

Seminari 7

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Dane su cijene dvaju dobara u ovisnosti o količinama proizvodnje $p_1 = 15 - Q_1$ i $p_2 = 10 - Q_2$ te funkcija troškova

$$T(Q_1, Q_2) = 5Q_1 + 4Q_2 + 5.$$

Pronađite optimalnu kombinaciju proizvodnje tako da dobit bude maksimalna. Koliko iznosi maksimalna dobit?

Rješenje

$$\text{DOBIT (ili PROFIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

- Prihod kao funkcija količine proizvodnje

$$P(Q_1, Q_2) = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 = (15 - Q_1)Q_1 + (10 - Q_2)Q_2$$

$$P(Q_1, Q_2) = -Q_1^2 - Q_2^2 + 15Q_1 + 10Q_2$$

- Dobit kao funkcija količine proizvodnje

$$D(Q_1, Q_2) = P(Q_1, Q_2) - T(Q_1, Q_2)$$

$$D(Q_1, Q_2) = (-Q_1^2 - Q_2^2 + 15Q_1 + 10Q_2) - (5Q_1 + 4Q_2 + 5)$$

$$D(Q_1, Q_2) = -Q_1^2 - Q_2^2 + 10Q_1 + 6Q_2 - 5$$

$$p_1 = 15 - Q_1$$

$$p_2 = 10 - Q_2$$

$$T(Q_1, Q_2) = 5Q_1 + 4Q_2 + 5$$

2/27

$$D(Q_1, Q_2) = -Q_1^2 - Q_2^2 + 10Q_1 + 6Q_2 - 5$$

$$D_{Q_1} = -2Q_1 + 10$$

$$-2Q_1 + 10 = 0 \rightarrow Q_1 = 5$$

$$D_{Q_2} = -2Q_2 + 6$$

$$-2Q_2 + 6 = 0 \rightarrow Q_2 = 3$$

Stacionarna točka: $(Q_1, Q_2) = (5, 3)$

Maksimalna dobit iznosi 29 novčanih jedinica, a postiže se za $Q_1 = 5$ i $Q_2 = 3$.

$$D_{Q_1 Q_1} = -2$$

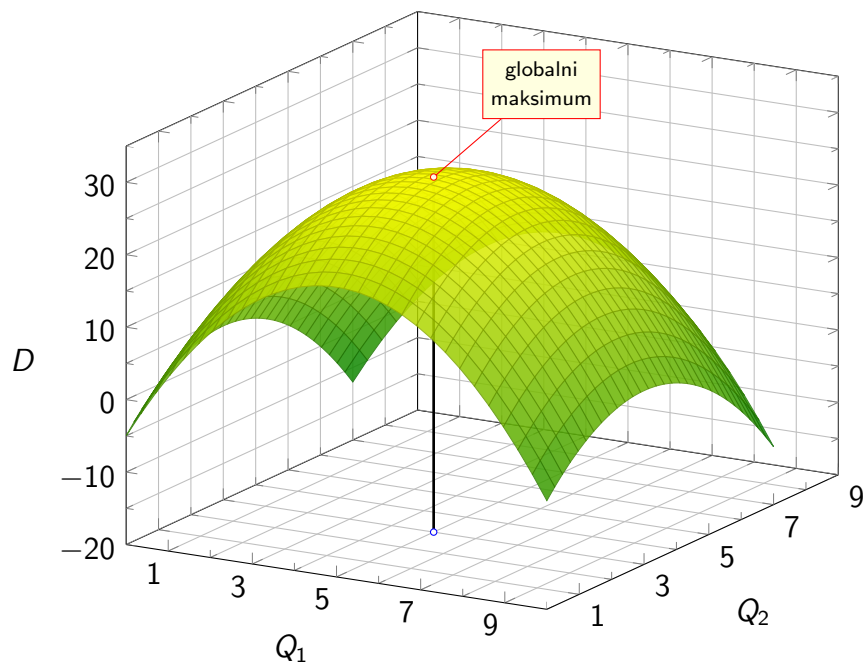
$$D_{Q_1 Q_2} = 0$$

$$D_{Q_2 Q_2} = -2$$

$$H(Q_1, Q_2) = \begin{vmatrix} D_{Q_1 Q_1} & D_{Q_1 Q_2} \\ D_{Q_1 Q_2} & D_{Q_2 Q_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$H(Q_1, Q_2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \rightarrow \text{točka lokalnog maksimuma}$$

$$D(5, 3) = -5^2 - 3^2 + 10 \cdot 5 + 6 \cdot 3 - 5 = 29$$



4/27

Rješenje

$$T(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 \leftarrow \text{funkcija}$$

$$Q_1 + Q_2 = 20 \leftarrow \text{uvjet}$$

$$Q_1 + Q_2 = 20 \rightarrow Q_2 = 20 - Q_1$$

$$\begin{aligned} T(Q_1, 20 - Q_1) &= 2Q_1^2 + Q_1 \cdot (20 - Q_1) + (20 - Q_1)^2 = \\ &= 2Q_1^2 + 20Q_1 - Q_1^2 + 400 - 40Q_1 + Q_1^2 = 2Q_1^2 - 20Q_1 + 400 \end{aligned}$$

$$f(Q_1) = 2Q_1^2 - 20Q_1 + 400$$

$$f''(Q_1) = 4$$

$$f'(Q_1) = 4Q_1 - 20$$

$$f''(5) = 4 > 0 \rightarrow \text{minimum}$$

$$4Q_1 - 20 = 0$$

$$Q_2 = 20 - 5 \rightarrow Q_2 = 15$$

$$Q_1 = 5$$

Stacionarna točka: (5, 15)

$$T(5, 15) = 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 15 + 15^2 = 350$$

Minimalni troškovi za 20 proizvoda iznose 350 novčanih jedinica, a postižu se za $Q_1 = 5$ i $Q_2 = 15$.

6/27

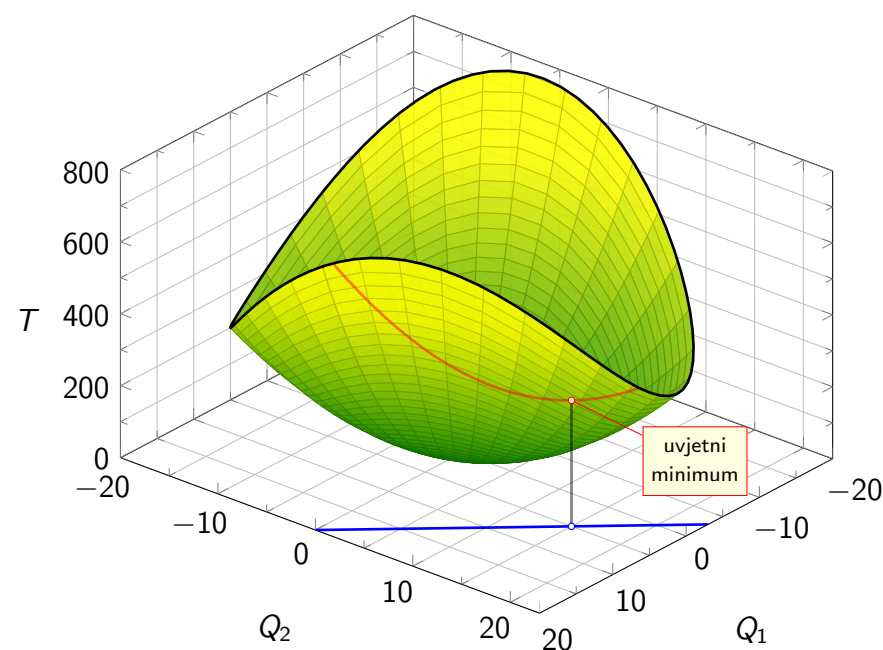
Zadatak 2

Zadana je funkcija troškova

$$T(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$$

u ovisnosti o količinama proizvodnje dva proizvoda. Odredite uz koju kombinaciju proizvodnje su troškovi minimalni ako je ukupna proizvodnja jednaka 20 proizvoda.

5/27



7/27

Zadatak 3

Zadana je funkcija ponude dobra D_1

$$s_1(p_1, p_2) = 10\sqrt{p_1} - 2p_2^2$$

u ovisnosti o cijenama p_1 i p_2 dobara D_1 i D_2 .

- Za koliko se približno promijeni ponuda s_1 kada se cijena p_1 na nivou $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ poveća za 0.02?
- Za koliko se približno promijeni ponuda s_1 kada se cijena p_2 na nivou $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ smanji za 0.01?
- Za koliko se približno promijeni ponuda s_1 kada istovremeno napravimo promjene iz a) i b) dijela zadatka?

U svakom slučaju također izračunajte stvarne promjene ponude s_1 i usporedite ih s približnim promjenama koje su aproksimirane pomoću diferencijala.

8/27

Rješenje

$$p_1 = 1, p_2 = 2, dp_1 = 0.02$$

$$s_1(p_1, p_2) = 10\sqrt{p_1} - 2p_2^2$$

- a) **Stvarna promjena ponude:** nova ponuda – stara ponuda

$$\Delta s_1 = s_1(1.02, 2) - s_1(1, 2) \approx 2.0995 - 2 = 0.0995$$

Približna promjena ponude

$$\Delta s_1 \approx \frac{\partial s_1}{\partial p_1}(1, 2) \cdot dp_1 = \frac{5}{\sqrt{1}} \cdot 0.02 = 0.1$$

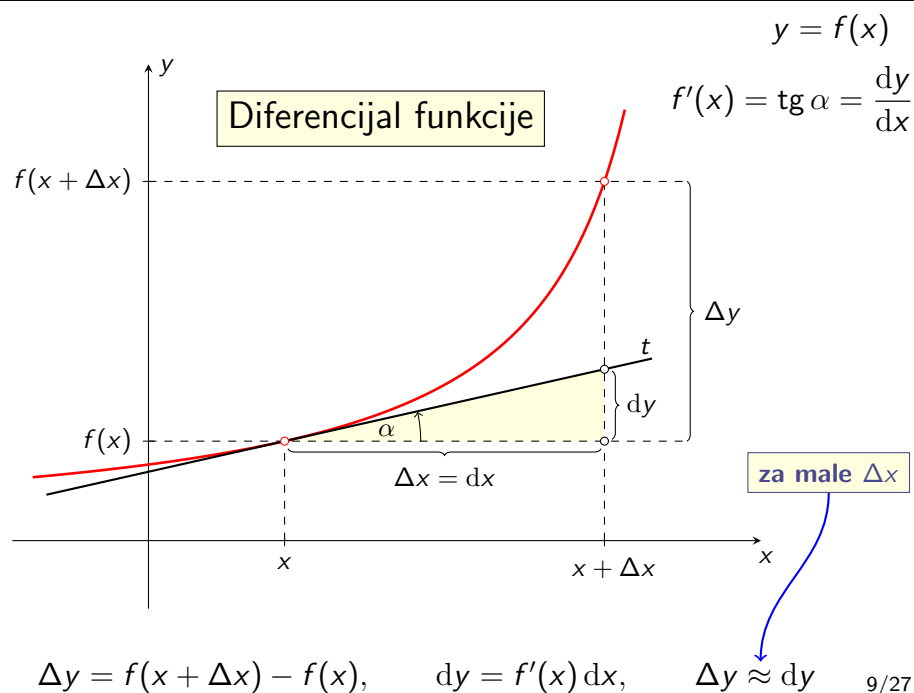
$$\frac{\partial s_1}{\partial p_1} = 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{p_1}} = \frac{5}{\sqrt{p_1}}$$

Ponuda dobra D_1 se poveća približno za 0.1.

$$y = y(x), \quad dy = y' dx$$

$$\Delta y \approx dy, \text{ za male pomake } dx$$

10/27



9/27

$$p_1 = 1, p_2 = 2, dp_2 = -0.01$$

$$s_1(p_1, p_2) = 10\sqrt{p_1} - 2p_2^2$$

- b) **Stvarna promjena ponude:** nova ponuda – stara ponuda

$$\Delta s_1 = s_1(1, 1.99) - s_1(1, 2) = 2.0798 - 2 = 0.0798$$

Približna promjena ponude

$$\Delta s_1 \approx \frac{\partial s_1}{\partial p_2}(1, 2) \cdot dp_2 = -4 \cdot 2 \cdot (-0.01) = 0.08$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial p_2} = 0 - 4p_2 = -4p_2$$

Ponuda dobra D_1 se poveća približno za 0.08.

$$y = y(x), \quad dy = y' dx$$

$$\Delta y \approx dy, \text{ za male pomake } dx$$

11/27

$$p_1 = 1, p_2 = 2, dp_1 = 0.02, dp_2 = -0.01 \quad s_1(p_1, p_2) = 10\sqrt{p_1} - 2p_2^2$$

c) **Stvarna promjena ponude:** nova ponuda – stara ponuda

$$\Delta s_1 = s_1(1.02, 1.99) - s_1(1, 2) \approx 2.1793 - 2 = 0.1793$$

Približna promjena ponude

$$\Delta s_1 \approx \frac{\partial s_1}{\partial p_1}(1, 2) \cdot dp_1 + \frac{\partial s_1}{\partial p_2}(1, 2) \cdot dp_2$$

$$\Delta s_1 \approx 5 \cdot 0.02 + (-8) \cdot (-0.01) = 0.1 + 0.08 = 0.18$$

Ponuda dobra D_1 se poveća približno za 0.18.

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$$

$$z = z(x, y), \quad dz = z_x dx + z_y dy$$

$$\Delta z \approx dz$$

12/27

Zadatak 4

Izračunajte koeficijente parcijalnih elastičnosti funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$$

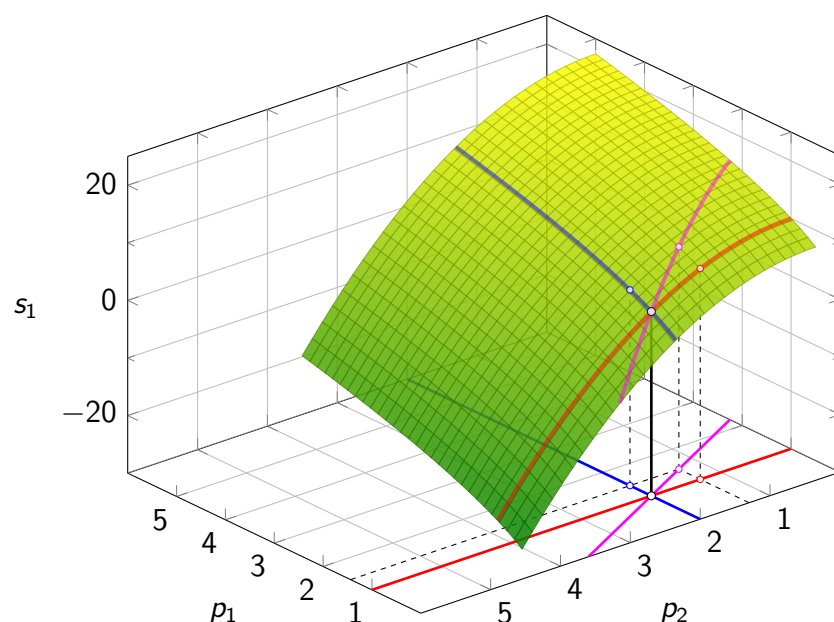
na nivou $x = 25, y = 3$ i interpretirajte dobivene rezultate.

Rješenje

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}}$$

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x - y^2}}$$

14/27



13/27

$$E_{f,x} = \frac{x}{f} \cdot f_x$$

$$f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$$

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x - y^2}}$$

$$E_{f,x}(25, 3) = \frac{25}{f(25, 3)} \cdot f_x(25, 3) = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{25}{32} = 0.78125$$

$$f(25, 3) = \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$f_x(25, 3) = \frac{1}{2\sqrt{25 - 3^2}} = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

Ako na nivou $(25, 3)$ varijablu x povećamo za 1%, funkcija f će se povećati za 0.78125%.

15/27

$$E_{f,y} = \frac{y}{f} \cdot f_y$$

$$f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$$

$$f_y = \frac{-y}{\sqrt{x - y^2}}$$

$$E_{f,y}(25, 3) = \frac{3}{f(25, 3)} \cdot f_y(25, 3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{-3}{4} = \frac{-9}{16} = -0.5625$$

$$f(25, 3) = \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

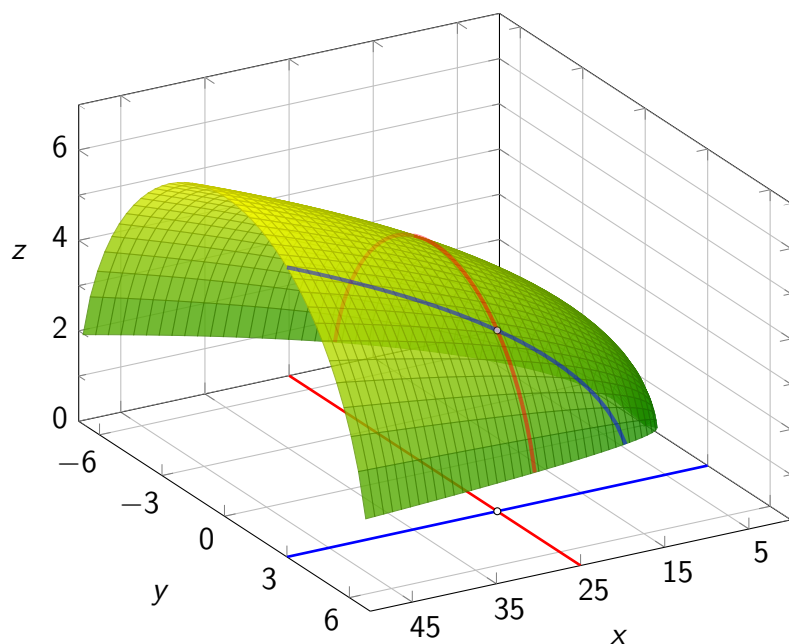
$$f_y(25, 3) = \frac{-3}{\sqrt{25 - 3^2}} = \frac{-3}{\sqrt{16}} = \frac{-3}{4}$$

Ako na nivou (25, 3) varijablu y povećamo za 1%, funkcija f će se smanjiti za 0.5625%.

16/27

- Funkcija potražnje prvog proizvoda: $q_1 = q_1(p_1, p_2)$
Funkcija potražnje drugog proizvoda: $q_2 = q_2(p_1, p_2)$
- **Koeficijent parcijalne elastičnosti** opisuje ponašanje funkcije potražnje jednog proizvoda u slučaju kada se mijenja cijena tog proizvoda: E_{q_1, p_1} , E_{q_2, p_2}
- Proizvod **je normalno dobro** ukoliko povećanje cijene tog proizvoda uzrokuje pad njegove potražnje. U tom slučaju koeficijent parcijalne elastičnosti je negativni broj.
- Proizvod **nije normalno dobro** ukoliko povećanje cijene tog proizvoda uzrokuje rast njegove potražnje. U tom slučaju koeficijent parcijalne elastičnosti je pozitivni broj.

18/27



17/27

- Funkcija potražnje prvog proizvoda: $q_1 = q_1(p_1, p_2)$
Funkcija potražnje drugog proizvoda: $q_2 = q_2(p_1, p_2)$
- **Koeficijent križne elastičnosti** opisuje ponašanje funkcije potražnje jednog proizvoda u slučaju kada se mijenja cijena drugog proizvoda: E_{q_1, p_2} , E_{q_2, p_1}
- Proizvodi su **supstituti** ukoliko rast cijene jednog od njih uzrokuje rast potražnje za drugim. U tom slučaju koeficijent križne elastičnosti je pozitivni broj.
- Proizvodi su **komplementi** ukoliko rast cijene jednog od njih uzrokuje pad potražnje za drugim. U tom slučaju koeficijent križne elastičnosti je negativni broj.

19/27

Zadatak 5

Dana je funkcija potražnje proizvoda D_1

$$q_1 = \frac{1}{2}p_1^2 + 6p_2^{-1}$$

$$q_1(p_1, p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{6}{p_2}$$

u ovisnosti o cijenama p_1 i p_2 proizvoda D_1 i D_2 . Izračunajte i interpretirajte koeficijente parcijalne i križne elastičnosti na nivou cijena $p_1 = 1$, $p_2 = 2$. Jesu li ti proizvodi komplementi ili supstituti? Je li proizvod D_1 normalno dobro?

Rješenje

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{1}{2} \cdot 2p_1 + 0 = p_1$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0 + 6 \cdot (-p_2^{-2}) = -\frac{6}{p_2^2}$$

20/27

$$E_{q_1, p_2} = \frac{p_2}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_2}$$

$$q_1(p_1, p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{6}{p_2}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -\frac{6}{p_2^2}$$

Koeficijent križne elastičnosti

$$E_{q_1, p_2}(1, 2) = \frac{\frac{p_2}{q_1}}{\frac{p_2}{q_1}} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_2}(1, 2) = \frac{2}{3.5} \cdot (-1.5) = -\frac{6}{7} \approx -0.86$$

$$q_1(1, 2) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{6}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2}(1, 2) = \frac{-6}{2^2} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

Ako na nivou cijena $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ cijenu p_2 proizvoda D_2 povećamo za 1%, potražnja za proizvodom D_1 se smanji za 0.86%.

Proizvodi D_1 i D_2 su komplementi.

22/27

$$E_{q_1, p_1} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_1}$$

$$q_1(p_1, p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{6}{p_2}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = p_1$$

Koeficijent parcijalne elastičnosti

$$E_{q_1, p_1}(1, 2) = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_1}{q_1}} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial p_1}(1, 2) = \frac{1}{3.5} \cdot 1 = \frac{2}{7} \approx 0.29$$

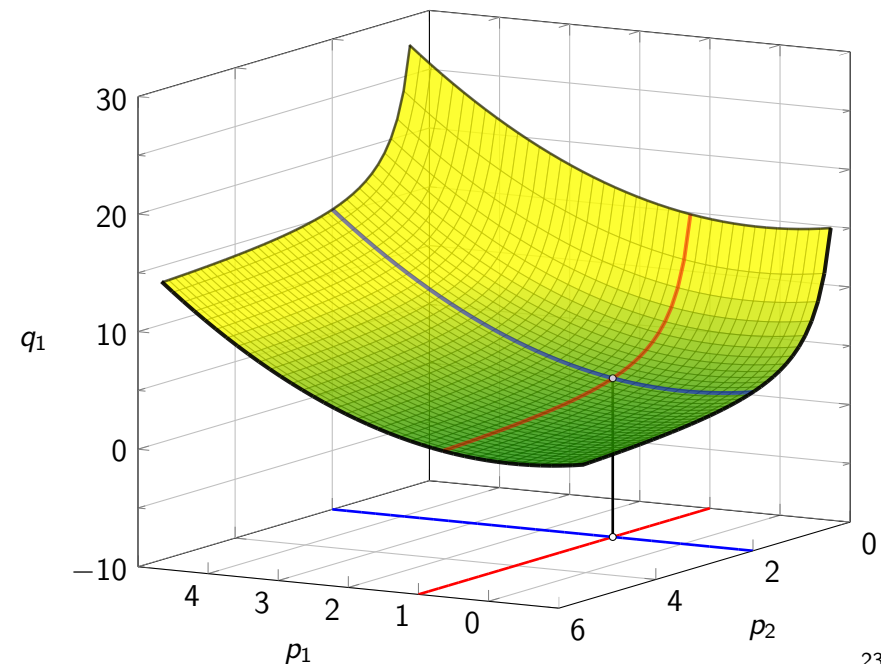
$$q_1(1, 2) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{6}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1}(1, 2) = 1$$

Ako na nivou cijena $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ cijenu p_1 proizvoda D_1 povećamo za 1%, potražnja za proizvodom D_1 se poveća za 0.29%.

Proizvod D_1 nije normalno dobro.

21/27



23/27

Zadatak 6

Dana je funkcija potražnje proizvoda D_2

$$q_2(p_1, p_2) = 2p_1\sqrt{10 - p_2}$$

u ovisnosti o cijenama p_1 i p_2 proizvoda D_1 i D_2 . Izračunajte i interpretirajte koeficijente parcijalne i križne elastičnosti na nivou cijena $p_1 = 5$, $p_2 = 1$. Jesu li ti proizvodi komplementi ili supstituti? Je li proizvod D_2 normalno dobro?

Rješenje

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 2\sqrt{10 - p_2} \cdot 1 = 2\sqrt{10 - p_2}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 2p_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10 - p_2}} \cdot (-1) = \frac{-p_1}{\sqrt{10 - p_2}}$$

24/27

$$E_{q_2, p_1} = \frac{p_1}{q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial p_1}$$

$$q_2(p_1, p_2) = 2p_1\sqrt{10 - p_2}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 2\sqrt{10 - p_2}$$

• Koeficijent križne elastičnosti

$$E_{q_2, p_1}(5, 1) = \frac{5}{q_2(5, 1)} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial p_1}(5, 1) = \frac{5}{30} \cdot 6 = 1$$

$$q_2(5, 1) = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{10 - 1} = 30$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_1}(5, 1) = 2\sqrt{10 - 1} = 6$$

Ako na nivou cijena $p_1 = 5$, $p_2 = 1$ cijenu p_1 proizvoda D_1 povećamo za 1%, potražnja za proizvodom D_2 se poveća za 1%.

Proizvodi D_1 i D_2 su supstituti.

26/27

$$E_{q_2, p_2} = \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial p_2}$$

$$q_2(p_1, p_2) = 2p_1\sqrt{10 - p_2}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = \frac{-p_1}{\sqrt{10 - p_2}}$$

• Koeficijent parcijalne elastičnosti

$$E_{q_2, p_2}(5, 1) = \frac{1}{q_2(5, 1)} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial p_2}(5, 1) = \frac{1}{30} \cdot \frac{-5}{3} = \frac{-1}{18} \approx -0.06$$

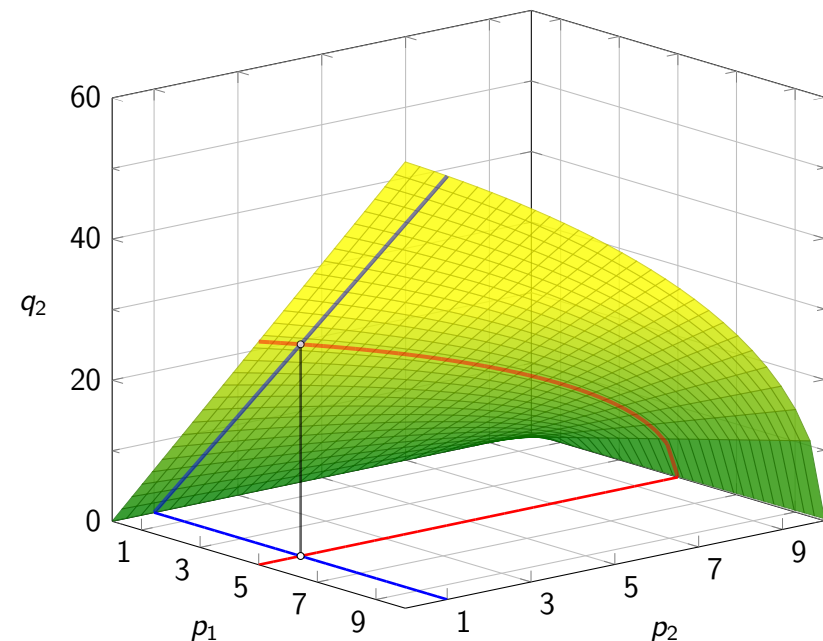
$$q_2(5, 1) = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{10 - 1} = 30$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2}(5, 1) = \frac{-5}{\sqrt{10 - 1}} = \frac{-5}{3}$$

Ako na nivou cijena $p_1 = 5$, $p_2 = 1$ cijenu p_2 proizvoda D_2 povećamo za 1%, potražnja za proizvodom D_2 se smanji za 0.06%.

Proizvod D_2 je normalno dobro.

25/27



27/27