

# Metody ogrzewania mieszkań

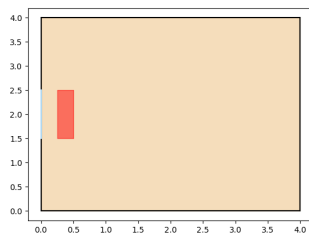
Daniel Maher

January 2025

## 1 Wstęp

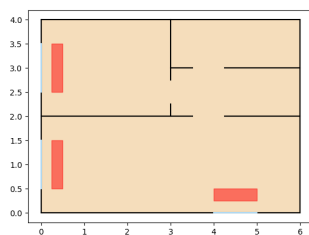
Celem tego projektu jest zbadanie efektywności różnych metod grzewczych za pomocą symulacji komputerowych. Odpowiemy sobie na dwa pytania: 'Czy grzejnik musi być pod oknem?' oraz 'Czy wyłączyć grzejniki przed wyjściem z domu?'

W związku z tym zbadamy dwa mieszkania. Jedno jednopokojowe z jednym oknem i grzejnikiem:



Rysunek 1: Mieszkanie jednopokojowe z jednym oknem i grzejnikiem

Drugie będzie modelowane na własnym mieszkaniu z trzema pokojami, grzejnikami i oknami:



Rysunek 2: Mieszkanie Pełne

## 2 Model Matematyczny

Żeby rozwiązać to zagadnienie, musimy wprowadzić model matematyczny, którym będziemy się kierowali, gdy tworzymy symulacje.

Mamy jednorodne równanie różniczkowe cząstkowe opisujące zmianę temperatury  $u := u(x, y, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\partial_{xx} + \partial_{yy})u$$

gdzie  $\alpha$  to współczynnik przewodnictwa cieplnego. Przyjmiemy  $\alpha = 0.0025 \frac{W}{m \cdot K}$  dla powietrza.

Musimy uwzględnić również grzejniki. Niech  $P$  będzie mocą grzejnika. Wtedy:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot c \cdot \frac{\delta u}{\Delta t} \approx \rho \cdot A \cdot c \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Stąd:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{P}{\rho \cdot A \cdot c}$$

Gdzie  $\rho = 1.1225 \frac{kg}{m^3}$  to gęstość powietrza,  $A$  to powierzchnia grzejnika, a  $c = 1005 \frac{J}{kgK}$  to ciepło właściwe powietrza. Przykładowa moc grzejnika (z Allegro) to 1500W.

Oczywiście musimy uwzględnić położenie grzejnika oraz średnią temperaturę w pokoju, dla której grzejnik przestanie grzać jeśli przekroczy pewien poziom (limit przyjmiemy jako  $20^\circ C$ ). Niech  $\Theta(x, y, u)$ , będzie za to odpowiadało zwracając 0 lub 1.

Ostatecznie dostajemy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\partial_{xx} + \partial_{yy})u + \frac{P}{\rho \cdot A \cdot c} \cdot \Theta(x, y, u)$$

## 3 Metoda Numeryczna

- Ustalamy pewien krok w przestrzeni  $h_x$  oraz w czasie  $h_t$ , żeby  $\frac{h_t}{h_x^2} < \frac{1}{2}$ . Przestrzeń  $\Omega = [0, L] \times [0, M]$  jest dyskretyzowana w następujący sposób:

$$\Omega = \left([x_0, x_1] \times [y_0, y_1]\right) \cup \left([x_1, x_2] \times [y_0, y_1]\right) \cup \dots \cup \left([x_{L-1}, x_L] \times [y_0, y_1]\right) \cup \\ \cup \dots \cup \left([x_0, x_1] \times [y_{M-1}, y_M]\right) \cup \left([x_1, x_2] \times [y_{M-1}, y_M]\right) \cup \dots \cup \left([x_{L-1}, x_L] \times [y_{M-1}, y_M]\right)$$

Czas  $[0, T]$  dyskretyzujemy w następujący sposób:

$$[0, T] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{T-1}, t_T]$$

- Niech  $u_{i,j,k}$  odpowiada  $u(x_i, y_j, t_k)$ .
- Ustalamy stałą temperaturę początkową  $u_{i,j,0} = T_0$
- Dla kolejnych  $k$  rozwiązujemy równanie ciepła:

$$u_{i,j,k+1} = u_{i,j,k} + \alpha \cdot \frac{h_t}{h_x^2} \left( u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} - 4u_{i,j,k} \right) + h_t \sum_{\Theta} \Theta(x_i, y_i, u_{i,j,k})$$

- Jeśli  $i, j$  należą do indeksów okna, to ustalamy temperaturę zewnętrzną:

$$u_{i,j,k+1} = T_{outside}$$

- Jeśli jest ściana pozioma  $i \in [a, b], j = c$ , to:

$$u_{i,j,k+1} = 0$$

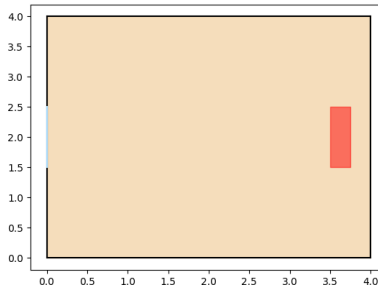
$$u_{i,j+1,k+1} = u_{i,j+2,k+1}$$

$$u_{i,j-1,k+1} = u_{i,j-2,k+1}$$

- Analogicznie dla ścian pionowych oraz ścian brzegowych mieszkania.

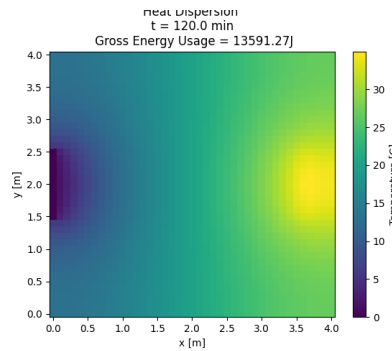
## 4 Czy grzejnik musi być pod oknem?

Sprawdźmy przypadek, gdy grzejnik znajduje się po przeciwległej stronie od okna:



Rysunek 3: Mieszkanie jednopokojowe z jednym oknem i grzejnikiem po przeciwległej stronie

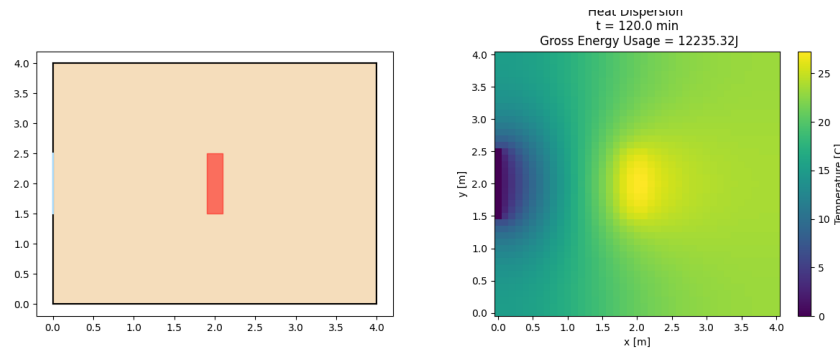
Ustawiamy temperaturę początkową w mieszkaniu  $5^{\circ}C$  i na zewnątrz  $0^{\circ}C$  oraz sprawdzamy jaki jest stan po 2 godzinach:



Rysunek 4: Enter Caption

Jak widać, temperatura nie rozchodzi się równomiernie po pokoju. Połowa pokoju przy oknie ma średnio temperaturę  $10 \sim 15^{\circ}\text{C}$ , a druga połowa  $25 \sim 30^{\circ}\text{C}$

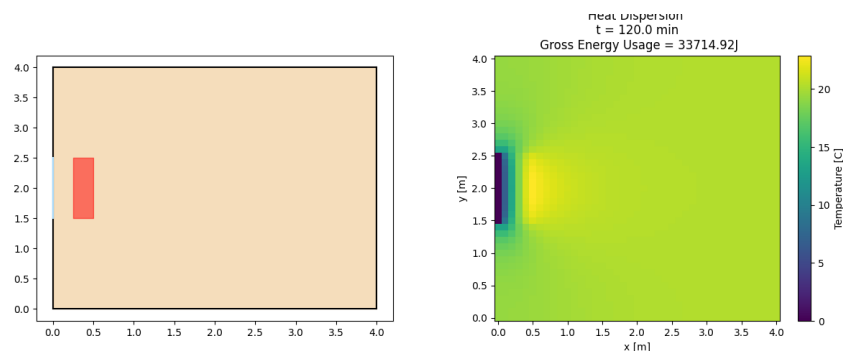
Robimy tak samo, gdy grzejnik jest na środku pokoju:



Rysunek 5: Mieszkanie jednopokojowe z jednym oknem i grzejnikiem po środku

Jest trochę lepiej. Po prawej stronie pokoju mamy dość równomierną temperaturę  $\sim 23^{\circ}\text{C}$ , a po lewej  $\sim 15^{\circ}\text{C}$ .

Zobaczmy, co się stanie gdy grzejnik będzie tuż przy oknie:

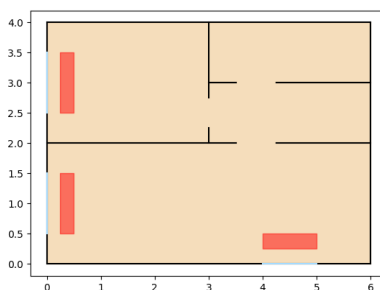


Rysunek 6: Mieszkanie jednopokojowe z jednym oknem i grzejnikiem po środku

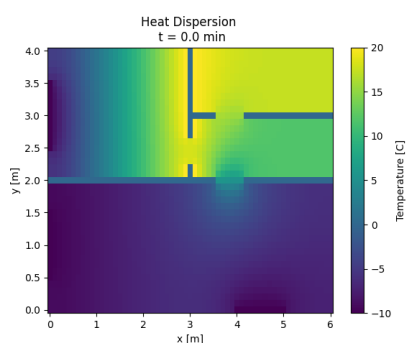
Tutaj jest idealna sytuacja. W całym pokoju praktycznie mamy równomierną temperaturę  $20^{\circ}\text{C}$ . Wnioskujemy, że grzejnik przy oknie najlepiej zwalcza wchodzący chłód.

## 5 Czy wyłączyć grzejniki przed wyjściem z domu?

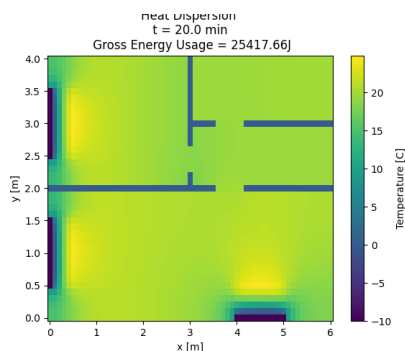
Żeby odpowiedzieć sobie na to pytanie zasymulujemy sytuację, gdzie w mieszkaniu jest równomierna temperatura  $20^{\circ}\text{C}$ , zostawiamy pokój z wyłączonymi grzejnikami na 2 godziny i potem grzejemy mieszkanie aż dojdzie do średnio  $20^{\circ}\text{C}$  w mieszkaniu jeszcze raz. Rozważamy 3 przypadki, gdy na zewnątrz jest bardzo zimno ( $-10^{\circ}\text{C}$ ), zimno ( $0^{\circ}\text{C}$ ) i chłodno ( $5^{\circ}\text{C}$ ). Tutaj ustawiamy moc grzejnika jako 2000W:



Rysunek 7: Enter Caption

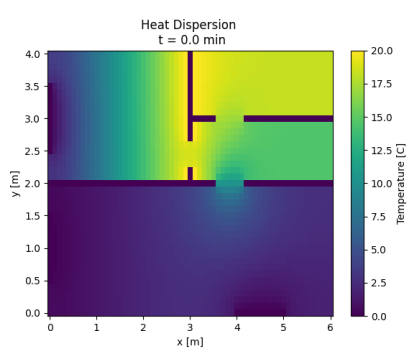


(a) Tuż po wejściu do mieszkania

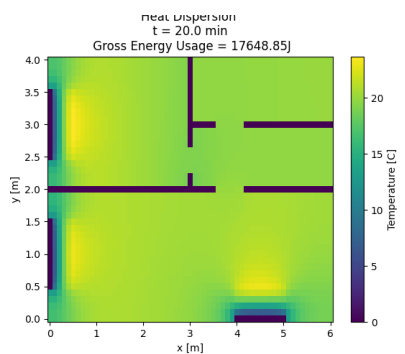


(b) Po krótkim ogrzewaniu

Rysunek 8: Gdy jest bardzo zimno

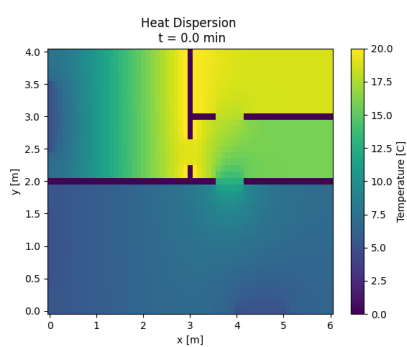


(a) Tuż po wejściu do mieszkania

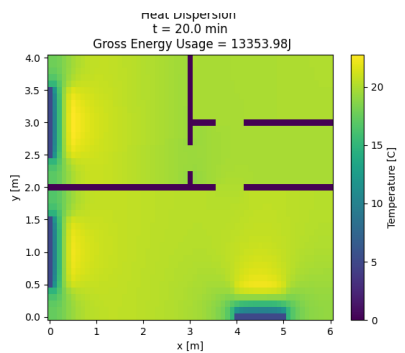


(b) Po krótkim ogrzewaniu

Rysunek 9: Gdy jest zimno



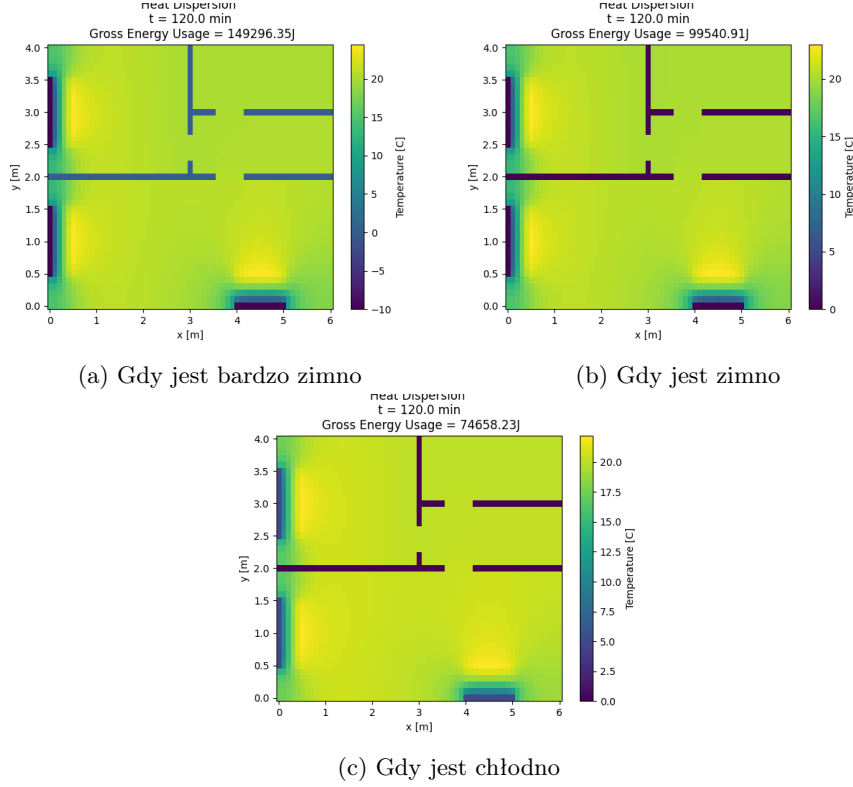
(a) Tuż po wejściu do mieszkania



(b) Po krótkim ogrzewaniu

Rysunek 10: Gdy jest chłodno

Stwierdziłem po kilku próbach, że mieszkanie się dobrze ogrzewa jeszcze raz po 20 min. Teraz sprawdzimy ile energii zużywamy, gdy zostawiamy włączone grzejniki:



Rysunek 11: Gdy jest chłodno

Zużycie energii jest ogromne w porównaniu do poprzedniej strategii. Stąd wnioskujemy, że lepiej jest wyłączać grzejniki przed wyjściem z domu.

Chciałbym też dodać, że ciepło nie zmienia się za bardzo przy ścianach. Spodziewam się, że przy mniejszym  $h_x$  byłby bardziej dokładny przepływ ciepła szczególnie przy ścianach i drzwiach. Niestety możliwości moich urządzeń mnie ograniczają czasowo. Szczególnie problematyczny jest warunek  $\frac{h_t}{h_x^2} < \frac{1}{2}$ .