

Inverzna funkcija. Nizovi realnih brojeva

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE 1

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Nultočke funkcije g

1. način

$$\begin{aligned}2^{5-x} - 50 &= 0 \\2^{5-x} &= 50 / \log_2 \\5 - x &= \log_2 50 \\-x &= -5 + \log_2 50 / \cdot (-1) \\x &= 5 - \log_2 50 \\x &= 5 - \frac{\log 50}{\log 2} \\x &\approx -0.64386\end{aligned}$$

$$a^x = b \rightsquigarrow x = \log_a b$$

2. način

$$\begin{aligned}2^{5-x} - 50 &= 0 \\2^{5-x} &= 50 / \log \\ \log 2^{5-x} &= \log 50 \\(5-x) \log 2 &= \log 50 / : \log 2 \\5 - x &= \frac{\log 50}{\log 2} \\-x &= -5 + \frac{\log 50}{\log 2} / \cdot (-1) \\x &= 5 - \frac{\log 50}{\log 2}\end{aligned}$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

2 / 25

Zadatak 1

Odredite nultočke funkcija

$$f(x) = 2^{5-x} + 50 \text{ i } g(x) = 2^{5-x} - 50.$$

Rješenje

nultočke od f

$$\begin{aligned}2^{5-x} + 50 &= 0 \\2^{5-x} &= -50 \\5 - x &= \log_2(-50)\end{aligned}$$

funkcija f nema nultočki



nultočke od g

$$\begin{aligned}2^{5-x} - 50 &= 0 \\2^{5-x} &= 50 \\5 - x &= \log_2 50 \\-x &= -5 + \log_2 50 / \cdot (-1)\end{aligned}$$

egzaktna
vrijednost
nultočke

$$x = 5 - \log_2 50$$

$$x = 5 - \frac{\log 50}{\log 2}$$

aproksimacija
nultočke na
5 decimala

$$x \approx -0.64386$$

$$a^x = b \rightsquigarrow x = \log_a b$$

1 / 25

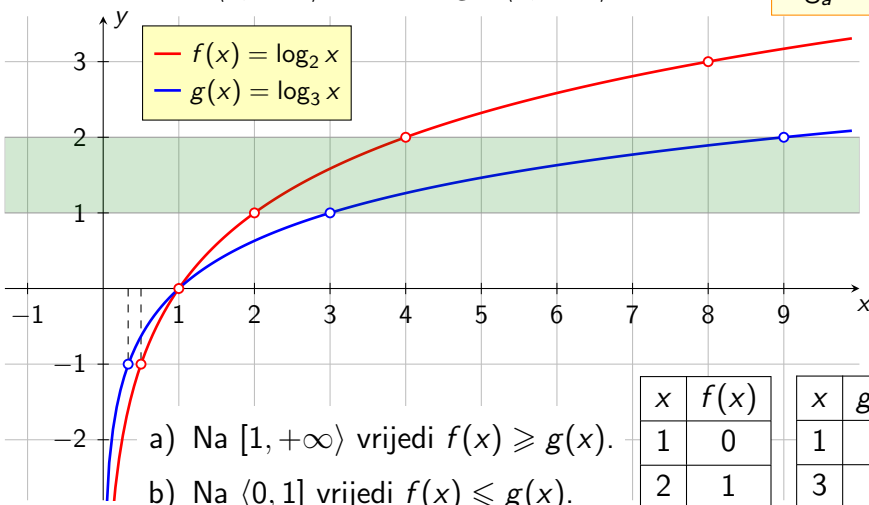
Zadatak 2

Zadane su funkcije $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = \log_3 x$.

- Na kojim dijelovima domena vrijedi nejednakost $f(x) \geq g(x)$?
- Na kojim dijelovima domena vrijedi nejednakost $f(x) \leq g(x)$?
- Na kojem dijelu domene vrijedi $1 \leq f(x) \leq 2$?
- Na kojem dijelu domene vrijedi $1 \leq g(x) \leq 2$?
- Na kojim dijelovima domena vrijedi nejednakost $f^{-1}(x) \geq g^{-1}(x)$?
- Na kojim dijelovima domena vrijedi nejednakost $f^{-1}(x) \leq g^{-1}(x)$?
- Usporedite funkcije f, g, f^{-1} i g^{-1} na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ s linearnom funkcijom $h(x) = x$.

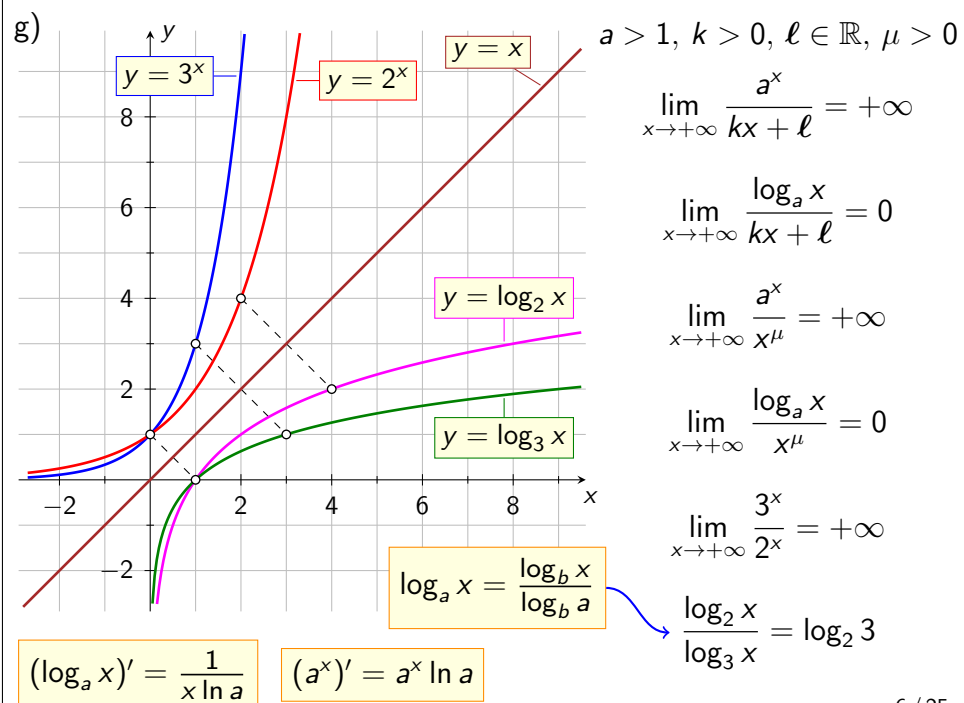
3 / 25

Rješenje $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ $g : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ $\log_a a^x = x$

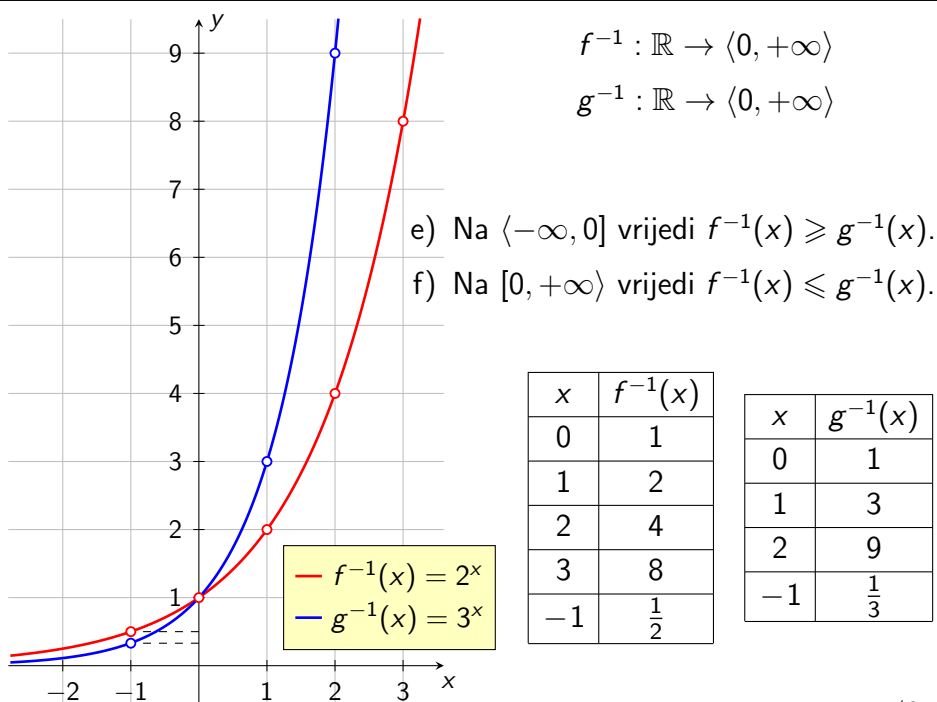


x	f(x)	x	g(x)
1	0	1	0
2	1	3	1
4	2	9	2
8	3	$\frac{1}{3}$	-1
$\frac{1}{2}$	-1		

4 / 25



6 / 25



5 / 25

Zadatak 3

Dana su pravila pridruživanja funkcija f i g s

$$f(x) = \log_3 x - 2 \quad i \quad g(x) = \sqrt{1-x}.$$

- Pronađite inverzne funkcije od f i g te komentirajte na kojim su domenama i kodomenama funkcije f i g bijekcije.
- Nacrtajte na istoj slici graf funkcije f i graf funkcije f^{-1} .
- Nacrtajte na istoj slici graf funkcije g i graf funkcije g^{-1} .

7 / 25

Rješenje

$$\log_a x = b \rightsquigarrow x = a^b$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

a)

$$f(x) = \log_3 x - 2$$

$$y = \log_3 x - 2$$

$$-\log_3 x = -y - 2 \cdot (-1)$$

$$\log_3 x = y + 2$$

$$x = 3^{y+2}$$

$$f^{-1}(y) = 3^{y+2}$$

$$f^{-1}(x) = 3^{x+2}$$

$$f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$$

$$g(x) = \sqrt{1-x}$$

$$y = \sqrt{1-x} \quad \text{uz uvjet}$$

$$y^2 = 1-x \quad y \geq 0$$

$$x = 1 - y^2$$

$$g^{-1}(y) = 1 - y^2$$

$$g^{-1}(x) = 1 - x^2$$

$$-5 = 5^{1/2}$$

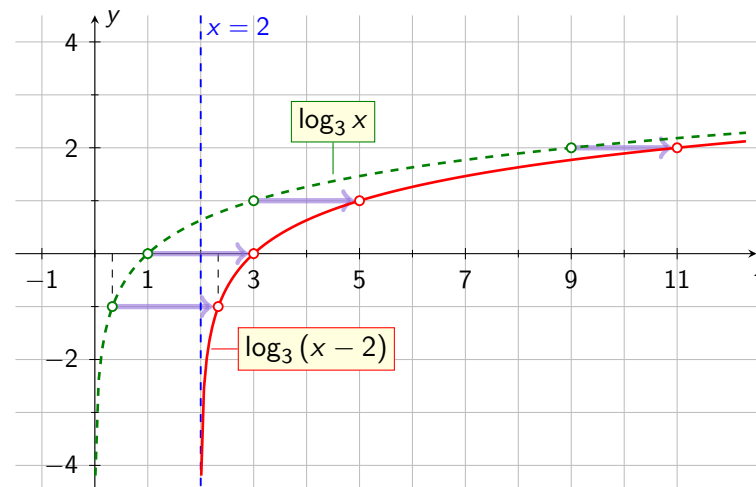
$$25 = 25$$

istina

$$g : \langle -\infty, 1] \rightarrow [0, +\infty)$$

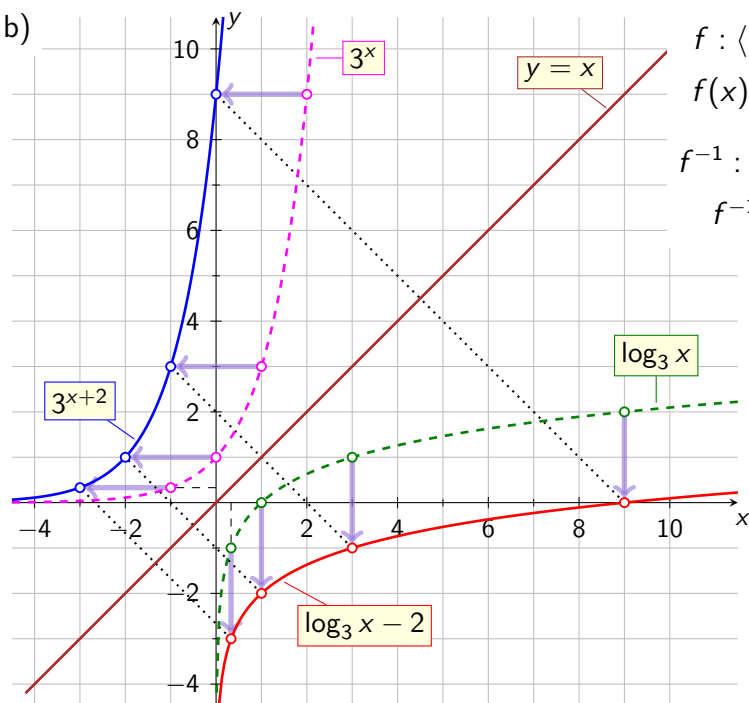
$$g^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow \langle -\infty, 1]$$

8 / 25

Graf funkcije $h(x) = \log_3(x-2)$ 

10 / 25

b)



$$f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

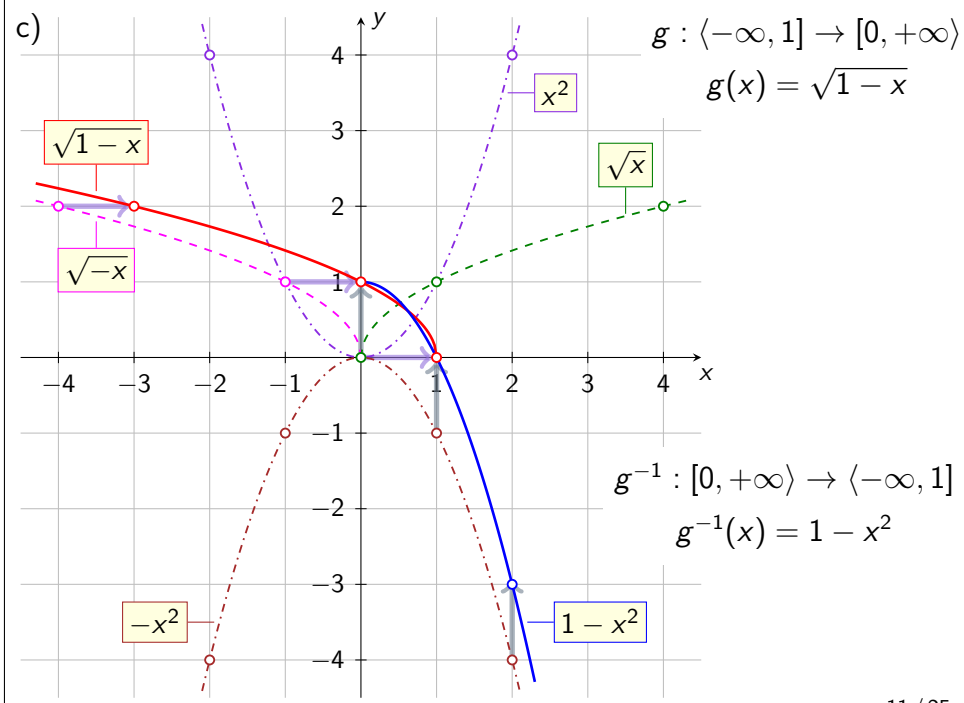
$$f(x) = \log_3 x - 2$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$$

$$f^{-1}(x) = 3^{x+2}$$

9 / 25

c)



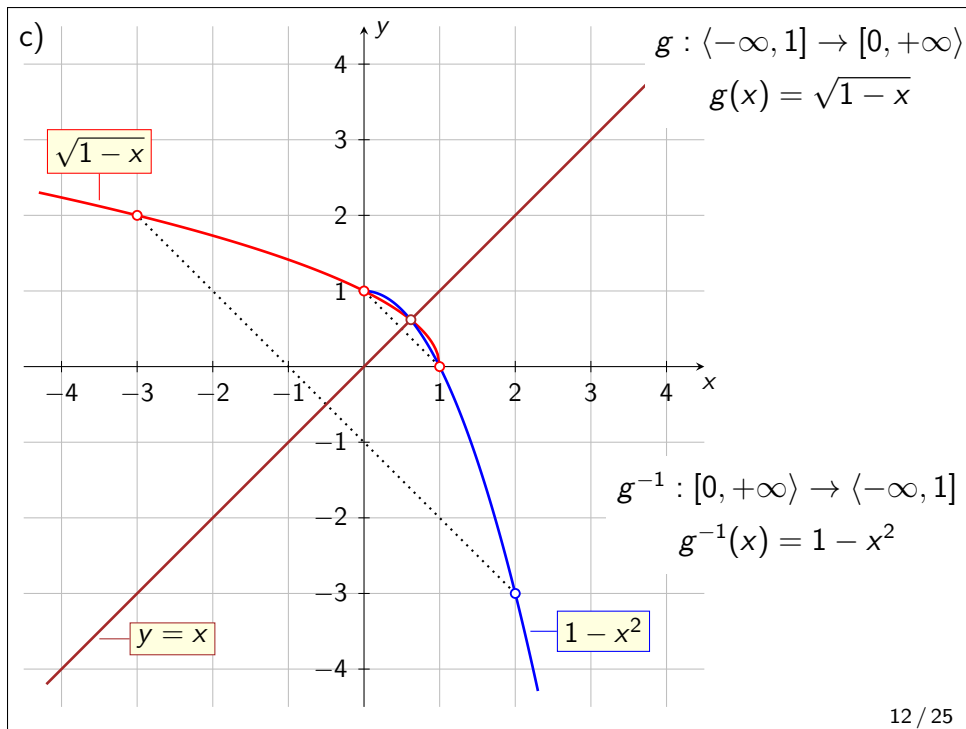
$$g : \langle -\infty, 1] \rightarrow [0, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{1-x}$$

$$g^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow \langle -\infty, 1]$$

$$g^{-1}(x) = 1 - x^2$$

11 / 25



a) Za petnaestu nagradu dodjeljuje se 1500 kn.

$$a_{15} = a_1 + 14d = 5000 + 14 \cdot (-250) = 1500$$

b) $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$a_1 = 5000$$

$$d = -250$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15})$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(5000 + 1500)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \cdot 6500$$

$$S_{15} = 48\,750$$

Ukupni novčani fond za nagrade iznosi 48 750 kn.

14 / 25

Zadatak 4

Na nekom natjecanju je podijeljeno ukupno 15 nagrada. Uz prvu nagradu dodjeljuje se i novčani iznos od 5000 kn, a uz svaku sljedeću novčani iznos za 250 kn manji nego uz prethodnu nagradu.

- Koliki se novčani iznos dodjeljuje uz petnaestu nagradu?
- Koliki je ukupni novčani fond za nagrade?
- Koliko je ukupno novaca podijeljeno od devete do četrnaeste nagrade?

Rješenje

- Neka je a_n iznos u kunama koji se dodjeljuje za n -tu nagradu.
- Tada je (a_n) aritmetički niz u kojemu je $a_1 = 5000$ i $d = -250$.

13 / 25

c) $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$a_1 = 5000$$

$$d = -250$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}(2 \cdot 5000 + 13 \cdot (-250)) \quad S_8 = \frac{8}{2}(2 \cdot 5000 + 7 \cdot (-250))$$

$$S_{14} = \frac{14}{2} \cdot 6750$$

$$S_8 = \frac{8}{2} \cdot 8250$$

$$S_{14} = 47\,250$$

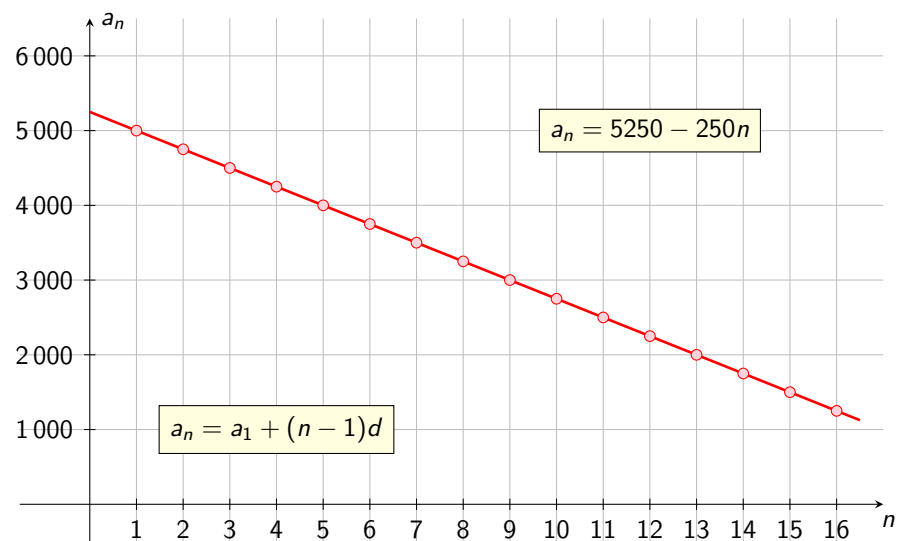
$$S_8 = 33\,000$$

$$S_{14} - S_8 = 47\,250 - 33\,000 = 14\,250$$

Od devete do četrnaeste nagrade podijeljeno je ukupno 14 250 kn.

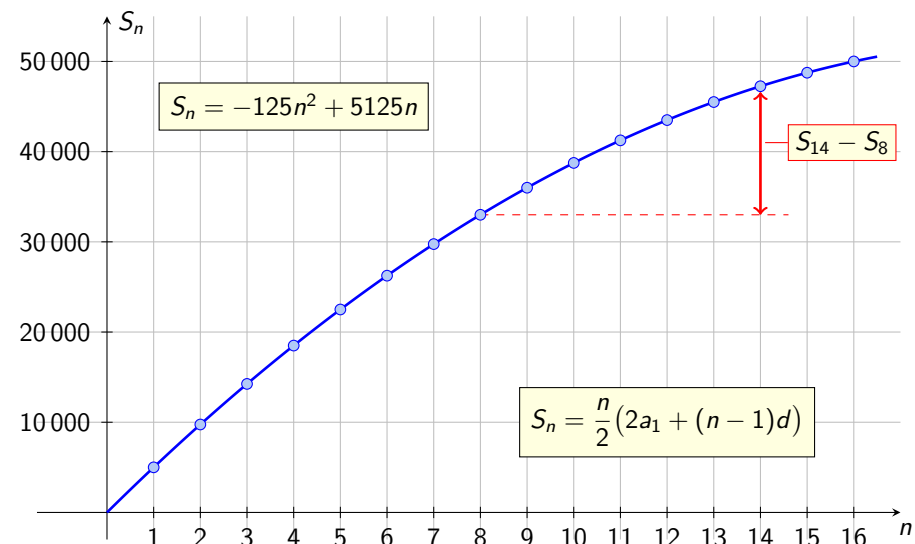
15 / 25

Niz (a_n) – dijagram točkama



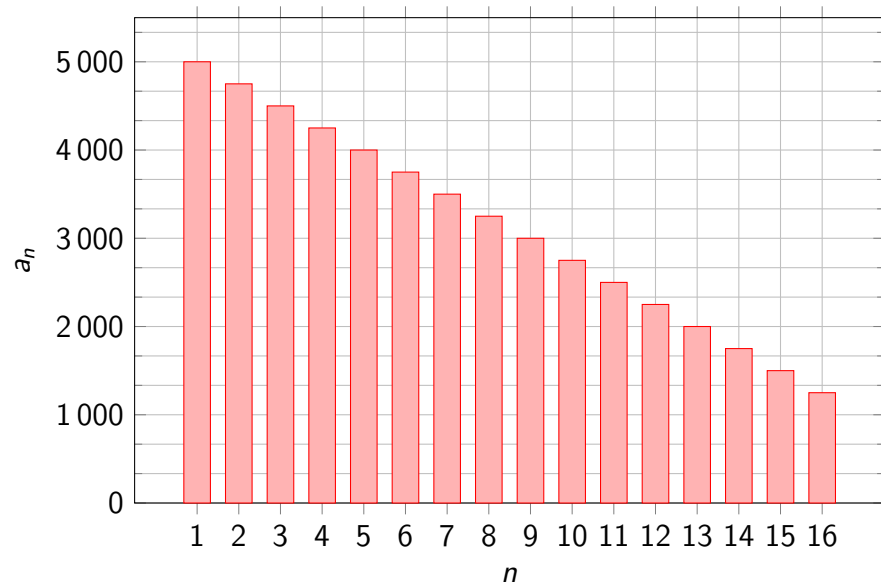
16 / 25

Niz (S_n) – dijagram točkama



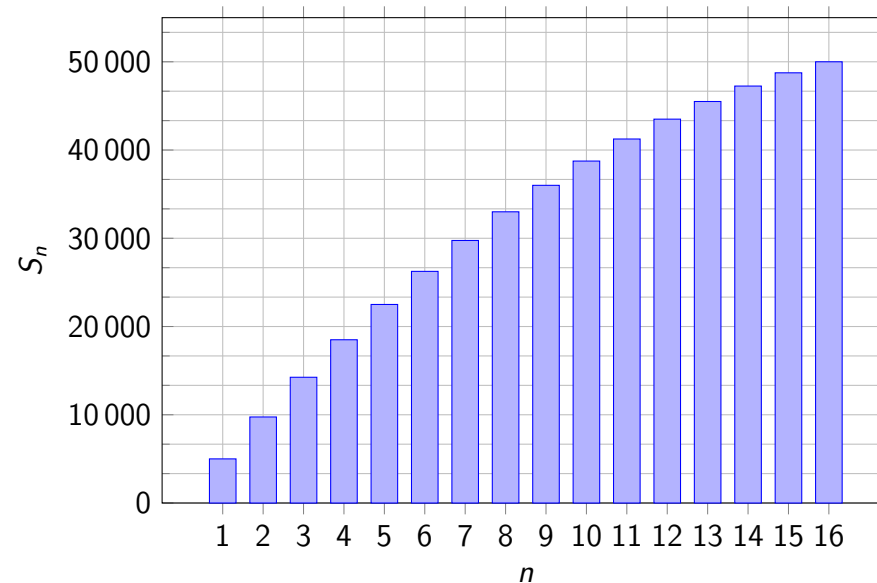
18 / 25

Niz (a_n) – uspravni stupci



17 / 25

Niz (S_n) – uspravni stupci



19 / 25

Zadatak 5

Petar zarađuje godišnje 40 000 kn. Ako mu se svake godine godišnja zarada poveća za 2% u odnosu na prethodnu godinu, koliko će Petar ukupno zaraditi nakon 10 godina? Koliko će Petar zaraditi u desetoj godini?

Rješenje

- Neka je a_n Petrova zarada u n -toj godini.
- Iz uvjeta zadatka imamo

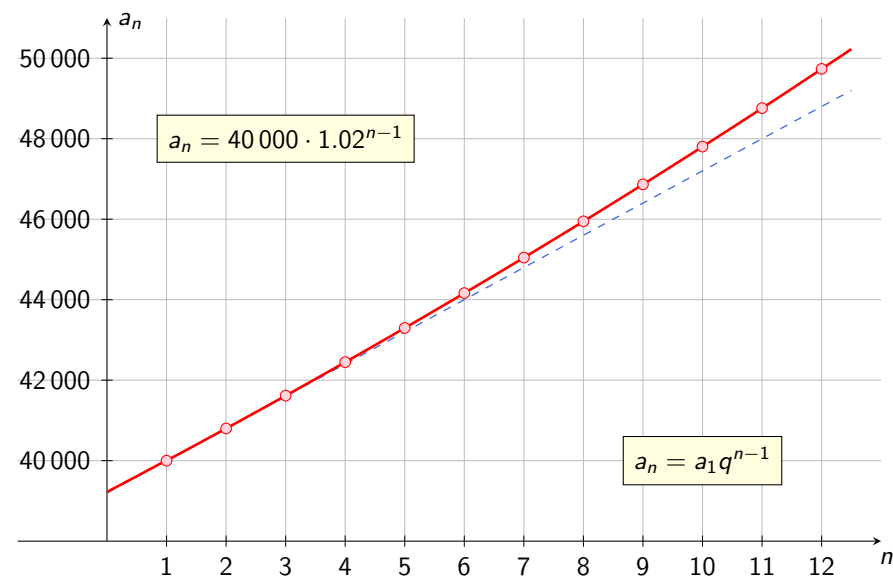
$$a_n = a_{n-1} + \frac{2}{100} a_{n-1} = 1.02 a_{n-1}$$

pa je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1.02$.

- Stoga je (a_n) geometrijski niz u kojemu je $a_1 = 40\,000$ i $q = 1.02$.

20 / 25

Niz (a_n) – dijagram točkama



22 / 25

$$n = 10$$

$$a_1 = 40\,000$$

$$q = 1.02$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{10} = 40\,000 \cdot \frac{1.02^{10} - 1}{1.02 - 1}$$

$$S_{10} = 437\,988.84$$

Nakon 10 godina Petar će zaraditi ukupno 437 988.84 kn.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

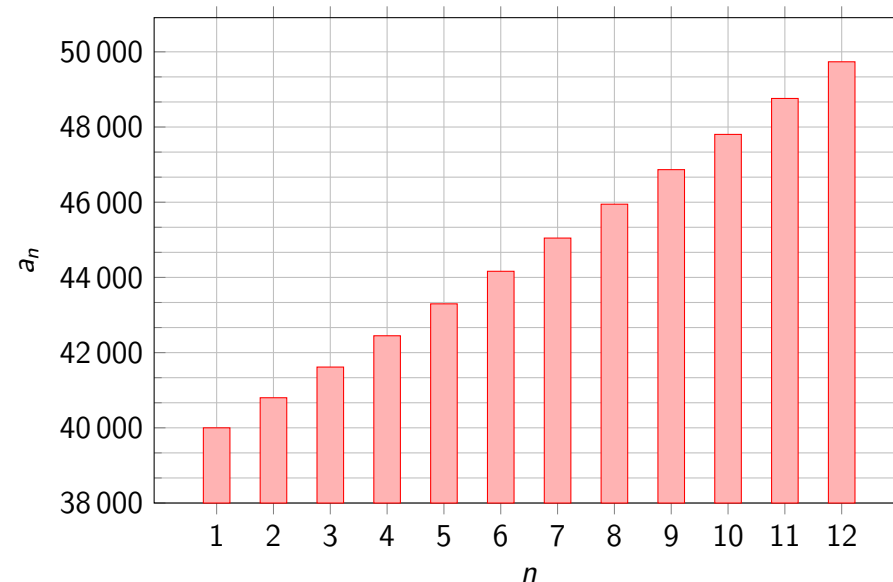
$$a_{10} = 40\,000 \cdot 1.02^9$$

$$a_{10} = 47\,803.70$$

U desetoj godini Petar će zaraditi 47 803.70 kn.

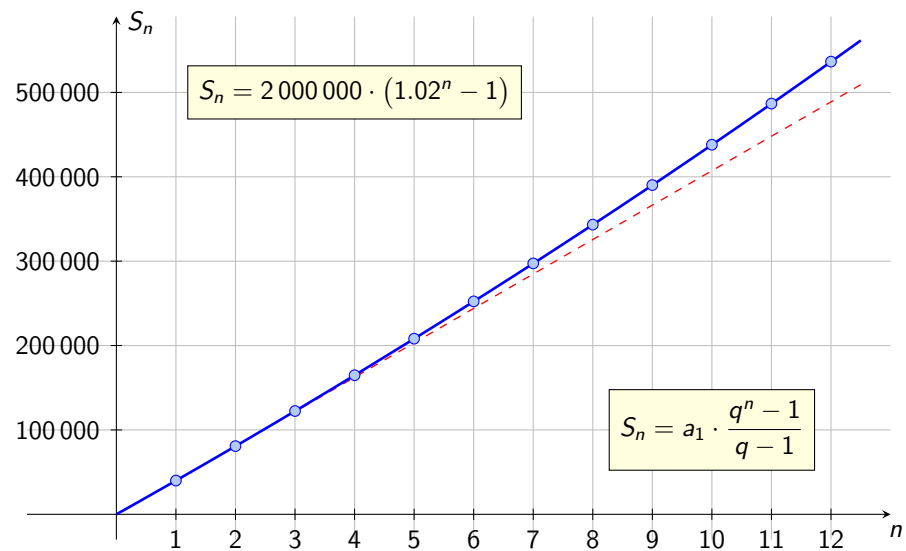
21 / 25

Niz (a_n) – uspravni stupci



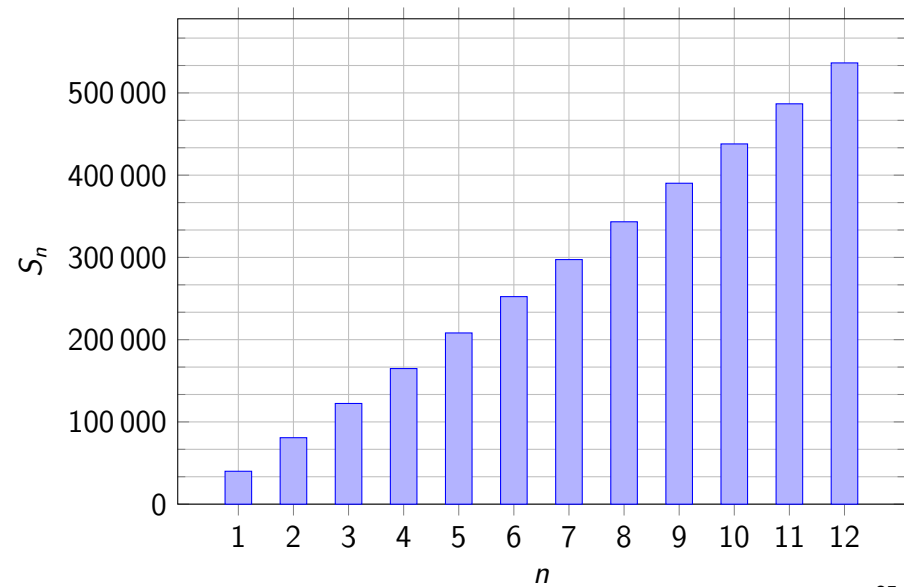
23 / 25

Niz (S_n) – dijagram točkama



24 / 25

Niz (S_n) – uspravni stupci



25 / 25