… *Teoria Deciziilor*

- ***Metode bazate pe valoarea medie***

(expected value)

…

- *Metode multicriteriale de analiză a deciziilor*

Electre

… C6

Metode bazate pe valoarea medie

(expected value)

Aceste metode folosesc probabilităţile **P** din matricea de decizie

$$D = \{A, S, R, P\}.$$

Spre deosebire de metodele prezentate anterior, acestea **utilizează complet informaţia disponibilă**.

Teoria probabilităţilor în problemele de decizie

Teoria probabilităţilor:

- modalitate raţională de studiere a incertitudinii;
- realizează măsurarea cantitativă a şanselor de apariţie a unui eveniment.

Probabilitatea:

- ***obiectivă*** - şansa de apariţie a unui eveniment;
  - axiomatică (ex. ½);
  - statistică – prin *experimente statistice* utilizand *frecvenţele relative;*
- ***subiectivă*** – depinde de observator;

Matricea decizională D = {A, S, R, P} conţine probabilităţile P asociate stărilor S. Dacă decidentul dispune de probabilităţi determinate obiectiv atunci ele se utilizează, altfel ele trebuie obţinute pe cale subiectivă (*mai bine decat deloc!*).

Determinarea *subiectivă* a probabilităţilor

Determinare a *probabilităţilor subiective* :

1. Se ordonează stările naturii S_j ($1 \le j \le n$) în ordinea descrescătoare a şansei de apariţie a lor. Dacă două sau mai multe stări au şanse egale de apariţie, ele vor ocupa poziţii consecutive în lista ordonată $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$;
2. Se atribuie ponderea 1 celei mai probabile stări (S_1).
   $j := 1$ (j = indicele ultimei stări la care s-a atribuit pondere).
   $w_1 := 1$ (w_1 = ponderea atribuită stării S_1).
3. Pentru $j := 2, n$ execută secvenţa (j este indicele stării curente la care se atribuie pondere) :
   - Determină $Q = w_{j-1} / w_j$ (ponderea fracţionară a şansei de apariţie a stării curente S_j în raport şansa de apariţie a stării precedente, S_{j-1})
   - $w_j := w_{j-1} \cdot Q$ (ponderea atribuită stării S_j)
4. Calculează suma ponderilor $$s = \sum_{j=1}^{n} w_j$$
5. Normalizează ponderile: $p_j := w_j / s$ ($1 \le j \le n$), p_j = probabilităţile (subiective) stărilor S_j.

… Determinarea *subiectivă* a probabilităţilor

Pentru exemplul anterior, mulţimea stărilor $S=\{C_M,C_P,C_R\}$ şi managerul consideră că cererea potrivită C_P are şansa de apariţie cea mai mare, urmată de cererea redusă C_R şi de cererea mare C_M. Deci, lista S ordonată este $S=\{C_P,C_R,C_M\}$.

Decidenţii presupun că şansa de apariţie a lui C_R este jumătate din şansa de apariţie a lui C_P, iar şansa de apariţie a lui C_M este o treime din şansa de apariţie a lui C_R.

Starea (pasul 1)	*Atribuirea de ponderi* (paşii 2 şi 3)			*Normalizare* (pasul 5)
	j=1	j=2	j=3	
C_P	$w_1 = 1$	$w_1 = 1$	$w_1 = 1 = 6/6$	$p_1 = 6/10 = 0{,}6$
C_R		$w_2 = 1/2$ (1)	$w_2 = 1/2 = 3/6$	$p_2 = 1/2 \cdot 6/10 = 3/10 = 0{,}3$
C_M			$w_3 = 1/3$ (1/2) $= 1/6$	$p_3 = 1/6 \cdot 6/10 = 1/10 = 0{,}1$
Sume (pasul 4)			$s=w_1+w_2+w_3 =10/6$	$s = p_1+p_2+p_3 = 1$

Notăm cu x probabilitatea stării C_P, atunci probabilitatea stării C_R este $x/2$, iar probabilitatea stării C_M este $x/6$. Suma probabilităţilor fiind 1, probabilitatea stării C_P este soluţia a ecuaţiei $x + x/2 + x/6 = 1$.

Criteriile EMV şi EOL

După ce distribuţia de probabilitate a fost evaluată *subiectiv* pentru mulţimea stărilor, se poate calcula *valoarea aşteptată* pentru fiecare alternativă de acţiune, aşa cum a fost ea definită la criteriul Laplace.

Criteriile de considerat sunt:

- de natură monetară (caz în care se foloseşte matricea consecinţelor R, iar valoarea calculată se numeşte EMV - *Expected Monetary Value* - *valoarea medie monetară*):

$$\mathrm{EMV}(A_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot r_{ij}$$

- regrete - ocazii pierdute (când se foloseşte matricea regretelor OL, valoarea calculată se numeşte EOL - *Expected Opportunity Loss* - *pierderea medie de avantaje*):

$$\mathrm{EOL}(A_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot ol_{ij}, 1 \le i \le m.$$

... Criteriile EMV şi EOL

Pentru exemplul anterior şi probabilităţile tocmai determinate obţinem :

Alternative	Stări – ***profituri***			$EMV(A_i)$	*Decizia MAX*
	0.1	0.6	0.3		
	C_M	C_P	C_R		
A_1	**15**	**3**	**-6**	1.5	
A_2	**9**	**4**	**-2**	**2.7**	A_2
A_3	**3**	**2**	**1**	1.8	

Alternative	Stări – ***avantaje pierdute***			$EOL(A_i)$	*Decizia MAX*
	0.1	0.6	0.3		
	C_M	C_P	C_R		
A_1	**0**	**1**	**7**	2.7	
A_2	**6**	**0**	**3**	**1.5**	A_2
A_3	**12**	**2**	**0**	2.4	

Obs. Ambele criterii conduc la aceeaşi decizie (se poate demonstra matematic).

Metode multicriteriale de analiză a deciziilor

Tehnicile multicriteriale de analiză au următoarele **caracteristici generale**:

- fac explicite alternativele şi contribuţia acestora la satisfacerea diverselor criterii de decizie;
- folosesc un sistem de ponderi explicite pentru criterii;
- se bazează pe capacitatea de judecată a decidentului.

[***Dodgson***, 2000]

Aceste thenici **diferă** prin modul în care combină datele problemei, **rezultatele** find următoarele:

- identificarea celei mai preferabile alternative;
- ierarhizarea alternativelor;
- reducerea numărului de alternative posibile;
- separarea alternativelor acceptabile de cele inacceptabile.

Analiza multicriterială <u>stabileşte o ierarhizare a alternativelor</u> prin referirea la o mulţime explicită de obiective pe care decidentul le-a identificat şi pentru care a stabilit criterii măsurabile de evaluare a gradului de îndeplinire a lor, oferind mai multe <u>modalităţi de agregare a datelor</u> referitoare la criterii pentru obţinerea *indicatorilor globali* (*scorurilor*) *de performanţă* pentru alternative.

Caracteristica esenţială a *analizei multicriteriale* este accentul pus pe puterea de judecată a decidentului, pentru stabilirea obiectivelor şi criteriilor, estimarea ponderilor relative şi, parţial, pentru evaluarea contribuţiei fiecărei alternative la realizarea fiecărui criteriu.

Analiza multicriterială are o serie de **avantaje** faţă de raţionamentul informal, nestructurat:

- este deschisă şi explicită;
- alegerea obiectivelor şi criteriilor făcute de decident este deschisă la analiză şi modificare, dacă se constată că unele sunt inadecvate;
- folosirea punctajelor (scorurilor) şi ponderilor este explicită; acestea se stabilesc folosind tehnici simple şi clare. Acestea se pot compara şi ajusta folosind informaţie suplimentară;
- măsurarea performanţelor se poate face de către experţi, nu de decident;
- poate constitui un mijloc de comunicare între decident şi sistemul condus;
- punctajele şi ponderile se pot folosi la audit.

Metodele *analizei multicriteriale* pot fi ***compensatorii*** sau ***non-compensatorii***.

Metodele non-compensatorii **nu permit compromisuri** între criteriile după care se evaluează diversele alternative (variante) decizionale. Valoarea nefavorabilă asociată unui criteriu nu se poate compensa prin valori favorabile asociate altor criterii. Ipoteza de lucru este că fiecare criteriu (cerinţă sau o caracteristică a soluţiei) este independent de toate celelalte criterii, prin urmare se pot compara în perechi. Metodele non-compensatorii sunt caracterizate prin simplitate, însă în realitate se întâlnesc multe situaţii când cerinţele nu sunt independente - agenţii depind unul de altul, îndeplinirea unei cerinţe contribuie la satisfacerea altei cerinţe.

Metodele compensatorii **permit** decidenţilor **să facă compromisuri** între criterii. Un punctaj mai scăzut asociat unui criteriu este acceptabil dacă el este compensat de punctaje mai ridicate asociate altor criterii. Astfel de compensări sunt uzuale în multe domenii - deciziile luate implică compromis între criterii precum performanţele, costul, fiabilitatea, timpul de livrare etc.

Matricea performanţelor

Datele problemei de analiză multicriterială se memorează în ***matricea performanţelor sau consecinţelor***.

Elementele problemei sunt:

- alternativele decizionale (*variantele de acţiune*): $A = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$.
- criteriile de decizie (*obiectivele*): $C = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$.
- consecinţele sunt măsuri cantitative (numerice) ale contribuţiei unei anumite alternative la satisfacerea unui anumit criteriu decizional:

$$R = \{r_{ij}, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$$

unde elementul r_{ij} reprezintă consecinţa pentru criteriul C_j rezultată din alegerea alternativei A_i (r_{ij} pot fi numere, însă se pot exprima şi prin valori binare (*da/nu*) sau prin termeni calitativi (*culoare, gust*, etc).

- ponderile sunt asociate criteriilor de decizie şi stabilesc importanţa acestora:

$$P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$$

Fiecărui criteriu decizional C_j ($1 \leq j \leq n$) i se asociază ponderea p_j (stabilită de decident în mod subiectiv sau printr-o tehnică specială).

Matricea performanţelor include elementele prezentate anterior şi are forma generală prezentată alăturat:

Liniile matricii reprezintă *alternativele decizionale*, iar coloanele *criteriile de decizie*.

Matricea performanţelor *(consecinţelor)*				
Alternativele decizionale	*Criterii de decizie*			
	p_1	p_2	...	p_n
	C_1	C_2	...	C_n
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}

După ce s-a obţinut *matricea performanţelor*, din ea se elimină *alternativele (liniile) dominate*. Apoi, decidentul trebuie să stabilească în ce măsură sunt acceptabile compensările făcute între criterii. Dacă nu se permit compensări, trebuie folosite tehnici non-compensatorii. Dacă compensarea este posibilă, atunci punctajul final se obţine prin agregarea notelor individuale. Aici diversele metode diferă prin modalitatea de agregare.

Etapele analizei multicriteriale :

1. Determinarea elementelor de bază ale problemei de decizie: *ce se urmăreşte, cine este decidentul, alte persoane implicate,* etc.
2. Precizarea *alternativelor decizionale* $A = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$.
3. Precizarea *criteriilor decizionale* $C = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$, în raport cu care se determină *performanţele* (*consecinţele*) alternativelor .
4. Stabilirea *valorilor numerice pentru consecinţele* $R = \{r_{ij}, 1 \le i \le m; 1 \le j \le n\}$.
5. Stabilirea *ponderilor criteriilor* $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, → importanţa acestora în luarea deciziei.
6. Calculul *punctajului* (*scorului*) global al alternativelor - media performanţelor cu ponderile P:

$$\text{scor}(A_i) = p_1 r_{i1} + p_2 r_{i2} + \cdots + p_n r_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij} \quad , 1 \le i \le m$$

7. Examinarea şi interpretarea rezultatelor.
8. Efectuarea analizei de senzitivitate, prin modificarea consecinţelor şi a ponderilor.

Analiza multicriterială :

În continuare sunt prezentate trei metode de analiză multicriterială:

- Teoria multicriterială a utilităţilor,
- Procesul ierarhiei analitice (***AHP***),
- Metoda ***ELECTRE***.

Teoria multicriterială a utilităţilor

Nu există modele normative unanim acceptate care să arate cum trebuie să fie luate deciziile multicriteriale. Cel mai agreat model se bazează pe teoria utilităţilor şi derivă din lucrările lui von Neumann and Morgenstern (1947), respectiv Savage (1954). Keeney şi Raiffa (1976) au dezvoltat o mulţime de procedee care permit decidenţilor să evalueze practic alternativele decizionale multicriteriale.

Scopul teoriei clasice a utilităţilor este formalizarea modului cum trebuie să se facă deciziile. Ea începe cu stabilirea unei mulţimi de axiome fundamentale (un exemplu o astfel de axiomă este: o cantitate mai mare dintr-un bun dorit este de preferat uneia mai mici). Pe urmă, folosind axiomele şi raţionamentul matematic, se demonstrează că singura modalitate în care un individ se poate comporta consistent în raport cu toată mulţimea de axiome este prin alegerea alternativei cu cea mai mare valoare a utilităţii medii subiective (SEU - subjective expected utility).

... Teoria multicriterială a utilităţilor

Ipotezele de lucru sunt:

a) există mai multe alternative distincte,

b) la un moment dat se poate alege o alternativă şi numai una şi

c) datorită incertitudinilor legate de viitor, alternative diferite au valoare (utilitate) diferită pentru decident, în funcţie de starea naturii ce se va realiza.

Valoarea utilităţii medii subiective pentru fiecare alternativă se determină prin:

1. identificarea tuturor stărilor viitoare ale naturii care sunt relevante pentru respectiva alternativă;

2. calcularea utilităţii (gradului de atractivitate) u_{ij}, pe care decidentul îl asociază cu rezultatul produs de combinaţia dintre alegerea alternativei A_i şi natura aflată în starea S_j.

3. calcularea punctajului (scorului) de preferinţă U_i al alternativei A_i:

$$U_i = p_1 u_{i1} + p_2 u_{i2} + \cdots + p_n u_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij} \quad ,1 \leq \mathrm{i} \leq m$$

unde p_j sunt probabilităţile atribuite de decident stărilor naturii S_j $(1 \leq j \leq n)$.

Acest model operează explicit cu incertitudinea şi este multicriterial deoarece fiecare utilitate u_{ij} se bazează pe o *evaluare multicriterială*. Totuşi, el nu oferă o procedură explicită de determinare a utilităţilor. Lucrările lui ***Keeney*** şi ***Raiffa*** (1976) se referă tocmai la algoritmizarea aşa-numitelor *utilităţi multiatribute*. *Modelul utilităţilor multiatribute* caută simultan să ţină cont de incertitudine şi să evalueze utilităţile pe baza mai multor criterii.

O condiţie critică în calculul scorurilor de utilitate este *independenţa reciprocă a preferinţelor*. Dacă se poate stabili aceasta, calculul utilităţilor individuale este relativ simplu. Dacă însă condiţia nu este îndeplinită, atunci fie că structura matematică a elementelor u_{ij} se complică (se folosesc funcţii neliniare) sau trebuie regândite criteriile dependente unele de altele.

Analytic Hierarchy Process - AHP

[Thomas L. Saaty, *Analytic Hierarchy Process*, Published Online: 15 JUL 2005]

An application of multicriteria decision-making theory is the analytic hierarchy process (AHP).

The analytic hierarchy process subdivides a complex decision-making problem or planning issue into its components or levels, and arranges these levels into an ascending hierarchic order. At each level of the hierarchy, the components are compared relative to each other using a pairwise comparison scheme. The components of a given level are related to an adjacent upper level and thereby generate an integration across the levels of the hierarchy. The result of this systematic process is a set of priorities or relative importance, or method of scaling between the various actions or alternatives. The relative priority weights can provide guidelines for the allocation of resources among the entities at the lower level.

Structuring any decision problem hierarchically is an efficient way to deal with and identify the major components of the problem. There is no single hierarchic structure to use in every problem. When hierarchies are designed to reflect likely environmental scenarios, corporate objectives, current and proposed product/market alternatives, and various medical strategy options, the AHP can provide a framework and methodology for the determination of a number of key decisions.

... *Analytic Hierarchy Process - AHP*

[Thomas L. Saaty, *Analytic Hierarchy Process*, Published Online: 15 JUL 2005]

The AHP allows its users flexibility in constructing a hierarchy to fit their needs. The AHP also provides an effective structure for group decision making by imposing a discipline on the group's thought processes. The necessity of assigning a numerical value to each variable of the problem helps decision makers to maintain cohesive thought patterns by deriving the relative weight of each component of the hierarchy: criteria and alternatives. In this manner, one determines the optimum alternative. The AHP has been applied successfully to a variety of problems in planning, prioritization, resource allocation, conflict resolution, decision making, and forecasting or prediction, as well as in health care. The AHP is a special case or subset of the analytic network process (ANP), which uses a network structure that allows dependence and feedback instead of a hierarchy.

The AHP focuses on dominance matrices and their corresponding measurement in contrast with the proximity, profile, and conjoint measurement approaches. It goes beyond the Thurston comparative judgment approach by relaxing the assumption of normality on the parameters, e.g. equal variance, zero covariance, and restriction of the type of comparisons. It is based on a trade-off concept whereby one develops the trade-off in the course of structuring and analyzing a series of simple reciprocal pairwise comparison matrices.

... *Analytic Hierarchy Process - AHP*

The **Analytic Hierarchy Process (AHP)** is a structured technique for organizing and analyzing complex decisions. Based on mathematics and psychology, it was developed by Thomas L. Saaty in the 1970s and has been extensively studied and refined since then.

It has particular application in group decision making,[1] and is used around the world in a wide variety of decision situations, in fields such as government, business, industry,healthcare, and education.

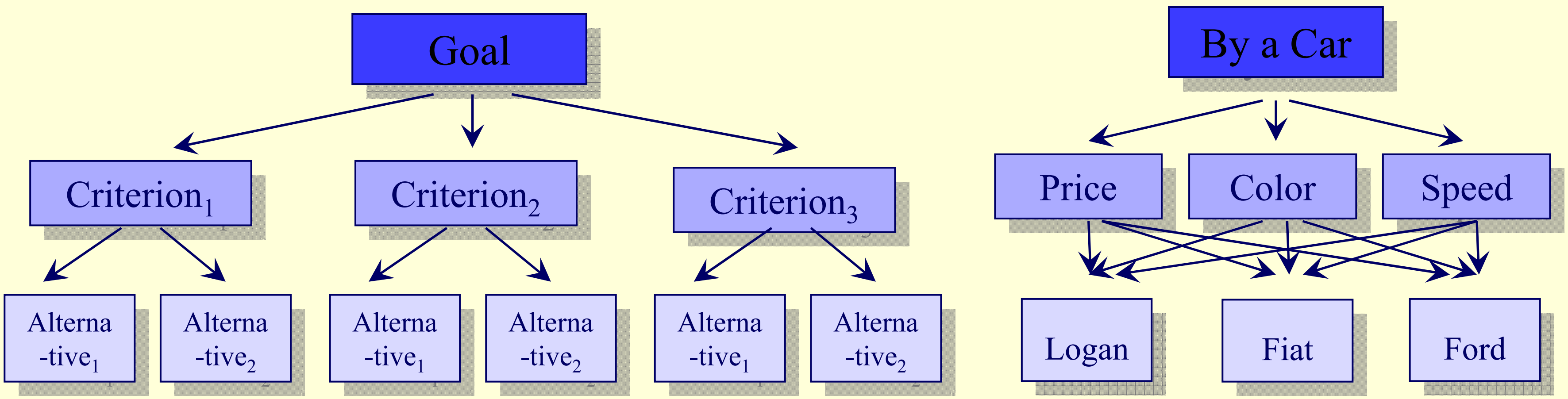
Rather than prescribing a "correct" decision, the AHP helps decision makers find one that best suits their goal and their understanding of the problem. It provides a comprehensive and rational framework for structuring a decision problem, for representing and quantifying its elements, for relating those elements to overall goals, and for evaluating alternative solutions.

Users of the AHP first decompose their decision problem into a hierarchy of more easily comprehended sub-problems, each of which can be analyzed independently. The elements of the hierarchy can relate to any aspect of the decision problem—tangible or intangible, carefully measured or roughly estimated, well- or poorly-understood—anything at all that applies to the decision at hand.

... *Analytic Hierarchy Process - AHP*

A simple AHP hierarchy. There are three Alternatives for reaching the Goal, and four Criteria to be used in deciding among them.

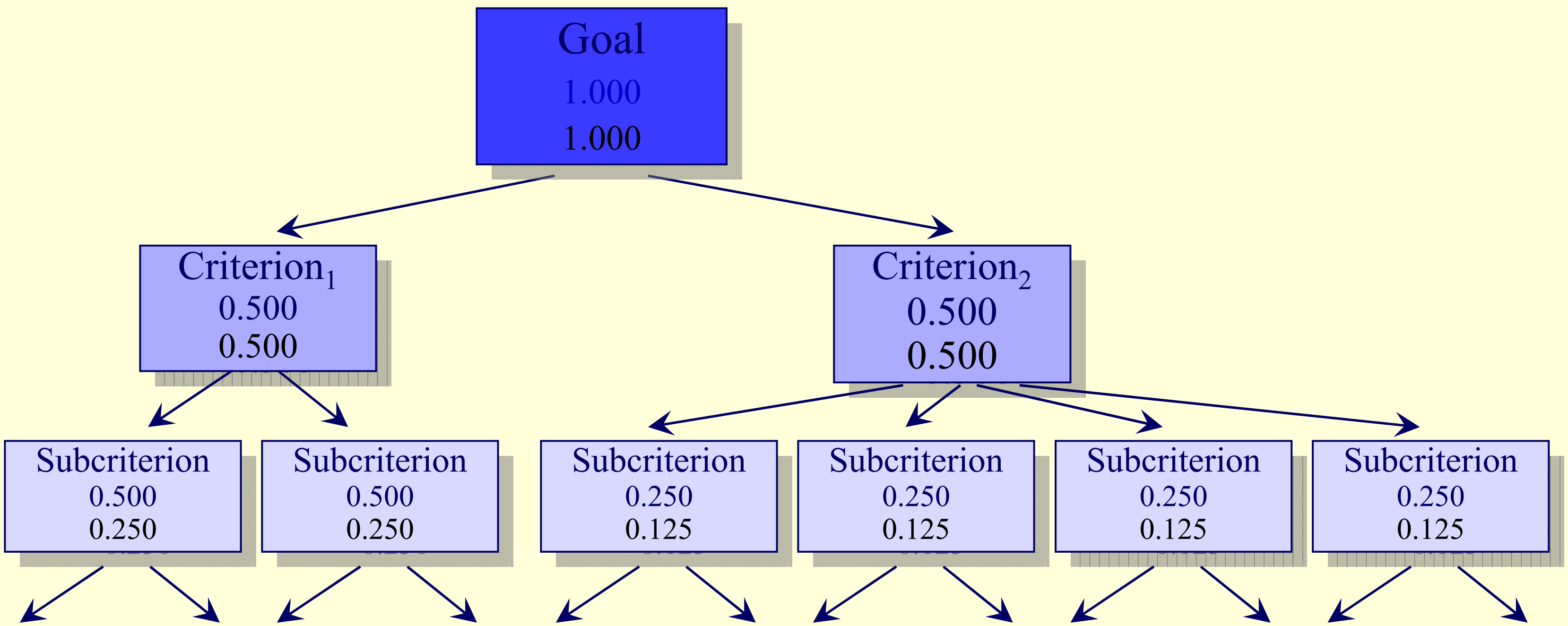
To reduce the size of the drawing required, it is common to represent AHP hierarchies as shown in the diagram below, with only one node for each alternative, and with multiple lines connecting the alternatives and the criteria that apply to them. To avoid clutter, these lines are sometimes omitted or reduced in number. Regardless of any such simplifications in the diagram, in the actual hierarchy each alternative is connected to every one of its parent nodes.



... *Analytic Hierarchy Process - AHP*

A more complex AHP hierarchy, with local and global default priorities. In the interest of clarity, the decision alternatives do not appear in the diagram.

The *local priorities*, shown in gray, represent the relative weights of the nodes within a group of siblings with respect to their parent. You can easily see that the local priorities of each group of Criteria and their sibling Subcriteria add up to 1.000. The *global priorities*, shown in black, are obtained by multiplying the local priorities of the siblings by their parent's global priority. The global priorities for all the subcriteria in the level add up to 1.000.



Analytic Hierarchy Process AHP - Business Performance Management http://www.youtube.com/watch?v=18GWVtVAAzs

Procesul ierarhiei analitice :

(AHP - Analytic Hierarchy Process)

[Saaty, 1980], [Maiden, 2002]

AHP este o metodă compensatorie cu model aditiv liniar.

Modul de calcul al ponderilor şi performanţelor este bazat pe compararea perechilor de alternative şi criterii.

AHP consideră că toate criteriile de decizie (*obiectivele sistemului*) sunt aranjate într-o structură ierarhică, care are ca rădăcină obiectivul general (*fundamental*). Acesta se descompune succesiv în nivelurile criteriu şi subcriteriu. Compararea criteriilor de decizie şi a alternativelor în AHP se face folosind (*construind*) matrici de comparare care servesc la formarea matricii performanţelor.

Algoritmul metodei ***AHP*** pentru problema de decizie multicriterială:

Considerăm că cele n criterii decizionale C_1, C_2 , ..., C_n sunt noduri frunză ale unei ierarhii simple, constituind descompunerea unei cerinţe (*unui obiectiv*) ***C***.

Metoda (*algoritmul*) ***AHP*** are trei paşi:

1. **Compararea perechilor de alternative decizionale** în funcţie de fiecare criteriu de decizie, pentru a le ierarhiza în raport cu factorul respectiv;
2. **Compararea perechilor de criterii de decizie**; se obţine o ierarhizare relativă a acestora;
3. **Crearea matricii performanţelor** şi **calculul scorurilor alternativelor** pentru toate criteriile de decizie folosind ierarhizarea variantelor obţinută la **1.** şi ierarhizarea criteriilor de la pasul **2.**

Pasul 1. *Compararea perechilor de alternative*

Se construiesc matrici de comparare pentru ierarhizarea alternativelor în raport cu fiecare criteriu.

Se compară fiecare pereche de alternative din mulţimea

$$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_m\}$$

în funcţie de fiecare criteriu C_k din mulţimea criteriilor de decizie

$$\{C_1, C_2, ..., C_n\},$$

obţinându-se matricile de comparare

$$\{D^{(k)}, 1 \le k \le n\}.$$

Procesul are doi subpaşi:

(**1a**) construirea matricilor de comparare brute $D^{(k)}$ şi

(**1b**) normalizarea acestora.

… Pasul 1. *Compararea perechilor de alternative (a)*

În subpasul (1a), pentru fiecare factor de decizie C_k $(1 \le k \le n)$ se obţine matricea pătratică de ordinul m, $D^{(k)} = \{d_{ij}^{(k)}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le m\}$.

Elementul din linia i şi coloana j al acestei matrici, $d_{ij}^{(k)}$ este un număr ce **compară** contribuţia alternativei decizionale A_i cu contribuţia alternativei decizionale A_j la satisfacerea factorului de decizie C_k $(1 \le k \le n)$.

Prin convenţie, se stabileşte că:

- $d_{ij}^{(k)} > 1$ dacă contribuţia alternativei A_i la satisfacerea criteriului de decizie C_k este mai mare decât contribuţia alternativei A_j;
- $d_{ij}^{(k)} < 1$ dacă contribuţia alternativei A_i la satisfacerea criteriului de decizie C_k este mai mică decât contribuţia alternativei A_j;
- $d_{ij}^{(k)} = 1$ dacă alternativele A_i şi A_j satisfac în mod egal criteriul de decizie C_k .

Elementele matricii $D^{(k)}$ au următoarele **proprietăţi** evidente:

$$d_{ij}^{(k)} = 1 / d_{ji}^{(k)} \quad \text{şi} \quad d_{ii}^{(k)} = 1 , \qquad 1 \le i \le m, 1 \le j \le m.$$

Se observă (din proprietăţile anterioare) că pentru construirea matricei $D^{(k)}$ este suficient să determinăm doar elementele triunghiului său superior:

$$\{d_{ij}^{(k)}, 1 \le i \le m, \mathrm{i} < j \le m\} \quad \text{sau inferior:} \quad \{d_{ij}^{(k)}, j < i \le m, 1 \le j \le m\}.$$

Stabilirea valorilor elementelor se face de către decident, prin aplicarea următoarelor reguli:

Dacă contribuţia alternativei A_i în raport cu contribuţia alternativei A_j la realizarea factorului de decizie C_k este :	atunci $d_{ij}^{(k)} =$
▪ egală	1
▪ între egal şi moderat mai mare (mică)	2 (1/2)
▪ moderat mai mare (mică)	3 (1/3)
▪ între moderat mai mare (mică) şi mult mai mare (mică)	4 (1/4)
▪ mai mare (mică)	5 (1/5)
▪ între mult mai mare (mică) şi foarte mare (mică)	6 (1/6)
▪ foarte mare (mică)	7 (1/7)
▪ între foarte mare (mică) şi extrem de mare (mică)	8 (1/8)
▪ extrem de mare (mică)	9 (1/9)

… Pasul 1. *Compararea perechilor de alternative (b)*

În subpasul (1b), matricea decizională brută se normalizează, prin următoarele acţiuni:

- calculul sumelor pe coloane $s_j^{(k)}$, $1\leq j \leq m$ care se scriu pe o linie suplimentară;
- împărţirea fiecărui element $d_{ij}^{(k)}$, $1\leq i, j \leq m$ la sumele coloanei sale $s_j^{(k)}$;
- calculul consecinţelor (*performanţelor*), ca medii ale elementelor de pe fiecare linie, care se scriu într-o coloană suplimentară:

$$p_i^{(k)} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{d_{ij}^{(k)}}{s_j^{(k)}}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

- calculul sumelor pe coloane :

Matricea $D^{(k)}$ brută				
Alternativa	A_1	A_2	...	A_m
A_1	$d_{11}{}^{(k)}$	$d_{12}{}^{(k)}$	...	$d_{1m}{}^{(k)}$
A_2	$d_{21}{}^{(k)}$	$d_{22}{}^{(k)}$	...	$d_{2m}{}^{(k)}$
...	...	...	...	...
A_m	$d_{m1}{}^{(k)}$	$d_{m2}{}^{(k)}$	...	$d_{mm}{}^{(k)}$
Sume pe coloane	$s_1^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} d_{i1}^{(k)}$	$s_2^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} d_{i2}^{(k)}$	...	$s_m^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} d_{im}^{(k)}$

- împărţirea fiecărui element :

Matricea $D^{(k)}$ normalizată				
Alternativa	A_1	A_2	...	A_m
A_1	$d_{11}{}^{(k)} / s_1{}^{(k)}$	$d_{12}{}^{(k)} / s_2{}^{(k)}$	...	$d_{1m}{}^{(k)} / s_m{}^{(k)}$
A_2	$d_{21}{}^{(k)} / s_1{}^{(k)}$	$d_{22}{}^{(k)} / s_2{}^{(k)}$	...	$d_{2m}{}^{(k)} / s_m{}^{(k)}$
...	…	…	…	…
A_m	$d_{m1}{}^{(k)} / s_1{}^{(k)}$	$d_{m2}{}^{(k)} / s_2{}^{(k)}$	...	$d_{mm}{}^{(k)} / s_m{}^{(k)}$
Sume pe coloane	1	1		1

- calculul consecinţelor :

Matricea $D^{(k)}$ normalizată şi cu coloana consecinţelor					
Alternativa	A_1	A_2	...	A_m	***Medii (consecinţe)***
A_1	$d_{11}{}^{(k)} / s_1{}^{(k)}$	$d_{12}{}^{(k)} / s_2{}^{(k)}$	...	$d_{1m}{}^{(k)} / s_m{}^{(k)}$	$p_1^{(k)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{d_{1j}^{(k)}}{s_j^{(k)}}$
A_2	$d_{21}{}^{(k)} / s_1{}^{(k)}$	$d_{22}{}^{(k)} / s_2{}^{(k)}$	...	$d_{2m}{}^{(k)} / s_m{}^{(k)}$	$p_2^{(k)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{d_{2j}^{(k)}}{s_j^{(k)}}$
...	...	...	...	...	...
A_m	$d_{m1}{}^{(k)} / s_1{}^{(k)}$	$d_{m2}{}^{(k)} / s_2{}^{(k)}$	...	$d_{mm}{}^{(k)} / s_m{}^{(k)}$	$p_m^{(k)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{d_{mj}^{(k)}}{s_j^{(k)}}$
Sume pe coloane	1	1	...	1	1

Pasul 2. *Compararea perechilor de criterii*

Algoritmul este similar celui de la pasul 1, AHP ierarhizează factorii (*criteriile*) de decizie, cu scopul de a furniza informaţii suplimentare asupra contribuţiei acestora la obiectivul (*factorul, criteriul de decizie*) fundamental C.

Matricea de comparare este $D^{(C)}$, de ordinul n (*numărul de factori decizionali*), iar elementele sale $d_{ij}^{(C)}$, sunt numere (*note*) ce compară importanţa factorului decizional C_i cu cea a factorului C_j ($1 \leq i, j \leq n$).

Reguli: Dacă contribuţia factorului decizional C_i în raport cu contribuţia factorului C_j este :	atunci $d_{ij}^{(C)} =$
▪ egală	1
▪ între egal şi moderat mai mare (mică)	2 (1/2)
▪ moderat mai mare (mică)	3 (1/3)
▪ între moderat mai mare (mică) şi mult mai mare (mică)	4 (1/4)
▪ mai mare (mică)	5 (1/5)
▪ între mult mai mare (mică) şi foarte mare (mică)	6 (1/6)
▪ foarte mare (mică)	7 (1/7)
▪ între foarte mare (mică) şi extrem de mare (mică)	8 (1/8)
▪ extrem de mare (mică)	9 (1/9)

- calculul sumelor pe coloane :

Matricea $D^{(C)}$ brută				
Factorul de decizie	C_1	C_2	...	C_n
C_1	$d_{11}{}^{(C)}$	$d_{12}{}^{(C)}$	...	$d_{1n}{}^{(C)}$
C_2	$d_{21}{}^{(C)}$	$d_{22}{}^{(C)}$	...	$d_{2n}{}^{(C)}$
...	...	...	...	...
C_n	$d_{n1}{}^{(C)}$	$d_{n2}{}^{(C)}$	...	$d_{nn}{}^{(C)}$
Sume pe coloane	$s_1^{(C)} = \sum_{i=1}^{n} d_{i1}^{(C)}$	$s_2^{(C)} = \sum_{i=1}^{n} d_{i2}^{(C)}$	...	$s_n^{(C)} = \sum_{i=1}^{n} d_{in}^{(C)}$

- împărţirea fiecărui element :

Matricea $D^{(C)}$ normalizată				
Factorul de decizie	C_1	C_2	...	C_n
C_1	$d_{11}^{(C)} / s_1^{(C)}$	$d_{12}^{(C)} / s_2^{(C)}$	...	$d_{1n}^{(C)} / s_n^{(C)}$
C_2	$d_{21}^{(C)} / s_1^{(C)}$	$d_{22}^{(C)} / s_2^{(C)}$	...	$d_{2n}^{(C)} / s_n^{(C)}$
...	...	...	...	...
C_n	$d_{n1}^{(C)} / s_1^{(C)}$	$d_{n2}^{(C)} / s_2^{(C)}$	...	$d_{nn}^{(C)} / s_n^{(C)}$
Sume pe coloane	1	1		1

- calculul consecinţelor :

Matricea $D^{(C)}$ normalizată şi cu coloana consecinţelor					
Factorul de decizie	C_1	C_2	...	C_n	***Medii (ponderi)***
C_1	$d_{11}^{(C)} / s_1^{(C)}$	$d_{12}^{(C)} / s_2^{(C)}$	...	$d_{1n}^{(C)} / s_n^{(C)}$	$p_1^{(C)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{1j}^{(C)}}{s_j^{(C)}}$
C_2	$d_{21}^{(C)} / s_1^{(C)}$	$d_{22}^{(C)} / s_2^{(C)}$	...	$d_{2n}^{(C)} / s_n^{(C)}$	$p_2^{(C)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{2j}^{(C)}}{s_j^{(C)}}$
...	...	...	...	...	...
C_n	$d_{n1}^{(C)} / s_1^{(C)}$	$d_{n2}^{(C)} / s_2^{(C)}$	...	$d_{nn}^{(C)} / s_n^{(C)}$	$p_n^{(C)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{nj}^{(C)}}{s_j^{(C)}}$
Sume pe coloane	1	1	...	1	1

Pasul 3. *Calculul scorurilor (punctajelor) alternativelor*

Ultimul pas al metodei AHP combină rezultatele etapelor anterioare pentru a produce o ierarhizare generală a fiecărei alternative decizionale A_i $(1 \le i \le m)$ în raport cu toate criteriile de decizie C_j $(1 \le j \le n)$.

Rezultatele sunt expuse într-o matrice a performanţelor D ce conţine coloane pentru criteriile de decizie şi linii pentru variantele decizionale: $D = \{d_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$. Elementul d_{ij} de la intersecţia liniei variantei decizionale A_i $(1 \le i \le m)$ cu coloana criteriului de decizie C_j $(1 \le j \le n)$ este , adică performanţa variantei decizionale A_i în raport cu criteriul de decizie C_j, preluată din linia i şi coloana de consecinţe a matricii de comparare $D^{(j)}$ (ierarhizarea alternativelor decizionale în raport cu criteriul decizional C_j, construită la pasul 1).

Matricea D are o linie suplimentară ce conţine ponderile factorilor de decizie, adică coloana de ponderi a matricii $D^{(C)}$ construită în pasul 2, şi este bordată cu o coloană ce conţine punctajele generale ale alternativelor. Elementele acestei coloane, s_i $(1 \le i \le m)$, reprezintă scorurile (punctajele, mediile ponderate) ale variantelor decizionale A_i $(1 \le i \le m)$.

Evident, $0 \le s_i \le 1, (1 \le i \le m)$ şi $\sum_{i=1}^{m} s_i = 1$.

Folosind coloana scorurilor, se obţine **ierarhizarea alternativelor decizionale**: ***decizia înseamnă selectarea alternativei cu scorul cel mai mare***.

Matricea D finală - matricea performanţelor					
Ponderi factori →	Factori de decizie				$\sum_{i=1}^{n} p_i^{(C)} = 1$
	$p_1^{(C)}$	$p_2^{(C)}$	...	$p_{\mathrm{n}}^{(C)}$	
Alternative decizionale	C_1	C_2	...	C_n	Sume ponderate (punctaj general)
A_1	$p_1^{(1)}$	$p_1^{(2)}$	...	$p_1^{(n)}$	$s_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(C)} p_1^{(i)}$
A_2	$p_2^{(1)}$	$p_2^{(2)}$	...	$p_2^{(n)}$	$s_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(C)} p_2^{(i)}$
...	...	...	...	...	...
A_m	$p_m^{(1)}$	$p_m^{(2)}$	...	$p_m^{(n)}$	$s_m = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(C)} p_m^{(i)}$

Exemplu:

O societatea comercială doreşte să construiască o capacitate de producţie şi trebuie să decidă locul acesteia.

Există trei alternative de amplasare $\{A_1, A_2, A_3\}$, iar criteriile sunt $\{C_1$ = *preţul terenului*, C_2 = *distanţa de la furnizori*, C_3 = *gradul de calificare al forţei de muncă*, C_4 = *costul forţei de muncă*$\}$.

Pasul 1. Matricile de comparare brute şi normalizate pentru alternative:

Matricea $D^{(1)}$ - compararea alternativelor în funcţie de preţul terenului

Alternativa	A_1		A_2		A_3		Medii pe linii
	iniţial	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	
A_1	1	6/11	3	1/3	2	5/8	0.5012
A_2	1/3	2/11	1	1/9	1/5	1/16	0.1185
A_3	1/2	3/11	5	5/9	1	5/16	0.3803
Sume pe coloane	11/6	1	9	1	16/5	1	1

… Exemplu:

... Pasul 1. Matricile de comparare brute şi normalizate pentru alternative :

Matricea $D^{(2)}$ - compararea alternativelor în funcţie de distanţa de la furnizori							
Alternativa	A_1		A_2		A_3		Medii pe linii
	iniţial	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	
A_1	1	6/25	6	3/8	1/3	3/13	0.2819
A_2	1/6	1/25	1	1/16	1/9	1/13	0.0598
A_3	3	18/25	9	9/16	1	9/13	0.6583
Sume pe coloane	25/6	1	16	1	13/9	1	1

… Exemplu:

... Pasul 1. Matricile de comparare brute şi normalizate pentru alternative :

Matricea $D^{(3)}$ - compararea alternativelor în funcţie de calificarea forţei de muncă							
Alternativa	A_1		A_2		A_3		Medii pe linii
	iniţial	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	
A_1	1	1/5	1/3	7/31	1	1/9	0.1790
A_2	3	3/5	1	21/31	7	7/9	0.6850
A_3	1	1/5	1/7	3/31	1	1/9	0.1360
Sume pe coloane	5	1	31/21	1	9	1	1

… Exemplu:

... Pasul 1. Matricile de comparare brute şi normalizate pentru alternative :

Matricea $D^{(4)}$ - compararea alternativelor în funcţie de nivelul salariilor							
Alternativa	A_1		A_2		A_3		Medii pe linii
	iniţial	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	
A_1	1	1/6	1/3	4/19	1/2	1/11	0.1561
A_2	3	1/2	1	12/19	4	8/11	0.6196
A_3	2	1/3	1/4	3/19	1	2/11	0.2243
Sume pe coloane	6	1	19/12	1	11/2	1	1

… Exemplu:

Pasul 2. Matricea de comparare pentru criterii :

Matricea $D^{(C)}$ - compararea criteriilor									
Criteriu de decizie	C_1		C_2		C_3		C_4		Medii pe linii
	iniţial	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	*iniţial*	*normalizat*	
C_1	1	12/79	1/5	63/458	3	2/9	4	2/7	0.1993
C_1	5	60/79	1	315/458	9	2/3	7	1/2	0.6535
C_1	1/3	4/79	1/9	35/458	1	2/27	2	1/7	0.0860
C_1	1/4	3/79	1/7	45/458	1/2	1/27	1	1/14	0.0612
Sume	79/12	1	458/315	1	27/2	1	14	1	1.0000

... Exemplu:

Pasul 3. Calculul scorurilor (coloanele de medii ale matricilor anterioare servesc la construirea matricei performanţelor**) :**

Alternativa decizională	Criterii de decizie				Punctaj general
	$p_1 = 0.1993$	$p_2 = 0.6535$	$p_3 = 0.0860$	$p_4 = 0.0612$	
	C_1	C_2	C_3	C_4	
A_1	0.5012	0.2819	0.1790	0.1561	0.3091
A_2	0.1185	0.0598	0.6850	0.6196	0.1595
$\boldsymbol{A_3}$	**0.3803**	**0.6583**	**0.1360**	**0.2243**	**0.5314**
Sume pe coloane	1	1	1	1	1

Din coloana punctajului se observă că alternativa (locaţia) A_3 are scorul cel mai bun, prin urmare **decizia recomandată este A_3**.

… Next → Dss_6

- *Metode multicriteriale de analiză a deciziilor*

Electre

…