Aufgabe 2.1

a) $(2n^2)^2 \in O(4^n)$: Richtig

$4n^4 \overset{?}{} O(4^n)$ wir wißen schon ~~dass~~ $O(n^c) \subsetneq O(2^n) \subsetneq O(4^n)$

deswegen können wir schließen, dass $(2n^2)^2 \in O(4^n)$

b) $(3\ln(n^3))^3 \in o(\frac{1}{3}\sqrt[3]{n})$: Richtig.

$(3\ln(n^3))^3 = (9\ln(n))^3 = 27\ln^3(n)$

$27\ln^3(n) \overset{?}{} \frac{1}{3}\sqrt[3]{n}$ wir wißen aus dem Folien, dass

$\log^c(n) \subsetneq O(n^\varepsilon)$ mit $c>0$ und $\varepsilon = \frac{1}{3} \in [0, \frac{1}{2}]$.

(gilt die Voraussetzung) deswegen können wir schließen, dass

$27\ln^3(n) < \frac{1}{3}\sqrt[3]{n}$

c) $\left(2^{\frac{1}{2}\log(n^2)}\right)^2 + \sqrt{n} \in \Omega(6n)$: Richtig

$2^{\frac{1}{2}\log(n^2)+2} + \sqrt{n}$

$2^{\log(n)+2} + \sqrt{n}$

$2^2 \cdot 2^{\log(n)} + \sqrt{n}$

$4 \cdot 2^{\log(n)} + \sqrt{n}$ $\qquad \ln(1) = 0$

wir betrachten hier 2 Fälle.

I. Fall: $n \geq e$ $(\ln(e) = 1)$.

Wir wißen schon aus dem Folien, dass $O(n^c) \subsetneq O(2^n)$.
Also die Laufzeit mit basis 2 $\hat{=}$ hat die schlechtste Laufzeit

mit einem exponent

≥ 1.

deswegen ist es einfach: $2^{\log(n)} \in \Omega(6n)$

$\Rightarrow 4 \cdot 2^{\log(n)} + \sqrt{n} \in \Omega(6n)$ (Richtig)

II. Fall: $n < e$

ein Zahl mit einem Exponent $\in [0,1]$ können wir gerne mit "$\sqrt{\ }$" schreiben und das beschreibt eine Laufzeit von $O(n^{\varepsilon})$, die offensichtlich kleiner als $O(n)$ ist

$O(\sqrt{n}) < O(n)$ ist eindeutig

$\Rightarrow O(\sqrt{n}) + O(n^{\varepsilon}) < O(n)$.

deswegen $4 \cdot 2^{\log(n)} + \sqrt{n} \notin \Omega(6n)$.

d) $n^3 \in \omega(2n^3 + n^2 \log_2^2 n)$ (Falsch)

n^3 hat eine Laufzeit von $O(n^3)$

$2n^3 + n^2 \log_2^2 n$ hat auch eine Laufzeit von $O(n^3)$

deswegen ist $n^3 \notin \omega(2n^3 + n^2 \log_2^2 n)$.

e) $5\sqrt[3]{n^9} \in \Theta(n^{5/2})$ (Richtig).

$5\sqrt[3]{n^9} = 5\, n^{9/3} = 5n^3$

$n^{5/2} = n^{2,5}$

} beide haben eine Laufzeit von $O(n^c)$