$X \sim Ber(p)$: 성공확률이 p인 시행을 한번 했을때

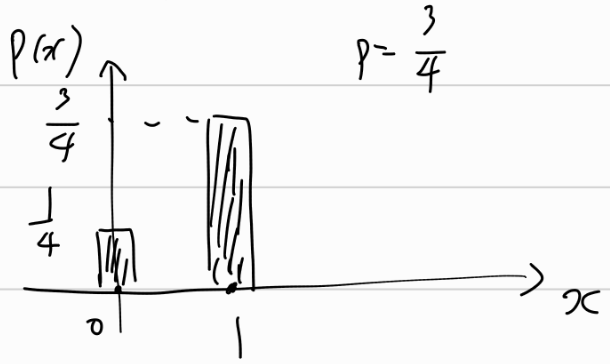
성공 => $X=1$

실패 => $X=0$

$P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=0)=\frac{1}{2}$ $\left(X \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$P(X=0)=1-p$, $P(X=1)=p$

$p=\frac{3}{4}$



pmf $\underline{P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}}$, $x=0,1,2,\dots$

pdf $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$

0~1 사이의 시간간격에서 사건이 일어나는 횟수

W: 지수분포, X: 포아송분포

$P(W>1)$ = 0~1 사이에 사건이 발생X 확률

$= P(X=0)$

$P(W>x)$ = .. 포아송과 관련된식

$P(W<x)$ = 〃

미분

pdf of 지수분포

문제 1. 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀있는 5개의 서랍이 있다. 5개의 서랍 중 임의로 2개가 배정된다고 한다. 이 때 배정되는 서랍에 적혀있는 자연수 중 큰 수를 확률변수 X라 하고 작은 수를 확률변수 Y라 하자.

(1) $E(X-Y)$를 구하시오.

(2) $P(1 \leq Y \leq 3)$를 구하시오.

X, Y 각각의 확률분포(표)

$S = \{(1,2), (2,4), (3,5), \cdots\} \Rightarrow n(S) = {}_5C_2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$

$X=1 \Leftrightarrow$ 없음 $\quad P(X=1)=0$

$X=2 \Leftrightarrow (1,2) \quad P(X=2)=\frac{1}{10}$

$X=3 \Leftrightarrow (1,3),(2,3) \quad P(X=3)=\frac{1}{5}$

$X=4 \Leftrightarrow (1,4),(2,4),(3,4) \quad P(X=4)=\frac{3}{10}$

$X=5 \Leftrightarrow$ 4가지 $\quad P(X=5)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0	1/10	1/5	3/10	2/5

✓

y	1	2	3	4	5
$P(Y=y)$	2/5	3/10	1/5	1/10	0

✓

(1) $E(X-Y) = E(X)-E(Y) = 4-2=2$

· $E(X) = 2\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{5} \times 4\times\frac{3}{10} \times 5\times\frac{2}{5} = 4$

· $E(Y) = 1\times\frac{2}{5} + 2\times\frac{3}{10} + 3\times\frac{1}{5} + 4\times\frac{1}{10} = 2$

(2) $P(1 \leq Y \leq 3) = P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3)$

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$

$\left(= 1-P(Y=4) = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10} \right)$

문제 2. 확률변수 X 의 확률밀도 함수가 다음과 같을 때 물음에 답하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3 & \text{if } -2 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(a) $f(x)$가 확률밀도함수임을 증명하라.

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

(b) $P(X \le 0)$ 를 구하라.

(c) X 의 평균과 분산을 구하라.

$$(a)\ \int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{1} \frac{x^2}{3}dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{9}\left(1^3 - (-2)^3\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - (-8)\right) = 1$$

$$(b)\ \int_{-2}^{0} f(x)dx = \left[\frac{x^3}{9}\right]_{-2}^{0} = \frac{8}{9}$$

$$(c)\ \int_{-2}^{1} x f(x)dx = \int_{-2}^{1} \frac{x^3}{3}dx = \left[\frac{x^4}{12}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{12}\left(1^4 - (-2)^4\right)$$

평균 =

$$= \frac{1}{12}(1-16)$$

$$= -\frac{5}{4}$$

$$\int_{-2}^{1} (x-\mu)^2 f(x)dx \cancel{= \int_{-2}^{1}} \left(x+\frac{5}{4}\right)^2 \frac{x^2}{3}dx$$

$$\text{분산} = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-2}^{1} x^2 \underbrace{f(x)}_{\frac{x^2}{3}} dx = \int_{-2}^{1} \frac{x^4}{3}dx = \left[\frac{x^5}{15}\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{15}\left(1 - (-2)^5\right)$$

$$= \frac{33}{15} = \frac{11}{5}$$

$$\therefore \text{분산} = \frac{11}{5} - \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{11}{5} - \frac{25}{16} = \frac{176-125}{80} = \frac{51}{80}$$

$$E(X^2) \neq \int_{-2}^{1} x^2 f(x^2)dx \qquad E(g(X)) = \int_{-2}^{1} g(x) \boxed{f(x)dx}$$

$$= \int_{-2}^{1} x^2 \boxed{f(x)dx}$$

문제 4. 각 제품의 불량일 확률은 서로 독립이며 불량률이 0.1 이라고 한다. 4개의 제품을 조사하였을 때 다음 물음에 답하여라.

(a) 불량품의 수가 3개 이상일 확률은?

(b) 4개의 제품 중 불량품 개수의 평균과 분산은?

$X \sim B(n, p)$

$P(X=x) = {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x}$

$B(n, p)$

$\downarrow$

X : 불량품의 수

$X \sim B(4, 0.1)$

$p(X=x) = {}_4C_x \cdot 0.1^x \cdot 0.9^{4-x}$

(a) $P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4)$

$= {}_4C_3 \cdot 0.1^3 \cdot 0.9 + {}_4C_4 \cdot 0.1^4$

$= 4 \times 0.001 \times 0.9 + 0.0001$

$= 0.0037$

(b) $E(X)$, $Var(X)$

(원래는 $E(X) = \sum_{x=0}^{4} x\, P(X=x) = \sum_{x=0}^{4} x \cdot {}_4C_x \cdot 0.1^x\, 0.9^{4-x} \cdots$)

$E(X) = np = \boxed{0.4}$

$Var(X) = np(1-p) = 4 \times 0.1 \times 0.9 = \boxed{0.36}$