente chamados de quadrvetores. Nesse espaço, além de não existir produto vetorial entre dois quadrvetores, perde-se o sentido em pensar na translação desses quadrvetores no espaço-tempo. Esses não são conceitos úteis em relatividade. Em vez disso, a cada ponto  $p$  no espaço-tempo associamos o conjunto de todos os vetores possíveis localizados nesse ponto. Esse conjunto é conhecido como espaço tangente  $T_p$ .

Muitas vezes é útil para propósitos concretos decompor vetores em componentes em relação a algum conjunto de vetores de base. Uma base é qualquer conjunto de vetores que tanto gera o espaço vetorial quanto é linearmente independente. Qualquer vetor é uma combinação linear de vetores da base. Para qualquer espaço vetorial dado, haverá um número infinito de bases legítimas. Para um espaço tangente associado a um ponto no espaço de Minkowski, a dimensão é obviamente 4.

Qualquer vetor  $A$  pode ser escrito como uma combinação linear de vetores da base:

$$A = A^\mu(\hat{e}_{(\mu)}). \quad (17)$$

Uma curva ou trajetória parametrizada através do espaço-tempo é escrita como uma função de um parâmetro,  $x^\mu(\lambda)$ . O vetor tangente a essa curva possui componentes

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (18)$$

O vetor completo é portanto

$$V = V^\mu(\hat{e}_{(\mu)}). \quad (19)$$

Sob uma transformação de Lorentz o parâmetro  $\lambda$  permanece inalterado, assim  $V^\mu$  deve se transformar como:

$$V^\mu \rightarrow V^{\mu'} = \Lambda_\nu^{\mu'} V^\nu. \quad (20)$$

Logo

$$\begin{aligned} V &= V^\mu(\hat{e}_{(\mu)}) = V^{\nu'}(\hat{e}_{(\nu')}) \\ &= \Lambda_\mu^{\nu'} V^\mu(\hat{e}_{(\nu')}) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\therefore \hat{e}_{(\mu)} = \Lambda_\mu^{\nu'} \hat{e}_{(\nu')} \cdot \quad (22)$$

Usaremos a seguinte notação:

$$(\Lambda^{-1})_\mu^{\nu'} = \Lambda_\nu^{\mu}. \quad (23)$$

ou

$$\Lambda_\nu^{\mu} \Lambda_\rho^{\nu'} = \delta_\rho^\mu, \quad (24)$$

onde  $\delta_\rho^\mu$  é o delta de Kronecker

$$\delta_\rho^\mu = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \rho \\ 0, & \text{se } \mu \neq \rho \end{cases}$$

### 1.3 Vetores duais

Uma vez que definimos um espaço vetorial, podemos definir um espaço vetorial associado, chamado de espaço vetorial dual ou espaço cotangente. O espaço vetorial é denotado por  $T_p$  e o espaço cotangente por  $T_p^*$ .

Se  $w \in T_p^*$ , ele é chamado de vetor dual e age como uma transformação linear tal que

$$w(aV + bW) = aw(V) + bw(W) \in \mathfrak{R}, \quad (25)$$

onde  $V$  e  $W$  são vetores e  $a$  e  $b$  são números reais.

Se  $n \in T_p^*$ ,

$$(an + bw)(V) = an(V) + bw(V). \quad (26)$$

$T_p^*$  é o espaço de todas as transformações lineares do espaço vetorial para os números reais.

Vamos definir um conjunto de vetores base  $\hat{\theta}^{(\nu)}$ , de forma que:

$$\hat{\theta}^{(\nu)}(\hat{e}_{(\mu)}) = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (27)$$

Então cada vetor dual pode ser escrito como:

$$w = w_{\mu} \hat{\theta}^{(\mu)}. \quad (28)$$

Representamos  $w \in T_p^*$  com  $w_{\mu}$  e  $V \in T_p$  com  $V^{\mu}$ . Além disso vetores de  $T_p^*$  são chamados de vetores covariantes e vetores de  $T_p$  são chamados de contravariantes.

Escrevemos a ação de um vetor covariante em um vetor contravariante como:

$$\begin{aligned} w(V) &= w_{\mu} V^{\nu} \hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) \\ &= w_{\mu} V^{\nu} \delta_{\nu}^{\mu} \\ &= w_{\mu} V^{\nu} \in \mathfrak{R}. \end{aligned} \quad (29)$$

E a ação de um vetor contravariante em um vetor covariante:

$$V(w) = w_{\mu} V^{\nu}. \quad (30)$$

O espaço dual do próprio espaço dual é o espaço vetorial original. E a ação de um campo vetorial dual sobre um campo vetorial não é um único número, mas um escalar no

espaço-tempo. Um escalar é uma grandeza que permanece inalterada sob transformações de Lorentz. Imagine o espaço de vetores-coluna com  $n$  componentes, então o espaço dual é o conjunto de vetores-linha com  $n$  componentes, e a ação entre eles é dada pela multiplicação matricial:

$$w(V) = (w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n) \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \\ \vdots \\ V^n \end{pmatrix} = w_i V^i.$$

No espaço-tempo, o exemplo mais simples de um vetor dual é o gradiente de uma função escalar, que denotamos por “d”:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \hat{\theta}^{(\mu)}. \quad (31)$$

A regra da cadeia convencional usada para transformar derivadas parciais equivale, neste caso, à regra de transformação de componentes de vetores duais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} \Lambda_\mu^{\mu'}. \end{aligned}\tag{32}$$

O fato do gradiente ser um vetor dual leva à seguinte notação abreviada para derivadas parciais:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi. \quad (33)$$

## 1.4 Tensores

Uma generalização direta de vetores e vetores duais é a noção de tensor. Assim como um vetor dual é uma aplicação linear de vetores para  $\mathbb{R}$ , um tensor de tipo (ou rank)  $(k, l)$  é uma aplicação multilinear de uma coleção de vetores duais e vetores para  $\mathbb{R}$ .

$$T : T_p^* \times \cdots \times T_p^* \times T_p \times \cdots \times T_p \rightarrow \Re \quad (34)$$

$(k$  vezes)  $\qquad\qquad$  ( $l$  vezes)

Aqui “ $\times$ ” denota produto cartesiano. Multilinearidade significa que o tensor age linearmente em cada um dos seus argumentos; por exemplo, para um tensor do tipo  $(1, 1)$ , temos

$$T(aw + b\eta, cV + dW) = acT(w, V) + adT(w, W) + bcT(\eta, V) + bdT(\eta, W). \quad (35)$$

Desse ponto de vista, um escalar é um tensor do tipo  $(0, 0)$ , um vetor é um tensor do tipo  $(1, 0)$  e um vetor dual é um tensor do tipo  $(0, 1)$ .