Textos de Apoio para Aulas Teoricas e Práticas

Matemática Discreta

João Venâncio Cuiana

2024

Academia de Altos Estudos Estratégicos
Departamento de Engenharia

Textos de Apoio para Aulas Teoricas e Práticas

Matemática Discreta

João Venâncio Cuiana

Maluana, Fevereiro de 2024

Índice

Prefácio **IV**

1 Análise Combinatória **1**
1.1 Princípios de Contagem . . . 1
1.2 Permutações . . . 3
1.3 Arranjos . . . 4
1.4 Combinações . . . 5
1.5 Triângulo de Pascal . . . 6
1.6 Auto-avaliação . . . 8

2 Dedução e Indução **10**
2.1 Estrutura de Um Teorema . . . 10
2.2 Demonstração de uma Implicação . . . 10
2.3 Demonstração de uma Equivalência . . . 12
2.4 Indução Matemática . . . 12
2.5 Auto-avaliação . . . 14

3 Relações de Recorrência Lineares **16**
3.1 Método de Iteração . . . 16
3.2 Relação de Recorrência Linear Homogênia . . . 17
3.3 Relação de Recorrência Linear não Homogênia . . . 18
3.4 Auto-avaliação . . . 20

4 Álgebra de Boole **21**
4.1 Definição da Álgebra de Boole . . . 21
4.2 Leis da Álgebra de Boole . . . 22
4.3 Álgebra dos Circuitos com Interruptores . . . 22
4.4 Funções de Boole . . . 23
4.5 Simplificação de circuitos . . . 25
4.6 Auto-avaliação . . . 25

5 Teoria de Grafos **27**
5.1 Definições Básicas . . . 27
5.2 Grau de um Vértice . . . 29
5.3 Matriz Associada a um Grafo . . . 30
5.3.1 Matriz de adjacência . . . 30
5.3.2 Matriz de incidência . . . 31
5.4 Caminho de um Grafo . . . 32
5.5 Grafos Isomorfos . . . 34
5.6 Caminho Mínimo . . . 35
5.7 Auto-avaliação . . . 37

6 Árvores **42**
6.1 Noções Básicas . . . 42
6.2 Árvore com Raíz . . . 44
6.2.1 Bucas em árvores . . . 45
6.2.2 Algumas Aplicações de Árvores com Raíz . . . 45
6.3 Auto-avaliação . . . 46

7 Rede Básica **49**
7.1 Rede e Fluxo . . . 49
7.2 Fluxo Máximo e Corte Mínimo . . . 50
7.2.1 Problema de fluxo máximo . . . 50
7.2.2 Problema de Corte mínimo . . . 53
7.3 Auto-avaliação . . . 54

8 Linguagem, Gramática e Autómatos **56**
8.1 Linguagem Formal . . . 56
8.2 Gramática Formal . . . 56
8.2.1 Tipos de Gramáticas . . . 58
8.3 Autômatos Finitos . . . 58
8.3.1 Autômatos Finitos Determinísticos . . . 59
8.3.2 Autômatos Finitos não Determinísticos . . . 60
8.4 Equivalência entre Gramática Regular e AFND . . . 61
8.5 Auto-avaliação . . . 61

9 Complexidade de Algorítmos **63**
9.1 Comparação de Funções . . . 63
9.2 Notação Assintótica . . . 63
9.3 Auto-avaliação . . . 65

Testes e Exames dos Anos Passados **66**

Plano Análitico de 2024 **93**
Referências Bibliográficas . . . 98

Prefácio

"Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende."

Leonardo da Vinci

Este livro que se põe à disposição do estudante encarna um grande esforço de apresentar diversos tópicos de Matemática Discreta que são de especial importância para o curso de Engenharia Informática.

Em geral, a exposição dos tópicos é feita com poucos detalhes, evitando grandes formalismos e é sem demonstrações de teoremas. Contudo, não se perde a missão da disciplina que é fornecer uma farramenta que possa contribuir no desenvolvimento de habilidades necessárias para um programador ou engenheiro de softwares tais como a objectividade, a clareza e a organização do raciocínio lógico.

A maior parte dos conceitos encontrados ao longo do texto já são conhecidos pelo estudante ou irá estudar noutras disciplinas específicas ao longo do curso. E a compreensão destes conceitos não exige mais do que um domínio razuável da matemátca do ensino médio.

De modo que o estudante tenha um estudo mais frutífero, apela-se que faça a leitura com algum material para tomar notas e resolver os exemplos e os exercícios propostos.

Grande parte do livro foi escrito usando os textos de apoio elaborados pelo malogrado Prof. Doutor Afonso Tsandzana e o seu assistente, o autor do presente livro, nos anos lectivos 2020, 2021 e 2022.

Análise Combinatória

1

"A matemática está deixando os princípios fazerem o trabalho para você de forma que não tenha que fazê-lo você mesmo."

George Pólya

1.1 Princípios de Contagem

Princípio de Multiplicação

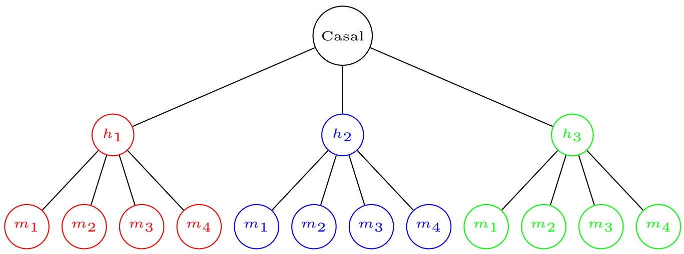
Considere o problema

Problema 1.1.1. *Numa sala há três homens e quatro mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal?*

Solução: Considere h_1, h_2 e h_3 homens e sejam m_1, m_2, m_3 e m_4 mulheres. E óbvio que

- há 4 casais nos quais o homem é h_1;
- outros 4 nos quais o homem é h_2;
- e outros 4 nos quais o homem é h_3.

Portanto, o número de casais é $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$.



O problema acima ilustra o *princípio de multiplicação*, o qual diz:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de n_1 maneiras, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de n_2 maneiras, e assim sucessivamente. Então, o número de maneiras de se tomarem as decisões $d_1, d_2, \cdots, d_k$ é

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Exemplo 1.1.2 (Princípio de multiplicação)**.**

1. *Em um restaurante existem quatro tipos de saladas, cinco tipos de pratos quentes e apenas dois tipos de sobremesas. Quantas possibilidades existem de se fazer uma refeição com uma salada, um prato quente e uma sobremesa?*

   Solução: Existem três eventos:

   - a salada pode ser escolhida de 4 modos;
   - o prato quente pode ser escolhido de 5 modos;
   - e a sobremesa pode ser escolhida de 2 modos.

   Portanto, existem

   $$4 \times 5 \times 2 = 40$$

   possibilidades de fazer uma refeição.

2. *Quantos inteiros múltiplos de 5 existem entre 1000 (incluido) e 4999?*

Solução: Suponha que o número é $x_1x_2x_3x_4$. Com efeito,

- x_1 pode ser escrito de 4 modos (escolhidos entre os algarismos: 1, 2, 3 e 4);
- x_2 e x_3 podem ser escritos de 10 maneiras (escolhendo-se qualquer algarismo de 0 a 9);
- x_5 pode ser escrito de 2 modos (escolhidos entre os algarismos 0 e 5).

Portanto, existem

$$4 \times 10 \times 10 \times 2 = 800$$

inteiros múltiplos de 5 existem entre 1000 (incluido) e 4999.

Princípio de Adição

Suponha que um evento E_1 pode ocorrer de n_1 maneiras, um segundo evento E_2 pode ocorrer de n_2 maneiras, e assim sucessivamente até o k-ésimo evento E_k que pode ocorrer de n_k maneiras e, além disso, quaisquer dois eventos E_i e E_j não podem ocorrer simultaneamente (i.e. $E_i \cap E_j = \emptyset$), então o número total de ocorrências será dado pela soma:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Exemplo 1.1.3.

1. *Entre quatro livros de Informática, três livros de Matemática e dois de Estatiística pretende-se escolher dois livros diferentes para ler. De quantas maneiras se pode fazer a escolha?*

   Solução: Observe que existem:

   - $4 \times 3 = 12$ modos de escolher um livro de Matemática e outro de Informática;
   - $4 \times 2 = 8$ maneiras de escolher um livro de Informática e um de Estatística;
   - e $3 \times 2 = 6$ formas de escolher um livro de Matemática e um de Estatística.

   Logo, há

   $$12 + 8 + 6 = 24$$

   modos de escolher dois livros distintos.

2. *Quantos números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarísmos?*

   Solução: Conte separadamente os números que têm zero como último algarismo e aqueles cujo último algarismo é diferente de zero.

   - Terminando com zero há 1 modo de escolher o último algarismo, 9 formas de escolher o primeiro algarismo e 8 maneiras de escolher o de meio. Daí que, $9 \times 8 \times 1 = 72$.
   - Terminando com um algarismo diferente de zero existem 4 modos de escolher o último algarismo $(2, 4, 6$ ou $8)$, 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não se pode usar nem zero nem o algarismo usado na última casa) e 8 de escolher o de meio (não se pode usar os algarismo já empregues nas casas extremas). Assim, há $8 \times 8 \times 4 = 256$.

   A resposta é $72 + 256 = 328$ números.

Princípio de Inclusão e Exclusão

O princípio de Inclusão-Exclusão é uma técnica para solucionar problemas de contagem dupla, tripla, etc., na qual subtrai-se as repetições e depois repõe-se os descontos a mais. Por exemplo, considere o problema:

Problema 1.1.4. *Quantos números naturais menores ou iguais a 15 são múltiplos* 2 *ou* 3*?*

Solução: Sejam

- A o conjunto dos números naturais menores ou iguais a 15 que são múltiplos de 2, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
- B o conjunto dos números naturais menores ou iguais a 15 que são múltiplos de 3, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

Assim, $|A| = 7$ e $|B| = 5$. Contudo, não é correto afirmar que há $|A|+|B|=7+5=12$ números de 1 à 15 que ou são múltiplos de 2 ou são múltiplos de 3. Esta soma, $|A|+|B|$, tem o significado,

$$\{2,4,6,8,10,12,14\} \cup \{3,6,9,12,15\} = \{2,3,4,6,6,8,9,10,12,12,14,15\}.$$

Enumera-se mais de uma vez os elemento que pertencem aos dois conjuntos. Retirando as repetições, obtém-se a união

$$A \cup B = \{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15\}.$$

Está claro que ao contar os elementos de $|A| \cup |B|$, conta-se duas vezes os elementos da $A \cap B$, daí que deve-se retirar os elementos duplicado em $|A| + |B|$. Portanto, a solução do problema é $7 + 5 - 2 = 10$. Em geral,

Teorema 1.1.5 (Princípio de inclusão-Exclusão)**.** *Para quaisquer conjuntos finitos A e B é válida a identidade*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1.1}$$

No caso de três conjuntos fnitos A, B e C, tem lugar a igualidada

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{1.2}$$

Exemplo 1.1.6. *1 232 estudantes fazem curso de espanhol, 879 francês, 114 russo. 103 fazem espanhol e francês, 23 espanhol e russo e 14 francês e russo. 2 092 estudantes fazem pelo menos um curso de espanhol, francês ou russo. Quantos estudantes fazem os três cursos?*

Solução: Sejam
– $|E|=1\ 232$ o número de estudantes que fazem o curso de espanhol;
– $|F|=879$ o número de estudantes que fazem o curso de francês;
– $|R|=114$ o número de estudantes que fazem o curso de russo.
Então, $|E \cap F| = 103$, $|E \cap R| = 23$, $|F \cap R| = 14$, $|E \cup F \cup R| = 2\ 092$. Da igualidade (1.2), obtém-se

$$|E \cap F \cap R| = |E \cup F \cup R| - |E| - |F| - |R| + |E \cap F| + |E \cap R| + |F \cap R|.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} |E \cap F \cap R| &= 2\ 092 - 1\ 232 - 879 - 114 + 103 + 23 + 14 \\ &= 2\ 092 - 2\ 085 \ = \ 7 \end{aligned}$$

Portanto, somente 7 estudantes fazem os três cursos.

1.2 Permutações

Permutações Simples

Dados n objectos distintos, chama-se *permutação simples dos n objectos* a qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n objectos, diferindo apenas pela ordem dos objectos. O número de permutações de n objectos é dado por

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1.$$

Definimos $P_0 = 0! = 1$ e $P_1 = 1! = 1$.

Exemplo 1.2.1.

1. *Quantos anagramas pode-se escrever com a palavra ROMA?*

   Solução: Cada anagrama da palavra ROMA é uma sequência ordenada das 4 letras R, O, M, A. Logo, o número de anagramas da palavra ROMA é
   $$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

2. *De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentarem 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?*

   Solução:

   - o primeiro rapaz pode escolher o seu lugar de 10 modos;
   - o segundo de 8 modos, o terceiro de 6 modos;
   - o quarto de 4 modos e o quinto de 2 modos.
   - Sentados os rapazes, sobram 5 lugares por serem ocupados pelas 5 moças, que pode ser feito de 5! modos.

   A resposta é
   $$10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 460\ 800.$$

Permutações com Repetição

Se temos n objectos dentre os quais um primeiro objecto se repete r_1 vezes, um segundo objecto se repete r_2 vezes, e assim por diante, um n-ésimo objecto se repete r_n vezes, com $r_1 + r_2 + \cdots + r_n \leq n$, então o total das permutações é calculado pela fórmula

$$P_n^{(r_1, r_2, \cdots, r_n)} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}.$$

Exemplo 1.2.2. *Quantas anagramas se pode escrever com a palavra CATARATA?*

Solução: A palavra CATARATA tem 8 letras, com A repetido 4 vezes, o T duas vezes e o C 1 vez. A restposta é

$$P_8^{4,2,1} = \frac{8!}{4!2!1!} = 840.$$

Permutações Circulares

As permutações circulares de n objetos são todas as disposições possíveis quando dispõe-se os n objetos ao redor de um círculo, considerando disposições idênticas aquelas que coincidem por rotação. O número de permutações circulares de n objetos distintos é denotado por $(PC)_n$ e é determinado pela fórmula

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo 1.2.3.

1. *Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa?*

   Solução: A restposta é $(PC)_6 = (6-1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

2. *De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças de modo Joãozinho e Mariazinha nunca fiquem juntos?*

   Solução:

   - Já que Joãozinho e Mariazinha não podem ficar juntos, primeiro permuta-se circularmente as demais que são um total de quatro crianças $(PC)_4 = 3!$.
   - E em seguida, conta-se as maneiras de dispor Joãozinho e Mariazinha, cada um ocupará um espaços entre duas crianças.
     - para o primeiro há 4 espaços disponíveis;
     - e para o segundo há 3 espaços disponíveis. Com efeito, 4×3.

   A resposta é
   $$3! \times 4 \times 3 = 72.$$

1.3 Arranjos

Arranjos simples

Arranjos simples são utilizados quando se deseja formar sequências com r objectos escolhidos a partir de um conjunto de n objectos, com $r \leq n$. Por exemplo, suponha que se queira escrever um número com digítos distintos usando $1, 2, 3, 4, 5$. Quantos números de três digítos são possíveis escrever?

Solução: Se o número é $x_1 x_2 x_3$, pelo princípio de contagem, há 5 modos de escrever x_1, 4 modos de escrever x_2 e 5 modos de escrever x_3. A resposta é $5 \times 4 \times 3 = 60$. Observe que se realizou o produto de 5 até 3. O produto contém três números consecutivos, pois é o número de posições da sequência. Note que $5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{(5-3)!}$. Simboliza-se o resultado por $A_{5,3}$ que se lê arranjos de 5 objectos tomados 3 a 3. Assim,

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3.$$

Em geral, quando se deseja dispor r objectos em sequência escolhidos dentre de n objectos, com $r \leq n$, pode-se realizar esse processo de

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

maneiras distintas.

Exemplo 1.3.1. *Um grupo de pessoas é formado por cinco homens e três mulheres. Deseja-se formar filas com 5 dessas pessoas de modo que as três mulheres ocupem sempre as três primeiras posições. Assim, de todas as filas possíveis, quantas obedecem essa restrição?*

Solução: Para iniciar disponha as três mulheres nas três primeiras posições da fila e em seguida disponha dois dos cinco homens nas duas últimas posições, isto é,

$$A_{3,3} \times A_{5,2} = \frac{3!}{(3-3)!} \times \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{3!}{0!} \times \frac{5!}{3!} = 120.$$

Observe que os arranjos são um caso particular de permutações. Se $r = n$, então $A_{n,n} = P_n$, uma que

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n.$$

Arranjos com repetição

Dados n objectos distintos. Todos os agrupamentos ordenados de r objectos, não necessariamente distintos entre si, escolhidos entre n objectos chamamos de *arranjos de n objectos tomados r a r*, e são determinados por

$$A_{n,r} = n^r.$$

Exemplo 1.3.2. *Quantos números naturais de 3 algarismos pode-se formar com $1, 3, 5, 7, 9$?*

Solução: A resposta é $A_{5,3} = 5^3 = 125$ números.

1.4 Combinações

Outro problema muito comum de contagem é contar o número de subconjuntos com r objectos de um conjunto de n objectos, $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Combinações simples

Seja X um conjunto com n objectos, chamamos *combinação simples de n objrctos tomados r a r* o número de todos os subconjuntos constituido por r objectos do conjunto X, denotamos por $C_{n,r}$ ou $\binom{n}{r}$.

É importante notar que num conjunto (subconjunto) a ordem entre os objectos é irrelevante. O número de subconjuntos com r objectos formados a partir de um conjunto X é

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \ 0 \leq r \leq n.$$

Exemplo 1.4.1.

1. *Dentre 9 livros distintos que estão em oferta em uma livraria, a Fátima deseja escolher 5 para comprar. De quantos modos diferentes a Fátima pode escolher os 5 livros?*

   Solução: Repare que nessa situação o que a Fátima deve fazer é escolher 5 livros dentre 9, isto é, formar um conjunto de 5 livros a partir de um conjunto de 9. Desse modo ela pode realizar esse processo de

   $$C_{9,5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

   maneiras diferentes.

2. *De Quantos modos se pode escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?*

   Solução: As alternativas são:

   – 4 homens, 2 mulheres: $C_{7,4} \cdot C_{4,2}$ – 3 homens, 3 mulheres: $C_{7,3} \cdot C_{4,3}$
   – 2 homens, 4 mulheres: $C_{7,2} \cdot C_{4,4}$

   A resposta é

   $$C_{7,4} \cdot C_{4,2} + C_{7,3} \cdot C_{4,3} + C_{7,2} \cdot C_{4,4} = 35 \cdot 6 + 35 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = 371.$$

Combinações completas

Considere o problema: *"Quantos inteiros não negativos satisfazem a segunte equação*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r?"$$

Solução: Considere o caso particular de $r = 4$ e $n = 2$, a equação fica $x_1 + x_2 = 4$. Esta equação tem 5 soluções possíveis como ilustra a tabela a baixo

x_1	4	3	2	1	0
x_2	0	1	2	3	4

Para resolver o problema vamos representar cada solução da equação como uma fila de sinais + separados pela |. Por exemplo, a equação $x_1 + x_2 = 4$ tem as soluções

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_2 & & (x_1, x_2) \\ & | & ++++ & & (0,4) \\ + & | & +++ & & (1,3) \\ ++ & | & ++ & & (2,2) \\ +++ & | & + & & (3,1) \\ ++++ & | & & & (4,0) \end{array}$$

– | é usado para separar as incógnitas;

– a quantidade do sinal + indica o valor da incógnita.

Observe que cada solução tem 4 sinais + e 1 sinal |. Em cada linha há 5 $(= 4 + 2 - 1)$ lugares, 1 sinal | e 4 sinais +. Assim, o número de soluções da equação é

$$\binom{4+2-1}{4} = \binom{5}{4} = 5.$$

Em geral, cada solução da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ seria dada por uma fila de $r - 1$ sinais | e n sinais +. Em cada fila há $n + r - 1$ lugares. Assim,o problema se reduz em determinar o número de filas que se podem formar com $r - 1$ sinais | e n sinais +. Portanto, o número de soluções da equação é

$$C^r_{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$$

1.5 Triângulo de Pascal

A soma algébrica de duas parcelas envolvendo símbolos diferentes chamamos *binómio*, por exemplo, as somas $2x^2 - 3y^2$ e $x + y$ são binómios. A expressão

$$(x + y)^n,$$

onde n é um número inteiro não negativo, chamamos *binómio de Newton*. A expansão desta expressão num polinómio na forma canónica está associada aos números $\binom{n}{r}$ de combinações de n elementos tomados r a r, razão pela qual são muitas vezes chamados *coeficientes binomiais*. Os coeficientes binomiais podem ser determinados através do *triângulo de Pascal* que apresenta o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{lccccccccccccccccccc}
n=0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \Longleftrightarrow & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Observação: Cada linha começa e termina com o inteiro **1**. Todo elemento do triângulo, excepto os **1**'s laterais, é igual à soma dos dois elementos que da linha anterior e que estão de cada um dos lados a calcular. A soma dos elementos da linha n no triângulo de Pascal é igual à 2^n, isto é,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Por exemplo, para $n=4$, tem-se

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=1+4+6+4+1=16=2^4.$$

Teorema 1.5.1. *Seja n um número inteiro positivo. Então,*

$$(x+y)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\cdots+\binom{n}{k}x^{n-k}y^k+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+y^n.$$

Qualquer termo da expansão é determinado por $T_{k+1}=\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$.

Exemplo 1.5.2.

1. *Desenvolva o seguinte binómio $(x-2y)^3$.*

   Solução: Observe que $(x-2y)^3=(x+(-2y))^3$. Neste caso, o desenvolvimento é

$$\begin{aligned}(x-2y)^3&=x^3+\binom{3}{1}x^2(-2y)+\binom{3}{2}x(-2y)^2+(-2y)^3\\&=x^3+3x^2(-2y)+3x(-2y)^2+(-2y)^3\\&=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3\end{aligned}$$

2. *Determine o termo em x^7 da expansão do binómio $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^{20}$.*

   Solução: Qualquer termo do binómio $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^{20}$ é calculado a partir da expressão

$$T_{k+1}=\binom{20}{k}\left(x^2\right)^{20-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k=2^k\cdot\binom{20}{k}\cdot x^{40-3k}.$$

   Para conhecer o valor de k faça $x^7=x^{40-3k}$ equivalente a $7=40-3k$, daí vem que $k=11$. Consequentemente, o termo em x^7 é

$$2^{11}\cdot\binom{20}{11}\cdot x^{40-3\cdot 11}=2^{11}\cdot\binom{20}{11}\cdot x^7.$$

3. *Calcule o termo independente da expansão do binómio $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$.*

   Solução: O termo genérico do desenvolvimento do binómio $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ é

$$T_{k+1}=\binom{6}{k}(x)^{6-k}\left(\frac{-5}{x^2}\right)^k=(-5)^k\cdot\binom{6}{k}\cdot x^{6-3k}.$$

   O termo independente de qualquer polinómio é o termo em x^0, pelo que, $x^0=x^{6-3k}$ equivalente a $0=6-3k\Leftrightarrow k=2$. Logo, o termo independente é

$$(-5)^{12}\cdot\binom{6}{2}\cdot x^{6-3\cdot 2}=25\cdot\frac{6!}{2!(4-2)!}x^0=180.$$

1.6 Auto-avaliação

Exercícios para a secção 1.1

1. As cadeiras de uma auditório serão rotuladas com uma letra e um inteiro positivo menor ou igual a 100. Qual é o maior número de cadeiras que podem ser rotuladas de maneira diferente?

2. Suponha que um dos professores ou um dos alunos será escolhido como um representante de um comitê universitário. De quantas maneiras é possvel selecionar um representante sabendo que são 37 professores e 83 alunos?

3. Quantas placas de carros diferentes pode-se ter se cada uma delas contém uma sequência de três letras seguidas de quatro dígitos?

4. Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são diferentes?

5. Cada usuário em um sistema computacional possui uma senha de tamanho 6, 7 ou 8 caracteres. Cada caractere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito. Quantas senhas são possíveis nesse sistema?

6. Quantos são os números naturais de 4 dígtos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

7. Em uma banca há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B, 10 exemplares iguais da revista C. Quantas colecções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?

8. Quantos números de quatro dígitos são maiores que 2400 e:

   (a) têm todos os dígitos diferentes.

   (b) não tem dígitos iguais a 3, 5, ou 6.

   (c) têm as propriedades a) e b) simultâneamente.

9. Se uma mulher tem 7 blusas, 5 saias e 9 vestidos, de quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

10. Determina o número de naturais menores ou iguais a 1000 que ou são múltiplos de 6 ou são múltiplos de 15.

11. Calcula o número de naturais menores ou iguais a 1000 que não são divisíveis por 3, nem por 5,nem por 7.

12. Determina o número de naturais menores ou iguais a 1000 que ou sãoo múltiplos de 6, ou são múltiplos de 10, ou são múltiplos de 15.

13. Quantos números naturais menores ou iguais a 1260 são primos com 1260?

14. Um grupo de estudantes está a planear encomendar pizzas. Se 13 comem pizza de calabresa, 10 comem de salame, 12 comem de queijo extra, 4 comem tanto calabresa quanto salame, 5 comem tanto salame quanto queijo extra, 7 comem tanto calabresa quanto queijo extra e 3 comem de tudo, quantos estudantes há no grupo?

15. Um feirante vende apenas brócolis, cenoura e quiabo. Em um dia, o feirante atendeu 207 pessoas. Se 114 pessoas compraram brócolis, 152 compraram cenoura, 25 compraram quiabo, 64 compraram brócolis e cenoura, 12 compraram cenoura e quiabo e 9 compraram os três produtos, quantas pessoas compraram brócolis e quiabo?

16. Entre 200 alunos do segundo ano de matemática, 80 inscrevem-se no curso de análise, 80 no curso de álgebra e 80 em probabilidades. O número de alunos que se inscrevem simultaneamente em quaisquer dois cursos é igual a 30 e o número de alunos que se inscrevem simultaneamente nos três cursos é igual a 15. Qual o número total de alunos que não se inscreveram em nenhum destes cursos?

17. Suponha que numa competição de atletismo estão inscritos 80 atletas em quatro provas, a saber: maratona, 10.000 metros, 5.000 metros e 3.000 metros. Entre estes atletas, 52 estão inscritos na maratona, 27 nos 10.000 metros e 22 nos 5.000 metros. Existem 18 que estão inscritos na maratona e nos 10.000 metros. Existem 13 atletas que estão inscritos na maratona e nos 5.000 metros e 8 estão inscritos nos 10.000 e 5.000 metros. Existem 3 atletas inscritos na maratona, 10.000 e 5.000 metros. Por sua vez, de entre os atletas inscritos nos 3.000 metros apenas 5 estão inscritos também nos 5.000 metros, os restantes são atletas que se inscreveram numa única prova. Quantos atletas estão inscritos na prova de 3.000 metros?

Exercícios para as secções de 1.2 à 1.5

18. Quantas permutações das letras da palavra COMPUTADOR existem? Quantas delas terminam por uma vogal?

19. De quantas maneiras seis pessoas podem sentar-se em uma roda com seis cadeiras? (Apenas as posiçõess relativas em um círculo podem ser distinguidas.)

20. De quantas maneiras os primeiro, segundo e terceiro prêmios em um concurso de tortas podem ser atribuídos a 15 concorrentes?

21. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 11 homens e 8 mulheres em uma fileira, se todos os homens se sentam juntos e as mulheres também se sentam juntas?

22. Calcule $\binom{n}{n-1}$. Demonstre que $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$

23. O controle de qualidade deseja testar 25 chips de microprocessadores dentre os 300 que são produzidos diariamente. De quantas maneiras isto pode ser feito?

24. Uma equipe de futebol leva 18 jogadores na comitiva; 11 jogadores compõem a equipa titular. De quantas maneiras a equipa titular pode ser formado?

25. De quantas maneiras pode ser selecionado um júri de cinco homens e sete mulheres dentre um elenco de 17 homens e 23 mulheres?

26. De quantas formas uma bibliotecária seleciona quatro novelas e três peças dentre uma colecção de 21 novelas e 11 peças?

27. Do pessoal de uma companhia, 7 trabalham no projeto, 14 na produção, 4 nos testes, 5 em vendas, 2 na contabilidade e 3 em marketing. Um comitê de 6 pessoas deve ser formado para uma reunião como supervisor.

    (a) De quantas maneiras podemos formar este comitê, se tiver que haver um membro de cada departamento?

    (b) De quantas maneiras podemos formar o comitê, se tiver que haver exatamente dois membros do departamento de produção?

    (c) De quantas maneiras o comitê pode ser formado, se o departamento de contabilidade não for representado e o de marketing tiver exatamente um representante?

28. Prove que para $n \geq 2,\ P(n,1) + P(n,2) = n^2$.

29. Prove que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ para qualquer n e r, com $0 \leq r \leq n,$.

30. Um estudante precisa selecionar cinco dentre 12 cadeiras para cursar no próximo perı’odo, mas uma das cadeiras precisa ser ou história africana ou literatura inglesa. De quantas maneiras o estudante pode escolher as cadeiras?

31. Uma loja de iogurte congelado permite escolher um sabor (baunilha, morango, limão, cereja ou pêssego), um acompanhamento (raspas de chocolate, jujuba ou castanha de cajú) e uma calda (creme batido ou coco ralado). Quantas sobremesas diferentes são possíveis?

32. Num grupo de motoristas, sabe-se que háá 22 que dirigem carro, 17 que dirigem moto e 8 que dirigem ambos. Quantos desses dirigem somente carro? Quantos motoristas há no grupo?

33. Foram consultadas 1000 pessoas sobre as rádios que costumam escutar. O resultado foi o seguinte: 450 pessoas escutam a rádio A, 380 escutam a rádio B e 270 não escutam A nem B. Qual é o número de pessoas que escutam as rádios A e B.

34. Uma professora tem 3 bolas de gude para distribuir para 5 meninos (digamos, Alfredo, Bernardo, Carlos, Diogo e Eduardo). De quantos modos ela pode fazer essa distribuição:

    (a) Supondo que ela dê as bolas para 3 alunos distintos?

    (b) Supondo que os contemplados possam ganhar mais de uma bola? (Por exemplo, Carlos pode receber todas as bolas).

35. Um batalhão é composto por 20 policias: 12 de sexo masculino e 8 de sexo feminino. A região atendida pelo batalhão é composta por 10 quadras e, em cada dia da semana, uma dupla de policias polícia cada uma das quadras. Com refência a essa situação, julgue o item subsequente:

    "Se a escalados policias for feita de modo a diversificar as duplas que policiam as quadras, então, se determinada dupla policiar a quadra X em determinado dia, essa mesma dupla voltará a policiar a quadra X somente mais de seis meses após aquele dia."

36. Uma loja possui duas caixas, cada uma com um grande número de bolinhas. Uma caixa tem somente bolinhas azuis e a outra tem somente bolinhas verdes, sendo que as bolinhas de uma mesma caixa são todas idênticas. Queremos comprar 6 bolinhas para montar um saquinho de presentes. De quantas maneiras isso pode ser feito, observando-se que a ordem em que as bolinhas são colocadas no saquinho é irrelevante?

37. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 6$.

38. De quantos modos podem ser pintados 9 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

39. Quantas são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem duas letras A adjacentes?

40. De quantas maneiras podemos distribuir 25 livros diferentes em 4 caixas, de modo que a caixa amarela tenha 5 livros, a preta tenha 4 livros, a verde tenha 10 livros e a branca tenha 6 livros?

41. Determine o termo central do desenvolvimento $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^8$.

42. Determine o quinto termo do desenvolvimento de $\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)^7$.

    (a) Supondo o desenvolvimento ordenado segundo as potências crescente da primeira parcela.

    (b) Supondo o desenvolvimento ordenado segundo as potências decrescente da primeira parcela.

43. Determine o termo independente de x no desenvolvimento $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$.

44. Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento $\left(2x^4 - \dfrac{1}{x}\right)^{12}$.

45. Para que valor de n o desenvolvimento de $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^n$ possui um termo independente de x?

Dedução e Indução 2

"Quem não tem jardins por dentro, não planta jardins por fora e nem passeia por eles."

Ruben Alves

2.1 Estrutura de Um Teorema

Um teorema é uma sentença para a qual há uma demonstração. Um teorema é composto por um **enunciado** que se divide em duas partes: *hipótese* e *tese*, e por uma **demonstração**. A hipótese é um conjunto das informações iniciais que admitimos como verdadeiras. A tese é o que queremos concluir como verdadeiro. E a demonstração é o raciocínio que usamos para verificar a tese. Em geral, o enunciado de um teorema é uma implicação ou uma equivalência, ou seja, os enunciados são da forma:

(a) Se Hipótese é verdade, então Tese é verdade: $\forall x(H(x) \longrightarrow T(x))$. Por exemplo,

"Se n é um número inteiro, então $n^2 > n$."

(b) Hipótese é verdade se, e somente se, Tese é verdade: $\forall x(H(x) \longleftrightarrow T(x))$. Por exemplo,

"Os inteiros x e y são ambos ímpares se, e somente se, o produto xy é ímpar."

Ressaltamos que nem sempre o enunciado de um teorema se apresenta com a hipótese e a tese separados. Por exemplo, no teorema

"A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180 graus."

A hipótese e a tese são, respectivamente,

- $H(\triangle) = \{\triangle$ é um trângulo$\}$ e
- $T(\triangle) = \{$a soma dos ângulos internos do $\triangle$ é 180$\}$

2.2 Demonstração de uma Implicação

Demonstração directa

A demonstração directa de um teorema do tipo $\forall x(H(x) \longrightarrow T(x))$ consiste em, assumir que $H(x)$ é verdadeira e, usando equivalências e factos pré-estabelecidos, deduzir que $T(x)$ também é verdadeira.

Exemplo 2.2.1. *Dê uma demonstração directa do teorema:*

1. O produto de dois números inteiros pares é um número inteiro par.

   Demonstração: Sejam $x = 2m$ e $y = 2n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$. Então,

   $$xy = (2m)(2n) = 2(2mn) = 2k,$$

   onde $k = 2mn$ é um número inteiro. Logo, $xy = 2k$ é par. □

2. *Se um inteiro é divisível por 6, então também é divisível por 3.*

   Demonstração: Seja $x = 6n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Então, $x = 6n = 3 \cdot 2n = 3k$, onde $k = 2n$ é um número inteiro. Portanto, $x = 3k$ é divisível por 3. □

Demonstração por contraposição

A demonstração por contraposição consiste em, assumir que a negação de $T(x)$ é verdadeira, deduzir que a negação de $H(x)$ também é verdadeira.

Exemplo 2.2.2. *Demonstre que:*

1. *Se $n = xy$, em que x e y são inteiros positivos, então $x \leq \sqrt{n}$ ou $y \leq \sqrt{n}$.*

   Demonstração: Suponhamos que a tese é falsa, ou seja,

   $$\neg\left((x \leq \sqrt{n}) \vee (y \leq \sqrt{n})\right)$$

   é verdadeira. Se aplicarmos a lei do De Morgan, obtemos,

   $$(x > \sqrt{n}) \wedge (y > \sqrt{n}).$$

   Multiplicando as duas inequações, encontramos,

   $$xy > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n.$$

   Portanto,

   $$\neg(xy = n)$$

   é verdadeira. Assim, mostramos que se a tese é falsa, então a hipótese também é falsa. □

2. *Se n é um número inteiro e n^2 é par, então n é par.*

   Demonstração: Suponhamos que n é um número inteiro ímpar, temos que existe um inteiro k_1 tal que $n = 2k_1+1$. Assim,

   $$n^2 = (2k_1 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1$$

   colocando-se em evidência o 2, obtemos,

   $$n^2 = 2 \cdot 2k_1(k_1 + 1) + 1 = 2k + 1,$$

   com $k = 2k_1(k_1 + 1)$. Por definição, n^2 é um número inteiro ímpar. □

Demonstração por redução ao absurdo

A demonstração por redução ao absurdo é baseada na negação da tese e consequente contradição de alguma das hipóteses ou de algum facto que se sabe ser verdadeiro.

Exemplo 2.2.3. Dê uma demonstração por contradição do teorema:

1. *Se m e n são números inteiros pares, então $m + n$ é número inteiro par.*

   Demonstração: Suponhamos que m e n são dois números inteiros pares e $m + n$ é um número inteiro ímpar. Queremos mostrar que estas suposições nos levam a uma contradição. Se m e n são dois números inteiros pares, então existem números inteiros k_1 e k_2 tais que $m = 2k_1$ e $n = 2k_2$, e se $m + n$ é um números inteiro ímpar, então existem um número inteiro t tal que $m + n = 2t + 1$. Assim sendo, $m + n = 2k_1 + 2k_2 = 2t + 1$, ou seja,

   $$2k_1 + 2k_2 = 2t + 1 \Longleftrightarrow k_1 + k_2 - t = \frac{1}{2}.$$

   Isso é falso porque $k_1 + k_2 - t$ é um número inteiro. Esta contradição demonstra que, m e n são números inteiros pares, então $m + n$ é número inteiro par. □

2. *Se $3n + 2$ é um inteiro ímpar, então n é um inteiro ímpar.*

   Demonstração: Assumamos que $3n + 2$ é um inteiro ímpar e que n não o é. Como n não é ímpar, sabemos que é par. Dessa forma, como n é par, existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Isso implica que

   $$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1) = 2t$$

   para algum inteiro t tal que $t = 3k + 1$, neste caso, $3n + 2$ é par. Mas um inteiro é par se e somente se não for ímpar. Portanto, existe uma contradição, $3n + 2$ não pode ser ímpar e par simultaneamente. □

2.3 Demonstração de uma Equivalência

A demonstração de um teorema do tipo $\forall x(H(x) \longleftrightarrow T(x))$ consiste em demonstrar que

($\Rightarrow$) $\forall x(H(x) \longrightarrow T(x))$ e ($\Leftarrow$) $\forall x(T(x) \longrightarrow H(x))$

Exemplo 2.3.1. *Demonstre que*

1. *Um inteiro x é par se, e somente se, $x+1$ é ímpar.*

   Demonstração: Se um inteiro x é par, então $x+1$ é ímpar, e se $x+1$ é ímpar, então x é par.

   ($\Rightarrow$) Se um inteiro x é par, então $x+1$ é ímpar. De fato, se x é par, então $x = 2k$ para algum, $k \in \mathbb{Z}$ e, consequentemente,
   $$x + 1 = 2k + 1,$$
   isto é, $x+1$ é ímpar.

   ($\Leftarrow$) Se $x+1$ é ímpar, então x é par. De fato, se x é ímpar, então $x = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e, consequentemente,
   $$x = 2k + 1 - 1 = 2k.$$

   Portanto, concluímos a demonstração. □

2. *As seguintes afirmações sobre o inteiro n são equivalentes:*

   (a) n é par. *(b) $n-1$ é ímpar.* *(c) n^2 é par.*

   Demonstração: Vamos demonstrar que essas três afirmações são equivalentes mostrando que as condicionais $(a) \Longrightarrow (b)$, $(b) \Longrightarrow (c)$, e $(c) \Longrightarrow (a)$ são verdadeiras.

   (i) Vamos usar uma demonstração direta para mostrar que $(a) \Longrightarrow (b)$. Suponha que n é par. Então $n = 2k$ para algum inteiro k. Conseqüentemente,
   $$n - 1 = 2k - 1 = 2(k-1) + 1.$$
   Isso significa que $n-1$ é ímpar.

   (ii) Também vamos usar uma demonstração direta para mostrar que $(b) \Longrightarrow (c)$. Agora, suponha que $n-1$ é ímpar. Então $n - 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Portanto, $n = 2k + 2$, então,
   $$n^2 = (2k+2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2).$$
   Isso significa que n^2 é o dobro do inteiro $2k^2 + 4k + 2$, e, portanto, é par.

   (iii) Para demonstrar $(c) \Longrightarrow (a)$, usaremos uma demonstração contraposição. Ou seja, mostramos que se n não é par, então n^2 não é par. Isso é o mesmo que demonstrar que se n é ímpar, então n^2 é ímpar. Assumamos que n é ímpar, isto é, temos que $n = 2k + 1$, em que k é algum inteiro. Daí vem,
   $$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$
   Portanto, concluímos que n^2 é ímpar.

   □

2.4 Indução Matemática

O princípio da indução matemática, é uma ferramenta muito útil para demonstrar a validade de uma sentença da forma $(\forall n \in \mathbb{N})\,(P(n))$, e diz o seguinte:

Axioma 2.4.1. *Sejam n_0 um número natural e $P(n)$ uma sentença aberta envolvendo o número natural $n \geq n_0$. Suponha que:*

(1) $P(n_0)$ é verdadeira, e

(2) Para todo k tal que $n_0 \leq k \leq n$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

A condição (1) é chamada *posso base* e a condição (2) é chamada *posso indutivo.* De um modo geral, aplicamos o princípio de indução matemática da seguinte maneira:

- Primeiro, verificamos se a condição $P(n_0)$ é verdade.
- De seguia, demonstramos um teorema auxiliar
  - *Hipótese:* supomos que, para algum k, $P(k)$ é verdade
  - *Tese:* deduzimos a partir de $P(k)$ que $P(k+1)$ também é verdade.

Exemplo 2.4.2. *Demonstre, por indução matemática, que*

1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Demonstração: Aqui $P(n)$ representa a igualidade

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Quando $n=1$ a igualdade é verdadeira, pois,

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}=1.$$

Deste modo, a primeira condição (1) da indução matemática é satisfeita. Para demonstrar que a condição (2) é satisfeita, supomos que a igualdade

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

para algum k é verdadeira. Ora, se somarmos $k+1$ a ambos os membro da igualidade, obtemos,

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\qquad\text{(fazendo } mmc\{1,2\})\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\qquad\text{(evidenciando } k+1)\end{aligned}$$

Com efeito, $P(k+1)$ é verdadeira. Como as condições (1) e (2) são satisfeita, concluimos que

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

é verdadeira para todo número natural n. □

2. $n^2>3n$ *para todo* $n\geq 4$.

Demonstração: Aqui $P(n)$ representa a desigualidade

$$n^2>3n.$$

Quando $n=4$ a desigualdade é verdadeira porque

$$4^2>3\cdot 4\Longleftrightarrow 16>12.$$

Assim, a primeira condição (1) da indução matemática é satisfeita. Para demonstrar que a condição (2) é satisfeita, supomos que a desigualdade

$$k^2>3k$$

para algum $k\geq 4$ é verdadeira. Ora vejamos,

$$\begin{aligned}(k+1)^2&=k^2+2k+1\\&>3k+2k+1\qquad\text{(pela hipótese } k^2>3k)\\&\geq 3k+8+1\qquad\text{(como } k\geq 4 \text{ temos que } 2k\geq 8)\\&=3k+9=3(k+3)\qquad\text{(evidenciando o 3)}\end{aligned}$$

Com efeito, $(k+1)^2>3(k+1)$, ou seja, $P(k+1)$ é verdadeira. Visto que as condições (1) e (2) são satisfeita, concluimos que

$$n^2>3n$$

é verdadeira para todo número natural $n\geq 4$. □

3. *$8^n - 2^n$ é divisível por 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: O $P(n)$ é a sentença

$$8^n - 2^n \quad \text{é divisível por 6,} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Quando $n = 1$, temos $8^1 - 2^1 = 8 - 2 = 6$. Desta forma, a sentença é válida para $n = 1$. Portanto, a primeira condição (1) é satisfeita. Para demonstrar que a condição (2) é satisfeita, assumimos que a sentença

$$8^k - 2^k \quad \text{é divisível por 6}$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ é verdadeira. Daí vem,

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 2^{k+1} &= 8 \cdot 8^k - 2 \cdot 2^k \\ &= (6+2) \cdot 8^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 6 \cdot 8^k + 2 \cdot 8^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 6 \cdot 8^k + 2 \cdot \left(8^k - 2^k\right) \end{aligned}$$

É evidente que $6 \cdot 8^k$ é divisível por 6 e $2 \cdot \left(8^k - 2^k\right)$ é divisível por 6 pela hipótese, assim sendo, $6 \cdot 8^k + 2 \cdot \left(8^k - 2^k\right)$ é divisível por 6, então $P(k+1)$ é verdadeira. Visto que as condições (1) e (2) são satisfeita, concluimos que

$$8^n - 2^n \quad \text{é divisível por 6,} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

é verdadeira para todo número natural n. □

2.5 Auto-avaliação

Exercícios para as secções 2.2 e 2.3

1. Demonstre que se n é um quadrado perfeito, então $n + 2$ não é um quadrado perfeito.

2. Use uma demonstração directa para mostrar que o produto de dois números racionais é racional.

3. Use um demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.

4. Use uma demonstração directa para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.

5. Use uma demonstração directa para mostrar que o produto de dois números ímpares é ímpar.

6. Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.

7. Use uma demonstração por contraposição para mostrar que se $x + y \geq 2$, em que x e y são números reais, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.

8. Demonstre que se n é um inteiro positivo, então n é par se e somente se $7n + 4$ for par.

9. Mostre que se n é um número inteiro e $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par, usando:
   (a) uma demonstração por contraposição.
   (b) uma demonstração por contradição.

10. Demonstre que se n é um número inteiro e $3n + 2$ é par, então n é par, usando:
    (a) uma demonstração por contraposição.
    (b) uma demonstração por contradição.

11. Demonstre que se n é um inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se $5n + 6$ for ímpar.

12. Comprove que se n é um inteiro, estas quatro proposições são equivalentes:
    (a) n é par, (b) $n + 1$ é ímpar,
    (c) $3n + 1$ é ímpar, (d) $3n$ é par.

13. Comprove que estas quatro proposições sobre o número inteiro n são equivalentes:
    (a) n^2 é ímpar, (b) $1 - n$ é par,
    (c) n^3 é ímpar, (d) $n^2 + 1$ é par.

14. Demonstre o teorema usando três métodos: directo, contraposição e redução ao absurdo. Que método é mais conveniente?
    (a) Se $x^2 - 2x > 0$, então $x < 0$ ou $x > 2$.
    (b) Se $x^2 > 4$, então $|x| > 2$.
    (c) Se $x^2 - x = 6$, então $x \neq 1$.
    (d) Se $x^2 - x = 6$, então $x < 5$.
    (e) Seja $2x + y > 0$. Se $x < -3$, então $y > 6$.

Exercícios para a secção 2.4

15. Demonstre, por indução matemática, as seguintes igualdades:
    (a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $1-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

(c) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(d) $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(e) $1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

(f) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

(g) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$

(h) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

(i) $4+10+16+\cdots+(6n-2)=n(3n+1)$

(j) $(2n+1)+(2n+2)+(2n+5)+\cdots+(4n-1)=3n^2$

16. Mostre que, para qualquer número natural n,

(a) 10^n-1 é múltiplo de 9.

(b) $4^{2n}-1$ é múltiplo de 5.

(c) 5^n-1 é múltiplo de 3.

(d) $3^{2n}+7$ é divisível por 8.

(e) 11^n-4^n é divisível por 7.

(f) $8^{n+2}+9^{2n+1}$ é divisível por 73.

(g) n^3-n é múltiplo de 6.

(h) n^3-n+3 é múltiplo de 3.

(i) $n(n+1)$ é divisível por 2.

(j) 4^n+6n-1 é divisível por 9.

17. Demonstre as seguintes desigualidades:

(a) $2^n>n$

(b) $n^2>n+1,\ n\geq 2$

(c) $n!>3^n,\ n\geq 7$

(d) $n!>4^n,\ n\geq 9$

(e) $n!\geq 2^{n-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\sqrt{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq 2\sqrt{n}-1$

Relações de Recorrência Lineares

3

"Quem conduz e arrasta o mundo não são as máquinas, mas as ideias."

VICTOR HUGO

Definição 3.0.1 (relação de recorrência). Uma *relação de recorrência* para a sucessão $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ou $\{a_n\}$ é uma equação que expressa cada termo de a_n, a partir de um certo termo, em função de um ou mais termos anteriores chamados *condições iniciais.*

Exemplo 3.0.2. Considere a sucessão definida recursivamente

$$a_0 = 1, \quad a_n = n^2 \cdot a_{n-1}, \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

O termo $a_0 = 1$ chamamos *condição inicial* e os termos a partir de a_1 são calculados usando a fórmula $a_n = n^2 \cdot a_{n-1}$ que chamamos de *relação de recorrência.* Por exemplo, os termos a_1, a_2, e a_3 são calculados da seguinte maneira:

$$a_1 = 1^2 \cdot a_0 = 1 \cdot 1 = 1, \qquad a_2 = 2^2 \cdot a_1 = 4 \cdot 1 = 4 \qquad e \qquad a_3 = 3^2 \cdot a_2 = 9 \cdot 4 = 36.$$

3.1 Método de Iteração

O método de interação consiste em ir calculando os termos da relação de recorrência em função dos seus antecessores até que se possa deduzir uma fórmula explícita para o n-ésimo termo, a_n. Por último, o n-ésimo termo deve ser validado por indução matemática.

Exemplo 3.1.1. *Determine o termo geral* a_n *e demonstre a validade pela indução matemática, das seguintes sucessões.*

1. $a_0 = 0, \quad a_n = a_{n-1} + 4, \quad$ *para* $\quad n \geq 1.$

Solução: Vamos deduzir o n-ésimo termo da sucessão.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= a_0 + 4 = 4 = 4 \cdot 1 \\ a_2 &= a_1 + 4 = 4 \cdot 1 + 4 = 4 \cdot 2 \\ a_3 &= a_2 + 4 = 4 \cdot 2 + 4 = 4 \cdot 3 \\ \vdots &= \vdots \\ a_n &= 4n \end{aligned}$$

Usando indução matemática, vamos mostrar a validade do termo geral $a_n = 4n.$

Demonstração: Quando $n = 0$, temos $a_0 = 4 \cdot 0 = 0$ o que é verdade. Vamos assumir que

$$a_k = 4k$$

é verdade, para algum $k \geq 1$, para mostrar que $a_{k+1} = 4 \cdot (k+1)$ também é verdade.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= s_k + 4 \\ &= 4k + 4 \qquad \text{(pela hipótese } a_k = 4k) \\ &= 4 \cdot (k+1) \quad \text{(evidenciando } 4) \end{aligned}$$

Consequentemente, o termo geral é válido. □

2. $a_1 = 2, \quad a_n = a_{n-1} - 6n, \quad para \quad n \geq 2.$

Solução: Determinemos o termo geral da sucessão:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2\\
a_1 &= S_0 - 6\cdot 1 = 2 - 6\cdot 1\\
a_2 &= S_1 - 6\cdot 2 = s_0 - 6\cdot 1 - 6\cdot 2 = 2 - 6\cdot 1 - 6\cdot 2\\
a_3 &= S_2 - 6\cdot 3 = s_2 - 6\cdot 1 - 6\cdot 2 - 6\cdot 3 = 2 - 6\cdot 1 - 6\cdot 2 - 6\cdot 3\\
\vdots &= \vdots\\
a_n &= 2 - 6\cdot 1 - 6\cdot 2 - 6\cdot 3 - \cdots - 6\cdot n\\
&= 2 - 6\cdot(1+2+3+\cdots+n)\\
&= 2 - 6\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\
&= 2 - 3n(n+1)
\end{aligned}$$

Usando indução matemática, vamos mostrar a validade do termo geral $a_n = 2 - 3n(n+1)$.

Demonstração: Para $n = 0$, temos $a_0 = 2 - 3\cdot 0\cdot(0+1) = 2$ o que é verdade. Agora, vamos assumir que

$$a_k = 2 - 3k(k+1)$$

é verdade, para algum $k \geq 1$, para mostrar que $a_{k+1} = 2 - 3(k+1)(k+2)$ também é verdade.

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k - 6(k+1)\\
&= 2 - 3k(k+1) - 6(k+1) && \text{(pela hipótese } a_k = 2 - 3k(k+1))\\
&= 2 - 3(k+1)(k+2) && \text{(evidenciando } 3(k+1))
\end{aligned}$$

Portanto, o termo geral é válido. □

3.2 Relação de Recorrência Linear Homogênia

Definição 3.2.1. Dizemos que uma relação de recorrência é linear e homogênea de ordem k se tem a seguinte forma

$$a_n = C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + C_3a_{n-3} + \cdots + C_ka_{n-k}, \quad n \geq k,$$

com $C_k \neq 0$, k é um inteiro positivo e os coeficientes $C_1, C_2, \cdots, C_k$ são números reais.

Teorema 3.2.2. *Seja $\lambda \neq 0$ um número real. Então, a sucessão $a_n = \lambda^n$ é uma solução para a relação de recorrência*

$$a_n = C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + C_3a_{n-3} + \cdots + C_ka_{n-k}, \quad n \geq k, \tag{3.1}$$

se, e somente se, λ é uma raíz da equação característica:

$$\lambda^k - C_1\lambda^{k-1} - C_2\lambda^{k-2} - C_3\lambda^{k-3} - \cdots - C_k = 0.$$

(i) Suponha que a equação característica tem k raízes distintas, $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$. Então, a solução da relação de recorrência (3.1) tem a forma

$$a_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \cdots + A_k\lambda_k^n, \tag{3.2}$$

onde $A_1, \cdots, A_k$ são constantes tais que (3.2) é a única sucessão que satisfaz simultaneamente a relação de recorrência (3.1) e as suas condições iniciais.

(ii) Suponha que a equação característica tem t raízes distintas, $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$, e que a multiplicidade da raíz λ_i é m_i, sendo $m_1+m_2+\cdots+m_t=k$. Então, solução da relação de recorrência (3.1) tem a forma

$$a_n = \sum_{i=1}^{t}\left(A_1 + A_2n + A_3n^2 + \cdots + A_{m_i}n^{m_i-1}\right)\lambda_i^n \tag{3.3}$$

onde $A_1, \cdots, A_{m_i}$ são constantes tais que (3.3) é a única sucessão que satisfaz simultaneamente a relação de recorrência (3.1) e as suas condições iniciais.

Exemplo 3.2.3.

1. *Suponha que* $-1,-1,-1,5,5,7$ *são raízes da equação característica de uma dada relação linear homogênia* a_n. *Qual é a forma de* a_n*?*

   Solução: Utilizando (3.3), obtemos,

   $$a_n = \left(A_1 + A_2 \cdot n + A_3 \cdot n^2\right)\cdot(-1)^n + (B_1 + B_2 \cdot n)\cdot 5^n + C\cdot 7^n$$

2. *Determine a solução da relação de recorrência linear homogênea definida por*

   $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}, \quad n \geq 3,$$

   com as seguintes condições iniciais $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad e \quad a_2 = 2.$

   Solução: A equação característica associada a relação é

   $$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

   cujas soluções são $\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ temos

   $$a_n = A\cdot(-1)^n + B + C\cdot 2^n.$$

   Utilizando as condições iniciais, obtemos,

   $$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + B + \ \ C = 1 \\ -A + B + \ \ C = 1 \\ A + B + 4C = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = -1/6 \\ C = \ \ 2/3 \end{cases}.$$

   Com efeito,

   $$a_n = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^n - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cdot 2^n \qquad \text{ou} \qquad a_n = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^n - \frac{1}{6} + \frac{2^{n+1}}{3}.$$

3. *Determine a solução da seguinte relação de recorrência*

   $$a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

   com as seguintes condições iniciais $a_0 = 3$ *e* $a_1 = 6$.

   Solução: A equação característica associada a relação é

   $$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

   cujas soluções são $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Assim, a solução tem a forma

   $$a_n = (A + Bn)\cdot(-3)^n.$$

   Utilizando as condições iniciais, obtemos, $A = 3$ e $-3A - 3B = 6$. Daí vem, $B = -5$. Portanto,

   $$a_n = (3 - 5n)\cdot(-3)^n.$$

3.3 Relação de Recorrência Linear não Homogênia

Definição 3.3.1. Dizemos que uma relação de recorrência linear de ordem k é não homogênea se tem a seguinte forma

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + C_3 a_{n-3} + \cdots + C_k a_{n-k} + f(n), \quad n \geq k, \tag{3.4}$$

com $C_k \neq 0, \ \ f(n) \neq 0, \ \ k$ é um inteiro positivo e os coeficientes $C_1, C_2, \cdots, C_k$ são números reais.

Teorema 3.3.2. *Considere uma relação de recorrência linear não homogênea*

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + C_3 a_{n-3} + \cdots + C_k a_{n-k} + f(n), \quad n \geq k.$$

A solução geral desta relação de recorrência tem a seguinte forma

$$a_n = \phi(n) + \varphi(n),$$

sendo $\phi(n)$ *a solução geral da relação homogênea associada à relação (3.4),*

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + C_3 a_{n-3} + \cdots + C_k a_{n-k}, \quad n \geq k$$

e $\varphi(n)$ *a solução particular da relação não homogênea (3.4) e é obtida da seguinte maneira:*

(i) Se $f(n)=P_t(n)b^n$ *e* $b\neq 0$ *não é raíz da equação caraterística da relação homogênea associada a relação (3.4), então a solução particular terá a forma*

$$\varphi(n)=Q_t(n)b^n.$$

(ii) Se $f(n)=P_t(n)b^n$ *e* $b\neq 0$ *é raíz da equação caraterística da relação homogênea associada a relação (3.4) com a multiplicidade* m, *então a solução particular terá a forma*

$$\varphi(n)=Q_t(n)n^m b^n.$$

Exemplo 3.3.3. *Achar o n-ésimo termo da seguinte relação de recorrência linear não homogênea.*

1. $a_0 = q, \quad a_n = 2\cdot a_{n-1} + p, \quad n \geq 1.$

Solução: Aqui, a relação homogênea associada é $a_n = 2\cdot a_{n-1}, \ n\geq 1$ cuja sua equação caracterítica é $\lambda - 2 = 0$, com raíz $\lambda = 2$. Com efeito,

$$\phi(n) = k\cdot 2^n.$$

Observe que $f(n)=p$ tem a forma $f(n)=p\cdot 1^n$ e 1 não é solução da equação característica, assim sendo, a solução particular tem a forma

$$\varphi(n)=A.$$

Substituindo $\varphi(n)$ na relação não homogênea, $\varphi(n)=2\cdot\varphi(n-1)+p$, obtemos, $A=2\cdot A+p$ equivalente a $A=-p$. Deste modo, a solução particular é $\varphi(n)=-p$. Assim sendo,

$$a_n = k\cdot 2^n - p.$$

Usando a condição inicial, obtemos

$$a_0 = k\cdot 2^0 - p = q \iff k - p = q \iff k = p+q.$$

Consequentemente, a solução final é

$$a_n = (p+q)\cdot 2^n - p.$$

2. $a_0 = a_1 = 2, \quad a_n = 4\cdot a_{n-1} - 4\cdot a_{n-2} + 2^n, \quad n\geq 2.$

Solução: Aqui, a relação homogênea associada é

$$a_n = 4\cdot a_{n-1} - 4\cdot a_{n-2} + 2^n, \quad n\geq 2$$

que tem como equação característica $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, com as raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Com efeito, a solução geral da relação homogênea associada é

$$\phi(n) = (A+Bn)\cdot 2^n.$$

Repare que $f(n) = 2^n$, sendo que 2 é raíz da equação característica de multiplicidade $m = 2$. Desta forma, a solução particular tem a forma

$$\varphi(n) = kn^2\cdot 2^n.$$

Substituindo $\varphi(n)$ na relação não homogênea $\varphi(n) = 4\varphi(n-1) - 4\varphi(n-2) + 2^n$, obtemos,

$$kn^2\cdot 2^n = 4\cdot k(n-1)^2\cdot 2^{n-1} - 4\cdot k(n-2)^2\cdot 2^{n-2} + 2^n$$

equivalente a $k = \dfrac{1}{2}$ Daí vem,

$$\varphi(n) = \frac{n^2}{2}\cdot 2^n.$$

Desta forma, a solução geral da relação não homogênea é $a_n = (A+Bn)\cdot 2^n + \dfrac{n^2}{2}\cdot 2^n$ ou

$$a_n = \left(\frac{n^2}{2} + Bn + A\right)\cdot 2^n.$$

Utilizando as condições iniciais, encontramos

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A \qquad\qquad = 2 \\ 2A + 2B + 1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \ \ 2 \\ B = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto, a solução final é

$$a_n = \left(\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 2\right)\cdot 2^n \qquad \text{ou} \qquad a_n = \left(n^2 - 3n + 2\right)\cdot 2^{n-1}.$$

3.4 Auto-avaliação

1. Demonstre que se $u_n = a \cdot u_{n-1}$, para $n > 1$ e $a \neq 0$, então para todo número natural n,

$$u_n = a^n \cdot u_0.$$

2. Sabendo que

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + n, \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

Demonstre que, por indução matemática,

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

3. Sabendo que

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{4a_{n-1}}{n}, \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Demonstre que, por indução matemática,

$$a_n = \frac{4^n}{n!}, \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

4. Considere a sucessão a_n definida pela relação de recorrência

$$a_1 = 10, \quad a_n = a_{n-1} + 4(n-1), \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

   (a) Use o método de iteração para chegar à seguinte expressão explícita para a_n

$$a_n = 2n^2 - 2n + 10.$$

   (b) Demonstre por indução que essa expressão de a_n, para $n \geq 1$, está correcta.

5. Utilizando o método de iteração, resolva as seguintes relações de recorrência:

   (a) $a_n = 3a_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$
   (b) $a_n = a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 0$
   (c) $a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$
   (d) $a_n = -a_{n-1} + 2, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$
   (e) $a_n = a_{n-1} + 2n, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 0$
   (f) $a_n = a_{n-1} - n + 3, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 2$

6. Qualé a solução geral de uma relação de recorrência linear homogênea cujas raízes da equação característica são

   (a) $-1, -1, 1, 1, 1, 1$
   (b) $-2, -1, 0, 1, 2, 3$
   (c) $-3, -3, 3, 5, 7, 7, 7$

7. Resolva cada uma das seguntes relações de recorrência linear homogênea fornecendo uma solução particular e geral para a_n.

   (a) $a_n = a_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 3$
   (b) $a_n = 3a_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 0$
   (c) $a_n = -a_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 5$
   (d) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 2$
   (e) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 3$
   (f) $a_n = -8a_{n-1} - 16a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 20$
   (g) $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}, \ n \geq 3,$ $a_0 = 3, \ a_1 = 2, \ a_2 = 36$
   (h) $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 4a_{n-3}, \ n \geq 3,$ $a_0 = 11, \ a_1 = 10, \ a_2 = 32$
   (i) $a_n = -a_{n-1} + 8a_{n-2} + 12a_{n-3}, \ n \geq 3,$ $a_0 = 6, \ a_1 = 19, \ a_2 = 25$
   (j) $a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-3}, \ n \geq 4,$ $a_0 = 1, \ a_1 = 0, \ a_2 = 1, \ a_3 = 2$

8. Achar a solução de cada uma das seguntes relações de recorrência linear não homogênea.

   (a) $a_n = a_{n-1} + 7n, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 0$
   (b) $a_n = a_{n-1} - n^2 + 2n \cdot 3^n, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 10$
   (c) $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 3, \ n \geq 2, \ a_0 = 0, \ a_1 = 1$
   (d) $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2, \ n \geq 2,$ $a_0 = 1, \ a_1 = 4$
   (e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 6, n \geq 3,$ $a_0 = -1, \ a_1 = 3, \ a_2 = 6$
   (f) $a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} + 3a_{n-3} + (-1)^n + n - 3, n \geq 3,$ $a_0 = 1, \ a_1 = 1, \ a_2 = 1$

9. Considere a relação de recorrência seguinte

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^n.$$

   (a) Mostre que $a_n = -2^{n+1}$ é uma solução.
   (b) Determine a solução geral.
   (c) Determine a solução solução se $a_0 = 1$.

10. Determine os valores de A e B de modo que

$$a_n = An + B$$

seja uma solução para a relação

$$a_n = 2a_{n-1} + n + 5$$

11. Qual é a forma da solução particular da relação de recorrência

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + f(n)$$

se

   (a) $f(n) = n^2$
   (b) $f(n) = 2^n$
   (c) $f(n) = n^2 \cdot 2^n$
   (d) $f(n) = n^3 \cdot (-2)^n$

Álgebra de Boole

4

"Discutir com quem renunciou à lógica é como dar remédio a uma pessoa morta."

Thomas Paine

A álgebra de Boole é uma ferramenta de fundamental importância na computação. As propriedades que nela se verificam servem de base para o design e construção dos computadores digitais.

4.1 Definição da Álgebra de Boole

Definição 4.1.1. Considere um conjunto não vazio B.

(a) Uma operação definida sobre B dizemos que é *unária* se a cada elemento $x \in B$ faz corresponder a um e único elemento $y \in B$, denotamos por $y = \bar{x}$.

(b) Uma operação definida sobre B dizemos que é *binária* se a cada par de elementos $x, y \in B$, nesta ordem, faz corresponder a um e único elemento $z \in B$.

Como toda álgebra, a álgebra de Boole é definida a partir de axiomas.

Definição 4.1.2. Seja B um conjunto que tem pelo menos dois elementos, 0 e 1. A *álgebra de Boole* é uma estrutura matemática $\langle B, +, \cdot \rangle$ constituida pelo conjunto B, no qual se definem uma operação unária, $\bar{\ } : B \to B$, e duas operações binárias, $+, \ \cdot\ : B \times B \to B$, que obedecem os seguintes axiomas:

B_1: Para todo par de elementos x e y que pertencem ao conjunto B se cumpre,

$$x + y = x + y \qquad \text{e} \qquad x \cdot y = x \cdot y$$

B_2: Para cada par de elementos x e y que pertencem ao conjunto B se verifica,

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \text{e} \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

B_3: Para quaisquer elementos x, y e z do conjunto B se cumpre,

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \qquad \text{e} \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

B_4: Existem dois elementos $0, 1 \in B$, zero e unidade, tais que $0 \neq 1$ e para cada $x \in B$

$$x + 0 = x \qquad \text{e} \qquad x \cdot 1 = x$$

B_5: Para qualquer $x \in B$ existe um $\bar{x} \in B$, chamado *negação de x* ou *inversor de x*, tal que

$$x + \bar{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad x \cdot \bar{x} = 0$$

Observe que a primeira das regras distributiva e a existência do complemento diferenciam esta álgebra da comum.

Definição 4.1.3. O *dual* de qualquer expressão numa álgebra de Boole é obtida pela troca da operação soma por produto e traca de 0 por 1, vice-versa.

Exemplo 4.1.4.

1. O conjunto de proposições com as operações de disjunção, conjunção e negação é uma álgebra de Boole. O elemento neutro da disjunção é a contradição e o da conjunção é a tautologia.

2. Seja $\mathcal{P}(S)$ a família de todos os subconjuntos do conjunto S. O conjunto $\mathcal{P}(S)$ com as operações de união, intersecção e complemento é uma álgebra de Boole. O elemento neutro da união é o conjunto vazio e o da intersecção é o conjunto universo S, e o complemento de qualquer conjunto $A \in \mathcal{P}(S)$ é o conjunto $\bar{A} = S \setminus A$.

3. Considere o conjunto $B = \{0, 1\}$ sobre o qual definimos as operações

x	y	$x + y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	y	$x \cdot y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

   É um exemplo trivial de uma álgebra de Boole.

4. A expressão dual de $x \cdot \bar{y} + z = 1$ é a seguinte expressão $(x + \bar{y}) \cdot z = 0$

4.2 Leis da Álgebra de Boole

Teorema 4.2.1. *Sejam $x, y \in B$. Então,*

1. *Idempotência:* (a) $x + x = x$ (b) $x \cdot x = x$
2. *Dominância:* (a) $x + 1 = 1$ (b) $x \cdot 0 = 0$
3. *Absorção:* (a) $x + (x \cdot y) = x$ (b) $x \cdot (x + y) = x$
4. *De Morgan:* (a) $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ (b) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
5. *Involução:* $\overline{(\bar{x})} = x$

Exemplo 4.2.2. *Simplifique a expressão* $xyz + a\bar{c} + a\bar{b}$.

Solução: Usando os axiomas da Definição 4.1.2 e o Teorema 4.2.1, obtemos

$$\begin{aligned}
xyz + x\bar{z} + x\bar{y} &= x(yz + \bar{z} + \bar{y}) && \text{(distributiva)}\\
&= x\left(yz + (\bar{z} + \bar{y})\right) && \text{(associativa)}\\
&= x\left(yz + \overline{\overline{(\bar{z} + \bar{y})}}\right) && \text{(involução)}\\
&= x\left(yz + \overline{(yz)}\right) && \text{(De Morgan e comutativa)}\\
&= x \cdot 1 && \text{(axioma } B_5)\\
&= x && \text{(axioma } B_4)
\end{aligned}$$

Teorema 4.2.3. *Seja X uma expressão booleana. Se X decorre directamente dos axiomas da álgebra de Boole, então a expressão dual de X é uma consequência directa dos mesmos axiomas.*

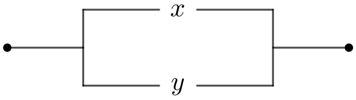
4.3 Álgebra dos Circuitos com Interruptores

Suponha que x e $\bar{x}$ são dois interruptores tais que se x está ligado, $\bar{x}$ está desligado e vice-versa. Sejam x e y dois interruptores que só podem tomar os valores **0** e **1** que significam **interruptor fechado** e **interruptor aberto**, respectivamente. Num circuito, dois interruptores podem estar ligados:

- **em série** xy

x	y	xy
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

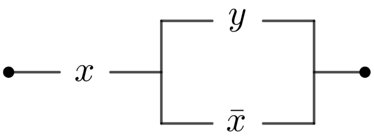
- **em paralelo** $x + y$



x	y	$x+y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemplo 4.3.1. *Construir um circuito e uma tabela verdade para cada uma das expressões boleanas* $x\,(y+\bar{x})$ *e* $xy\bar{z} + \bar{x}\,(y+\bar{z})$.

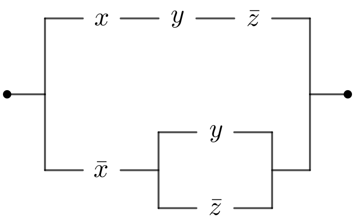
- $x\,(y+\bar{x})$



No circuito, a corrente só passará se os interruptores x e y estiverem simultaneamente ligados.

x	y	$\bar{x}$	$y+\bar{x}$	$x\,(y+\bar{x})$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

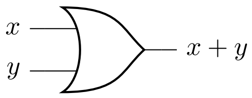
- $B(x,y,z) = xy\bar{z} + \bar{x}\,(y+\bar{z})$

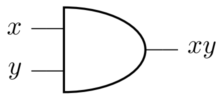


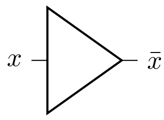
Neste circuito, a corrente passará em quatro configurações possíveis.

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$xy\bar{z}$	$y+\bar{z}$	$\bar{x}\,(y+\bar{z})$	$B(x,y,z)$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1

Ainda ressaltar que podemos usar os circuitos OR, AND e NOT como se segue, respectivamente.

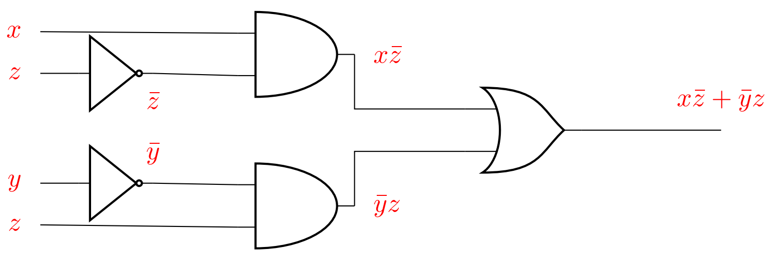






Exemplo 4.3.2. *Escrever o circuito correspondente a expressão* $x\bar{z} + \bar{y}z$.

Solução: O circuito tem a seguinte forma



4.4 Funções de Boole

Definição 4.4.1. Chamamos *função de Boole de n variáveis* $x_1, \cdots, x_n$ a uma aplicação do produto cartesiano $\{0,1\}^n$ em $\{0,1\}$.

Exemplo 4.4.2. Consideremos a função $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ definida pela expressão $f(x,y,z) = x + \bar{y}z$. Os valores da função podem ser dados pela seguinte tabela

x	y	z	$f(x,y) = x + \bar{y}z$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Observe que o valor da função, por exemplo, no ponto $(1,0,0)$ é calculado $f(1,1,0)=1+\bar{0}\cdot 0=1+1\cdot 0=1$.

Definição 4.4.3. Uma função booleana está na *forma canónica* se todos termos da função contém todas variáveis.

Exemplo 4.4.4. *Escrever na forma canónica a função* $f(x,y,z) = x + \bar{y}z$.

Solução: Para que a função $f(x,y,z) = x + \bar{y}z$ esteja na forma canónica é necessário que no primeiro termo tenhamos as variáveis y e z, enquanto que no segunto termos tenhamos x. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x + \bar{y}z \\
&= x(y+\bar{y})(z+\bar{z}) + (x+\bar{x})\bar{y}z && \text{(pelo axioma } B_5) \\
&= (xy + x\bar{y})(z+\bar{z}) + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z && \text{(pelo axioma } B_3) \\
&= xyz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z && \text{(pelo axioma } B_5) \\
&= xyz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z && (\text{axioma } B_2 \text{ e idempotência } x\bar{y}z + x\bar{y}z = x\bar{y}z)
\end{aligned}$$

Também, podemos obter a forma canónica de uma função booleana usando a tabela da função:

- Observamos as linhas cujo valor da função é **1**;
- Construimos para cada linha os produtos:
  – a variável com valor **1** é deixada intacta.
  – a variável com valor **0** é trocada pelo seu complemento.
  – as a variáveis da mesma linha são conectadas pelo operador produto.
- e por fim, construimos as somas dos produtos obtidos no parágrafo acima.

Exemplo 4.4.5. Usando a tabela da função $f(x,y,z) = x + \bar{y}z$ dada no **Exemplo 4.4.2**, obtemos

x	y	z	$f(x,y) = x + \bar{y}z$	**produtos**
1	1	1	1	xyz
1	1	0	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	0	

Com efeito, $f(x,y,z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$.

4.5 Simplificação de circuitos

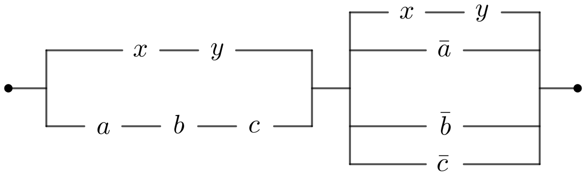
A simplificação de circuitos consiste nos seguintes passos:

1º Passo: Determinar a função booleana corrrespondente;

2º Passo: Simplificar a função booleana usando as leis;

3º Passo: Desenhar o novo circuito.

Exemplo 4.5.1. *Simplificar o seguinte circuito*



Solução:

1º Passo: Função corrrespondente ao circuito $f(a,b,c,x,y) = (xy + abc)\left(xy + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right)$.

2º Passo: Simplificar a função booleana usando as leis da Álgebra de Boole

$$\begin{aligned} f(a,b,c,x,y) &= (xy + abc)\left(xy + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right) \\ &= xy \cdot xy + xy\bar{a} + xy\bar{b} + xy\bar{c} + abcxy + abc\bar{a} + abc\bar{b} + abc\bar{c} \\ &= xy + xy\bar{a} + xy\bar{b} + xy\bar{c} + abcxy \\ &= xy\left(1 + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + abc\right) \\ &= xy \end{aligned}$$

3º Passo: Desenho do novo circuito:

4.6 Auto-avaliação

1. Escreva as expressão ou igualidade dual para cada item que segue:

   (a) $x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z$
   (b) $x(\bar{x} + y)$
   (c) $x + xy = x$
   (d) $x\bar{y} + y = x + y$

2. Seja $B = \{0, 1, a, a'\}$ e sejam $+$ e $\cdot$ operações binárias em B. A operação unária $'$ é definida pela tabela

$+$	0	1	a	a'
$'$	0	1	a'	a

Suponha que sabemos que $\left(B, +, \cdot, {}', 0, 1\right)$ é uma álgebra booleana. Usando as proppriedades que precisam valer em todas as álgebras booleanas, preencha as tabelas a seguir, afim de definir as operações $+$ e $\cdot$:

$+$	0	1	a	a'
0				
1				
a				
a'				

$\cdot$	0	1	a	a'
0				
1				
a				
a'				

3. Mostre que o conjunto $X = \{a, b, c, d\}$, com as operações definidas pelas tabelas abaixo, é uma álgebra de Boole

$+$	a	b	c	d
a	a	b	b	a
b	b	b	b	b
c	b	b	c	c
d	a	b	c	d

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	d	d
b	a	b	c	d
c	d	c	c	d
d	d	d	d	d

4. No conjunto $\mathbb{Z}$ considere as operações $+$, $\cdot$ e complementação definida por

$$a+b=\max\{a,b\}, \quad ab=\min\{a,b\} \quad \text{e} \quad \bar{a}=-a.$$

Verifique se o sistema $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ constitui ou não uma álgebra de Boole.

5. Simplifique as seguintes expressões booleanas

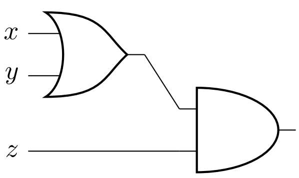
   (a) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}z\bar{y}+x\bar{y}z$
   (b) $\overline{xy}+\bar{x}y$
   (c) $\overline{xy}+\bar{x}y+x\bar{y}$
   (d) $x\bar{y}+xyz+\bar{x}z$
   (e) $(x+y+z)\,(\bar{x}+\bar{y}+z)$
   (f) $\left(\overline{\overline{xy}+y+v}\right)+z\,(\overline{xyz})$
   (g) $\left(\overline{(x+y)z}\right)+\left(\overline{v(z+y)}\right)$
   (h) $(x+y+\bar{z})\,(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$
   (i) $\left(\overline{(x(y+z)v)}\right)(\overline{x+y})$
   (j) $\overline{xy}z+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}+xyz+xy\bar{z}$

6. Desenhar os circuitos com interruptores que realizam as expressões booleanas que se seguem, sem efectuar qualquer simplificação prévia.

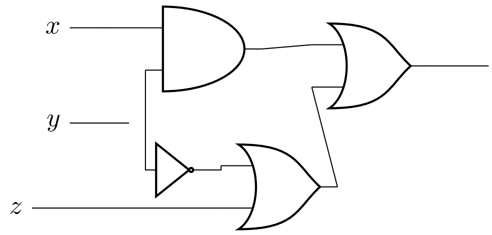
   (a) $xyz+xy(zw+st)$
   (b) $x+y(z+wt)+su$
   (c) $x\,(y(z+w)+z(u+v))$
   (d) $(x+\bar{y}+z)(x+y\bar{z})+\bar{z}w+w\,(\bar{y}+z)$
   (e) $z\,(xy+\bar{y}+x\bar{y}z+x\bar{z})$
   (f) $xz+\bar{y}+\bar{y}z+x\bar{y}z$
   (g) $(xy+z)(y+z)+z$
   (h) $\bar{x}z+\bar{x}y+\bar{z}$

7. Determine as expressões que representam algebricamente os seguintes circuitos:

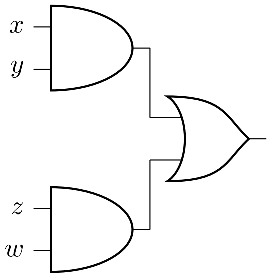
   (a)



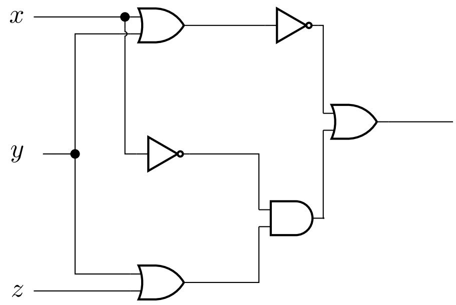
   (b)



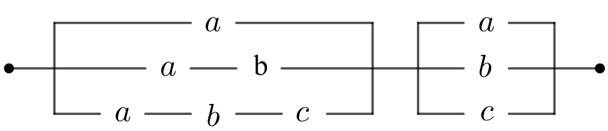
   (c)

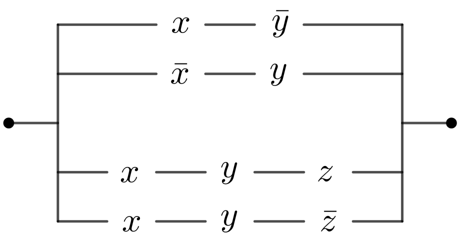


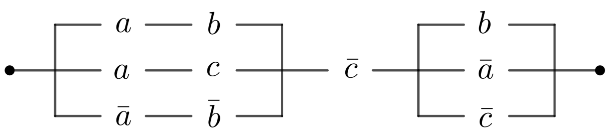
   (d)



8. Simplifique os seguintes circuitos







9. Usando a tabela verdade, determine a forma canónica das seguintes funções booleanas

   (a) $f(x,y,z)=(\overline{x+y})\,z(x+y)$
   (b) $f(x,y,z)=\bar{x}z+\bar{x}y+\bar{z}$
   (c) $f(x,y,z)=(x+y)\,(\bar{x}+z)$
   (d) $f(x,y,z)=(xy+z)\,(y+z)$

Teoria de Grafos

5

"Se o que tu procuras não achares primeiro dentro de ti mesmo, não acharás em lugar algum."

SÓCRATES

A teoria de grafos tem a sua origem na necessidade de representar através de esquemas as relações existentes entre os elementos de um conjunto. Esta teoria cobre um vasto campo de aplicações, por exemplo, podemos determinar se dois computadores são conectados por uma linha de comunicação, agendar exames e canais de estações de televisão por meio de modelos de grafos.

5.1 Definições Básicas

Grafo. Um *grafo* $G = (V_G, A_G)$ é uma estrutura constituida por um conjunto finito e não vazio de vértices V_G, um conjunto finito de arestas A_G e uma relação que associa cada aresta a um par não ordenado de vértices denominados *extremidades*.

$G = (V_G, A_G)$:

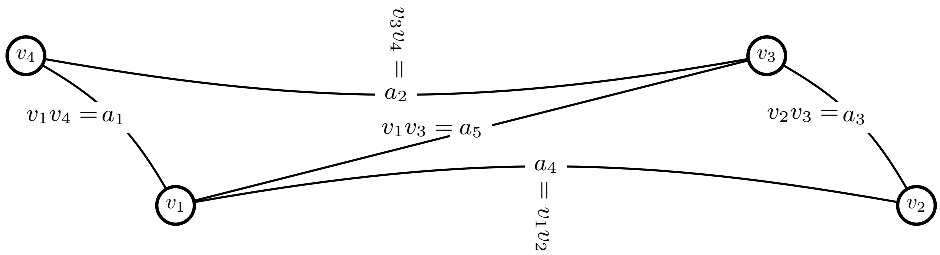
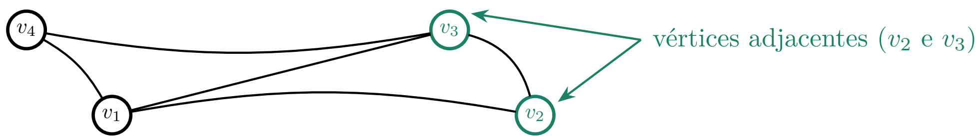


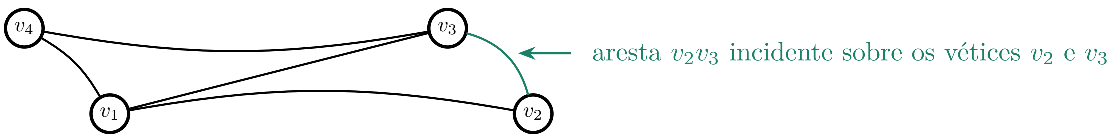
Figura 5.1

Formalmente G é descristo: $G=(\{v_1, v_2, v_3, v_4\};\ \{v_1v_4, v_3v_4, v_2v_3, v_1v_2, v_1v_3\})$

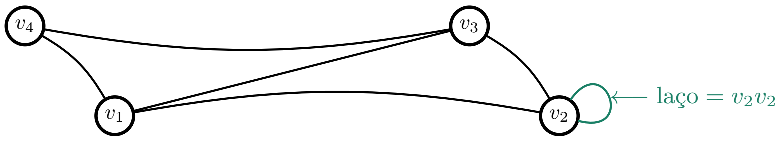
Vértices adjacentes. Dois vértice são *adjacentes* se são extremidades de uma aresta.



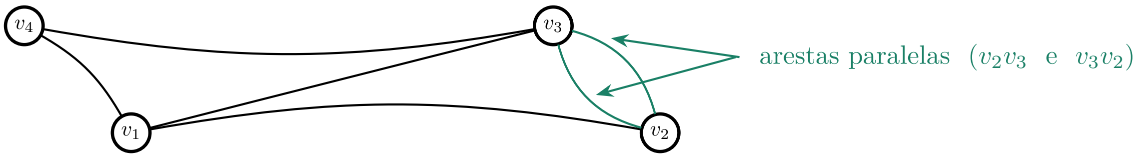
Aresta incidente. Uma aresta é *incidente sobre um vértice* se este for sua extremidade.



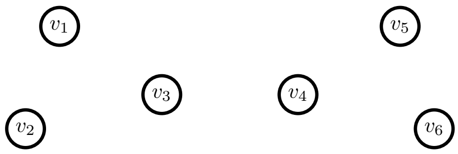
Laço. Um *laço* ou *lacete* é uma aresta cujas extremidades coincidem.



Multigrafo e Arestas paralelas. Se entre dois vértices existe mais que uma aresta, o grafo chama-se *multigrafo* e as várias arestas denominam-se arestas *múltiplas* ou *paralelas*.



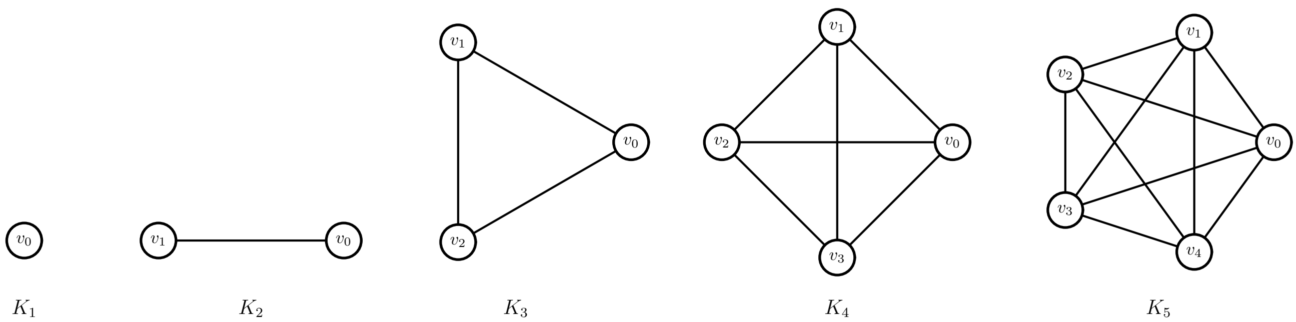
Grafo nulo. Um grafo é *nulo* se não possui arestas, $G = (V_G, \emptyset)$.



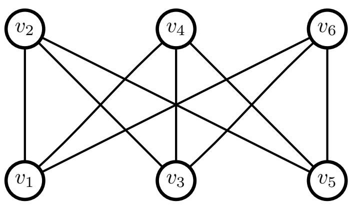
Formalmente G é descristo: $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\};\ \emptyset)$

Grafo simples. Um grafo é *simple* se não tem arestas paralelas e laços (ex. o grafo da Figura 5.1).

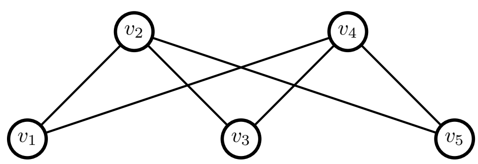
Grafo completo. *Grafo completo* é um grafo simples em que todos os pares de vértices são adjacentes, denotamos por K_n, onde n é o número de vértices do grafo.



Grafo bipartido. Um grafo completo é *bipartido* se o conjunto de vértices pode ser dividido em dois subconjuntos distinto V e W de modo que cada aresta do grafo liga um vértice de V a um vértice de W.



$K_{3,3}$



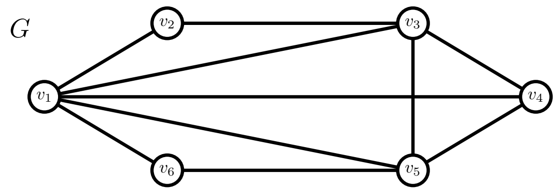
$K_{2,3}$

Subgrafo. Sejam dados os grafos $G = (V_G, A_G)$ e $H = (V_H, A_H)$. O grafo H é *subgrafo de* G se V_H é um subconjunto de V_G e A_H é um subconjunto de A_G, escrevemos $H \subseteq G$.

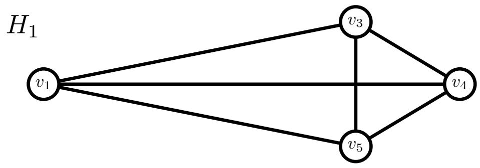
(1) H é um *subgrafo gerador de* G se e somente se $V_H = V_G$ e $A_H \subseteq A_G$, isso significa que H é obtido unicamente pela remoção de arestas de G.

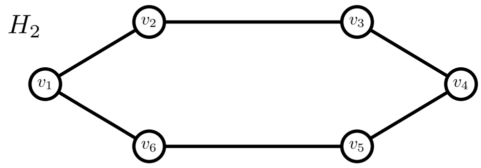
(2) H é um *subgrafo induzido* se é um grafo tal que $V_H \subseteq V_G$ e A_H contém todas as arestas de G que tem as duas extremidades em V_H.

Considerando G o grafo da figura a seguir

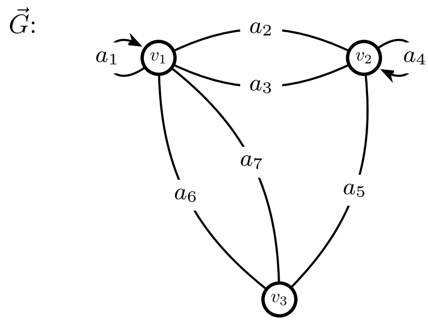


Na figura abaixo, o grafo H_1 é um subgrafo induzido de G, foi obtido pela eliminação dos vértices v_2 e v_6 e todas arestas incidentes neles, enquanto o grafo H_2 é um subgrafo gerador de G, foi determinado removendo só as seguinte arestas: v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5 e v_3v_5.





Digrafo. Um *digrafo* ou *grafo orientado* $\vec{G} = (V_{\vec{G}}, A_{\vec{G}})$ é uma estrutura constituida por um conjunto finito e não vazio de vértices V_G, um conjunto finito de arcos A_G e uma relação que associa cada aresta a um par ordenado de vértices.



Formalmente, $\vec{G}$ é descrito: $\vec{G}=(\{v_1, v_2, v_3\};\ \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\})$, sendo que a relação de incidência dos arcos nos vértices é tal que

$a_1=(v_1, v_1)$,	$a_3=(v_2, v_1)$,	$a_5=(v_2, v_3)$,	$a_7=(v_3, v_1)$
$a_2=(v_1, v_2)$,	$a_4=(v_2, v_2)$,	$a_6=(v_1, v_3)$	

Em um digrafo, cada arco $a = (u, v)$ possui uma única direção, de u para v, por esta razão, $(u, v) \neq (v, u)$.

5.2 Grau de um Vértice

Grafo. Sejam G um grafo e v um vértice de G. O *grau do vértice* v é o número de arestas que são incidentes nele, no caso que a aresta é um laço conta-se duas vezes, denota-se por $d_G(v)$.

Seja G o seguinte grafo

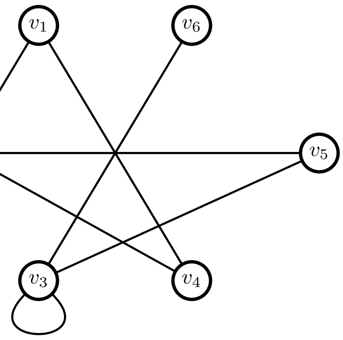


Figura 5.4

Então, $d_G(v_1) = d_G(v_4) = d_G(v_5) = 2, \quad d_G(v_2) = 3, \quad d_G(v_3) = 4 \quad \text{e} \quad d_G(v_6) = 1.$

Teorema 5.2.1. *Em um grafo, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas.*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|A|.$$

Considerando o grafo do **Exemplo 5.4**, observamos

$$\sum_{k=1}^{6} d_G(v_k) = d_G(v_1) + d_G(v_2) + d_G(v_3) + d_G(v_4) + d_G(v_5) + d_G(v_6)$$
$$= 2 + 3 + 4 + 2 + 2 + 1 = 14 = 2 \cdot \underbrace{7}_{|A|}$$

Corolário 5.2.2. *Em qualquer grafo o número de vértices que tem grau ímpar é par.*

O grafo da Figura 5.4 possui dois vértices, v_2 e v_6, cujos graus são ímpar.

Digrafo. Sejam $\vec{G}$ um digrafo e v um vértice.

(1) O *in-degree de* v, $\text{ind}_{\vec{G}}(v)$, é o número de arcos que tem o v como extremidade de entrada.

(2) O *out-degree de* v, $\text{outd}_{\vec{G}}(v)$, é o número de arcos que tem o v como extremidade de saída.

Considerando $\vec{G}$ o digrafo

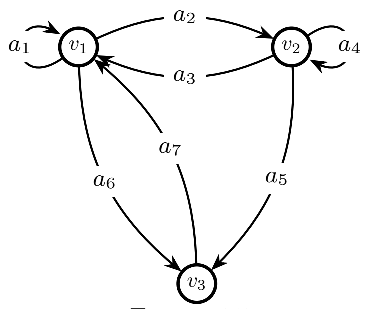


Figura 5.5

Temos,

- $\text{ind}_{\vec{G}}(v_1) = 3$
- $\text{ind}_{\vec{G}}(v_2) = 2$
- $\text{ind}_{\vec{G}}(v_3) = 2$
- $\text{outd}_{\vec{G}}(v_1) = 3$
- $\text{outd}_{\vec{G}}(v_2) = 3$
- $\text{outd}_{\vec{G}}(v_3) = 1$

Lema 5.2.3. *Em um digrafo* $d_{\vec{G}}(v) = ind_{\vec{G}}(v) + outd_{\vec{G}}(v)$.

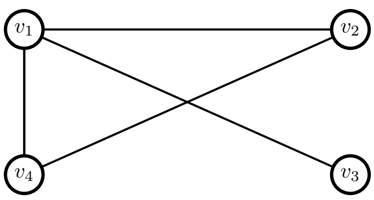
Por exemplo, do digrafo da Figura 5.5, obtemos

- $d_{\vec{G}}(v_1) = \text{ind}_{\vec{G}}(v_1) + \text{outd}_{\vec{G}}(v_1) = 3 + 3 = 6$
- $d_{\vec{G}}(v_2) = \text{ind}_{\vec{G}}(v_2) + \text{outd}_{\vec{G}}(v_2) = 2 + 3 = 5$
- $d_{\vec{G}}(v_3) = \text{ind}_{\vec{G}}(v_3) + \text{outd}_{\vec{G}}(v_3) = 2 + 1 = 3$

5.3 Matriz Associada a um Grafo

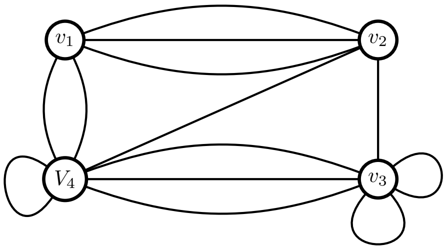
5.3.1 Matriz de adjacência

Grafo *Matriz de adjacência de um grafo* é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n tal que a entrada a_{ij} é o número de arestas que unem os vértices v_i e v_j.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 5.6: Matriz de adjacência de um grafo simples



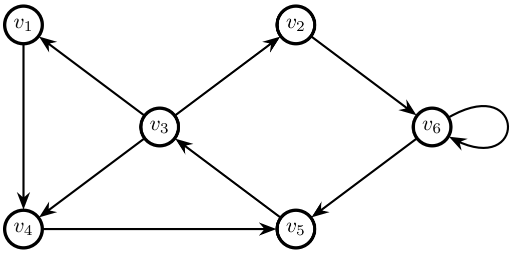
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 5.7: Matriz de adjacência de um grafo multigrafo com laço.

Lema 5.3.1. *Seja A a matriz de adjacência de um grafo G.*

- *A matriz A é simétrica.*
- *Os elementos da diagonal principal de A são todos nulos se e só se o grafo não possui laços.*
- *Se o grafo não tem laços , o grau de um vértice é a soma dos elementos da sua linha ou coluna.*

Digrafo. A *matriz de adjacência de um digrafo* é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, onde a entrada a_{ij} é o número de arcos de v_i para v_j.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

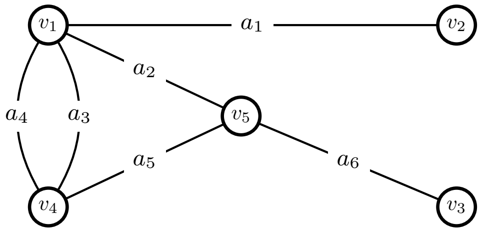
Lema 5.3.2. *Seja A a matriz de adjacência de um digrafo $\vec{G}$.*

- *A matriz A n ao é necessariamente simétrica.*
- *O grau de saída do vértice v_i é a soma dos elementos da linha i.*
- *O grau de entrada do vértice v_i é a soma dos elementos da coluna i.*

5.3.2 Matriz de incidência

Grafo. *Matriz de incidência de um grafo* é uma matriz $M = (m_{ij})$ do tipo $n \times m$ cuja entrada m_{ij} é **1** se o vértice v_i é extremidade da aresta a_j, e **0** caso contrário. Em outras palavras,

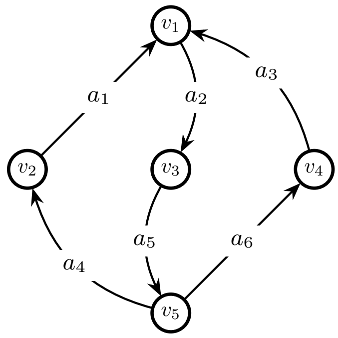
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } a_j \text{ é incidente no vértice } v_i \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Digrafo. *Matriz de incidência de um digrafo* é uma matriz $M = (m_{ij})_{n\times m}$ tal que

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se o vértice } v_i \text{ é a extremidade de entrada do arco } a_j \\ \\ 0, & \text{se o vértice } v_i \text{ não é extrimidade do arco } a_j \\ \\ 1, & \text{se o vértice } v_i \text{ é a extremidade de saída do arco } a_j \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4 Caminho de um Grafo

Definição 5.4.1. Considere um grafo $G=(\{v_1, \cdots, v_n\}, \{a_1, \cdots, a_m\})$. O *caminho entre dois vértices* v_1 *e* v_k de G é a sequência finita de vértices e arestas da forma

$$(v_1, a_1, v_2, a_2, \cdots, a_{n-1}, v_n) \qquad \text{ou} \qquad v_1 - a_1 - v_2 - a_2 - \cdots - a_{n-1} - v_n,$$

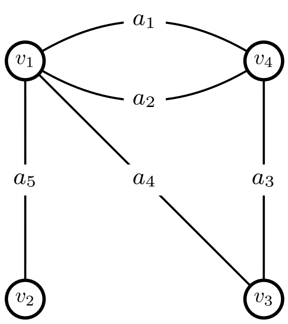
onde a aresta a_j liga os vértices v_j e v_{j+1}, daí que, é um hábito escrever um caminho como uma sequência de vértices adjacentes:

$$v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_n.$$

O número de arestas do caminho dá-nos o seu *comprimento.*

Caminhos simples. Um caminho é *simples* se não tiver arestas repetidas; e é *elementar* se não contêm um vértice mais de uma vez.

Seja G o grafo da figura abaixo. Então:

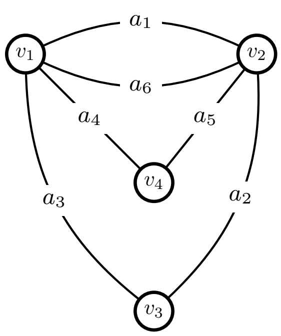


- $v_2 - a_5 - v_1 - a_2 - v_4 - a_1 - v_1 - a_4 - v_3$ é um caminho simples de comprimento 4.
- $v_2 - a_5 - v_1 - a_2 - v_4 - a_3 - v_3$ é um caminho elementar de comprimento 3.
- $v_2 - a_5 - v_1 - a_2 - v_4 - a_1 - v_1 - a_2 - v_4 - a_3 - v_3$ é um caminho não simples, nem elementar de comprimento 5.
- $v_2 - a_1 - v_1 - a_2 - v_4 - a_3 - v_3$ não é um caminho do grafo dado.

Caminhos fechados. Seja $G=(\{v_1, \cdots, v_n\}, \{a_1, \cdots, a_m\})$ um grafo. Um caminho é *fechado* quando o vértice inicial e o vértice terminal coincidem.

- *Circuito* é um caminho simples e fechado.
- *Ciclo* é um circuito com todos os vértices diferentes, excepto os vértices inicial e terminal.

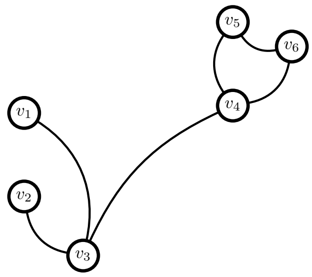
Considere o grafo. De v_2 à v_3 determinamos pelo os caminhos:



- $v_3 - a_3 - v_1 - a_6 - v_2 - a_1 - v_1 - a_6 - v_2 - a_2 - v_3$ é um caminho fechado de comprimento 5.
- $v_3 - a_3 - v_1 - a_4 - v_4 - a_5 - v_2 - a_6 - v_1 - a_1 - v_2 - a_2 - v_3$ é circuito de comprimento 6.
- $v_3 - a_3 - v_1 - a_4 - v_4 - a_5 - v_2 - a_2 - v_3$ é ciclo de comprimento 4.

Teorema 5.4.2. *Seja* $A=(a_{ij})$ *a matriz de adjacência de um grafo simples* G*. Então, a entrada* m_{ij} *da matriz* $M = A^k$ *dá o número de caminhos diferentes de comprimento* k *entre* v_i *e* v_j*.*

Por exemplo, sejam dados o grafo e a sua matriz a seguir.



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- O elemento $\left(A^3\right)_{32}$ indica que existem três caminhos de comprimento 3 de v_2 para v_3, são: $v_2-v_3-v_1-v_3$, $v_2-v_3-v_4-v_3$ e $v_2-v_3-v_2-v_3$.
- O elemento $\left(A^3\right)_{54}$ indica que existem quatro caminhos de comprimento 3 de v_5 para v_4, são: $v_5-v_6-v_5-v_4$, $v_5-v_4-v_3-v_4$, $v_5-v_4-v_6-v_4$ e $v_5-v_4-v_5-v_4$.

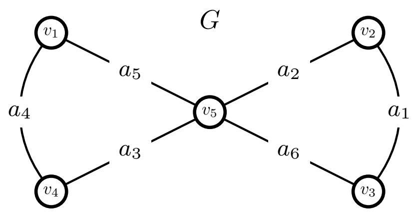
Caminhos Euleriano. *Caminho euleriano* é um caminho simples que contêm todas as aresta do grafo.

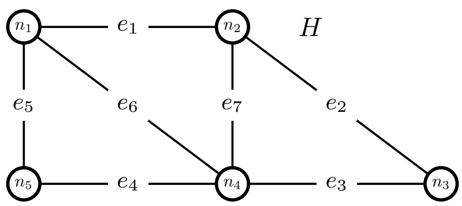
- *Circuito euleriano* é um caminho euleriano fechado.
- Um grafo é *euleriano* se admite um circuito euleriano.
- Um grafo é *semi-euleriano* se admite um caminho euleriano.

Teorema 5.4.3. *Um grafo tem um circuito euleriano se, e somente se, é conexo e cada vértice possui grau par.*

Corolário 5.4.4. *Um grafo possui um caminho euleriano se, e somente se, é conexo e contêm exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Considere os seguintes grafos





- Observe que $d_G(v_1)=2$, $d_G(v_2)=2$, $d_G(v_3)=4$, $d_G(v_4)=2$ e $d_G(v_5)=2$. Pelo **Teorema 5.4.3**, concluimos que o grafo G possui circuito euleriano:

$$v_3-a_6-v_1-a_1-v_2-a_2-v_3-a_5-v_4-a_4-v_5-a_3-v_3$$

  e é um grafo euleriano.
- e $d_H(n_1)=3$, $d_H(n_2)=3$, $d_H(n_3)=2$, $d_H(n_4)=4$ e $d_H(n_5)=2$. Pelo **Coroário 5.4.4**, o grafo H contêm caminho euleriano:

$$n_1-e_1-n_2-e_2-n_3-e_3-n_4-e_4-n_5-e_5-n_1-e_6-n_4-e_7-n_2$$

  e é um grafo semi-euleriano.

Grafos hamiltonianos. *Grafo hamiltoniano* é aqule que possui um ciclo que passa por cada vértice do grafo exactamente uma vez.

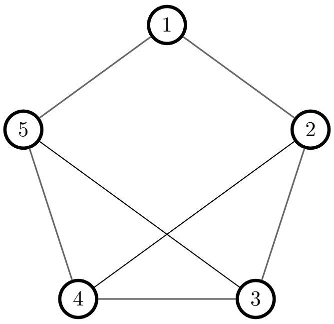
(a) não é um grafo hamiltoniano (b) Grafo hamiltoniano

Figura 5.13

Teorema 5.4.5 (Teorema de Ore)**.** *Seja G um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$. Para cada par de vértices não adjacente u e v, se*

$$deg(u) + deg(v) \geq n,$$

então G é um grafo hamiltoniano.



Seja dado o grafo no lado esquerdo. É evidente que o grafo satisfaz a condição indicada no teorema de Ore, por exemplo,

- $\deg(1) + \deg(3) = 2 + 3 = 5 \geq 5$
- $\deg(4) + \deg(2) = 3 + 3 = 6 \geq 5$

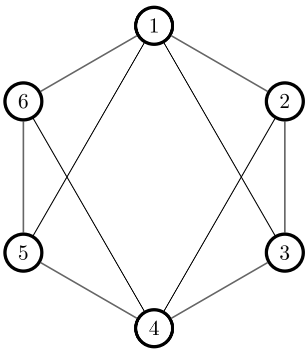
Portanto, é um grafo hamiltoniano.

Como Consequência do teorema de Ore obtemos o teorema de Dirac.

Teorema 5.4.6 (Teorema de Dirac)**.** *Seja G um grafo simples com n vértices, $n \geq 3$. Para qualquer vértice v, se*

$$deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

então G é um grafo hamiltoniano.



O grafo da figura ao lado satisfaz a condição indicada no teorema de Dirac, $n = 6$

$$\deg(v_i) = 3 \geq \frac{6}{2} = 3$$

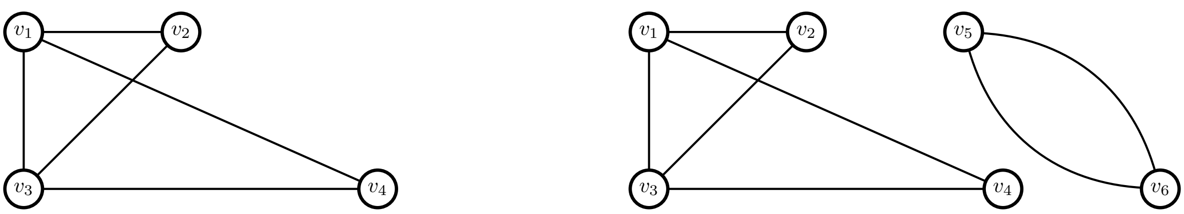
Portanto, é um grafo hamiltoniano.

Observação: Nem todos os grafos hamiltonianos satisfazem as condições indicadas nos teoremas de Ore e Dirac. Por exemplo, o grafo (b) do Figura 5.13 não satisfaz nenhum dos dois teoremas, contudo, é hamiltoniano.

$$\deg(v_i) + \deg(v_j) = 2 + 2 = 4 < 5 \qquad \text{e} \qquad \deg(v_i) = 2 < \frac{6}{2} = 3.$$

Definição 5.4.7. Um grafo G é *conexo* se existe um caminho para cada par de vértices de G. Caso contrário, G é um *grafo desconexo.*

Exemplo 5.4.8. Sejam dados os grafo abaixo.



(a) Grafo conexo

(b) grafo desconexo

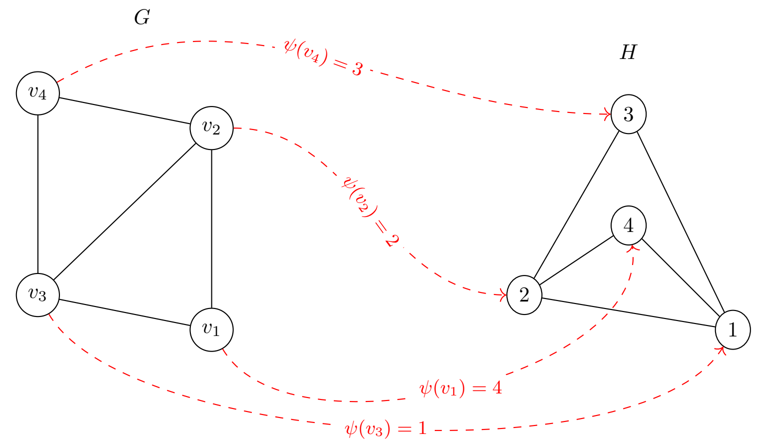
5.5 Grafos Isomorfos

Definição 5.5.1. Dois grafos G e H são isomorfos, $G \cong H$, se existe uma função bijectiva

$$\psi : V_G \longrightarrow V_H$$

tal que u e v são adjacentes em G se, e somente se, $\psi(u)$ e $\psi(v)$ são adjacentes em H. A tal função ψ chamamos *isomorfismo.*

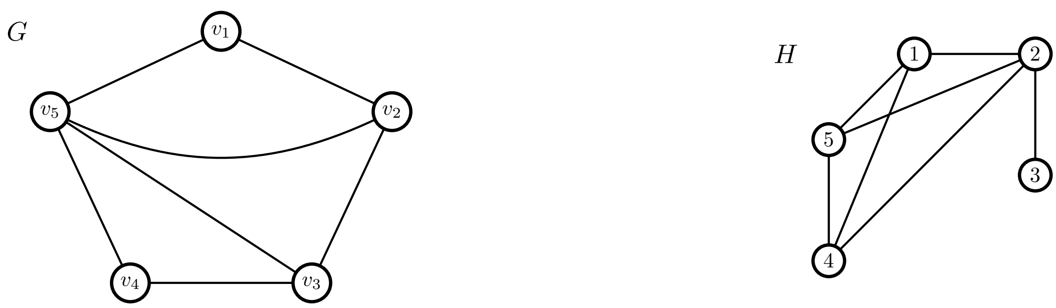
Exemplo 5.5.2. Os grafos da figura abaixo são isomorfos, podemos construir o seguinte isomorfismo é $\psi(v_1) = 4$, $\psi(v_2) = 2$, $\psi(v_3) = 1$ e $\psi(v_4) = 3$.



Às vezes, não é fácil mostrar que um par de grafos é isomorfo, sendo mais fácil verificar se é não isomorfo, analizando algumas propriedades que são características comuns de um par de grafos isomorfos, isto é, analizando os invariantes do isomorfismo. Um par de grafos isomorfos tem:

- mesmo número de vértices;
- mesmo número de arestas;
- vértices correspondentes tem o mesmo grau.

Exemplo 5.5.3. Sejam dados o par de grafos



Verificando as invariantes, facilmente, concluimos que os dois grafos não são isomorfos porque não se conserva os graus dos vértices, veja a tabela a seguir.

	G	H
$\|V\|$	5	5
$\|A\|$	7	7
grau dos vértices	4, 3, 3, 2, 2	4, 3, 3, 3, 1

Observação: Os invariantes do isomorfismo são condiçõe necessárias mas não suficientes. Mostrar que um par de grafos é isomorfo consiste em determinar um isomorfismo.

5.6 Caminho Mínimo

Definição 5.6.1. Um *grafo com peso* ou *grafo ponderado* é aquele em que cada aresta é associada a um número real não negativo chamado *peso*[1].

[1] **Peso** pode ser uma distância, tempo, temperatura, um custo de qualquer coisa, etc.

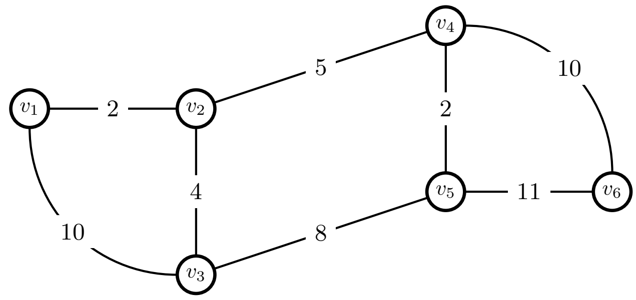


Figura 5.16: Grafo com pesos

Comprimento de um caminho. O *comprimento de um caminho* é a soma dos pesos das arestas do caminho, isto é, se $p = v_0 - v_1 - v_2 - \cdots - v_n$ tal que $v_{i-1}v_i \in A_G$, o comprimento de p é

$$L(p) = \sum_{i=1}^{n-1} w\left(v_{i-1}v_i\right),$$

onde $w\left(v_{i-1}v_i\right)$ é o peso da aresta $\{v_{i-1}, v_i\}$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} L(v_1 - v_2 - v_3 - v_5 - v_6) &= w\left(v_1v_2\right) + w\left(v_2v_3\right) + w\left(v_3v_5\right) + w\left(v_5v_6\right) \\ &= 2 + 4 + 8 + 11 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Caminho mínimo. O *caminho mínimo entre os vértices* v_i *e* v_k é aquele cujo comprimento é o menor dentre todos os caminhos existentes entre v_i e v_k.

Algoritmo de Dijkstra. Sejam $G = (V, A)$ um grafo e v_0 um vértice de G.

- Atribua valor zero à estimativa do peso mínimo do vértice v_0 (o inicio do caminho) e infinito às demais estimativas;
- Atribua um valor qualquer aos precedentes (o precedente de um vértice v_i é o vértice que precede v_i no caminho de custo mínimo);
- Enquanto houver vértice aberto:
  - seja v_k um vértice ainda aberto cuja estimativa seja menor dentre todos os vértices aberto;
  - feche o vértice v_k;
  - para todo vértice ainda aberto que seja sucessor de v_k faça:
    * some a estimativa do vértice v_k com o custo da aresta que une v_k a v_j;
    * caso a soma seja melhor que a estimativa anterior para o vértice v_j, substitua-a e anote como precedente de v_j.

Por exemplo, na Tabela 5.1 determina-se o caminho mínimo entre os véritices v_1 e v_8 do grafo da figuara abaixo e seu o comprimento; a Figura 5.17 representa o esboço do caminho mínimo.

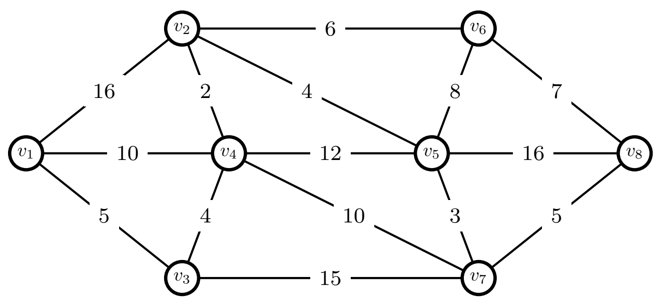
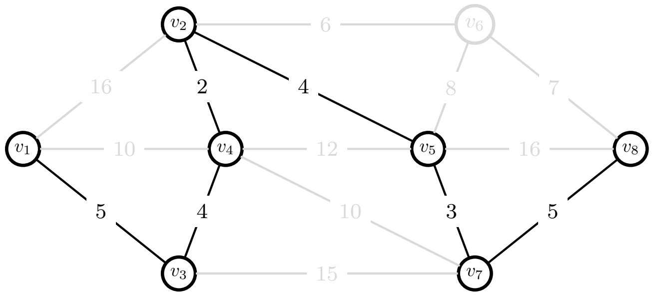


Tabela 5.1

passos	**inicial**	1	2	3	4	5	6	7	**distância mínima**	**precedente**
vértice ativo		v_1	v_3	v_4	v_2	v_5	v_7	v_8		
v_1	0	–	–	–	–	–	–	–	0	–
v_2	∞	16	∞	11	–	–	–	–	11	v_4
v_3	∞	5	–	–	–	–	–	–	5	v_1
v_4	∞	10	9	–	–	–	–	–	9	v_3
v_5	∞	∞	∞	21	15	–	–	–	15	v_2
v_6	∞	∞	∞	∞	17	23	∞	∞	17	
v_7	∞	∞	20	19	∞	18	–	–	18	v_5
v_8	∞	∞	∞	∞	∞	31	23	–	23	v_7

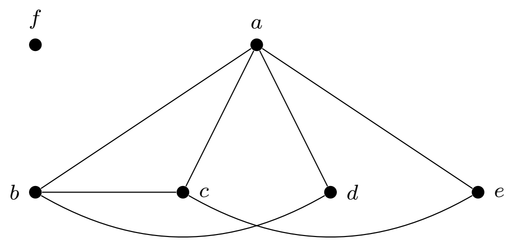
Figura 5.17: Caminho: $v_1 - v_3 - v_4 - v_2 - v_5 - v_7 - v_8$ e comprimento: 23.



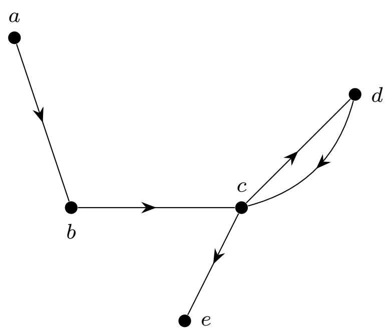
5.7 Auto-avaliação

1. Fazer uma descrição formal de:

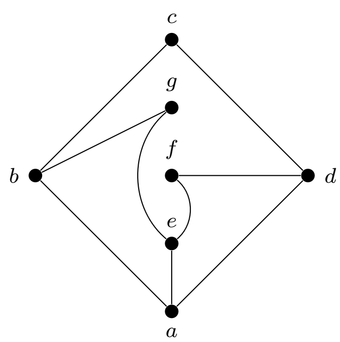
(a)



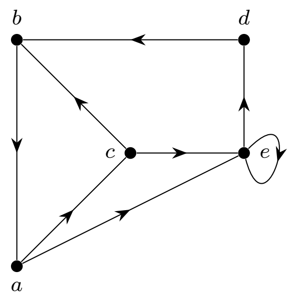
(b)



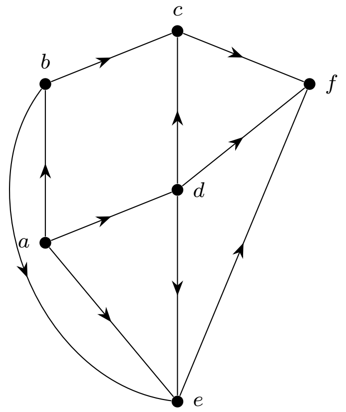
(c)



(d)



(e)



2. Esboçar os seguintes grafos:
   (a) $V_G = \{a, b, c, d, e\}$
   $A_G = \{ab, ac, ad, be, cd\}$
   (b) $V_{\vec{G}} = \{a, b, c, d, e\}$
   $A_{\vec{G}} = \{(a,b), (a,c), (b,c), (b,d), (c,d)\}$
   (c) $V_G = \{a, b, c, d, e\}$
   $A_G = \{ac, ac, bd, be\}$

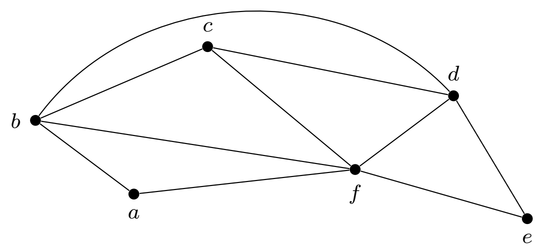
3. Representar graficamente exemplos de grafos G_1, G_2, G_3 e G_4, cada um com 5 vértices e 8 arestas, tais que
   (a) G_1 é um grafo simples.
   (b) G_2 não é simples e não contêm laços.
   (c) G_3 não é simples e não contêm arestas paralelas.
   (d) G_4 não é simples , contêm laços e arestas paralelas.

4. Esboçar um grafos com as seguintes características:
   (a) Simples com três vértices, cada um com grau 2.
   (b) Quatro vértices e ciclos de comprimento 1, 2, 3, e 4.
   (c) Não completo com quatro vértices, cada um com grau 4.

5. Considere um grafo com sete vértices tal que (v_i, v_j) é aresta do grafo se e somente se os i e j possuem um divisor comum diferente da unidade. Esboçar o grafo.

6. Desenhar grafos completos bipartidos $K_{5,2}$, $K_{3,4}$ e $K_{1,5}$. Determinar as respectivas matrizes de adjacência.

7. Considere o seguite grafo



   (a) Verificar que a soma dos graus dos vértices é o dobro do número das arestas.
   (b) Escrever a matriz de adjacência do grafo.
   (c) Determinar a matriz de incidência do grafo.

8. Desenhar um grafo que tenha como matriz de adjacência

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Esboçar um grafo cuja matriz de adjacência é tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Desenhar um digrafo que tenha como matriz de adjacência

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

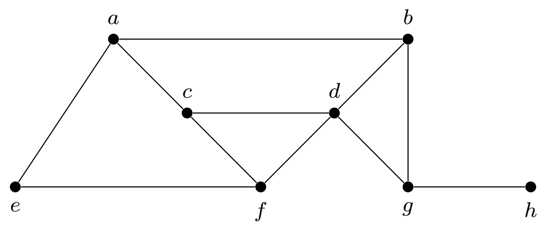
11. Desenhar um grafo que tenha como matriz de incidência

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Desenhar um digrafo que tenha como matriz de incidência

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Considere o seguinte grafo G



   (a) Indicar um caminho de a à h que não seja simples.
   (b) Indicar um caminho simples de a à h que não seja elementar.
   (c) Indicar um caminho elementar de a à h.
   (d) Indicar um circuito de G que não seja ciclo.

(e) Indicar um ciclo de G de comprimento 7.

(f) Indicar um subgrafo gerador de G sem ciclos conexos.

(g) Verificar se os seguintes grafos são subgrafos de G.

- $\{\{a, b, e, f\}, \{ab, ae, af, ef\}\}$;
- $\{\{a, b, d, g, h\}, \{ab, ad, bg, dg, hg\}\}$
- $\{\{a, c, d, e, f\}, \{ac, ae, cd, ef\}\}$

(h) Determinar o subgrafo induzido de G obtido pela eliminação do seguinte conjunto de vértices:

(a) $\{a, b, c, d, e\}$

(b) $\{b, c, e, f, g\}$

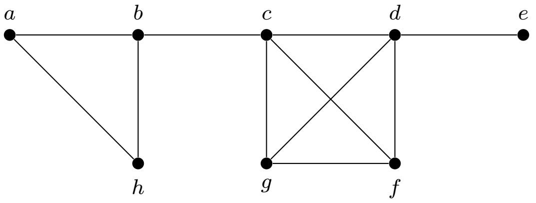
(c) $\{b, c, e\}$

14. Classificar as seguintes sentenças como verdadeiras ou falsas:

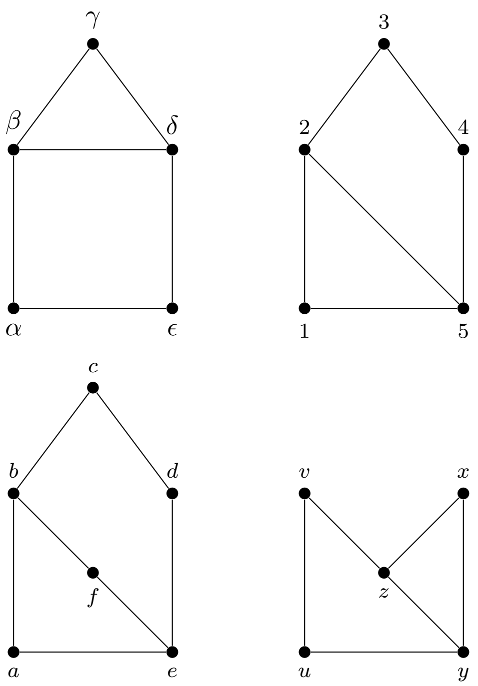
(a) Quaisquer dois grafos isomorfos tem a mesma sequência de graus dos vértices

(b) Quaisquer dois grafos com a mesma sequência de graus dos vértices são isomorfos

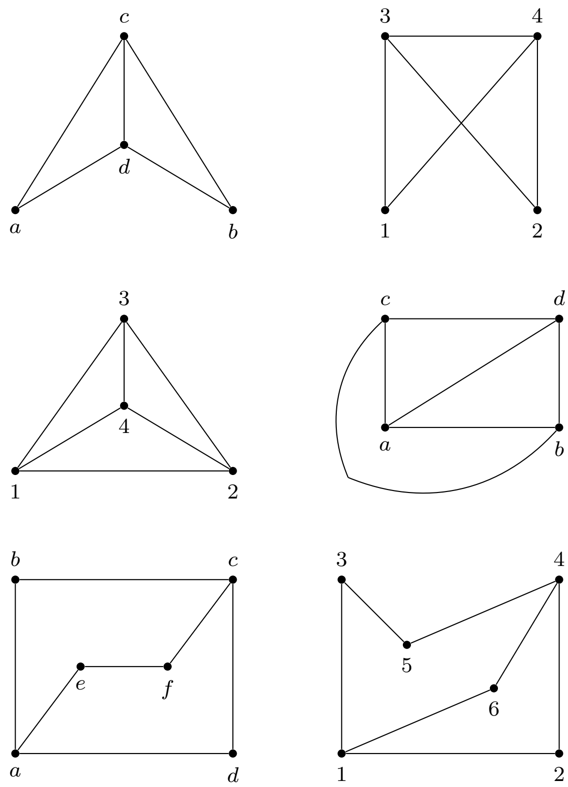
15. Apresentar dois subgrafos que sejam isomorfos do grafo



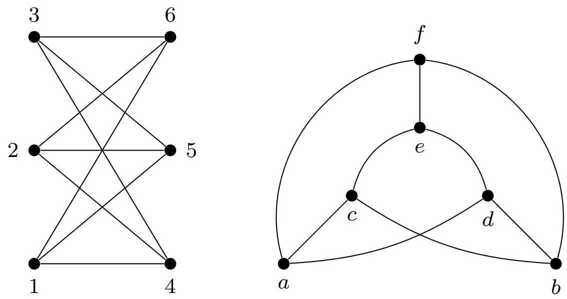
16. Qual dos grafos da figura abaixo não é isomorfo aos restantes. Porquê?



17. Verifique se cada par de grafos é isomorfo.



18. Mostre que são garfos isomorfos.

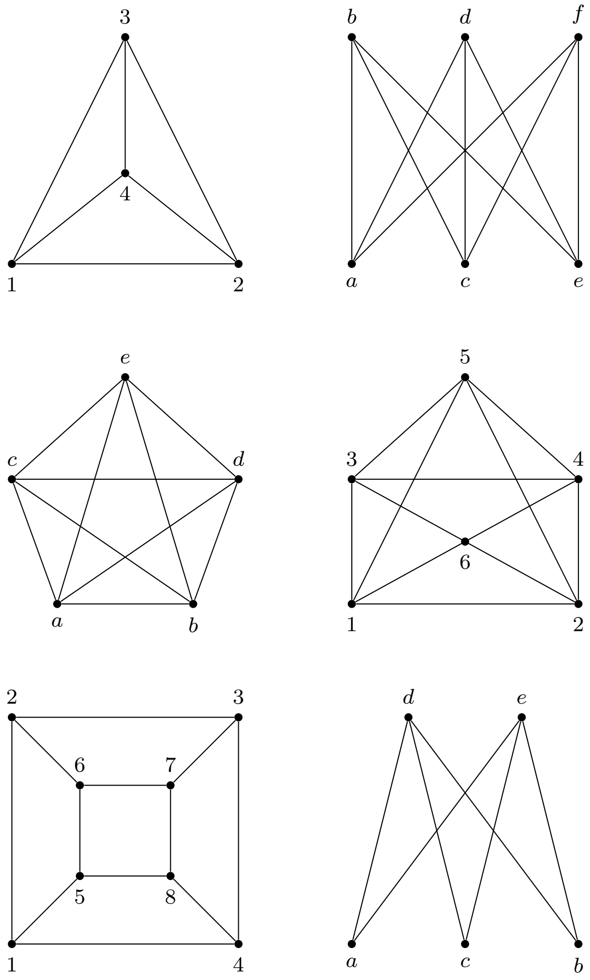


19. Considere os grafos da figura abaixo:

(a) Verificar se os grafos são eulerianos e, em caso afirmativo, indicar um circuito euleriano.

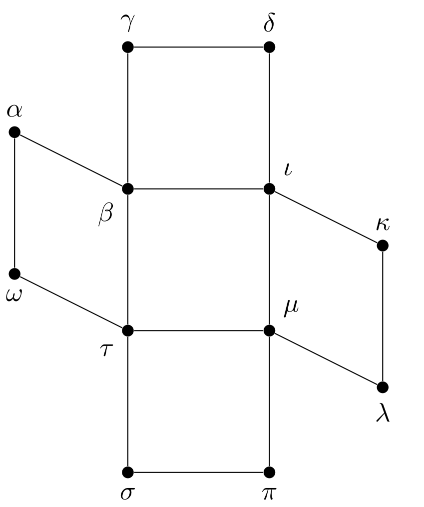
(b) Para os grafos não eulerianos, verificar se existe um caminho euleriano.

(c) Verificar se os grafos são hamiltonianos e, em caso afirmativo, indicar um ciclo hamiltoniano.



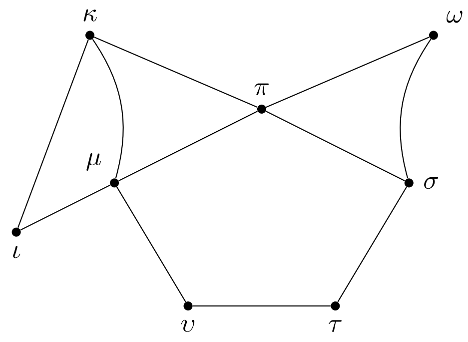
20. Quais dos seguinte grafos são eulerianos? semi-eulerianos?
    (a) O grafo completo K_5.
    (b) O grafo completo bipartido $K_{2,3}$.

21. Sendo dado o grafo



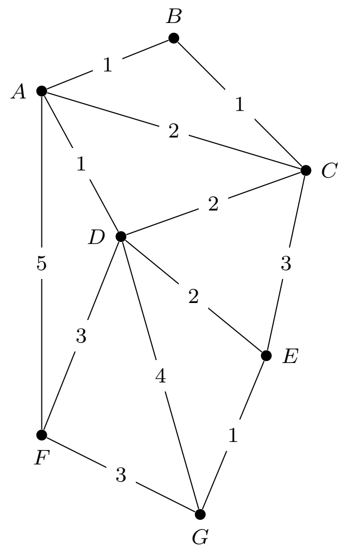
Diga justificando se, sem levantar o lápis, é possível percorrer passando por todas as arestas uma única vez. Caso afirmativo, indicar o caminho, caso contrário, explicar o porquê.

22. Um carteiro pretende entregar correspondência ao longo de um percurso. Suponha que a estação de correios de onde parte é o vértice κ do grafo abaixo, e que a mulher o vai buscar de carro no final do trabalho.

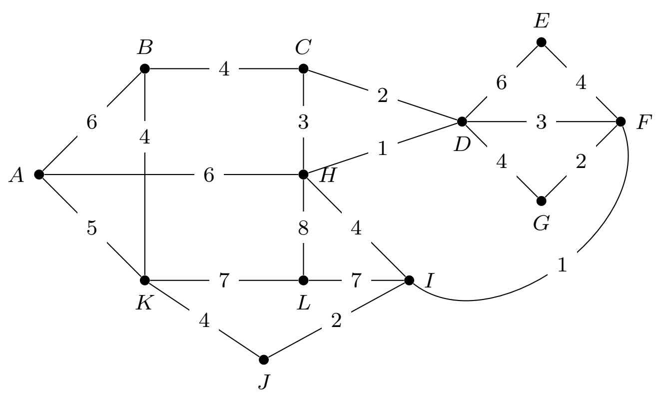


(a) Diga onde devem marcar o encontro de forma que ele não percorra a mesma rua mais de uma vez.
(b) Se o carteiro pretende acabar o dia detrabalho na estação de correios, indicar as ruas que ele deve percorrer duas vezes.

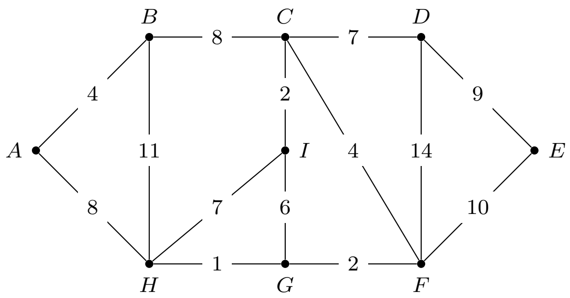
23. Esboçar e determinar o caminho mínimo e o comprimento de:
    (a) de A para G.



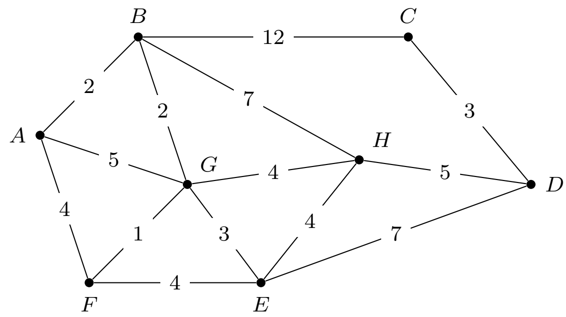
(b) A para K



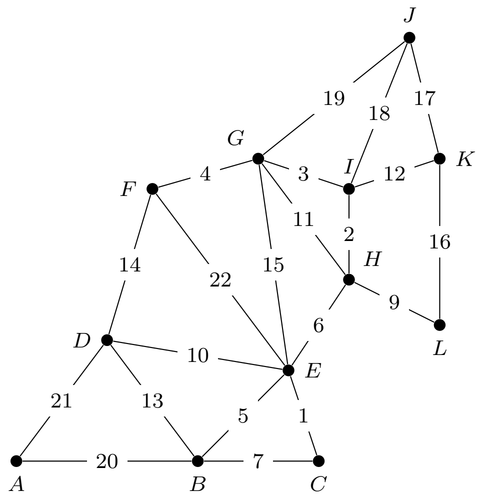
(c) de A para E



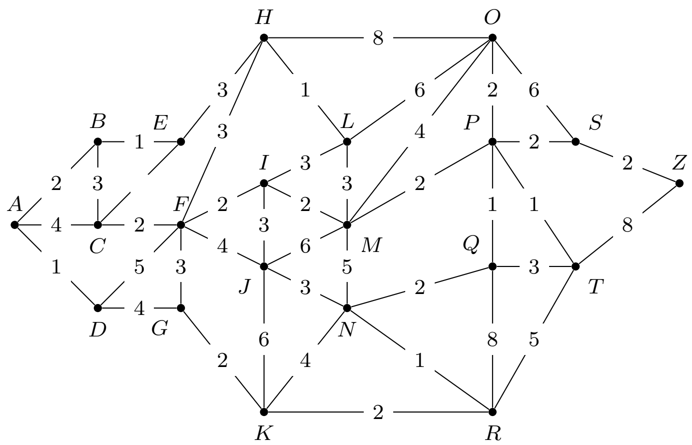
(e) de A para D



(d) de A para J



(f) de A para Z



Árvores

6

"Por maior que seja a árvore, sempre será sustentada por suas raízes."

Ale Bruxs

6.1 Noções Básicas

Definição 6.1.1. Uma *árvore* é um grafo simples, conexo e sem ciclos.

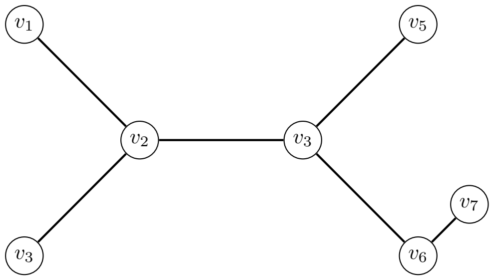


Figura 6.1: Árvore

Proposição 6.1.2. Seja $G = (V, A)$ um grafo simples com n vértices, então são equivalente as seguintes afirmações:

(a) G é uma árvore.

(b) G não contém ciclos simples e tem $n - 1$ arestas.

(c) G é conexo e possui $n - 1$ arestas.

(d) Existe exactamente um caminho entre cada par de vértices.

(e) G não contém ciclos, e para todo $u, v \in V$, a adição da aresta uv produz no grafo exactamente um ciclo.

Definição 6.1.3. Seja G um grafo simples. Uma *árvore gerada por* G é um subgrafo de G que é uma árvore contendo todos vértices de G.

A definição diz que uma árvore gerada por um grafo G é construida unicamente removendo arestas de G de modo que o G fique sem ciclos mas se mantenha conexo. O processo é simples:

- Se G não possui ciclo, G é a sua árvore geradora.
- Se G possui ciclos, escolher um ciclo e remover uma aresta. O subgrafo resultante ainda é conexo
- Se existem mais ciclos, repetir o processo com os restantes ciclos até não haver ciclos. O subgrafo resultante é conexo, sem ciclos e possui todos os vértices de G. Então, é uma árvore geradora de G.

Exemplo 6.1.4. Na Figura 6.2, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7 e G_8 são todas as árvores geradas pelo grafo G.

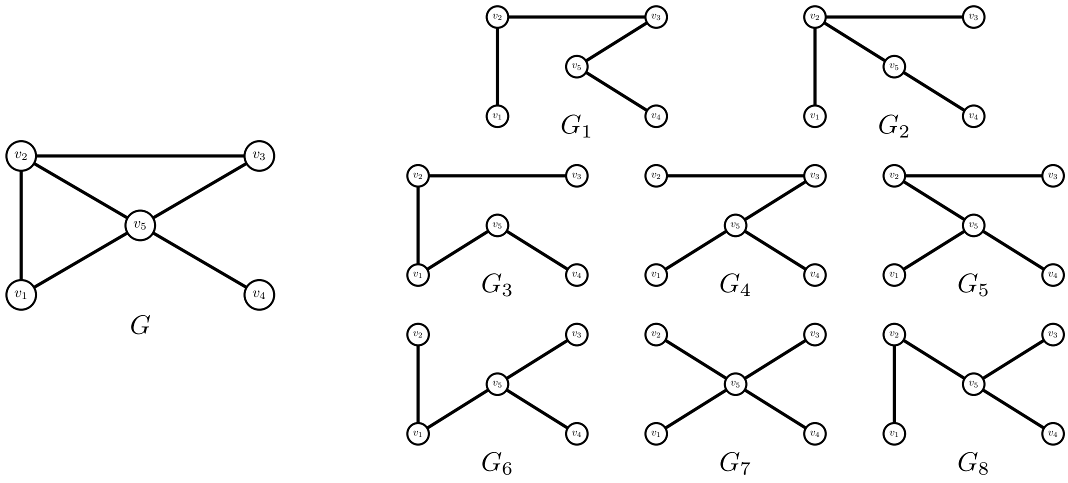


Figura 6.2

Definição 6.1.5. Seja G um grafo simples, conexo e com pesos. Uma *árvore gerada por G com peso mínimo* é aquela cuja soma dos pesos associados as arestas é a menor entre todas as árvores geradas por G.

Para achar a árvore geradora mínima de um grafo com pesos podemos usar os seguintes algoritmos:

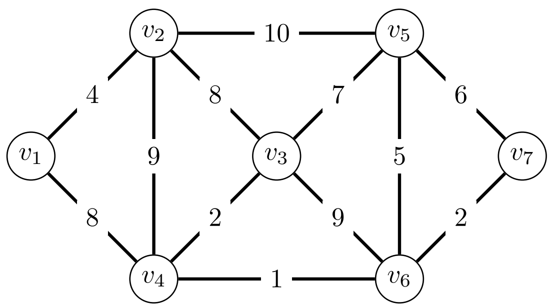
Algoritmo de Kruskal:

dispor as arestas em ordem crescente dos pesos, isto é, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tais que $w(a_1) \leq w(a_2) \leq \cdots \leq w(a_n)$
$A := \emptyset$
for $j := 1$ **to** $m = |A_G|$ **do**
  if $A \cup \{a_j\}$ não tem ciclo **then**
    $A := A \cup \{a_j\}$
  end if
end for

Algoritmo de Prim:

Escolha um vértice $v \in V_G$
$V := \{v\}$
$A := \emptyset$
while $V \neq V_G$ **do**
  escolher uma aresta de menor peso $v_i v_j \in A_G$, com $v_i \in V$ e $v_j \notin V$
  $V := V \cup \{v_j\}$
  $A := A \cup \{v_i v_j\}$
end while

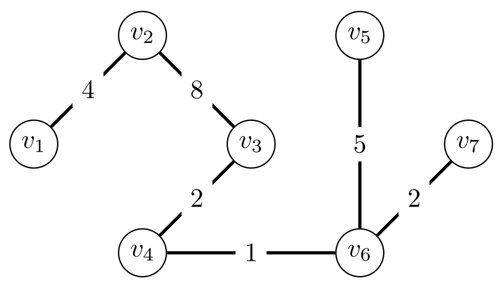
Exemplo 6.1.6. *Calcule a árvore geradora mínima do grafo abaixo utilizando os algoritmos de Kruskal e de Prim.*



Solução:

- Algoritmo de Prim

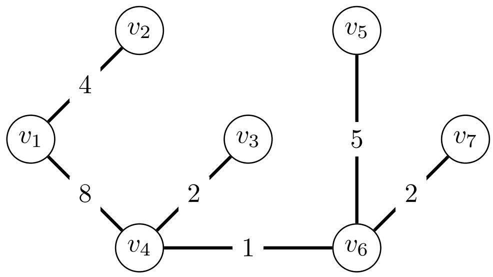
conjunto de vértices	conjunto de arestas
v_1	$\emptyset$
v_1, v_2	v_1v_2
v_1, v_2, v_3	v_1v_2, v_2v_3
v_1, v_2, v_3, v_4	v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4
v_1, v_2, v_3, v_4, v_6	$v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_6$
$v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7$	$v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_6, v_6v_7$
$v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_5$	$v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_6, v_6v_7, v_6v_5$



$$
\begin{aligned}
w &= w(v_1v_2) + w(v_2v_3) + w(v_3v_4) + w(v_4v_6) + w(v_6v_7) + w(v_6v_5) \\
&= 4 + 8 + 2 + 1 + 2 + 5 \\
&= 22
\end{aligned}
$$

- Algoritmo de Kruskal

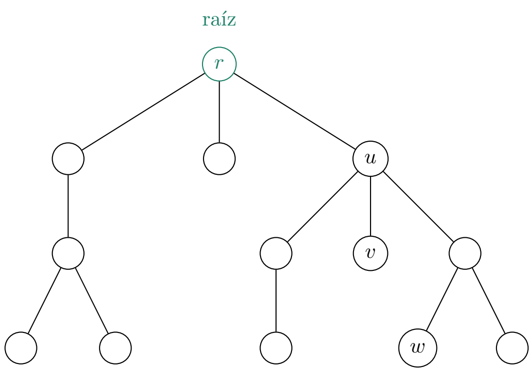
i	**peso**	**aresta**	**conjunto de arestas**
1	1	v_4v_6	v_4v_6
2	2	v_4v_3	v_4v_6, v_4v_3
3	2	v_6v_7	v_4v_6, v_4v_3, v_6v_7
4	4	v_1v_2	$v_4v_6, v_4v_3, v_6v_7, v_1v_2$
5	5	v_6v_5	$v_4v_6, v_4v_3, v_6v_7, v_1v_2, v_6v_5$
6	6	v_5v_7	
7	7	v_3v_5	
8	8	v_1v_4	$v_4v_6, v_4v_3, v_6v_7, v_1v_2, v_6v_5, v_1v_4$
9	8	v_2v_3	
10	9	v_2v_4	
11	9	v_3v_6	
12	10	v_2v_5	



$$
\begin{aligned}
w &= 4 + 8 + 2 + 1 + 2 + 5 \\
&= 22
\end{aligned}
$$

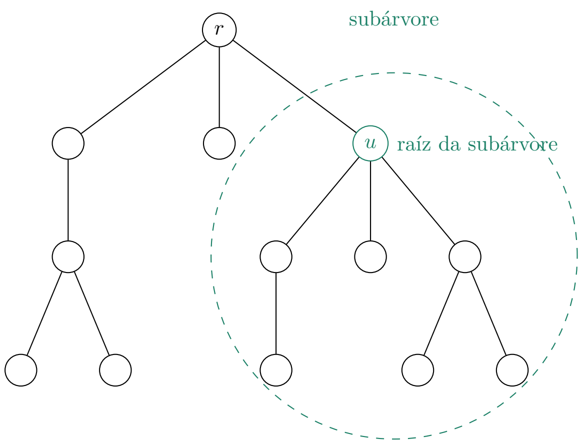
6.2 Árvore com Raíz

Definição 6.2.1. Um grafo conexo, sem ciclos e com um vértice especial r chamado *raíz* chama-se *árvore com raíz.*



- Suponha que um vétice u pertence ao caminho que liga o vértice r ao vértice w. Então, diz-se que:
  - u é *ancestral de* w
  - w é *descendente de* u
- Se uv é uma aresta que pertence ao caminho que liga o vértice r ao vértice v, então diz-se que:
  - u é pai de v
  - e v é filho de u
- cada vértice de grau 1 denomina-se *folha.*

Definição 6.2.2. Uma *subárvore com raíz* u *de uma árvore com raí* r é uma árvore constituida por u e todos os seus descendentes.



6.2.1 Bucas em árvores

Existem três tipos de buscas: *préordem*, *inordem* e *posordem.*

(a) a busca **pré-ordem** consiste em

- visitar a raíz
- percorrer a subárvore esquerda em ordem prévia
- percorrer s subárvore direita em ordem prévia

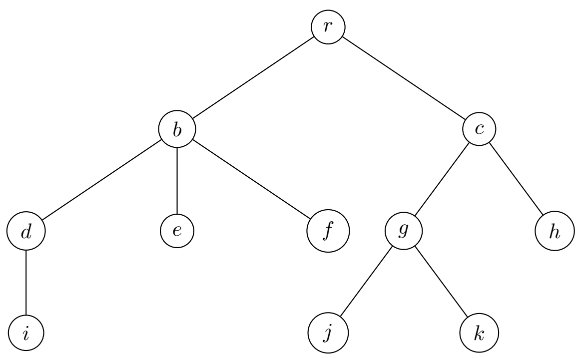
(b) a busca **in-ordem** consiste em

- percorrer a subárvore esquerda em ordem simétrica
- visitar a raíz
- percorrer s subárvore direita em ordem simétrica

(c) a busca **pos-ordem** consiste em

- percorrer a subárvore esquerda em ordem posterior
- percorrer s subárvore direita em ordem posterior
- visitar a raíz

Exemplo 6.2.3. Considere a seguinte árvore



Então,

- **préordem:** $a, b, d, i, e, f, c, g, j, k, h$
- **inordem:** $i, d, b, e, f, a, j, g, kc, h$
- **posordem:** $i, d, e, f, b, j, k, g, h, c, a$

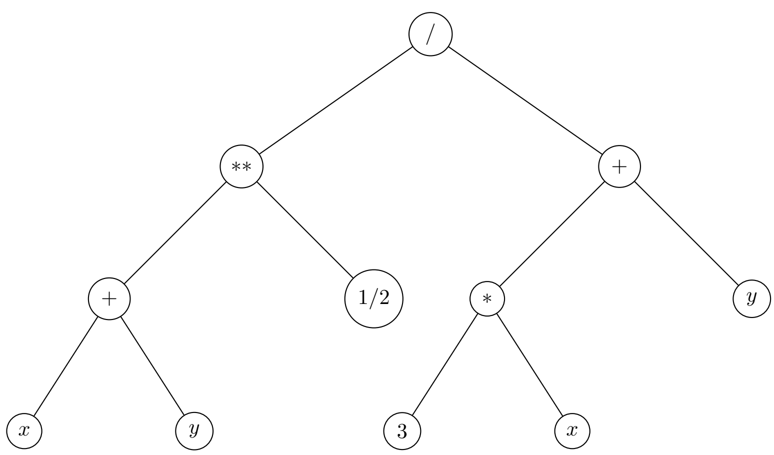
6.2.2 Algumas Aplicações de Árvores com Raíz

Representação de Expressões Algébricas. Nas ciências de computação, as árvores são utilizadas para representar expressões algébricas. As constantes e as variáveis são representados por folhas e as operações a efectuar são representados por vértices-pais.

Por exemplo, a expressão

$$\frac{\sqrt{x+y}}{3x+y},$$

na árvore é representada da seguinte forma:



Árvore óptima e código préfixo. A construção da árvore óptima (ou árvore de Huffman) segue os seguintes passos:

(a) Ordenar as frequências em ordem crescente;

(b) Remova da lista as primeiras duas frequências e criar dois vértices;

(c) Criar um novo vértice cuja frequência seja a soma das frequências dos dois vértices ciados em (a);

(d) Definir como filho à esquerda desse vértice o vértice com a menor frequência e como filho à direita o vértice de maior frequência;

(e) Insirir a frequência do vértice obtido em (c) na lista ordenada;

(f) Repetir os passos (a) à (d) até obter só um vértice na lista;

(g) Esse vértice representa a árvore óptima.

Para descodificar uma mensagem, dado um vértice folha, parte-se da raíz até alcançá-lo:

- Se desceu pelo filho à esquerda, acrescenta 0 ao código
- e se desceu pelo filho à direita, acrescenta 1.

Exemplo 6.2.4. *Suponha que é dado um alfabeto que consiste das letras* $A = 4$, $B = 7$, $E = 12$, $M = 6$, $P = 3$, $R = 11$, $S = 2$ *e* $T = 15$, *e as frequências correspondentes.*

(a) Determinar a árvore óptima e o código préfixo correspondente.

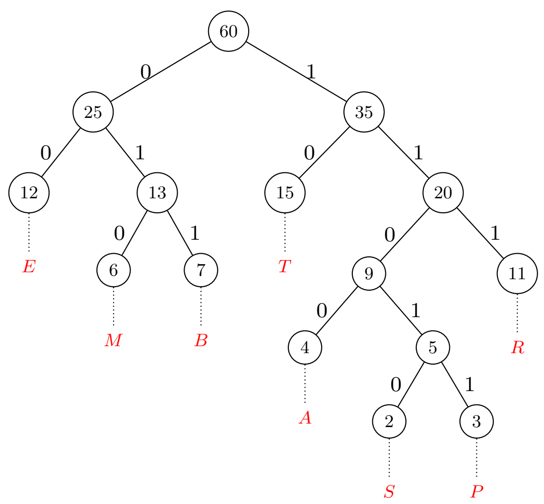
(b) Descodificar 11011110011111000110001011010.

(c) Codificar a palavra $ABREM$.

Solução:

(a)

Alfabeto	**Frequências**	**Codificação**
A	4	1100
B	7	011
E	12	00
M	6	010
P	3	11011
R	11	111
S	2	11010
T	15	10



(b) PARABENS

(c) 110001111100010

6.3 Auto-avaliação

1. Traçar todas as árvores que existem com exactamente seis vértices.

2. Quantos vértices terá uma árvore com exatamente 12 arestas?

3. Utilize uma árvore para representar as seguintes expressões algébricas:

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

(b) $\dfrac{5t+2x}{2x^2-y}$

(c) $\dfrac{2+x}{3} - \dfrac{1}{y}$

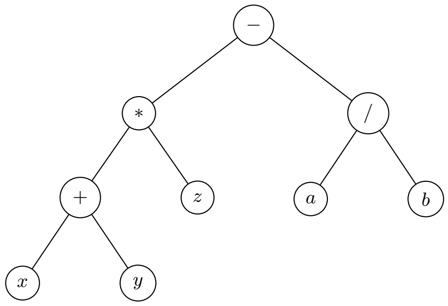
(d) $\left(\dfrac{2r}{x} - \dfrac{b}{ax}\right) v$

(e) $\sqrt{x^2\left(t+\dfrac{1}{x}\right)} + y$

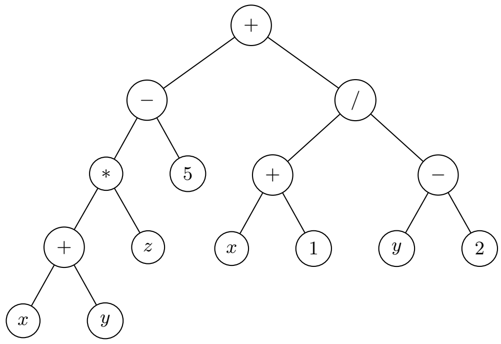
(f) $t + (xy - z)$

4. Ache as expressões algébricas das seguintes árvores.

(a)

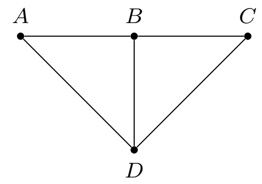


(b)

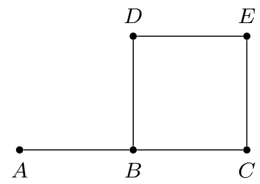


5. Seja dado o alfabeto que consiste das letras $A = 30$, $B = 2$, $F = 14$, $G = 3$, $H = 12$, $I = 25$, $M = 15$, $N = 9$, $O = 8$, $R = 20$, $U = 6$, e as frequências correspondentes.
   (a) Achar a árvore óptima e o código préfixo correspondente.
   (b) Obter a sequência de caracteres que deu a origem a sequência binária:
   110111001000000001011001.
   (c) Codificar a palavra: GRAFO.
6. Um alfabeto consiste das letras a, b, c, d, e e f que tem frequências correspondentes $d = 16$, $b = 13$, $c = 12$, $a = 45$, $e = 9$ e $f = 5$.
   (a) Determinar a árvore óptima e os códigos de Haffman.
   (b) Codificar a palavra: *acaba*.
   (c) Descodificar a seguinte mensagem:
   11001101110001000.
7. Em Engenharia Infomática alguns programas de compreensão de documentos utilizam o algorítmo de Huffman para tal, pois este usa uma codificação de caracteres como sequência de bits de comprimento diferenciado. Um documento constituido pelas letras U, M, E, R, T, O, C e P, com as frequências correspondentes a $U = 30$, $M = 5$, $E = 25$, $R = 16$, $T = 4$, $O = 8$, $C = 3$ e $P = 9$.
   (a) Determinar a árvore óptima e os códigos de Haffman.
   (b) Codificar as palavras: METRO e ROUTER.
   (c) Descodificar as seguintes mensagens:
   100000010011000101 e
   1001000010000001111001101101..
   (d) Faça o varimento pré-ordem, in-ordem e pós-ordem.
8. Achar todas as árvores geradoras de:

   (a)

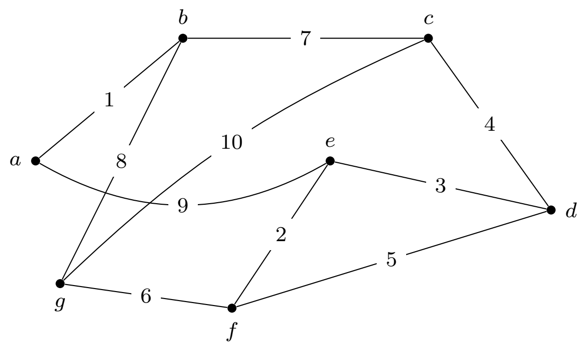


   (b)

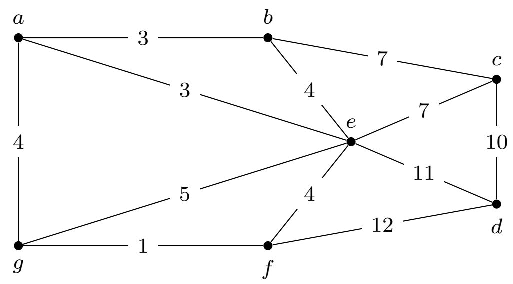


9. Utilizando o algorítimo de Kruskal e de Prim, achar a árvore geradora mínima de:

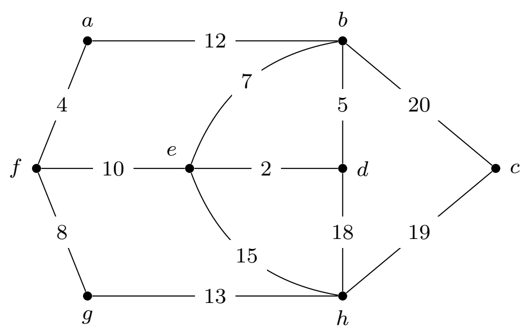
   (a)



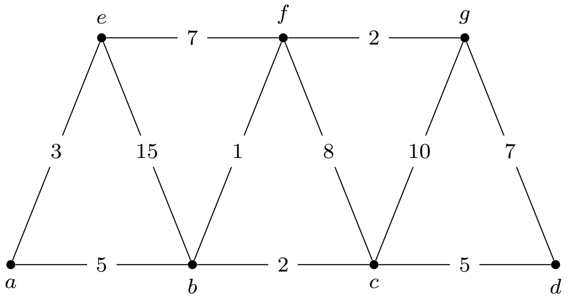
   (b)



   (c)



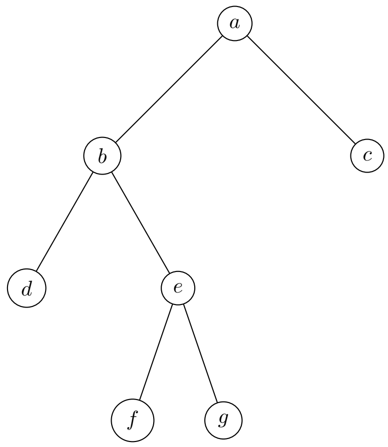
(d)



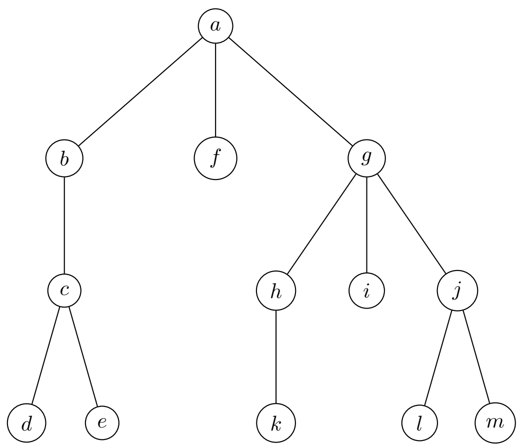
10. Modificando os algorítimos de Kruskal e Prim, determinar as árvores geradoras com pesos máximos do exercício anterior.

11. Determinar os varimentos pré-ordem, in-ordem e pós-ordem das seguintes árvores:

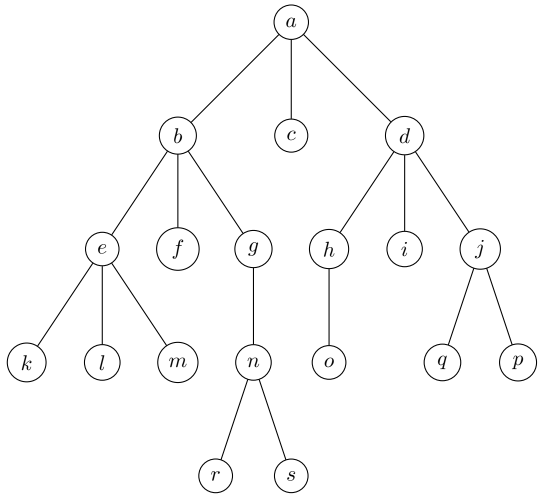
(a)



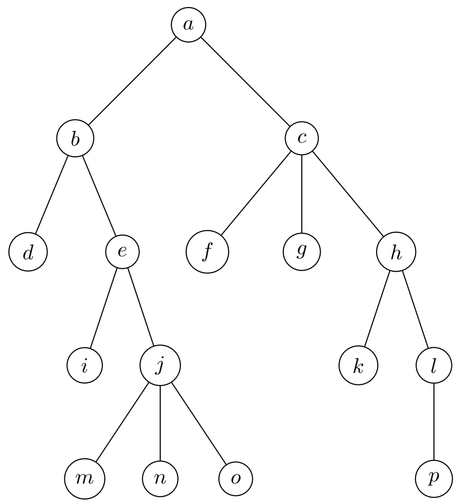
(b)



(c)



(d)



7 Rede Básica

"Geralmente, a intuição precede a lógica no processo de criação matemática."

Henry Poincaré

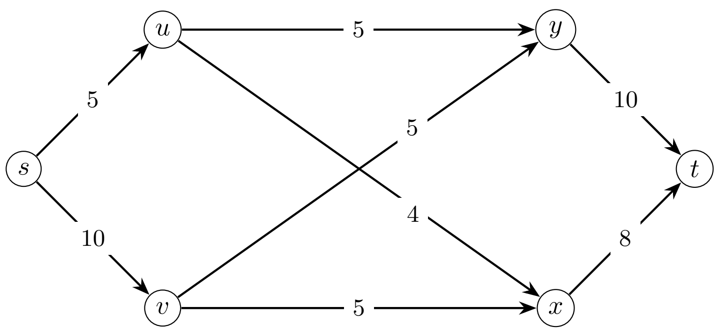
7.1 Rede e Fluxo

Definição 7.1.1. Uma *rede básica* é um digrafo R, conexo e sem laços, que satisfaz as condições:

(i) R tem exactamente uma *fonte* e um *destino* (dois vértices especiais, nos quais a fonte só tem arcos de saída e o destino só tem arcos de entrada);

(ii) cada arco a de R é associado a um número inteiro não negativo $c(a)$ denominado *capacidade de a* e, que representa a quantidade máxima do "fluxo" que pode fluir ao longo do arco.

Exemplo 7.1.2. O digrafo abaixo é uma rede cuja fonte é o vértice s e o destino é o vértice t.



- Ressaltamos que $\text{indeg}(s) = 0$ e $\text{outdeg}(t) = 0$, o mesmo não se verifica nos restantes vértices.
-
  - $c(s,u) = 5$
  - $c(s,v) = 10$
  - $c(u,y) = 5$
  - $c(u,x) = 4$
  - $c(v,y) = 5$
  - $c(v,x) = 5$
  - $c(x,t) = 8$
  - $c(y,t) = 10$

Definição 7.1.3. O *fluxo* em uma rede básica R com a fonte s e o destino t é uma atribuição de cada arco a de R, de um número não negativo $f(a)$ designado por *fluxo ao longo do arco* a, satisfazendo:

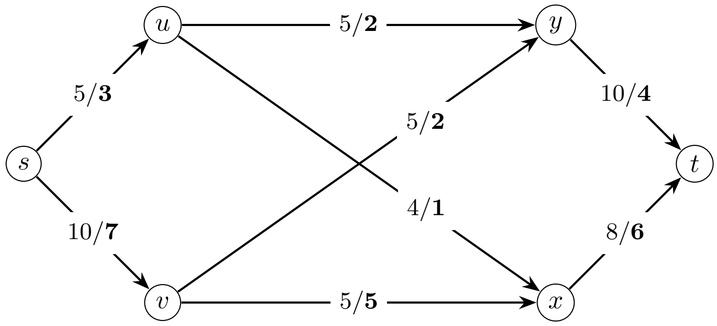
(i) o fluxo ao longo de cada arco não pode exceder a capacidade do arco, isto é, $f(a) \leq c(a)$;

(ii) o fluxo total que saí da fonte s é igual ao fluxo total que entra no destino t;

(iii) para cada vértice v entre s e t, a soma dos fluxos que ao longo dos arcos que entram em v é igual á soma dos fluxos ao logo dos arcos que saem em v.

Definição 7.1.4. Um arco a é *saturado* se $f(a) = c(a)$ e *não saturado* se $f(a) < c(a)$.

Exemplo 7.1.5. Em cada arco da rede abaixo, o número bordado representa o fluxo que flui no arco.



O arco (v, x) é saturado porque $c(v, x) = f(v, x) = 5$. Denotando por $O(v)$ o conjunto dos arcos que saem do vértice v e os que entram em v por $I(v)$. Neste exemplo, é evidente que:

$$\sum_{a\in O(s)} f(a) = 3 + 7 = 4 + 6 = \sum_{a\in I(t)} f(a)$$

- $\sum_{a\in O(u)} f(a) = 2 + 1 = 3 = \sum_{a\in I(u)} f(a)$
- $\sum_{a\in O(x)} f(a) = 6 = 5 + 1 = \sum_{a\in I(x)} f(a)$
- $\sum_{a\in O(v)} f(a) = 5 + 2 = 7 = \sum_{a\in I(v)} f(a)$
- $\sum_{a\in O(y)} f(a) = 4 = 2 + 2 = \sum_{a\in I(y)} f(a)$

7.2 Fluxo Máximo e Corte Mínimo

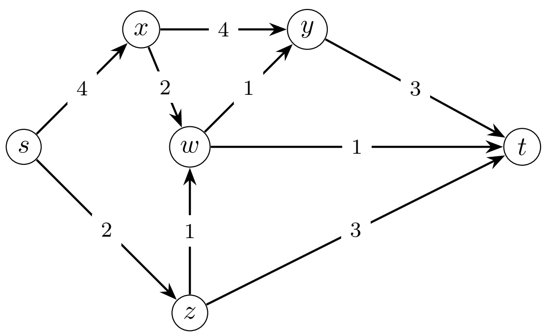
7.2.1 Problema de fluxo máximo

O *problema de fluxo máximo* consiste em calcular a quantidade máxima de fluxo que pode ser enviado da fonte para o destino. O cálculo é feito em etapas (iterações):

- primeiro, determinar um caminho da fonte para o destino ao longo do qual pode enviar um fluxo positivo.
- em seguida, determinar o número máximo do fluxo que pode ser enviado ao longo do caminho:
  - para cada arco dirigido para a frente, calcular o maior número para o qual o fluxo pode ser aumentado sem exceder a capacidade do arco. Seja r o menor desses números;
  - e para cada arco dirigido para trás, calcular o maior número para o qual o fluxo pode ser diminuído sem se tornar negativo. Seja s o menor desses números;

  O número pretendido é $f = \min\{r, s\}$.
- depois que enviar o fluxo ao longo do caminho, atualizar as capacidades dos arcos (desse caminho). Cada arco a atualizado recebe um rótulo de capacidade da forma x/y, onde
  - x é a diferença entre a capacidade do arco e o fluxo enviado ao longo do caminho;
  - y é o fluxo enviado ao longo do caminho;
  - $x + y = c(a)$.
- e o algoritmo termina quando já não é possível encontrar um caminho de aumento.

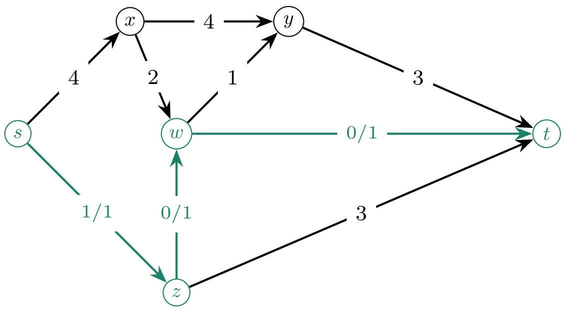
Exemplo 7.2.1. *Derminar o fluxo máximo da seguinte rede*



Solução: Usaremos f_i para indicar a quantidade de fluxo enviado na interação i.

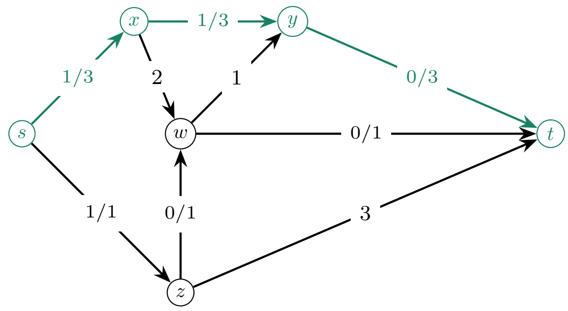
Primeira Interação

- caminho: $s \longrightarrow z \longrightarrow w \longrightarrow t$
- fluxo máximo que podemos enviar ao longo deste caminho é $f_1 = \min\{2, 1, 1\} = 1$
- rede residual com as capacidades dos arcos atualizados



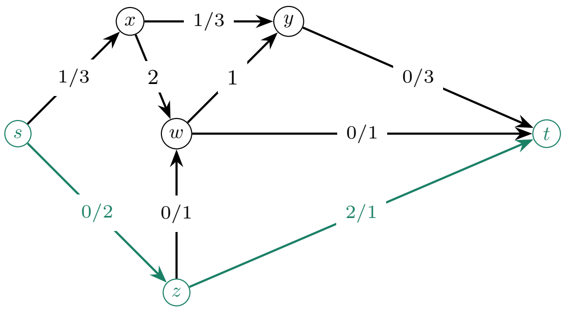
Segunda Interação

- caminho: $s \longrightarrow x \longrightarrow y \longrightarrow t$
- fluxo máximo que podemos enviar ao longo deste caminho é $f_2 = \min\{4, 4, 3\} = 3$
- rede residual com as capacidades dos arcos atualizados



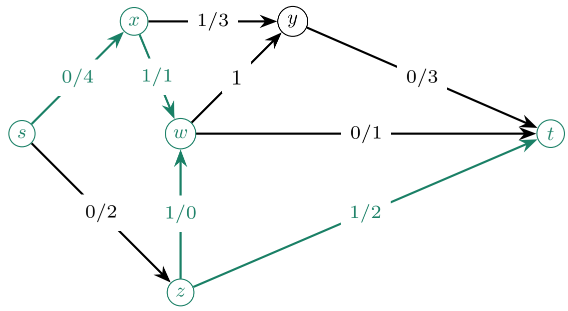
Terceira Interação

- caminho: $s \longrightarrow z \longrightarrow t$
- fluxo máximo que podemos enviar ao longo deste caminho é $f_3 = \min\{1, 3\} = 1$
- rede residual com as capacidades dos arcos atualizados



Quarta Interação

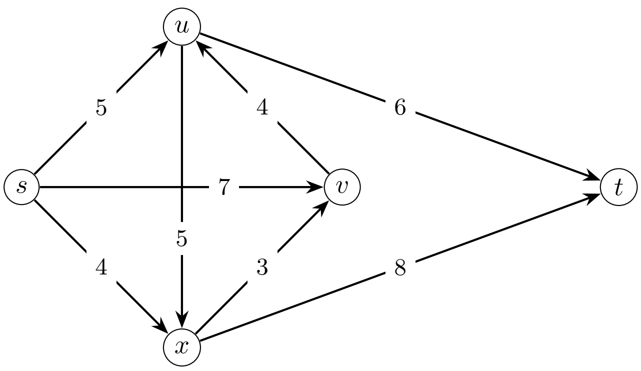
- caminho: $s \longrightarrow x \longrightarrow w \longleftarrow z \longrightarrow t$
- fluxo máximo que podemos enviar ao longo deste caminho é $f_4 = \min\{1, 2, 1, 2\} = 1$
- rede residual com as capacidades dos arcos atualizados



Terminamos as iterações, já não há mais caminhos da fonte para o destino, a fonte (s) fica isolado dos restantes vértices. O fluxo máximo é o total dos fluxos enviados:

$$f_{\text{máx}} = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 + 3 + 1 + 1 = 6.$$

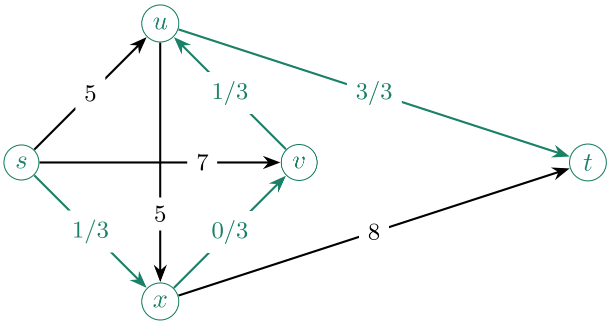
Exemplo 7.2.2. *Derminar o fluxo máximo da seguinte rede*



Solução: Usaremos f_i para indicar a quantidade de fluxo enviado na interação i.

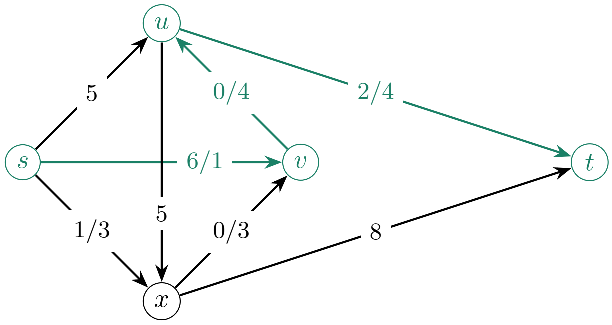
Primeira Interação

- caminho: $s \longrightarrow x \longrightarrow v \longrightarrow u \longrightarrow t$
- $f_1 = \min\{4, 3, 4, 6\} = 3$
- capacidades dos arcos atualizados



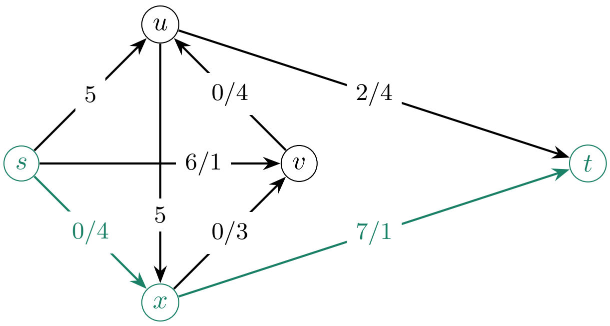
Segunda Interação

- caminho: $s \longrightarrow v \longrightarrow u \longrightarrow t$
- $f_2 = \min\{7, 1, 3\} = 1$
- capacidades dos arcos atualizados



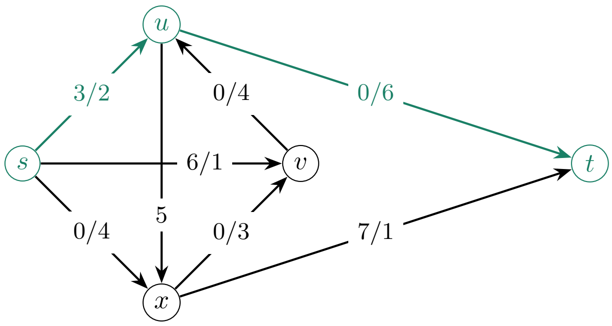
Terceira Interação

- caminho: $s \longrightarrow x \longrightarrow t$
- $f_3 = \min\{1, 8\} = 1$
- capacidades dos arcos atualizados



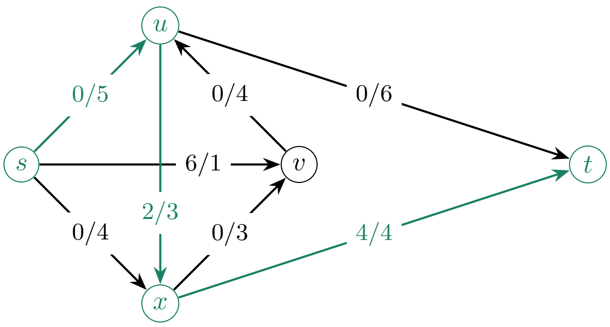
Quarta Interação

- caminho: $s \longrightarrow u \longrightarrow t$
- $f_4 = \min\{5, 2\} = 2$
- capacidades dos arcos atualizados



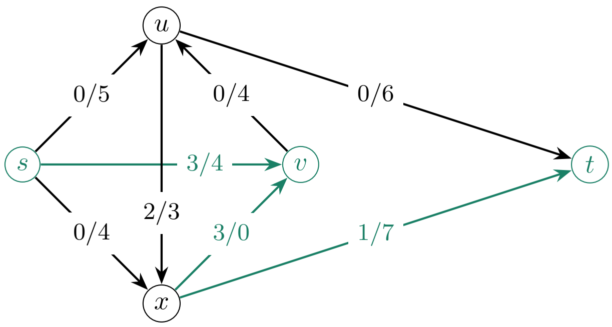
Quinta Interação

- caminho: $s \longrightarrow u \longrightarrow x \longrightarrow t$
- $f_5 = \min\{5, 3, 7\} = 3$
- capacidades dos arcos atualizados



Sexta Interação

- caminho: $s \longrightarrow v \longrightarrow x \longrightarrow t$
- $f_6 = \min\{6, 3, 4\} = 3$
- capacidades dos arcos atualizados



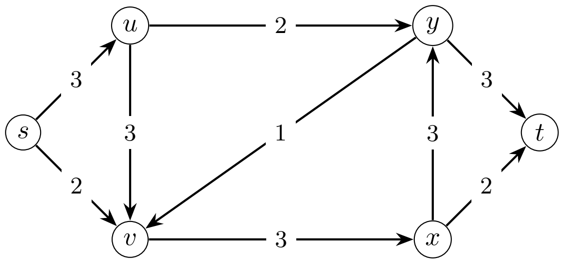
Terminamos as iterações, já não há mais caminhos da fonte para o destino, a fonte (s) e o vértice v ficam isolados dos outros vértices. Portanto,

$$\begin{aligned} f_{\text{máx}} &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 \\ &= 3 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

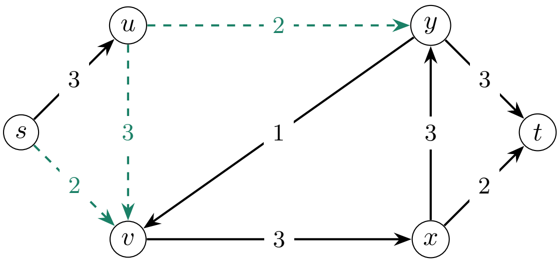
7.2.2 Problema de Corte mínimo

Definição 7.2.3. Seja $R = (V, A)$ um digrafo e sejam S e $T = V \setminus S$ conjuntos que formam uma partição dos vértices de R tais que $s \in S$ e $t \in T$. Um *corte* $\langle S, T \rangle$ *da rede* R é o conjunto de arcos dirigidos de um vértice de S para um vértice de T.

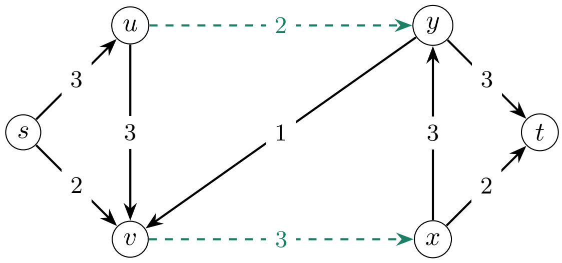
Exemplo 7.2.4. Considere a seguinte rede



Podemos obter os seguintes cortes.



(a) $S = \{s, u\}$ e $T = \{v, x, y, t\}$



(b) $S = \{s, u, v\}$ e $T = \{x, y, t\}$

Definição 7.2.5. A *capacidade do corte* $c\langle S, T \rangle$ é a soma das capacidades dos arcos do corte , ou seja,

$$c\langle S, T \rangle = \sum_{a \in \langle S, T \rangle} c(a).$$

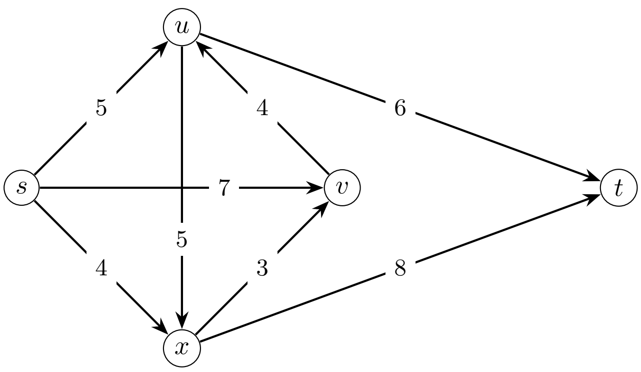
Exemplo 7.2.6. No **Exemplo 7.2.4**, as capacidades dos cortes, respectivamente, são:

- $c\langle S, T \rangle = c(u, y) + c(u, v) + c(s, v) = 2 + 3 + 2 = 7$
- $c\langle S, T \rangle = c(u, y) + c(v, x) = 2 + 3 = 5$

Lema 7.2.7. *Se uma rede tem* n *vértices intermédios, então a rede tem* 2^n *cortes.*

Definição 7.2.8. O *corte mínimo* de uma rede é o corte com menor capacidade.

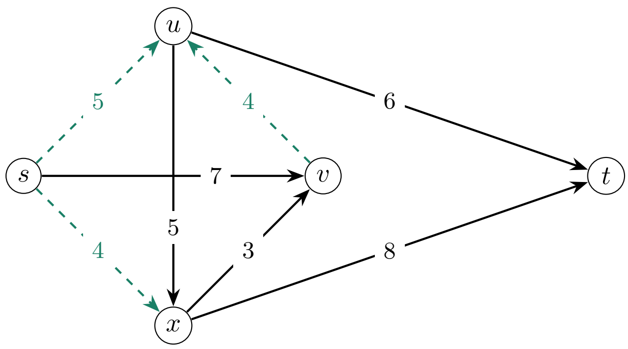
Exemplo 7.2.9. *Derminar o corte mínimo da seguinte rede*



Solução: A rede tem 3 vértices intermédios, portanto, existem $2^3 = 8$ cortes.

i	S	T	$\langle S,T\rangle$	$c\langle S,T\rangle$
1	$\{s\}$	$\{u,v,x,t\}$	$(s,u),(s,v),(s,x)$	$5+7+4=16$
2	$\{s,u\}$	$\{v,x,t\}$	$(s,x),(s,v),(u,x),(u,t)$	$4+7+5+6=22$
3	$\{s,v\}$	$\{u,x,t\}$	$(s,u),(s,x),(v,u)$	$5+4+4=13$
4	$\{s,x\}$	$\{u,v,t\}$	$(s,u),(s,v),(x,v)$	$5+7+3=15$
5	$\{s,u,v\}$	$\{x,t\}$	$(s,x),(u,x),(u,t)$	$4+5+6=15$
6	$\{s,u,x\}$	$\{v,t\}$	$(s,v),(u,t),(x,v),(x,t)$	$7+6+3+8=24$
7	$\{s,v,x\}$	$\{u,t\}$	$(s,u),(v,u),(x,t)$	$5+4+8=17$
8	$\{s,u,v,x\}$	$\{t\}$	$(u,t),(x,t)$	$6+8=14$

Portanto,



$$
\begin{aligned}
c_{\text{mín}}\langle S,T\rangle &= c(s,u)+c(s,x)+c(v,u)\\
&= 5+4+4\\
&= 13
\end{aligned}
$$

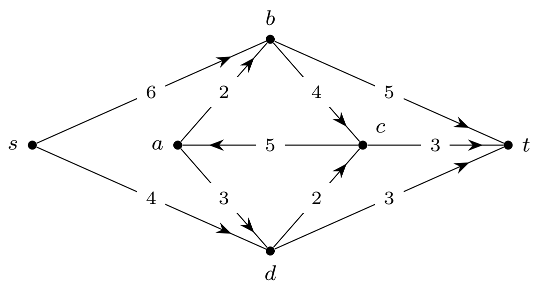
Teorema 7.2.10 (Teorema de fluxo máximo e corte mínimo). *Em qualquer rede, o valor do fluxo máximo é igual à capacidade do corte mńimo.*

Exemplo 7.2.11. Observe que a rede do **Exemplo 7.2.2** é a mesma do **Exemplo 7.2.9**, nesta rede

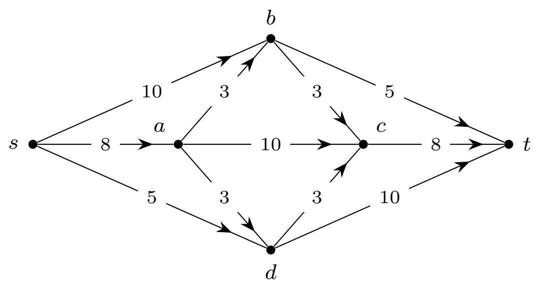
$$f_{\text{mín}} = 13 = c_{\text{mín}}.$$

7.3 Auto-avaliação

1. Dada a rede da figura abaixo, determinar a capacidade dos cortes:
   (a) $\langle\{s,a\},\{b,c,d,t\}\rangle$
   (b) $\langle\{c,t\},\{s,a,b,d\}\rangle$



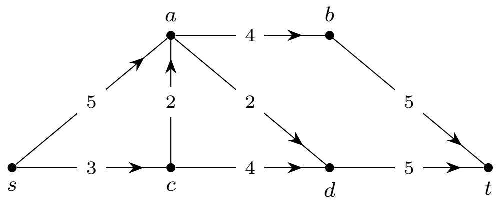
2. Calcular todos os cortes da rede



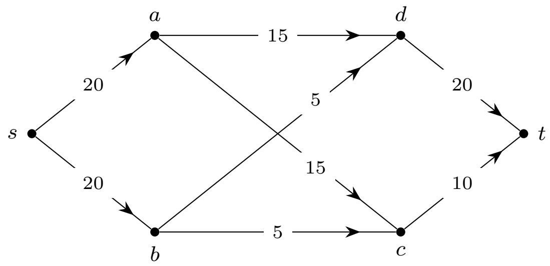
Qual é o corte mínimo?

3. Achar o fluxo máximo e o corte mínimo de cada rede.

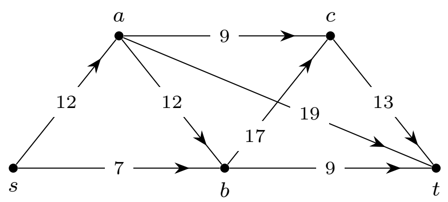
(a)


a
b
4
5
2
2
5
s
3
c
4
d
5
t

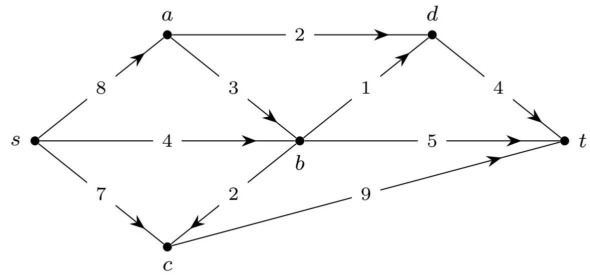
(b)


a
15
d
20
5
20
s
t
20
15
10
b
5
c

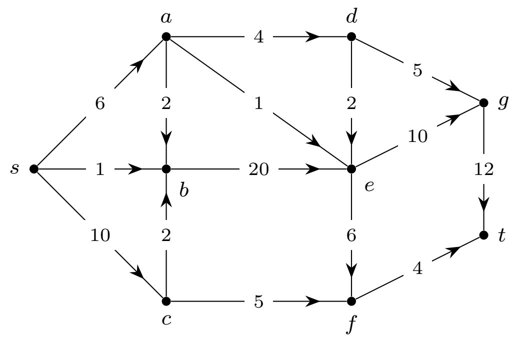
(c)


a
9
c
12
12
19
13
17
s
7
b
9
t

(d)


a
2
d
8
3
1
4
s
4
b
5
t
7
2
9
c

(e)


a
4
d
5
6
2
1
2
g
10
s
1
b
20
e
12
10
2
6
t
4
c
5
f

Linguagem, Gramática e Autómatos 8

"Eis a matemática, a criança mais original do engenho humano."

KARL WEIERSTRASS

8.1 Linguagem Formal

Alfabeto. Um *alfabeto* é um conjunto não vazio e finito de símbolos. Convencionalmente, usaremos a letra graga Σ para denotar um alfabeto. Entre os alfabetos mais comuns estão os seguintes:

- o alfabeto binário: $\Sigma = \{0, 1\}$,
- o conjunto de todas letras minúsculas: $\Sigma = \{a, b, \cdots, z\}$.

Palavra. Uma *palavra* (*cadeia*) sobre um alfabeto é uma sequência finita de símbolos selecionados dos alfabeto. Normalmente, usaremos letras minúsculas tais como u, v, w e z para designar uma palavra. Por exemplo, $u = abab$ e $w = aaabbba$ são palavras do alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Palavra vazia. Uma *palavra vazia* é uma palavra que não tem nenhum símbolo e é indicada por λ.

Comprimento de uma palavra. O *comprimento de uma palavra* w, denotado por $|w|$, é o número de símbolos na palavra (contando também as repetições). Se $w = abcb$ é uma palavra sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, então $|w| = 4$.

Potência de um alfabeto. Seja n um número inteiro não negativo. Definimos Σ^n como o conjunto de todas as palavras do alfabeto Σ de comprimento n. Por exemplo, seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então,

$$\Sigma^1 = \{0, 1\}, \qquad \Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}, \qquad \Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}, \qquad \text{etc.}$$

Ressaltamos que $\Sigma^0 = \{\lambda\}$. Por convenção, o conjunto de todas as palavras de um alfabeto Σ é designado por Σ^*. Por exemplo, $\{a, b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \cdots\}$.

Linguagem. *Linguagem L definida sobre um alfabeto* Σ é qualquer subconjunto de palavras definidas sobre o referido alfabeto, isto é, $L \subset \Sigma^*$. Seja $\Sigma = \{0, 1\}$.

- $L_1 = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11\} \subset \Sigma^*$ é a linguagem sobre o alfabreto Σ constituída por palavras de comprimento menor ou igual à 2.
- $L_2 = \{x : |x| = 4\}$ é a linguagem sobre o alfabreto Σ constituída por palavras de comprimento igual à 4.
- $L_3 = \{0^n 1^n : n \geq 1\}$ esta linguagem pode ser escrita $L_3 = \{01, 0011, 000111, 00001111, \cdots\}$.

8.2 Gramática Formal

Definição 8.2.1. Uma *gramática* definida sobre um alfabeto Σ tem a forma $G = (N, T, \sigma, P)$, onde:

- N é o conjunto de símbolos não terminais, símbolos auxiliares na expressão das regras da linguagem;
- T é o conjunto de símbolos terminais, que são os elementos básicos da linguagem;
- σ é o símbolo inicial, que é um dos símbolos não-terminais e a partir do qual se inicia a geração da linguagem;

- P é o conjunto de regras ou produções que especificam como os símbolos não-terminais e terminais podem ser combinados para gerar elementos da linguagem, normalmente expressos na forma $\alpha \to \beta$, onde $\alpha \in \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$ é denominado o lado esquerdo da produção e $\alpha \in \Sigma^*$, o lado direito.

É preciso observar que: $- \; T \cup N = \Sigma$ $\qquad - \; P \subset (\Sigma^* \setminus T^*) \times \Sigma^*$

Exemplo 8.2.2. G_1 e G_2 são gramáticas

(a) $G_1 = (\{A, \sigma\}, \{a, b\}, \sigma, P)$, onde $P = \{\sigma \to aA,\ A \to bA,\ A \to a\}$

(b) $G_2 = (\{\sigma\}, \{0, 1\}, \sigma, P)$, onde $P = \{\sigma \to 0\sigma 1,\ \sigma \to \lambda\}$

Definição 8.2.3. A *derivação* é o processo de substituir o lado esquerdo pelo lado direito das regras definidas pela gramática, e é denotada pelo símbolo $\Rightarrow$.

A partir do símbolo inicial, a derivação consiste em aplicar as regras da gramática para produzir novas sequências de símbolos, até que se obtenha uma sentença válida na linguagem definida pela gramática.

Definição 8.2.4. Seja $G = (T, N, \sigma, P)$ é uma gramática. A *linguagem gerada por uma gramática* G, $L(G)$, é o conjunto de todas as palavras sobre T que derivam de σ, isto é,

$$L(G) = \{w \in T^* : \sigma \Rightarrow w\}.$$

Uma palavra pertence a linguagem gerada pela gramática G se:

- é constituída por símbolos terminais;
- a palavra pode ser derivada do símbolo inicial σ aplicando as regras de produção da gramática.

Exemplo 8.2.5.

(a) *Seja definida a gramática* $G_1 = (\{0, 1\}, \{\sigma\}, \sigma, P)$, *onde* $P = \{\sigma \to 000\sigma 111,\ 0\sigma 1 \to 01\}$. *Determinar a linguagem gerada por* G_1.

Solução: A única forma de gerar palavras é aplicando n vezes a primeira produção e terminando com a segunda, assim,

$$\sigma \Rightarrow 000\sigma 111 \Rightarrow 000000\sigma 111111 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 0^{3n-1}0\sigma 11^{3n-1} \Rightarrow 0^{3n}1^{3n}.$$

Portanto,

$$L(G_1) = \left\{0^{3n}1^{3n} : n \geq 1\right\}$$

(b) *Seja definida a gramática* $G_2 = (\{a, b\}, \{\sigma\}, \sigma, P)$, *onde* $P = \{\sigma \to a\sigma b,\ \ \sigma \to ab\}$. *Determinar a linguagem gerada por* G_2.

Solução: Aplicando $n - 1$ vezes a primeira produção, seguida pela aplicação da segunda, obtemos,

$$\sigma \Rightarrow a\sigma b \Rightarrow aa\sigma bb \Rightarrow a^3\sigma b^3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a^{n-1}\sigma b^{n-1} \Rightarrow a^n b^n.$$

Com efeito,

$$L(G_2) = \{a^n b^n : n \geq 1\}$$

(c) *Seja definida a gramática* $G_3 = (\{a, b\}, \{A, \sigma\}, \sigma, P)$, *sendo que*

$$P = \{\sigma \to a\sigma,\ \ \sigma \to aA,\ \ A \to bA,\ \ A \to b\}.$$

Determinar a linguagem gerada por G_3.

Solução: Algumas palavras geradas pela gramática são:

- $\sigma \Rightarrow a\sigma \Rightarrow aaA \Rightarrow aab$
- $\sigma \Rightarrow aA \Rightarrow ab$
- $\sigma \Rightarrow a\sigma \Rightarrow aa\sigma \Rightarrow aaa\sigma \Rightarrow \cdots \Rightarrow a^n\sigma \Rightarrow a^n aA \Rightarrow a^{n+1}b$
- $\sigma \Rightarrow aA \Rightarrow abA \Rightarrow abbA \Rightarrow \cdots \Rightarrow ab^nA \Rightarrow ab^{n+1}$

Consequentemente,

$$L(G_3) = aa^*bb^*$$

8.2.1 Tipos de Gramáticas

Seja dada uma gramática $G = (N, T, P, \sigma)$.

Gramática irrestrita ou do Tipo 0. As regras de produção tem a forma

$$u \to w,$$

sendo que $u \in (T \cup N)^* \setminus \{\lambda\}$ e $w \in (T \cup N)^*$. Em outras palavras, a gramática irrestrita é definida sem restrições quanto ao tipo de produções que ela pode conter, contudo, o λ não é permitido no lado esquerdo da produção.

Exemplo 8.2.6. $G = (\{\sigma, A, B\}, \{a, b, c\}, \sigma, P)$, onde $P = \{\sigma \to aAbc|\lambda,\ A \to aAbB|\lambda,\ Bb \to bB, Bc \to cc\}$

Gramática sensível ao contexto ou do Tipo 1. Cada regra de produção tem a seguinte forma

$$u \to w,$$

sendo que $u \in (T \cup N)^* \setminus \{\lambda\}$ e $w \in (T \cup N)^*$, $|u| \leq |w|$

Exemplo 8.2.7. $G = (\{\sigma, A, B\}, \{a, b, c\}, \sigma, P)$, onde $P = \{\sigma \to aAbc|abc,\ A \to aAbB|\lambda,\ Bb \to bB, B2 \to 22\}$

Gramática livre de contexto ou do Tipo 2. Cada regra de produção tem a seguinte forma

$$A \to \alpha,$$

sendo que $\alpha \in (N \cup T)^*$. Em outras palavras, no lado esquerdo da regra há apenas um símbolo não terminal.

Exemplo 8.2.8.

(a) A gramática $G = (\{A, \sigma\}, \{a, b\}, \sigma, P)$, onde produções são $\sigma \to a\sigma$, $\sigma \to aA$, $A \to bA$, $A \to b$.

(b) A gramática $G = (\{\sigma\}, \{a, b\}, \sigma, P)$, onde produções são $\sigma \to a\sigma b$, $\sigma \to \lambda$.

Gramática regular ou do Tipo 3. Uma gramática é *regular* se é linear à esquerda, ou seja, se as produções são da forma

$$A \to Bw, \qquad\qquad A \to w,$$

ou se é linear à direita, isto é, se as produções são da forma

$$A \to wB, \qquad\qquad A \to w,$$

sendo $A, B \in N$ e $w \in T^*$.

Exemplo 8.2.9. Seja $G = (\{A, \sigma\}, \{a, b\}, \sigma, P)$ uma gramática regular.

(a) se $P = \{\sigma \to a\sigma,\ \sigma \to aA,\ A \to bA,\ A \to b\}$, então G é linear à direita.

(b) se $P = \{\sigma \to Aa,\ \sigma \to a,\ A \to \sigma b\}$, então é linear à esquerda.

É importante ressaltar que toda gramática regular é livre de contexto, toda gramática livre de contexto cujo lado direito é não vazio é sensível ao contexto e toda gramática sensível ao contexto é irrestrita.

Teorema 8.2.10. *Uma linguagem é regular se e somente se é gerada por uma gramática regular.*

Exemplo 8.2.11. *Seja definida a gramática* $G = (\{\sigma\}, \{a, b\}, \sigma, \{\sigma \to ab\sigma|a\})$. *Determine e classifique a linguagem gerada por* G.

Solução: Aplicando $n-1$ vezes a primeira produção, seguida pela aplicação da segunda, obtemos,

$$\sigma \Rightarrow ab\sigma \Rightarrow abab\sigma \Rightarrow ababab\sigma \Rightarrow \cdots \Rightarrow (ab)^{n-1}\sigma \Rightarrow (ab)^{n-1}a.$$

Portanto,

$$L(G) = \{(ab)^n a : n \geq 0\}.$$

Como G é regula (é linear à direita), $L(G)$ é regular.

8.3 Autômatos Finitos

Uma gramática regular e um autômato de estado finito são, em essência, a mesma coisa, pois qualquer um deles é uma especificação de uma linguagem regular.

8.3.1 Autômatos Finitos Determinísticos

Definição 8.3.1. Um *autómato finito determinístico* (AFD) é uma tupla $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, sendo

- Q é um conjunto finito e não vazio de estados.
- Σ é o alfabeto de entrada.
- $\delta : Q\times\Sigma\to Q$ é a função de transição de estados.
- $q_0\in Q$ é o estado inicial.
- $F\subseteq Q$ é o conjunto de estados finais.

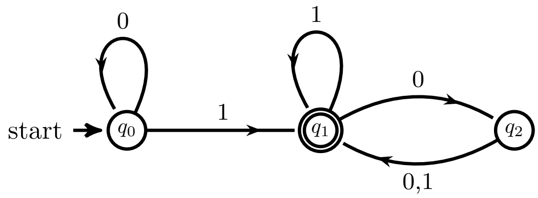
Exemplo 8.3.2. Considere um autómato finito capaz de processar números binários terminando com 10,

$$M=(\{q_0,q_1,q_2\},\{0,1\},\delta,q_0,\{q_1\}),$$

onde $\delta(q_0,0)=q_0$, $\delta(q_0,1)=q_1$, $\delta(q_1,0)=q_2$, $\delta(q_1,1)=q_1$, $\delta(q_2,0)=q_1$ e $\delta(q_2,1)=q_1$. Este autómato pode ser representado por meio de uma tabela

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_1	q_1

Também, pode ser representado graficamente (diagrama de Moore)

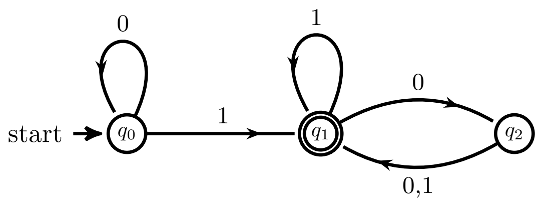


Definição 8.3.3. A *linguagem reconhecida pelo autômato* $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ é o conjunto de todas as palavras definidas sobre o Σ que fazem com que o autômato chegue a um estado final de aceitação,

$$L(M)=\{w\in\Sigma^*: f(\sigma,w)\in A\}$$

.

Exemplo 8.3.4. Considere o diagrama do autômato $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$



Se M receber a palavra:

- 0100, o processamento é: $s_0\xrightarrow{0}s_0\xrightarrow{1}s_1\xrightarrow{0}s_2\xrightarrow{0}s_1$; M aceita a palavra porque o último estado s_1 é um estado de aceitação.
- 0101010101, o processamento é: $s_0\xrightarrow{0}s_0\xrightarrow{1}s_1\xrightarrow{0}s_2\xrightarrow{1}s_1\xrightarrow{0}s_2\xrightarrow{1}s_1\xrightarrow{0}s_2\xrightarrow{1}s_1\xrightarrow{0}s_2\xrightarrow{1}s_1$; de novo, M aceita a palavra porque o último estado s_1 é um estado de aceitação.
- 1000, o processamento é: $s_0\xrightarrow{1}s_1\xrightarrow{0}s_2\xrightarrow{0}s_1\xrightarrow{0}s_2$; M rejeita a palavra porque o último estado s_2 não é um estado de aceitação.

Em geral, podemos afirmar que a linguagem reconhecida por este autômato é

$$L(M)=\{w\in\{0,1\}^*: w \text{ contém pelo menos um 1 e um número par de zeros segue o último 1}\}.$$

8.3.2 Autômatos Finitos não Determinísticos

Definição 8.3.5. Um *autómato finito determinístico* (AFND) é uma tupla $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, sendo

- Q é um conjunto finito e não vazio de estados.
- Σ é o alfabeto de entrada.
- $\delta\colon Q\times\Sigma_\lambda{}^1 \to \mathcal{P}(Q)$ é a função de transição de estados.
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial.
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais.

Exemplo 8.3.6. Considere o diagrama de estados do autômato,

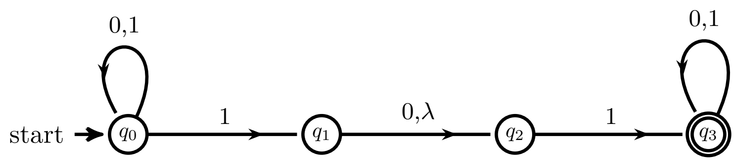


Figura 8.1

Formalmente, este autômato é descrito como

$$M = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\}\,,\{0,1\},\delta,q_0,\{q_3\})\,,$$

onde a função de transição é definida pela seguinte tabela

δ	0	1	λ
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

Informalmente, uma palavra é aceite por uma AFN se há no mínimo um caminho ligando o estado inicial à algum estado de aceitação. Por exemplo, a palavra $w = 010110$ é a aceite pelo autômato representado na Figura 8.1, porque pelo menos existe o caminho $q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{1} q_3 \xrightarrow{1} q_3 \xrightarrow{0} q_3$.

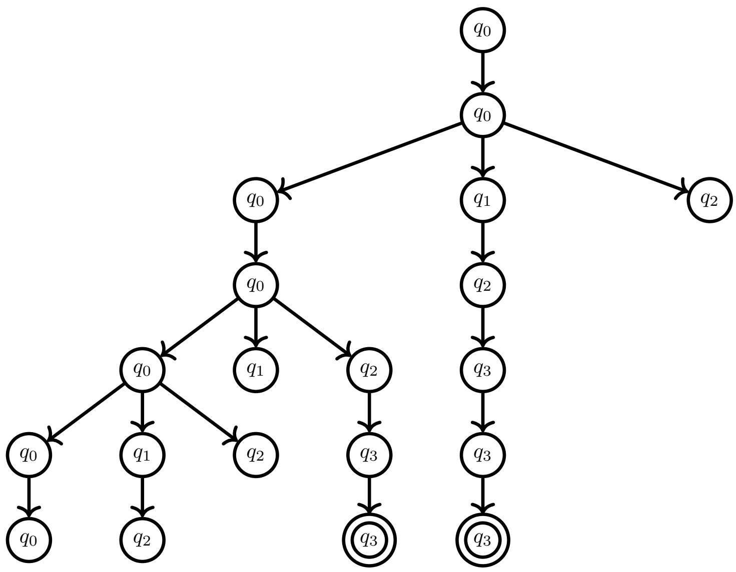


Figura 8.2: Árvore de execução do AFND da Figura 8.1 para a palavra 010110

[1] $\Sigma_\lambda = \Sigma \cup \{\lambda\}$

8.4 Equivalência entre Gramática Regular e AFND

Teorema 8.4.1. *Para cada gramática regular* $G = (T, N, \sigma, P)$ *que gera a linguagem* $L(G) \subseteq \Sigma^*$, *existe um autômato finito não determinístico* $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *sobre* Σ *que aceita* $L(G)$ *e vice-versa.*

Decorrente do **Teorema 8.4.1**, é possível definir um AFND M de tal forma que $L(G)$ seja igual a linguagem reconhecida por M. Este processo é feito de seguinte modo:

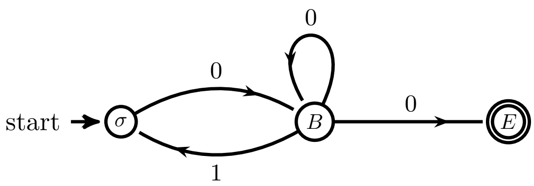
- o estado inicial de M é σ, isto é, $\sigma = q_0$;
- cada símbolo não terminal de G corresponde a um estado de M. A esse conjunto acrescenta-se um novo estado E, ou seja, $S = N \cup \{E\}$ e $F = E$;
- os símbolos terminais de G correspondem aos símbolos de entrada de M , isto é, $T = \Sigma$;
- A regra do tipo $A \to wB$ corresponde a transição $f(A, w) = B$;
- A regra do tipo $A \to w$ é reescrita na forma $A \to wE$, $E \to \lambda$. Portanto, corresponde

$$f(A, w) = E.$$

Exemplo 8.4.2. Seja $G = (\{\sigma, B\}, \{0, 1\}, \sigma, \{\sigma \to 0B,\ B \to 0B|1\sigma|0\})$ uma gramática regular. Então,

$$M = (\{\sigma, B, F\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{E\}),$$

com a função transição definida pela Tabela abaixo



(a) Representação gráfica de M

σ	0	1
σ	$\{B\}$	$\emptyset$
B	$\{B, E\}$	$\{\sigma\}$
Z	$\emptyset$	$\emptyset$

(b) Função transição de M

8.5 Auto-avaliação

1. Classificar as seguintes gramáticas:
   (a) $T = \{a, b\}$, $N = \{\sigma, A\}$, com as regras de produção $\sigma \to b\sigma|aA|b$, $A \to a\sigma|bA|a$.
   (b) $T = \{a, b\}$, $N = \{\sigma, A, B\}$, com as regras de produção $\sigma \to AB$, $AB \to BA$, $A \to aA|a$, $B \to Bb|b$.
   (c) $T = \{a, b\}$, $N = \{\sigma, A, B\}$, com as regras de produção $\sigma \to A|AAB$, $Aa \to ABb$, $AB \to ABB$, $B \to b$.
   (d) $T = \{a, b\}$, $N = \{\sigma, A\}$, com as regras de produção $\sigma \to aA$, $A \to aA$, $A \to a$ e o símbolo inicial σ.
2. Considerar $w_1 = bbabbab$, $w_2 = abab$, $w_3 = aabbaab$, $w_4 = abbbaabab$ e

   $w_5 = abaabbabba$. Determinar se $w_i \in L(G)$, para cada gramática do exercício 1.
3. Achar a gramática que gere $L(G)$:
   (a) $L(G) = \{a^n b^n : n \geq 1\}$
   (b) $L(G) = \{a^n b^n a^m : n \geq 1, m \geq 0\}$
   (c) $L(G) = \{ab^m a^n : n \geq 1, m \geq 0\}$
   (d) $L(G) = \{a^{2n} b^n a^m : n \geq 1, m \geq 0\}$
   (e) $L(G) = \{(ab)^n a^m : n \geq 1, m \geq 0\}$
4. Seja $M(\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1\})$ um autômato, com f definido pela tabela

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2

   (a) Esboçar o diagrama de M.
   (b) Dizer se o autômato M aceita ou rejeita as palavras $w_1 = ababba$ e $w_2 = baab$.
5. Seja $M(\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ um autômato, com δ definido pela tabela

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_2

(a) Esboçar o diagrama de M.

(b) Descrever a linguagem lida por M.

6. Inventar um autômatos determinísticos que aceitem as linguagens sobre o alfabeto $\{0,1\}$:

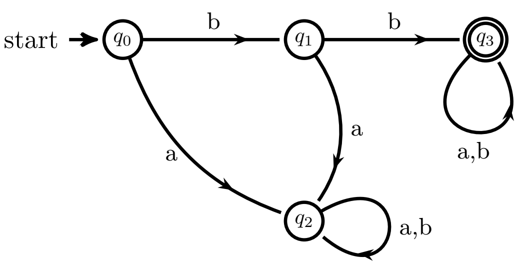
   (a) o conjunto das palavras que acabam em 00.

   (b) o conjunto das palavras com três zeros consecutivos.

   (c) o conjunto das palavras em que cada 0 está entre dois uns.

   (d) o conjunto das palavras cujos quatro símbolos finais são 1101.

7. Considerar o autômato



Quais das seguintes palavras são reconhecidas pelo autômato?

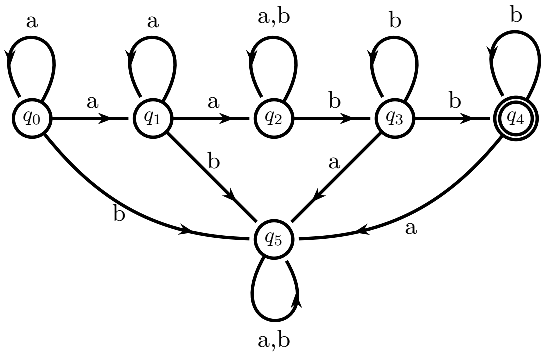
(a) *bb*

(b) *aabbbaba*

(c) *babbbbbabaa*

(d) *bbaaaabaa*

8. Considerar o autômato



Quais das seguintes palavras são reconhecidas pelo autômato?

(a) *abba*

(b) *ababab*

(c) *aaaabbabbb*

(d) *aabb*

9. Desenhar o diagrama de estados e descrever a linguagem aceite por cada um dos seguintes autômatos finitos não determinísticos. Em cada caso o estado inicial é q_0.

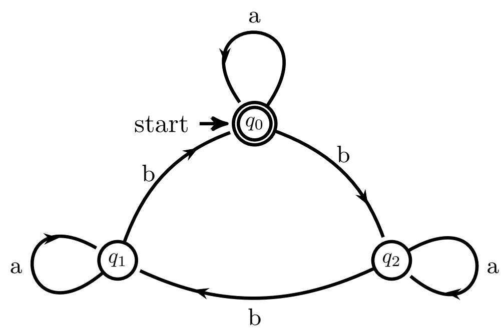
   (a) $F = \{q_1\}$ é o conjunto de estados de aceitação e a função de transição é dada por

δ	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_0, q_2\}$	$\emptyset$

   (b) $F = \{q_3\}$ é o conjunto de estados de aceitação e a função de transição é dada por

δ	a	b	c
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

10. Caracterizar a linguagem reconhecida pelo autômato

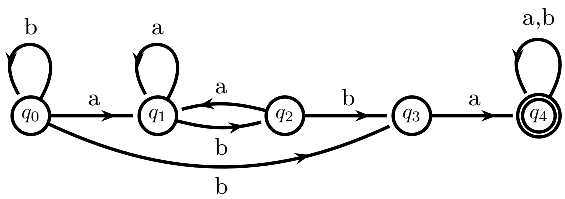


11. Construir o autômato finito não determinístico que aceia a linguagem gerada pela gramática regular $G(T, N, \sigma, P)$, onde:

   (a) $T = \{a, b\}$, $N = \{\sigma, A, B\}$,
   $P = \{\sigma \to aA,\ \sigma \to bA,\ A \to aB,\ \sigma \to b,\ B \to b\}$

   (b) $T = \{a, b\}$, $N = \{\sigma, A, B\}$,
   $P = \{\sigma \to aA|bB|a,\ A \to aA|a\sigma|bB,\ B \to bB|a|b\}$

12. Definir uma gramática regular que gere a linguagem reconhecida por



Complexidade de Algorítmos

9

"É preciso estudar muito para saber um pouco."

MONTESQUIEU

9.1 Comparação de Funções

O tempo que um algorítmo precisa expresso como uma função do tamanho de entrada n é chamamos *complexidade temporal do algorítmo.* Ao estudar a complexidade de um algorítmo queremos saber como a função complexidade de tempo se comporta quando n tende ao infinito. A tabela a seguir mostra como o tempo é usado na execução de um certo algorítmo.

Número de etapas para entradas de tamanho n	Tempo de execução se n			
	3	6	9	12
1	10^{-6} sec	10^{-6} sec	10^{-6} sec	10^{-6} sec
$\lg\lg n$	10^{-6} sec	10^{-6} sec	2×10^{-6} sec	2×10^{-6} sec
$\lg n$	2×10^{-6} sec	3×10^{-6} sec	3×10^{-6} sec	4×10^{-6} sec
n	3×10^{-6} sec	6×10^{-6} sec	9×10^{-6} sec	10^{-5} sec
$n\lg n$	5×10^{-6} sec	2×10^{-5} sec	3×10^{-5} sec	4×10^{-5} sec
n^2	9×10^{-6} sec	4×10^{-5} sec	8×10^{-5} sec	10^{-4} sec
n^3	3×10^{-5} sec	2×10^{-4} sec	7×10^{-4} sec	2×10^{-3} sec
2^n	8×10^{-6} sec	6×10^{-5} sec	5×10^{-4} sec	4×10^{-3} sec

Tabela 9.1

- $1 < \lg\lg n < \lg n < n < n\lg n < n^2 < n^3 < 2^n$.

9.2 Notação Assintótica

Sejam f e g duas funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^+$. Por definição,

$$f(n) = O\left(g(n)\right)$$

se existe uma constante $C_1 > 0$ e um valor n_0 tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow f(n) \leq C_1|g(n)|,$$

ou seja, função g atua como limite superior para valores assimtóticos da função f.

Exemplo 9.2.1. Esteme a função $f(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ usando a notação O.

Solução: $f(n) = 3n^3 + 2n^2 + n \leq 3n^3 + 2n^3 + n^3 = 6n^3,\ n \geq 0$. Portanto, $f(n) = O\left(n^3\right)$. É correcto afirmar que $f(n) = O\left(n^4\right)$, entretanto, esta afirmação é mais fraca que $f(n) = O\left(n^3\right)$.

Observação: As funções elementares usadas como referência são as utilizadas na Tabela 9.1.

Sejam f e g duas funções reais de variável natural. Diremos que

$$f(n) = \Omega\left(g(n)\right)$$

se existe uma constante $C_2 > 0$ e um valor n_0 tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow f(n) \geq C_1|g(n)|,$$

ou seja, função g atua como limite inferior para valores assimtóticos da função f.

Exemplo 9.2.2. Esteme a função $f(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ usando a notação Ω.

Solução: $f(n) = 3n^3 + 2n^2 + n \geq 3n^3,\ n \geq 0$. Portanto, $f(n) = \Omega\left(n^3\right)$.

Sejam f e g duas funções reais de variável natural. Diremos que

$$f(n) = \Theta\left(g(n)\right)$$

se existem duas constantes não negativas C_1 e C_2 e um valor n_0 tal que

$$n > n_0 \Longrightarrow C_1|g(n)| \leq f(n) \leq C_2|g(n)|,$$

ou seja, função g atua como limite firme (inferior e superior) para valores assimtóticos da função f.

Exemplo 9.2.3. Esteme a função $f(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ usando a notação Θ.

Solução: $3n^3 \leq f(n) = 3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3,\ n \geq 0$. Com efeito, $f(n) = \Theta\left(n^3\right)$.

Exemplo 9.2.4.

(a) Considere o seguinte algorítmo. Determinar o número de execuções $t(n)$ de $\text{sum} := \text{sum} + A[j,k]$. estimar a ordem de $t(n)$.

```
sum := 0;
for k = 1 to n do
    for j = k to n do
        sum := sum + A[j, k];
    end for
end for
```

Solução:

$$\begin{aligned} t(n) &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \Theta\left(n^2\right) \end{aligned}$$

(b) Considere o seguinte algorítmo. Determinar o número de execuções $t(n)$ de $x = x + 1$. Usando a notação Θ, estimar a ordem de $t(n)$.

```
x := 0;
for i = 1 to n do
    for j = 1 to 2i^3 do
        x := x + 1;
    end for
end for
```

Solução:

$$\begin{aligned} t(n) &= 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 4 \cdot n^3 \\ &= 4\left(1^3 + \cdot 2^3 + \cdots + n^3\right) \\ &= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \\ &= n^2(n+1)^2 \\ &= \Theta\left(n^4\right) \end{aligned}$$

9.3 Auto-avaliação

1. Usando as notações O, Ω e Θ, estimar o crescimento de cada função:

   (a) $4n^2 + 2n + 3$

   (b) $2 \lg n + 4n + 3n \lg n$

   (c) $\sum_{i=1}^{n} i^2$

   (d) $\sum_{i=1}^{n} i^3$

   (e) $\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i}{2}\right]$

2. Demonstrar que

   (a) $n! = O(n^n)$ (b) $2^n = O(n!)$

3. Denotemos por a_n o número e vezes que a instrução $x = x + 1$ é excutada. Usando a notação O, estimar o crescimento de a_n.

   (a)
```
for i = 1 to n do
    for j = 1 to n do
        x := x + 1;
    end for
end for
```

   (b)
```
for i = 1 to n do
    for j = 1 to i do
        for k = 1 to i do
            x := x + 1;
        end for
    end for
end for
```

   (c)
```
for i = 1 to n do
    for j = 1 to i do
        for k = 1 to j do
            x := x + 1;
        end for
    end for
end for
```

   (d)
```
i = 1;
while i ≥ 1 do
    for j = 1 to n do
        x := x + 1;
    end for
    i = [i/2];
end while
```

   (e)
```
j = n;
while j ≥ 1 do
    for i = 1 to j do
        x := x + 1;
    end for
    j = [j/2];
end while
```

Testes e Exames dos Anos Passados

REPÚBLICA DE MOCAMBIQUE
ACADEMIA DE ALTOS ESTUDOS ESTRATÉGICOS

Primeiro Teste
Disciplina: Matemática Discreta
Data: 14.08.2020

Cursos: Enginharia Informática
Duração: 90 min.
Ano: Segundo

1) (**3.0v**)

   (a) (**1.0v**) Determine o termo em x^7 no desenvolvimento $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{20}$?

   (b) (**1.0v**) Calcule o termo independente do desenvolvimento da alínia anterior.

   (c) (**1.0v**) Dada a palavra **INFORMATICA**. Quantas permutações distintas existem e quantas delas terminam por uma vogal?

2) (**3.0v**) Numa turma de Matemática Discreta com 55 alunos matriculados, 30 assistiram a todas as aulas, 40 fizeram a primeira prova e 30 fizeram a segunda prova. Dos que fizeram a primeira prova, somente metade asssitiu a todas as aulas. E esse número é ainda menor na segunda prova, onde apenas 8 dos presentes compareceram a todas as aulas. Os que fizeram as duas provas são 27. Ninguém que compareceu a todas as aulas fez as duas provas. Os alunos que nunca compareceram às aulas não fizeram as provas. Quantos alunos nunca compareceram à classe de Matemática Discreta?

3) (**4.0v**) Um comitê do congresso com três integrantes precisa ser selecionado dentre cinco democratas, três republicanos e quatro independentes.

   (a) (**2.0v**) De quantas maneiras o comitê pode ser escolhido, se precisar incluir pelo menos um independente?

   (b) (**2.0v**) De quantas maneiras podem ser escolhidos comitês que não incluam democratas e republicanos simultaneamente?

4) (**5.0v**) Mostre, por indução matemática, que

   (a) (**2.0v**) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ é divisível por 9,

   (b) (**3.0v**)

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

5) (**5.0v**) Resolva a relação de recorrência $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$, com $a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_3 = 9$.

BOM TRABALHO

ACADEMIA DE ALTOS ESTUDOS ESTRATÉGICOS

Teste II de Matemática Discreta || $2^{\underline{o}}$ Ano de Enginharia Informática

1. Seja G o grafo correspondente a matriz de adjacência M_G.

   (a) (*1.5 valor*) Desenhe G.

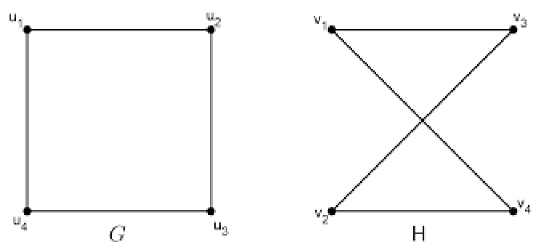
   (b) (*1.0 valor*) G é um grafo de Euler?

   (c) (*1.0 valor*) G é um grafo conexo?

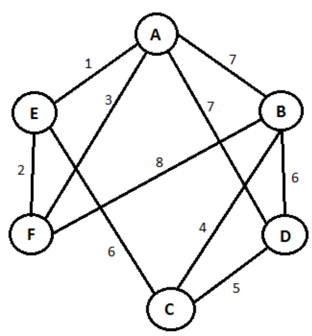
   (d) (*1.5 valor*) Ache o grau de cada vértice de G.

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (*2.5 valores*) Dados os grafos G e H na figura abaixo, diga se são ou não isomorfos. Caso sua resposta seja negativa, justifique. Caso contrário, indique uma função que conserva a adjacência dos vértices.



3. (*3.5 valores*) Considere o grafo com pesos dado na figura a segui. Determine a àrvore geradora mínima e o custo mínimo associado a àrvore encontrada.



4. Dado o alfabeto que consiste das letras $A = 30$, $B = 2$, $F = 14$, $G = 3$, $H = 12$, $I = 25$, $M = 15$, $N = 9$, $O = 8$, $R = 20$, $U = 6$ e as frequências correspondentes.

   (a) (*3.0 valores*) Determine a àrvore geradora óptima e os códigos de Huffman.

   (b) (*2.0 valores*) Codifique a palavra **GRAFO**.

   (c) (*2.0 valores*) Descodifique a mensagem 10010000100000111100110110 1.

5. (*2.0 valores*) Dada a função $f(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, mostre que $f(n) = \Theta(n^3)$.

Bom Trabalho

ACADEMIA DE ALTOS ESTUDOS ESTRATÉGICOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

EXAME NORMAL DE MATEMÁTICA DISCRETA

Engenharia Informática || 2° Ano 120 minutos || 9 de setembro de 2020

Caro cadete! O exame contém 8 números. Responda as questões de forma clara, evite sujar a folha de respostas. A ordem das respostas não precisa seguir a ordem dos exercícios no enunciado desde que indique o número (e a alínea) que está a responder.

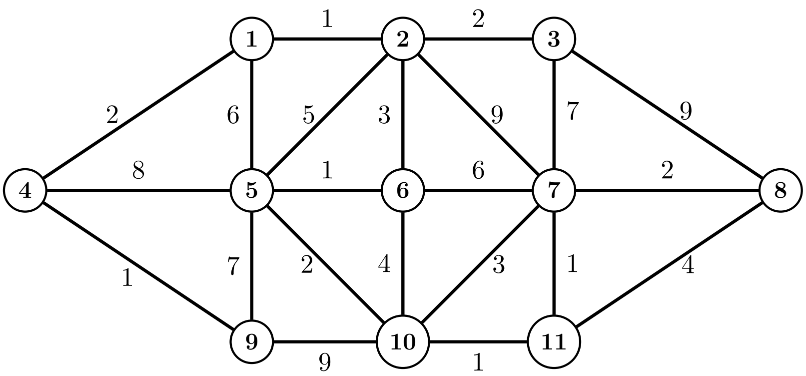
1. Quantos números menores que 2000, formados por algarismos diferentes, podemos escrever com os algarismos: 1, 2, 3 e 4?

2. (*3 valores*) Quantos termos existem na expansão de $\left(x - \dfrac{1}{2x}\right)^6$? E qual é o coeficiente do termo em x^2 ?

3. (*3 valores*) Considere a relação de recorrência linear não homogênia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$.
   (a) Mostre que $a_n = -2^{n+1}$ é solução da relação.
   (b) Determine a solução geral da relação.
   (c) Encontre a solução da relação quando $a_0 = 1$.

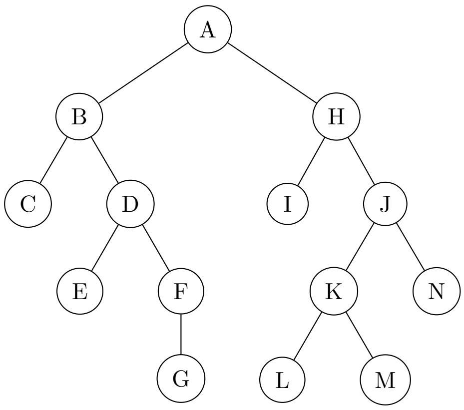
4. Desenhar e determinar a matriz de adjacência de um grafo simples com cinco vértices de graus 2, 3, 3, 4, 4, ou explicar o porquê de sua não existência.

5. Achar o caminho mínimo e o seu custo correspondente ao grafo na figura a seguir.

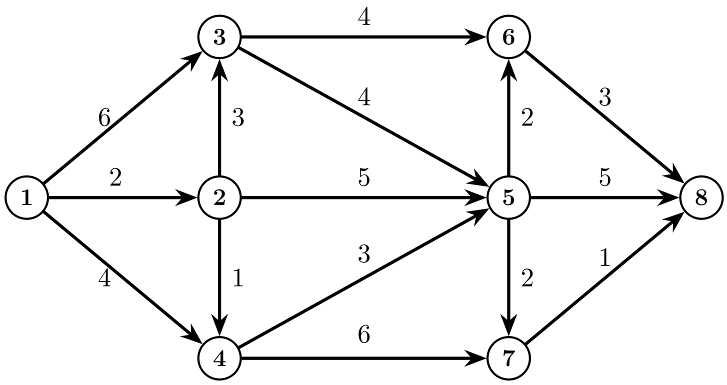


6. Dado o alfabeto que consiste das letras $A = 4$, $B = 7$, $E = 12$, $N = 6$, $P = 3$, $R = 11$, $S = 2$, $T = 15$, e as frequências correspondentes.
   (a) (*3.0 valores*) Achar a àrvore óptima e os códigos de Huffman.
   (b) (*2.0 valores*) Descodifique a mensagem 11011110011111000110001011010.

7. (*2.0 valores*) Determine os varimentos preordem, inordem e posordem da árvore da Figura abaixo.



8. Seja dada a rede da Figura abaixo, cujos números nos arcos representam as capacidades dos arcos. Determine o fluxo máximo.



REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE
ACADEMIA DE ALTOS ESTUDOS ESTRATÉGICOS

Exame de Recorrência — Curso: Engenharia Informática
Disciplina: Matemática Discreta — Duração: 120 min.
Data: 16.09.2020 — Ano: Segundo

1) (**3.0v**) Dada a função booleana $f(x, y, z) = x\bar{y} + \bar{x}y + xyz + xy\bar{z}$.

   (A) (**1.0v**) Desenhe um circuito

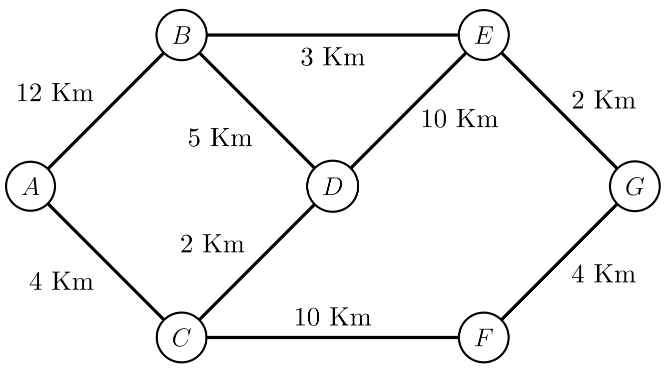
   (B) (**2.0v**) Simplifique omcircuito

2) (**3.0v**) Dentre 214 clientes deum banco com contas-correntes, cadernetas de poupança ou aplicações financeiras. 189 tém contas-correntes, 73 tém cadernetas de poupanças regulamentares, 114 tém aplicações no mercado financeiro e 69 tém contas-correntes e cadernetas de poupança. Não é possível ter caderneta de poupança e investir no mercado financeiro.

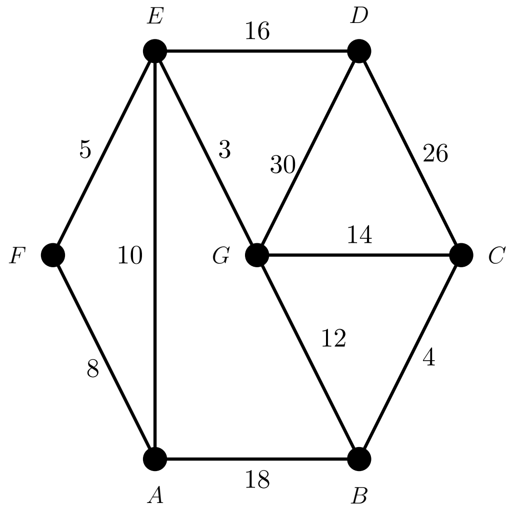
   (A) (**2.0v**) Quantos clientes tém, ao mesmo tempo, canta-corrente e aplicações no mercado financeiro?

   (B) (**1.0v**) Quantos clientes tém apenas conta-corrente?

3) (**3.0v**) Dermine o caminho mínimo do vértice A AO vértice G.



4) (**3.0v**) Dado o Grafo abaixo com pesos. Ache a árvore geradora máxima aplicando o algoritmo de Prim. Considere A como o vértice inicial.



5) (**3.0v**) Determine a solução geral da seguinte relação de recorrência

$$S_n - 5s_{n-1} + 6s_{n-2} = 5 \cdot 3^n.$$

6) (**5.0v**) Dado o alfabeto que consiste das letras $A = 30,\ C = 2,\ E = 14,\ M = 3,\ D = 12,\ I = 25,\ F = 15,\ E = 9,\ O = 8,\ R = 20,\ U = 6$, e as frequências correspondentes.

(a) (**3.0v**) Ache a árvore óptima e o código pr'efixo correspondente.

(b) (**1.0v**) Descodifique: 1101110001000000001011001.

(c) (**1.0v**) Codifique a palavras ACADEMIA.

BOM TRABALHO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

ENGENHARIA INFORMÁTICA E CIBERSEGURANÇA
PRIMEIRO SEMESTRE || SEGUNDO ANO
MATEMÁTICA DISCRETA

HORAS: 90 MINUTOS **PRIMEIRA AVLIAÇÃO** **12 DE MAIO DE 2021**

Instruções:
– As respostas deverão apresentar a resolução completa das questões. Não basta escrever apenas o resultado final, é necessário mostrar o raciocínio utilizado e os cáalculos, quando for o caso.
– Não é necessáario apresentar as resposta segundo a ordem das questões, responda primeiro as questões que para ti são faceis, indicando, de forma clara, o número e a alínea da questão.

1. Seja dado o binómio de Newton $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^{20}$.
   (a) Determine o termo em x^7 da expansão do binómio. *[1,0]*
   (b) Calcule o termo independente da expansão do binómio. *[1,0]*
2. Quanntos são os anagramas da palavra CAPÍTULO que têm as letras C, P, A juntas nessa ordem? *[2,0]*
3. Entre 200 alunos do segundo ano de Informática, 80 inscreveram-se no curso de Análise, 80 no curso de Discreta e 80 em Probabilidades. O número de alunos que se inscreveram simultaneamente em quaisquer dois cursos é igual a 30 e o número de alunos que se inscreveram simultaneamente nos três cursos é igual a 15. Qual o número total de alunos que não se inscreveram em nenhum destes cursos? *[3,0]*
4. Do pessoal de uma companhia, 7 trabalham no projeto, 14 na produção, 4 nos testes, 5 em vendas, 2 na contabilidade e 3 em marketing. Um comitê de 6 pessoas deve ser formado para uma reunião como supervisor.
   (a) De quantas maneiras podemos formar este comitê, se tiver que haver um membro de cada departamento? *[1,0]*
   (b) De quantas maneiras podemos formar o comitê, se tiver que haver exatamente dois membros do departamento de produção? *[1,0]*
   (c) De quantas maneiras o comitê pode ser formado, se o departamento de contabilidade não for representado e o de marketing tiver exatamente um representante? *[1,0]*
5. Mostre, por indução matemática, que
   (a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}{2}$. *[2,5]*
   (b) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ é multiplo de 9. *[2,5]*
6. Resolva a relação de recorrência linear $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$. *[5,0]*

Bom Trabalho!

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Engenharia Informática e Cibersegurança

Primeiro Mini-Teste de Matemática Discreta

Horas: 60 Minutos **Primeiro Semestre** **Segundo Ano** **16 de junho de 2021**

Instruções:
– A prova tem a cotação máxima de 10 valores, distribuida em 4 questões (cada questão foi ponderada em 2,5 valores).
– As respostas deverão apresentar a resolução completa das questões. Não basta escrever apenas o resultado final, é necessário mostrar o raciocínio utilizado.
– Não é necessário apresentar as resposta segundo a ordem das questões, responda primeiro as questões que para ti são faceis, indicando, de forma clara, o número e a alínea da questão.

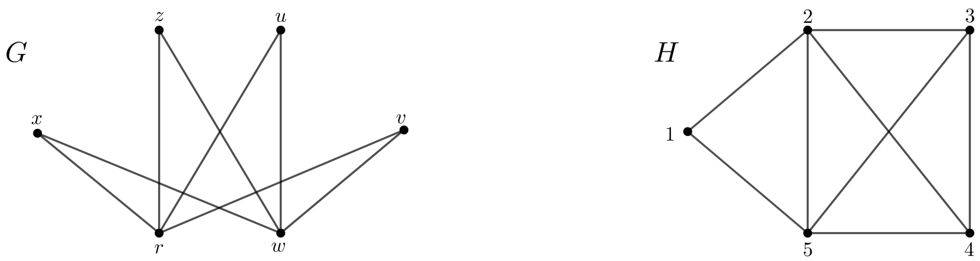
1. Considere a sequência $1, 1, 2, 3, 3, 6$ e verifique a veracidade de cada uma das seguintes afirmações: [*2,5 valores*]
   (a) Trata-se de sequência de graus de vértices de um grafo simples.
   (b) Trata-se de sequência de graus de vértices de um grafo no qual, naturalmente, podem existir laços e arestas paralelas.
   (c) Trata-se de sequência de graus de vértices de um grafo sem laços mas, eventualmente, com arestas paralelas.
   (d) Trata-se de sequência de graus de vértices de um grafo sem arestas paralelas mas, eventualmente, com laços.

2. Sendo $M_G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a matriz de adjacência de um grafo G. Represente graficamente G. [*2,5 valores*]

3. Seja dado o par de grafos da figura abaixo.

Determine se o par é isomorfo. Exiba um isoforfismo ou forneça um argumento rigoroso para que não exista. [*2,5 valores*]

4. Considere os grafos da figura abaixo.



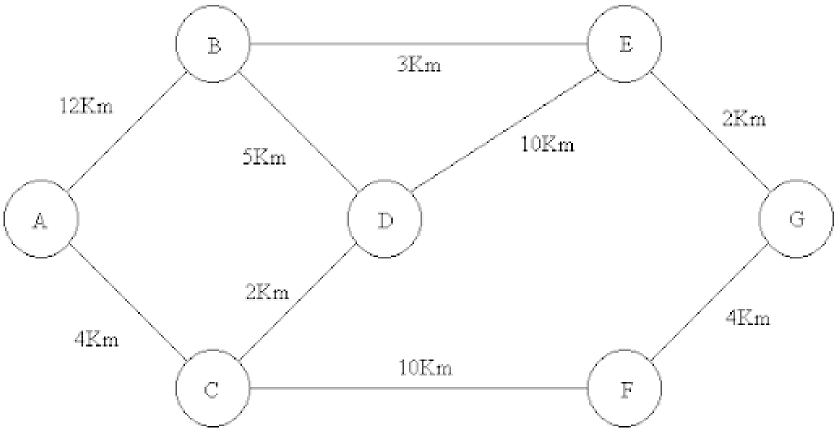
Verifique se os grafos possuem caminho e/ou circuito eulerianos. Indique-os, se possuirem. Caso contrário, justifique porque não possuem. [*2,5 valores*]

Bom Trabalho!

ACADEMIA DE ALTOS ESTUDOS ESTRATÉGICOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
Engenharia Informática e CiberSegurança

HORAS: 30 MINUTOS **CORREÇÃO DO SEGUNDO MINI-TESTE** **5 DE JULHO DE 2021**

1. Determine o caminho mínimo do grafo usando o algorítmo de Djisktra. [*5,0*]



Mapa da estrada

Solução: Na tabela a seguir está indicado o caminho mínimo que tem o peso de 16 km.

vértices \ **passos**	**primeiro**	**segundo**	**terceiro**	**quarto**	**quinto**	**sexto**
A	$(\mathbf{0}, \mathbf{A})$	—	—	—	—	—
B	$(12, A)$	∞	$(11, D)$	$(\mathbf{11}, \mathbf{D})$	—	—
C	$(4, A)$	$(\mathbf{4}, \mathbf{A})$	—	—	—	—
D	∞	$(6, C)$	$(\mathbf{6}, \mathbf{C})$	—	—	—
E	∞	∞	$(16, D)$	$(14, B)$	$(\mathbf{14}, \mathbf{B})$	—
F	∞	$(14, C)$	∞	∞	∞	—
G	∞	∞	∞	∞	$(16, E)$	$(\mathbf{16}, \mathbf{E})$
caminho mínimo	**A – C – D – B – E – G**					

□

2. Engenharia informática alguns programas de compressão de documentos utilizam o algorítmo de Huffman para tal. Pois este usa uma codificação de caracteres como sequência de bits de comprimento diferenciado. um documento constituído pelas letras, U, M, E, R, T, O, C, e P, com frequências correspondentes $U = 30$, $M = 5$, $E = 25$, $R1 = 6$, $T = 4$, $O = 8$, $C = 3$, e $P = 9$.

   (a) Ache a árvore óptima.

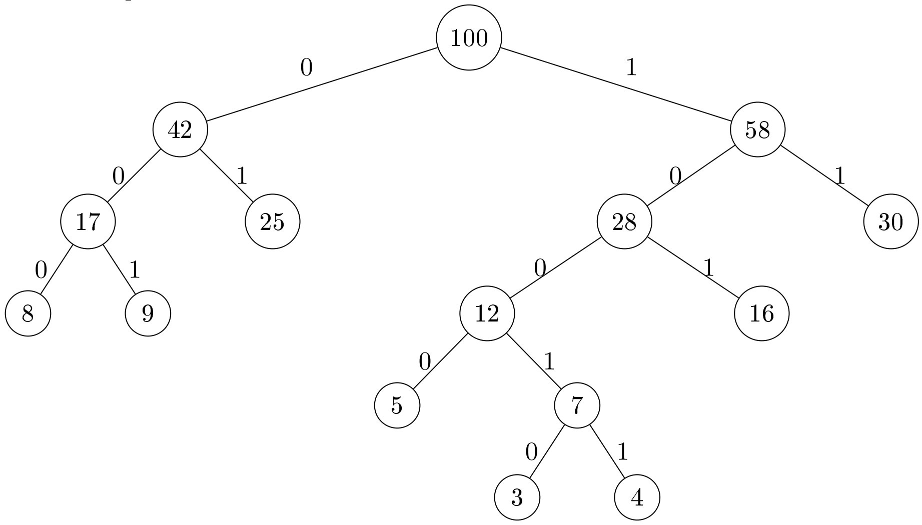
   (b) Discodifique **100000010011000101**.

   (c) Codifique a palavra METRO.

   (d) Faça o varimento preordem, inordem e posordem.

Solução:

(a) A árvore óptima é



Códigos

$C = 10010$

$E = 01$

$M = 1000$

$O = 000$

$P = 001$

$R = 101$

$T = 10011$

$U = 11$

(b) **100000010011000101** $\equiv$ MOTOR.

(c) **METRO** $\equiv$ 10000110011101000

(d) O varimento:

– preordem é $100 - 42 - 17 - 8 - 9 - 25 - 58 - 28 - 12 - 5 - 7 - 3 - 4 - 16 - 30$

– preordem é $8 - 17 - 9 - 42 - 25 - 100 - 5 - 12 - 3 - 7 - 4 - 28 - 16 - 58 - 30$ e

– posordem é $8 - 9 - 17 - 25 - 42 - 5 - 3 - 4 - 7 - 12 - 16 - 28 - 30 - 58 - 100$

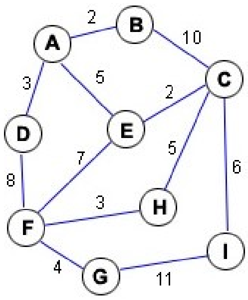
$\square$

ACADEMIA DE ALTOS ESTUDOS ESTRATÉGICOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
Engenharia Informática e CiberSegurança

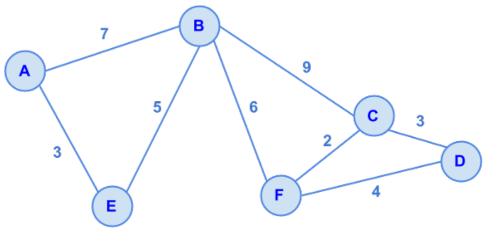
HORAS: 2 horas **EXAME NORMAL DE MATEMÁTICA DISCRETA** **12/07/2021**

1. Ache uma fórmula para o n-ésimo termo, a_n, para seguinte relação $a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$. [*5,0*]

2. Começando do vértice A, encontre árvore geradora mínima e o custo mínimo correspondente ao grafo da figura abaixo usando o algoritmo de Prim. [*3,0*]

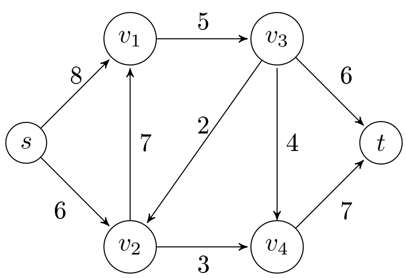


3. Determine o caminho mínimo entre os vértices A e D do grafo abaixo usando o algorítmo de Djisktra. [*3,0*]



4. Um alfabeto consiste das letras S, M, E, R, T e O, com frequências correspondentes $S = 45$, $M = 5$, $E = 16$, $R = 13$, $T = 9$ e $O = 12$. [*5,0*]
   (a) Ache a árvore óptima e os códigos de Huffman.
   (b) Discodifique **11001111101101100**.
   (c) Codifique a palavra MESTRE.
   (d) Faça o varimento preordem, inordem e posordem.

5. Para a rede dada na figura abaixo determine o fluxo máximo. [*4,0*]



Bom Trabalho!

ACADEMIA DE ALTOS ESTUDOS ESTRATÉGICOS

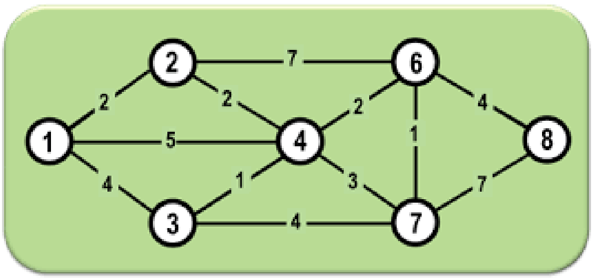
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Engenharia Informática e CiberSegurança

HORAS: 2 horas **EXAME DE RECORRÊNCIA DE MATEMÁTICA DISCRETA** **19/07/2021**

1. Encontre uma fórmula para o n-ésimo termo, a_n, para seguinte relação $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} - 5a_{n-3} + 2a_{n-4}$. [*5,0*]

2. Determine o caminho mínimo entre os vértices 1 e 8 do grafo abaixo usando o algorítmo de Djisktra. [*4,0*]



3. Um alfabeto consiste das letras A, B, E, N, P, R e S, com frequências correspondentes $A = 3$, $B = 3$, $E = 4$, $N = 2$, $P = 1$, $R = 1$ e $S = 1$. [*6,0*]

   (a) (*3.5*) Ache a árvore óptima e os códigos de Huffman.

   (b) (*1.25*) Discodifique **00011001110111011110111111**.

   (c) (*1.25*) Codifique a palavra SABER.

4. Considere dada a máquina de estado finito (I, S, O, f, σ), onde f está definida pela tabela. [*5,0*]

	f	
$\mathcal{S}$ \ $\mathcal{I}$	a	b
σ_0	σ_0	σ_1
σ_1	σ_0	σ_2
σ_2	σ_0	σ_2

   (a) (*3.0*) Desenhe o diagrama de transição das máquinas de estado finito (I, S, O, f, σ).

   (b) (*2.0*) Determine se a cadeia *aabaabb* é aceitável ou não.

Bom Trabalho!

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Licenciatura em Engenharia Informática

Semestre: Primeiro | **Ano:** Segundo
Duração: 100 minutos | **Data:** 27/04/2022

Teste I de Matemática Discreta

Observação: Em todas as questões deve apresentar o raciocínio utilizado. Não é necessário apresentar as resposta segundo a ordem das questões, é suficiente indicar o número e a alínea da questão.

1. Calcule o número de todos o números naturais menores ou iguais a 1000 que ou são multiplos 6, ou são multiplo de 10 ou são multiplos de 15. [*3,0*]

2. No meio da "invasão tecnológica" que toma as nossas vidas, a dona Antónia esqueceu seu PIN bancária justamente na hora de efetuar um saque. Ela lembra que esse PIN é formado por quatro algarismos distintos contendo **4** e **6**. Qual é o número máximo de tentativas que o banco deveria permitir para que a dona Antónia consiga realizar o saque?

   (a) Se o primeiro algarismo é **4** e o algarismo **6** aparece em alguma outra posição. [*2,0*]

   (b) Se **4** e **6** são adjacentes. [*2,0*]

3. No desenvolvimento do seguinte binómio $\left(x + \dfrac{\alpha}{x}\right)^6$.

   (a) Sabendo que o coeficiente do termo em x^4 é 12. Determine o valor de α. [*2,0*]

   (b) Qual é o termo independente de x? [*2,0*]

4. Mostre que, para todo número natural n, 3 divide $5^n + 2 \cdot 11^n$ nos inteiros. [*3,0*]

5. Suponha que $a_0 = 0$ e $a_n = a_{n-1} + 2n$, quando $n \geq 1$. Usando o método de interação, obtenha

$$a_n = n^2 + n,$$

   para todo número natural n e demonstre a sua validade. [*3,0*]

6. Resolva a sequinte relação de recorrência não homogénia [*3,0*]

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n + 2^n.$$

   Sugestão: considere $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$, onde $f_1(n) = n$ e $f_2(n) = 2^n$, e calcule $\varphi(n)$ tal que $\varphi(n) = \varphi_1(n) + \varphi_2(n)$.

`Os docentes[1] desejam-te bom trabalho!`

[1]Prof. Doutor Afonso Tsandzana & o assistente João Cuiana

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Licenciatura em Engenharia Informática

Semestre: Primeiro | **Ano:** Segundo
Duração: 100 minutos | **Data:** 15/06/2022

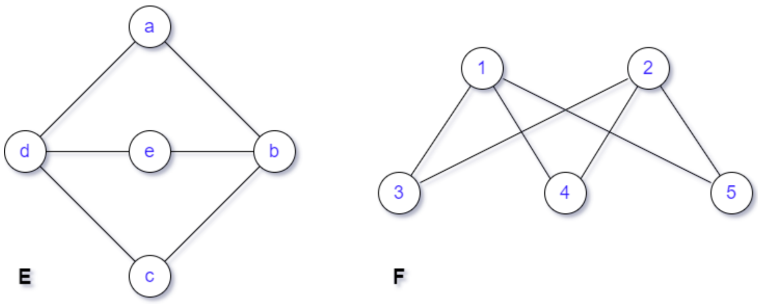
Teste II de Matemática Discreta

Observação: Em todas as questões deve apresentar o raciocínio utilizado. Não é necessário apresentar as resposta segundo a ordem das questões, é suficiente indicar o número e a alínea da questão.

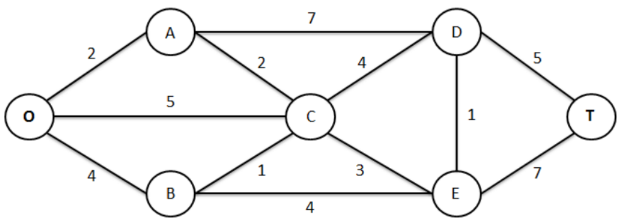
---

1. (*3,0 valores*) Considere o grafo $G = (\{a, b, c, d, e\}; \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\})$. Verifique se G possui algum circuito euleriano. Caso tua resposta seja negativa, justifique. Caso a tua resposta seja afirmativa, indique um circuito.

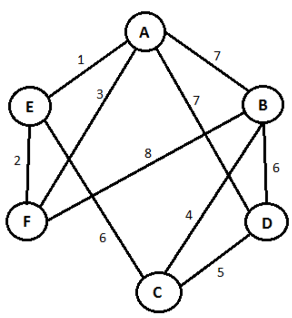
2. (*3,0 valores*) Sejam dados os grafos E e F. Diga justificando se os dois grafos são ou não isomorfos.



3. (*3,0 valores*) Usando o algorítmo de Dijkstra, encontre o caminho mínimo do grafo da figura abaixo.



4. (*3,0 valores*) Usando o algorítmo de Kruskal, determine a árvore geradora mínimo e o custo mínimo do grafo da figura a seguir.

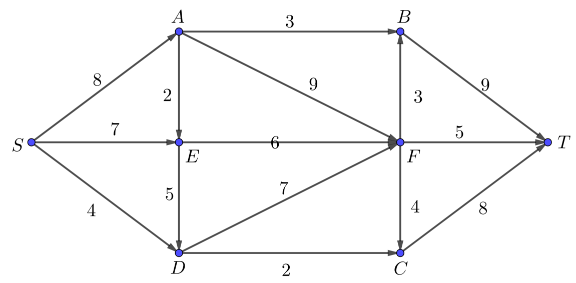


5. Uma fonte possui o seguinte conjunto de 8 símbolos: A, B, E, N, P, R, S, T com as frequências $A = 4$, $B = 7$, $E = 12$, $N = 6$, $P = 3$, $R = 11$, $S = 2$ e $T = 15$.

   (a) (*3,0 valores*) Determine a árvore óptima

   (b) (*1,0 valor*) Descodifique a mensagem $1101111001111110001100010110 10$.

6. (*4,0 valores*) Determine o corte mínimo e o fluxo máximo na rede da figura a seguir.



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Licenciatura em Engenharia Informática

Semestre: Primeiro **Ano:** Segundo
Duração: 100 minutos **Data:** 22/06/2022

Teste II de Matemática Discreta || 2ª. Chamada

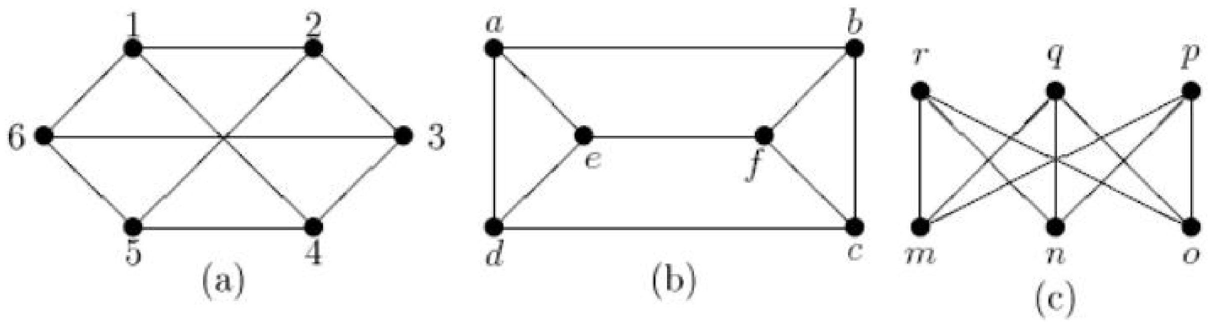
Observação: Em todas as questões deve apresentar o raciocínio utilizado. Não é necessário apresentar as resposta segundo a ordem das questões, é suficiente indicar o número e a alínea da questão.

1. (*3,0 valores*) Considere o grafo

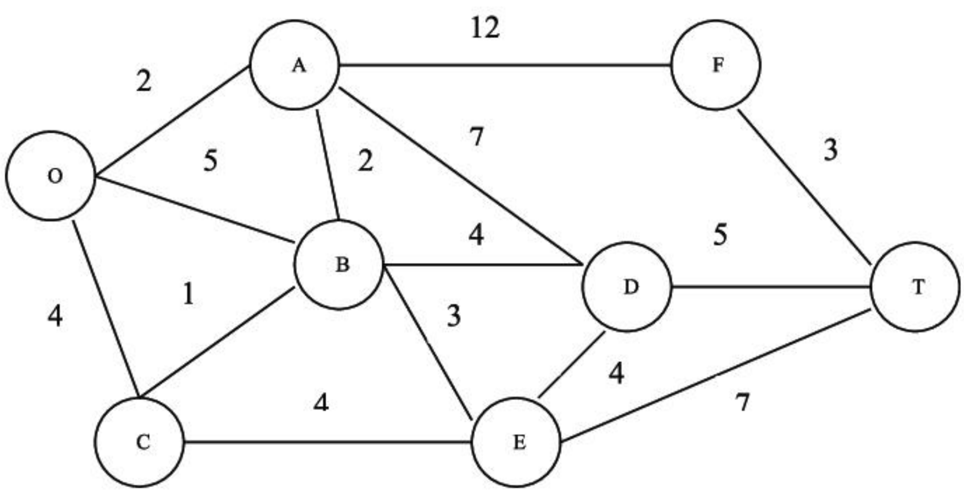
$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g\}; \{(a, b), (b, c), (c, e), (e, f), (f, g), (g, a), (a, f), (d, a), (b, d), (d, c), (f, c)\}).$$

Verifique se G possui algum circuito euleriano. Caso tua resposta seja negativa, justifique. Caso a tua resposta seja afirmativa, indique um circuito.

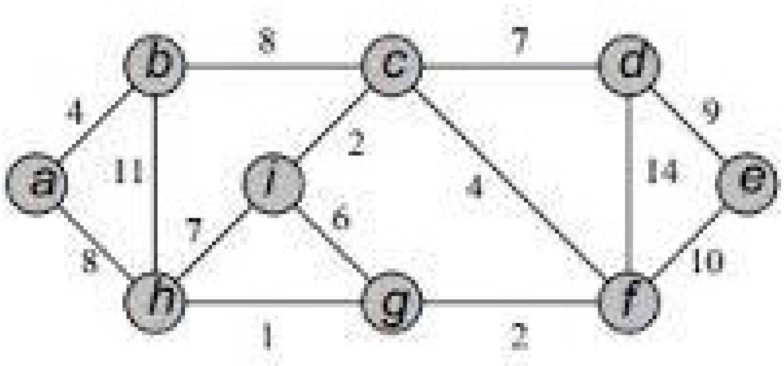
2. (*3,0 valores*) Sejam dados os grafos (a), (b) e (c). Diga justificando se os dois grafos da figura abaixo são ou não isomorfos dois a dois.



3. (*3,0 valores*) Usando o algorítmo de Dijkstra, encontre o caminho mínimo que parte do vértice O at'e ao vétice T do grafo da figura abaixo.



4. (*3,0 valores*) Usando o algorítmo de Kruskal, determine a árvore geradora mínimo e o custo mínimo do grafo da figura a seguir.

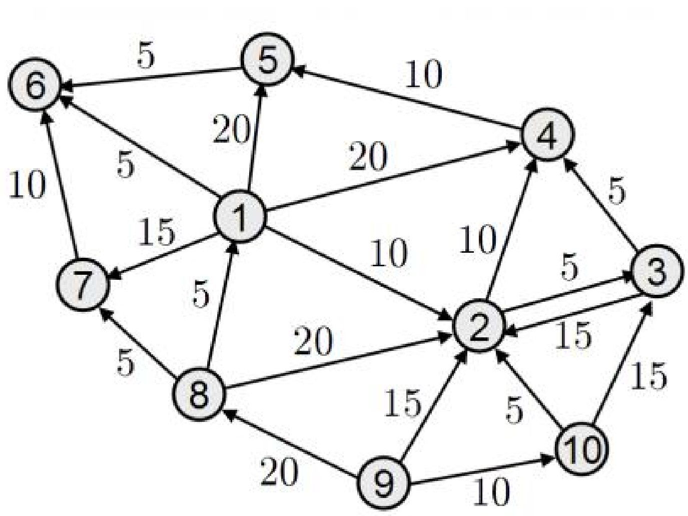


5. Uma fonte tem o seguinte conjunto de símbolos: a, c, d, e, i, m com as frequências $a = 5$, $c = 12$, $d = 13$, $e = 16$, $i = 45$ e $m = 9$.

   (a) (*3,0 valores*) Determine a árvore óptima

   (b) (*1,0 valor*) Descodifique a mensagem 110010011001011111101011001100110011111.

6. (*4,0 valores*) Determine o corte mínimo e o fluxo máximo na rede da figura a seguir.



DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Licenciatura em Engenharia Informática

2º. Ano || 2º. Semetre **2 Horas || 07/07/2022**

Exame Normal de Matemática Discreta

Observação: Em todas as questões deve apresentar o raciocínio utilizado. Não é necessário apresentar as resposta segundo a ordem das questões, é suficiente indicar o número e a alínea da questão.

---

1. Determine o n-ésimo termo, a_n, da relação $a_n = a_{n-1} + 3 \cdot 2^n, \quad a_0 = 2$ e mostre a sua validade pela indução matemática. [*4,0*]

2. Seja $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ uma função booleana tal que $f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(1,1,0) = 1$ e $f(a,b,c) = 0$ para todo $(a,b,c) \in \mathbb{B}^3$. Escreva a expressão booleana correspondente na forma canônica. [*3,0*]

3. Seja $G = (\{1,2,3,4,5,6,7\}; \{(1,2),(2,3),(3,5),(5,6),(6,7),(7,1),(1,6),(4,1),(2,4),(4,3),(6,3)\})$. Diga justificando se existe ou não um circuito de Euler em G. Caso exista indique. [*2,0*]

4. Encontre o caminho mínimo entre os vértices O e T usando o algorítmo Dijkstra no seguinte grafo

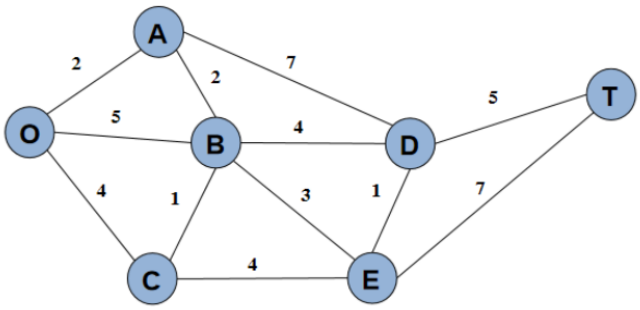


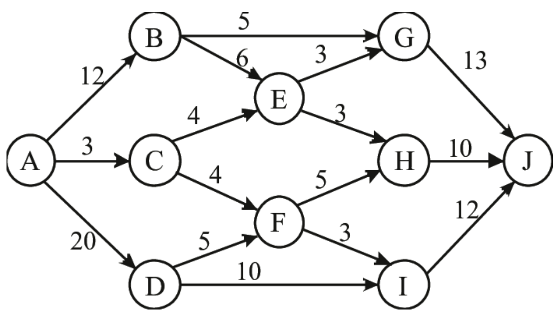
Figura 1 [*3,0*]

5. Um alfabeto consiste das letras a, c, d, e, i, m com frequências $a = 5$, $c = 12, d = 13$, $e = 16$, $i = 45$ e $m = 9$. [*4,0*]

   (a) (*3,0 valores*) Determine a árvore óptima

   (b) (*1,0 valor*) Descodifique a mensagem 11001001100101111110101100110011001111111.

6. Determine o corte mínimo e o fluxo máximo na rede da figura a seguir.



[*4,0*]

Os docentes[1] desejam-te bom trabalho!

---

[1]Prof. Doutor Afonso Tsandzana & o assistente João Cuiana

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Licenciatura em Engenharia Informática

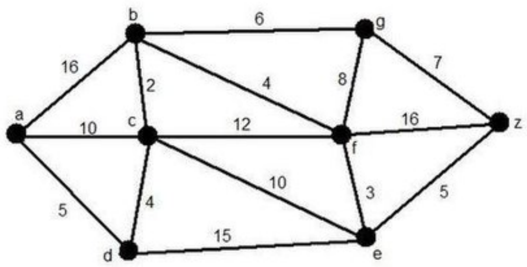
2º. Ano || 2º. Semetre **2 Horas || 20/07/2022**

Exame de Recorrência de Matemática Discreta

Observação: Em todas as questões deve apresentar o raciocínio utilizado. Não é necessário apresentar as resposta segundo a ordem das questões, é suficiente indicar o número e a alínea da questão.

1. Determine o n-ésimo termo, a_n, da relação $a_n = a_{n-1} + 2(n-1), \quad a_1 = 2$ e mostre a sua validade pela indução matemática. [*5,0*]

2. Encontre o caminho mínimo entre os vértices a e z usando o algorítmo Dijkstra no seguinte grafo



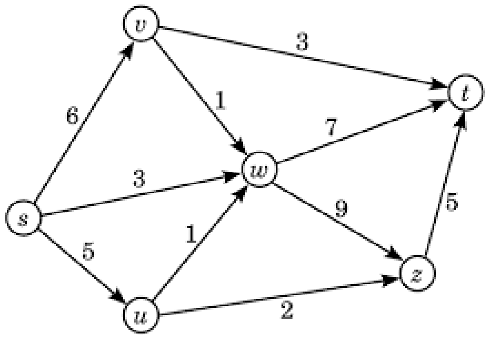
[*3,0*]

3. Um alfabeto consiste das letras $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ com as seguintes frequências $A = 25,\ B = 4,$ $C = 15,\ D = 20,\ E = 8,\ F = 10,\ G = 15,\ H = 8$ e $I = 4.$ [*4,0*]

   (a) (*3,0 valores*) Determine a árvore óptima

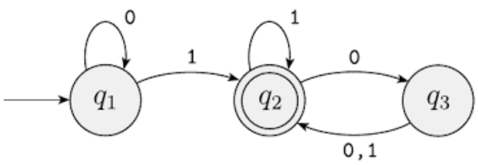
   (b) (*1,0 valor*) Descodifique a mensagem 010111011101.

4. Determine o corte mínimo e o fluxo máximo na rede da figura a seguir.



[*4,0*]

5. Considere o diagrama de estados do autômato finito abaixo. Escreva a função de transição de estados e verifique se as cadeias 101000 e 10101000000 são ou não aceitáveis.



[*4,0*]

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Licenciatura em Engenharia Informática

Semestre: Primeiro — **Ano:** Segundo
Duração: 100 minutos — **Data:** 19/04/23

Teste I de Matemática Discreta

- O **Teste I** é constituido por 8 perguntas, em cada pergunta deve apresentar o raciocínio utilizado;
- Não é necessário apresentar as resposta segundo a ordem das perguntas, mas é obrigatório indicar o número (e a alínea) da pergunta que está a responder.

Perguntas

1. Quantos são os elementos do conjunto $\{1, 2, \cdots, 500\}$ que são divisíveis por 3 ou 5 mas não são divisíveis por 7? **[3,0]**

2. Determine o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$. **[2,5]**

3. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: **[3,0]**

   (i) x é racional. (ii) $x/2$ é racional. (iii) $3x - 1$ é racional.

4. Prove que, para qualquer número natural n, $3^{2n+2} + 8n - 9$ é divisível por 16. **[2,5]**

5. Utilizando o método de iteração, encontre o termo geral da seguinte relação de recorrência

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{4a_{n-1}}{n}, \text{ para } n \geq 1$$

   e por indução matemática demonstre a validade da fórmula encontrada. **[2,5]**

6. Determine o termo geral da seguinte relação de recorrêcia: **[4,0]**

$$a_0 = 1, \; a_1 = 1, \; a_2 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} + 3a_{n-3} - 3 + n + (-1)^n, \quad \text{para } n \geq 3$$

7. Seja $f : B^3 \to B$ uma função booleana tal que $f(1,1,0) = f(1,0,0) = 1$ e $f(a,b,c) = 0$ para todo $(a,b,c) \in B^3$. Escreva a expressão booleana correspondente na forma canónica. **[1,5]**

8. Justificando, simplifique a expressão booleana correspondente ao **exercício 7**. **[1,0]**

O docente[1] deseja-te um bom trabalho!

[1] J. Venâncio Cuiana

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

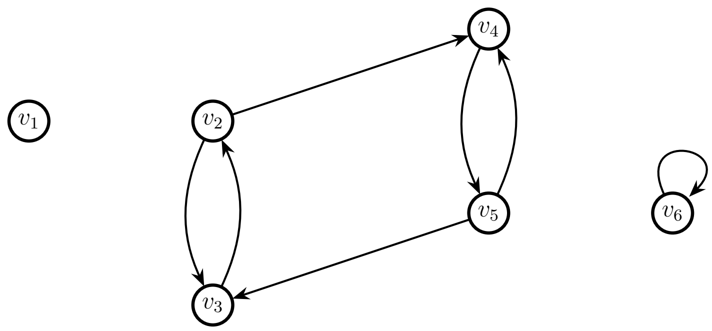
Licenciatura em Engenharia Informática

Semestre: Primeiro **Ano:** Segundo
Duração: 100 minutos **Data:** 02/06/2023

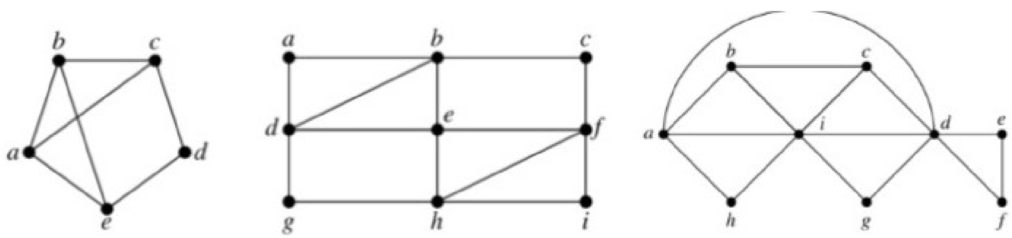
Teste II de Matemática Discreta

Atenção: O teste é constituido por 11 perguntas, em todas as perguntas deve apresentar o raciocínio utilizado. Não é necessário apresentar as resposta segundo a ordem das questões, é suficiente indicar o número e a alínea da questão.

1. Descreva formalmente o grafo G a seguir. [1.5]



2. Em cada grafo abaixo, determine se tem um circuito de Euler. Se existir, indicar tal circuito. Se não existir um circuito, determine se tem um caminho de Euler e indique esse caminho, se existir. [1.5]



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

3. Justificando, determine quais pares são isomorfos dentre os grafos a seguir. [2,0]

- $G_1 = (\{v_1, u_1, w_1, x_1, y_1, z_1\}, \{u_1v_1, u_1w_1, v_1w_1, v_1x_1, w_1y_1, x_1y_1, x_1z_1\})$,
- $G_2 = (\{v_2, u_2, w_2, x_2, y_2, z_2\}, \{u_2v_2, u_2w_2, v_2w_2, v_2x_2, w_2y_2, x_2y_2, y_2z_2\})$ e
- $G_3 = (\{v_3, u_3, w_3, x_3, y_3, z_3\}, \{u_3v_3, u_3w_3, v_3w_3, v_3x_3, w_3y_3, x_3y_3, u_3z_3\})$.

Exercícios 4–5: Considere o seguinte grafo ponderado.

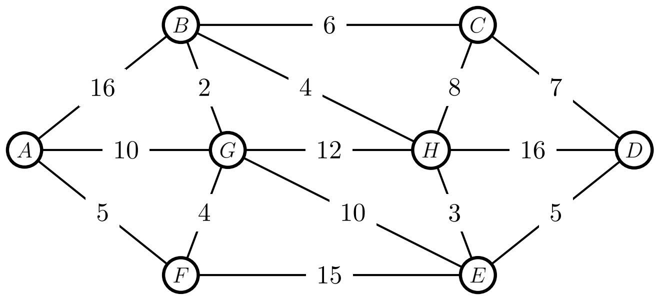


Figura 1: Grafo ponderado

4. Utilizando o algorítmo de Dijkstra, encontre o caminho mínimo do vértice **A** até **D** e o respectivo peso do grafo da Figura 1. [2,5]

5. Pelo algorítmo de Prim, determine a árvore geradora mínimo (iniciando no vértice G) e o custo mínimo do grafo da Figura 1. [*2,0*]

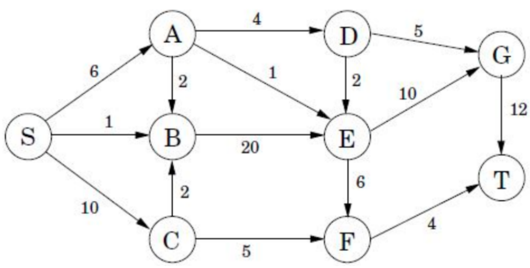
Exercícios 6–8: Uma fonte possui 8 símbolos com as seguintes frequências $A = 2,\ B = 5,\ E = 10,\ N = 4,$ $P = 1,\ R = 9,\ S = 3$ e $T = 11.$

6. Determine a árvore óptima. [2.5]

7. Codifique a seguinte mensagem **ASTRA**. [1.0]

8. Descodifique a mensagem 11001001001. [1.0]

9. Determine fluxo máximo e corte mínimo da rede da figura a seguir. [3.0]



Exercícios 10–11: Seja $M = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{0,1\}, s_0, \{s_0, s_1\}, f)$ um autômato, onde a função f é tal que $f(s_0, 0) = f(s_1, 0) = s_0,\ f(s_0, 1) = s_1$ e $f(s_1, 1) = f(s_2, 0) = f(s_2, 1) = s_2.$

10. Esboçar o diagrama correspondente à M. [1.5]

11. Dizer se o autômato M aceita ou rejeita as palavras v=010110 e w= 1001. [1.5]

Bom Trabalho!

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Licenciatura em Engenharia Informática

2º. Ano || 2º. Semetre **2 Horas || 20/06/2022**

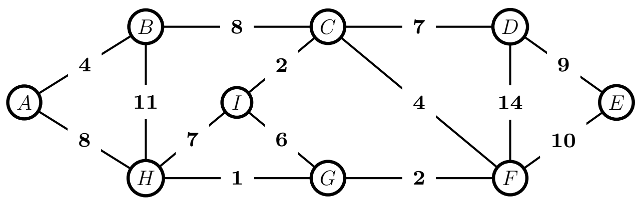
Exame Normal de Matemática Discreta

1. Determine o número de naturais menores ou iguais a 1000 que ou são múltiplos de 6 ou são múltiplos de 15. [2.0]

2. Ache o n-ésimo termo, a_n, da relação $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 6,\ n \geq 3,\ a_0 = -1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 6.$ [3.0]

3. Sejam dados os grafos G_1, G_2 e G_3. Justificando, diga quais dos três grafos são isomorfos. [2.0]
   - $G_1 = (\{u_1, v_1, w_1, x_1, y_1, z_1\}, \{u_1v_1, u_1w_1, v_1w_1, v_1x_1, w_1y_1, x_1y_1, x_1z_1\})$,
   - $G_2 = (\{u_2, v_2, w_2, x_2, y_2, z_2\}, \{u_2v_2, u_2w_2, v_2w_2, v_2x_2, w_2y_2, x_2y_2, u_2z_2\})$,
   - $G_3 = (\{u_3, v_3, w_3, x_3, y_3, z_3\}, \{u_3v_3, u_3w_3, v_3w_3, v_3x_3, w_3y_3, x_3y_3, y_3z_3\})$.

Exercicios: 4–5: Considere o grafo da figura abaixo



4. Execute o algoritmo de Prim, partindo do vértice F construa a árvore geradora mínima e calcule o seu peso. [2.0]

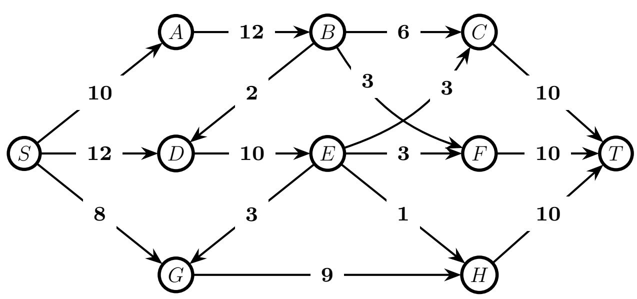
5. Execute o algoritmo de Dijkstra, determine o caminho mínimo entre os vértices A e F. [2.0]

Exercícios 6–7: Considere um alfabeto que consiste nas letras E, I, M, O, T e X e com as seguintes frequências: $E = 1$, $I = 5$, $M = 6$, $O = 10$, $T = 11$ e $X = 12$.

6. Construa a árvore óptima. [2.5]

7. Descodifique a seguinte mensagem **10001110011101100100**. [1.0]

8. Determine o corte mínimo e o fluxo máximo na rede da figura a seguir. [3.0]



Exercícios 9–10: Seja $M = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{a, b\}, s_0, \{s_0, s_1\}, f)$ um autômato, onde a função f é tal que $f(s_0, a) = f(s_1, a) = s_0$, $f(s_0, b) = s_1$ e $f(s_1, b) = f(s_2, a) = f(s_2, b) = s_2$.

9. Esboçar o diagrama correspondente à M. [1.5]

10. Dizer se o autômato M aceita ou rejeita as palavras $v = ababba$ e $w = baab$. [1.0]

Votos de um bom trabalho!

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

Licenciatura em Engenharia Informática

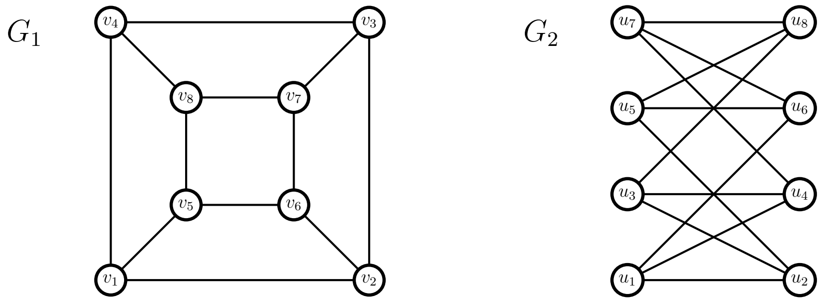
2º. Ano || 2º. Semetre **2 Horas || 29/06/2022**

Exame de Recorrência de Matemática Discreta

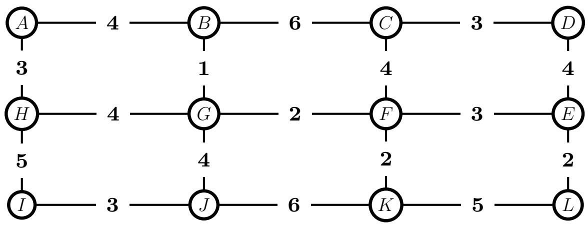
1. Quantos são os números naturais de 4 dígtos que possuem pelo menos dois dígitos iguais? [2.0]

2. Ache o n-ésimo termo, a_n, da relação $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. [3.0]

3. Sejam G_1 e G_2 dois grafos. Justificando, determine se G_1 e G_2 são isomorfos. [2.0]



4. Execute o algoritmo de Kruskal, construa a árvore geradora mínima e calcule o peso do grafo abaixo. [2.0]

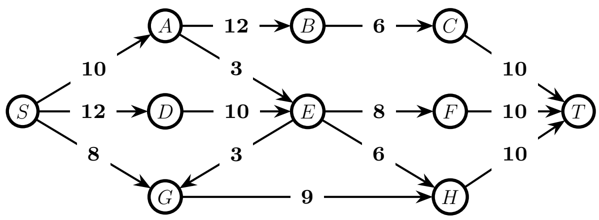


5. Execute o algoritmo de Dijkstra, ache o caminho mínimo entre os vértices A e L do grafo do **Exercício 4**. [2.0]

6. Considere um alfabeto que consiste nas letras A, D, O, P, R e V e com as seguintes frequências: $A = 2$, $D = 3$, $O = 5$, $P = 10$, $R = 9$ e $V = 11$. Construa a árvore óptima. [2.5]

7. Considere o alfabeto dado no **Exercício 6**. Descodifique a mensagem **010010000111101000101011**. [1.0]

8. Determine o corte mínimo e o fluxo máximo na rede da figura a seguir. [3.0]



9. Seja $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \{0,1\}, s_0, \{s_0\}, f)$ um autômato, onde f é tal que $f(s_0, 0) = f(s_2, 1) = s_1$, $f(s_0, 1) = f(s_2, 0) = f(s_3, 0) = f(s_3, 1) = s_3$, $f(s_1, 0) = s_2$ e $f(s_1, 1) = s_0$. Esboçar M. [1.5]

10. Dizer se o autômato M do **Exercício 9.** aceita ou rejeita as palavras $v = 010011$ e $w = 0110$. [1.0]

Votos de um bom trabalho!

Academia de Altos Estudos Estrarégicos

Exame Especial de Matemática Discreta
Engenharia Informática || 2º. Semestre
120 Minutos || 18 de dezembro de 2023

Classificação

Nome do Estudante

- **O exame é composto por 15 perguntas. Cada pergunta tem a cotação de** *1.25 valores.*

1. Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10), que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos: 2, 3, 4 e 5?

   A 256 B 24 C 6 D 48 E 64

2. Quantas soluções inteiras e não negativas da inequação $x+y+z \leq 5$

   A 56 B 21 C 36 D 46 E 52

3. Quantos números inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou 7?

   A 475 B 522 C 429 D 430 E 428

4. A expressão booleana $1+\overline{\left(x\cdot\overline{(y\cdot z)}+\overline{(w\cdot z+z)}\cdot y\right)}$ é equivalente a:

   A 0 B 1 C x D y E z

5. Se $f: B^3 \to B$ é uma função booleana tal que $f(1,1,0)=f(1,0,0)=1$ e $\forall(x,y,z)\in B^3, f(x,y,z)=0$. A expressão booleana correspondente na forma canónica é:

   A $xy\bar{z}+\bar{x}yz$ B $\bar{x}yz+x\bar{y}\bar{z}$ C $xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}$ D $\bar{x}\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}$ E $x\bar{y}z+\bar{x}yz$

6. A solução da seguinte relação de recorrência $a_1=3,\ \ a_n=3a_{n-1}+4,$ para $n\geq 2$ é:

   A $a_n=5\cdot 3^{n-1}-2$ B $a_n=5\cdot 3^{n+1}-2$ C $a_n=5\cdot 3^{n+1}+2$ D $a_n=5\cdot 3^{n-1}+2$ E $a_n=2-5\cdot 3^{n-1}$

7. Qual é a forma da solução particular da relação de recorrência $a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}+2^n$?

   A $n^2\cdot 2^n$ B $n^2\cdot 2^{-n}$ C $kn^2\cdot 2^n,\ k\in\mathbb{R}$ D $kn\cdot 2^n,\ k\in\mathbb{R}$ E $kn^2\cdot 2^{-n},\ k\in\mathbb{R}$

8. Um grafo tem 21 arestas, 7 vértices de grau 1, 3 de grau 2, 7 de grau 3 e o restante dos vértices tem grau 4. Quantos vértices tem o grafo?

   A 16 B 17 C 18 D 19 E 20

9. Sejam dados os seguintes grafos

   - $G_1=(\{v_1,u_1,w_1,x_1,y_1,z_1\},\{u_1v_1,u_1w_1,v_1w_1,v_1x_1,w_1y_1,x_1y_1,x_1z_1\})$,
   - $G_2=(\{v_2,u_2,w_2,x_2,y_2,z_2\},\{u_2v_2,u_2w_2,v_2w_2,v_2x_2,w_2y_2,x_2y_2,y_2z_2\})$,
   - $G_3=(\{v_3,u_3,w_3,x_3,y_3,z_3\},\{u_3v_3,u_3w_3,v_3w_3,v_3x_3,w_3y_3,x_3y_3,u_3z_3\})$ e
   - $G_4=(\{v_4,u_4,w_4,x_4,y_4,z_4\},\{u_4v_4,u_4w_4,v_4w_4,v_4x_4,w_4y_4,x_4y_4,z_4z_4\})$.

   Quais pares são isomorfos.

   A G_1 e G_4 B G_1 e G_3 C G_2 e G_3 D G_1 e G_2 E G_2 e G_4

10. Considere o grafo $G=(\{a,b,c,d,e\},\{ab,ac,bc,bd,be,cd,ce,de\})$. É podemos afirmar que:

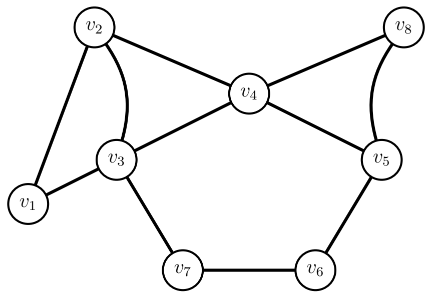
    A G é euleriano B G possui laço C G é desconexo D G é multigrafo E G é semi-euleriano

11. Seja $G(\{a,b,c,d\},\{ab,ad,bd,cd\})$ cuja matriz de adjacência é $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix}$, então quantos caminhos de comprimento 4 entre os vértices a e d existem?

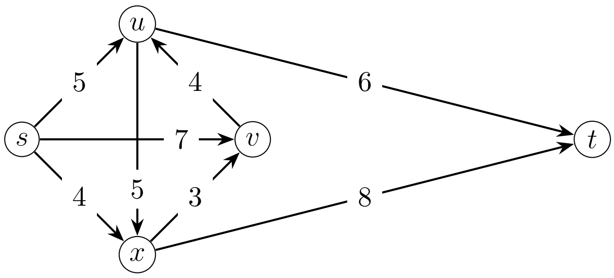
A 2   B 3   C 4   D 6   E 11

12. Um carteiro pretende entregar correspondência ao longo de um percurso. Suponha a estação de correios de onde parte o vértice v_2 do grafo abaixo e que a mulher o vai buscar de carro no final do trabalho. Diga onde devem marcar o encontro de forma que ele não percorra a mesma rua mais de uma vez.

A v_1 B v_4 C v_5 D v_6 E v_7



13. Seja dada a rede da figura abaixo. O corte mínimo é:



A $\langle\{s\},\{u,v,x,t\}\rangle$ B $\langle\{s,u\},\{v,x,t\}\rangle$
C $\langle\{s,v\},\{u,x,t\}\rangle$ D $\langle\{s,x\},\{u,v,t\}\rangle$
E $\langle\{s,u,v\},\{x,t\}\rangle$

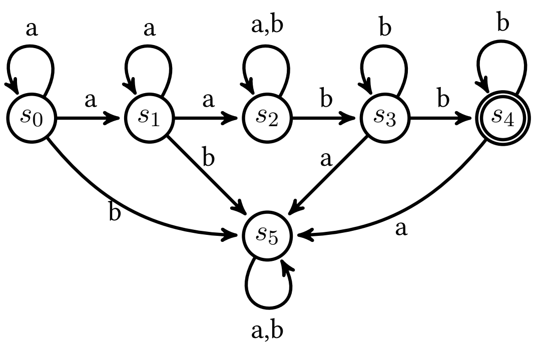
14. Se G é uma gramática livre de contexto e $\lambda \in L(G)$. A alternativa FALSA é:

A $L(G)$ é sensível ao contexto   B $L(G)$ pode ser regular   C $L(G)$ pode ser finita;
D $L(G)$ é não-regular   E Nada se pode dizer sobre $L(G)$

15. Seja $G(\{\sigma\},\{a,b\},\{\sigma \to a\sigma b | ab\},\sigma)$. A linguagem gerada por G, $L(G)$, é:

A $L(G) = \{a^{3n}b^{3n} : n \geq 1\}$ B $L(G) = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ C $L(G) = \{a^n b^{2n} : n \geq 1\}$
D $L(G) = aa^*bb^*$ E $L(G) = (ab)^*$

16. Considere o autômato dado na figura abaixo. Indique a palavra reconhecida pelo autômato.



A $abba$ B $ababab$
C $aaaabbabbb$ D $aabbaaaab$
E λ

Fim

Plano Análitico de 2024

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

PLANO ANALÍTICO
DISCIPLINA: MATEMÁTICA DISCRETA
DOCENTE: João Venâncio Cuiana

PERÍODO ACADÉMICO DE 12 DE FEVEREIRO À 21 DE JUNHO DE 2020

Semana 01: de 12 de Fevereiro à 16 de Fevereiro

Aula	Descrição da aula	Literatura
1, 2 e 3	**Tema 1: Contágem** • princípio da multiplicação, princípio da adição e princípio de inclusao e exclusao.	• Gersting, Judith. (2001). *Fundamentos Matemáticos para Ciências de Computação.* Rio de Janeiro: LTC. • Texto de Apoio
4, 5 e 6	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 02: de 19 de Fevereiro à 23 de Fevereiro

Aula	Descrição da aula	Literatura
7, 8 e 9	**Tema 1: Contágem** • Permutações, Arranjos e Combinações simples.	• Gersting, Judith. (2001). *Fundamentos Matemáticos para Ciências de Computação.* Rio de Janeiro: LTC. • Texto de Apoio
10, 11 e 12	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 03: de 26 de Fevereiro à 01 de Março

Aula	Descrição da aula	Literatura
13, 14 e 15	**Tema 1: Contágem** • Combinações com Repetição, Triangulo de pascal e Aplicando o Teorema Binomial.	• Gersting, Judith. (2001). *Fundamentos Matemáticos para Ciências de Computação.* Rio de Janeiro: LTC. • Texto de Apoio
16, 17 e 18	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 04: de 04 de Março à 08 de Março

Aula	Descrição da aula	Literatura
19, 20 e 21	**Tema 2: Dedução e indução** • Dedução e método de indução.	• Kenneth, Ross; Charles, Wright. (1992). *Discrete Mathematics.* New York: Mcgraw-Hill • Texto de Apoio
22, 23 e 24	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 05: de 11 de Março à 15 de Março

Aula	Descrição da aula	Literatura
25, 26 e 27	**Tema 3: Definição recursiva e Relações recurrentes** • Definição recursive, método de iteração e Relações recurrentes Lineares Homogêneas.	• Kenneth, Ross; Charles, Wright. (1992). *Discrete Mathematics.* New York: Mcgraw-Hill • Texto de Apoio
28, 29 e 30	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 06: de 18 de Março à 22 de Março

Aula	Descrição da aula	Literatura
31, 32 e 33	**Tema 3: Definição recursiva e Relações recurrentes** • Relações recurrentes Lineares não Homogêneas.	• Kenneth, Ross; Charles, Wright. (1992). *Discrete Mathematics.* New York: Mcgraw-Hill • Texto de Apoio
34, 35 e 36	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 07: de 25 de Março à 29 de Março

Aula	Descrição da aula	Literatura
37, 38 e 39	**Tema 4: Álgebra booleana** • Operações fundamentais, leis, circuitos com interruptores e funções booleanas.	• Kenneth, Ross; Charles, Wright. (1992). *Discrete Mathematics.* New York: Mcgraw-Hill • Texto de Apoio
40, 41 e 42	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 08: de 01 de Abril à 05 de Abril (Feriado: 07 de Abril)

Aula	Descrição da aula	Literatura
43, 44, 45 e 46	**Tema 5: Introdução à Teoria de grafos** • Definições básicas. • Preparação do **TESTE 1**. • Entrega do TI1	• Kenneth, Ross; Charles, Wright. (1992). *Discrete Mathematics.* New York: Mcgraw-Hill • Texto de Apoio
47 e 48	Aula prática /**TESTE 1**	Texto de Apoio

Semana 09: de 08 de Abril à 12 de Abril

Aula	Descrição da aula	Literatura
49, 50 e 51	**Tema 5: Introdução à Teoria de grafos** • Representação por matrizes, caminhos e Isomorfismo de grafos.	• Kenneth, Ross; Charles, Wright. (1992). *Discrete Mathematics.* New York: Mcgraw-Hill • Texto de Apoio
52, 53 e 54	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 10: de 15 de Abril à 19 de Abril

Aula	Descrição da aula	Literatura
55, 56 e 57	**Tema 5: Introdução à Teoria de grafos** • Grafos de Hamilton e grafos de Euler.	• Kenneth, Ross; Charles, Wright. (1992). *Discrete Mathematics.* New York: Mcgraw-Hill • Texto de Apoio
58, 59 e 60	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 11: de 22 de Abril à 26 de Abril

Aula	Descrição da aula	Literatura
61, 62 e 63	**Tema 6: Árvore** • Introdução á árvores, aplicações de árvores, percuso de árvores, árvore geradora e árvore geradora mínima.	• Kenneth, Ross; Charles, Wright. (1992). *Discrete Mathematics.* New York: Mcgraw-Hill • Texto de Apoio
64, 65 e 66	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 12: 29 de Abril à 03 de Maio (Feriado: 01 de Maio)

Aula	Descrição da aula	Literatura
67, 68 e 69	**Tema 7: Redes** • Modelos de rede, algoritmo de fluxo maximo, teorema de fluxo máximo e corte mínimo.	• Richard, Johnsonbaugh. (1999). *Discrete Mathematics*.New York: Macmillan Publishing Company • Texto de Apoio
70, 71 e 72	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 13: de 06 de Maio à 10 de Maio

Aula	Descrição da aula	Literatura
73, 74 e 75	**Tema 8: Autómatos Gramáticas e Linguagens** • Gramática e linguagens • Circuitos sequenciais e máquinas de estados finite.	• Richard, Johnsonbaugh. (1999). *Discrete Mathematics*.New York: Macmillan Publishing Company • Texto de Apoio
76, 77 e 78	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 14: de 13 de Maio à 17 de Maio

Aula	Descrição da aula	Literatura
79, 80 e 81	**Tema 8: Autómatos Gramáticas e Linguagens** • Relação entre gramática e linguagem e automato de estado finite nao deterministico.	• Richard, Johnsonbaugh. (1999). *Discrete Mathematics*.New York: Macmillan Publishing Company • Texto de Apoio
82, 83 e 84	Aula prática	Texto de Apoio

Semana 15: de 20 de Maio à 24 de Maio

Aula	Descrição da aula	Literatura
85, 86, 87 e 88	**Tema 9: Complexidade de algoritmos** • Complexidade da multiplicação de matrizes, paradigmas de Algorítmos, entendendo a complexidade de Algorítmos. • Preparação do **TESTE 2**. • Entrega do TI2	• Richard, Johnsonbaugh. (1999). *Discrete Mathematics*.New York: Macmillan Publishing Company • Texto de Apoio
89 e 90	Aula prática/**TESTE 2**	

Referências Bibliográficas

[1] Cardoso, Domingos Moreira et al (2009). *Matemática Discreta. Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos*. Aveiro.

[2] Cunha, Francisco Gêvane Muniz e Castro, Jânio Kléo de Sousa (2017). *Licenciatura em Matemática. MATEMÁTICA DISCRETA*. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Fortaleza.

[3] Figueiredo, Luiz Manoel et al (2010). *Matemática Discreta. Volume 1. Módulo 1. 3ª edição*. Fundação CECIERJ. Rio de Janeiro.

[4] Gersting, Judith (2001). *Fundamentos Matemáticos para Ciências de Computação*. Rio de Janeiro: LTC

[5] Gomide, Anamaria e Stolfi, Jorge (2011). *Elementos de Matemática Discreta para Computação*.

[6] Haon, Nguyen Cong (2014). *Matemática Discreta I*. Universidade Eduardo Mondlane–DMI. Maputo.

[7] Hirata, Nina S. T. (2006). *Algebra Booleana e Aplicações Notas de aula (2005)*. USP - Universidade de São Paulo. São Paulo.

[8] Kenneth, Ross; Charles, Wright (1992). *Discrete Mathematics*. New York: Mcgraw-Hill.

[9] Morgado, Augusto César d Oliveira (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade et al.* Rio de Janeiro.

[10] N. Biggs (1989). *Discrete Mathematics-Revised edition*. Clarendon Press. Oxford.

[11] Nepomnyashchikh, Yury (2017). *Lógica e Teoria de Conjuntos, Teoria e Prática. Para estudantes dos cursos do DMI*. Universidade Eduardo Mondlane–DMI. Maputo.

[12] Pinto, José Sousa (1999). *Tópicos de Matemática Discreta - Textos de Apoio - 2005/2006*. Universidade Aveiro–Departamento de Matemática. Aveiro.

[13] Ramos, Marcus Vinícius Midena (2008). *Linguagens Formais e Autômatos*. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

[14] Richard, Johnsonbaugh (1999). *Discrete Mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company.