

Seminari 11

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Rješenje

$$\text{a) } a = 3200 \text{ kn, } n = 20 \text{ kvartala, } r = \sqrt[4]{1.132}$$

$$K = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} = 3200 \cdot \frac{\sqrt[4]{1.132}^{20} - 1}{\sqrt[4]{1.132}^{20} \cdot (\sqrt[4]{1.132} - 1)} = 46\,962.15$$

$$\text{b) } a = 3200 \text{ kn, } n = 20 \text{ kvartala, } p' = \frac{13.2}{4} = 3.3$$

$$r = 1 + \frac{p'}{100} = 1.033$$

$$K = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} = 3200 \cdot \frac{1.033^{20} - 1}{1.033^{20} \cdot (1.033 - 1)} = 46\,313.85$$

Za dužnika je povoljniji konformni obračun kamata.

2/23

Zadatak 1

Izračunajte visinu kredita ako ga dužnik mora vratiti kvartalnim otplatama od 3200 kn tijekom 5 godina uz godišnju kamatnu stopu 13.2% i

- a) konformno ukamaćivanje,
- b) relativno ukamaćivanje.

1/23

Zadatak 2

Kredit od 90 000 kn treba otplatiti u roku od 10 godina polugodišnjim anuitetima i godišnju kamatnu stopu od 6.47%. Nakon točno četiri godine otplate kredita kamatna stopa je povećana za 0.5%. Izračunajte oba anuiteta i sastavite otplatnu tablicu za drugu godinu otplate kredita. Ukamaćivanje je cijelo vrijeme relativno.

3/23

Rješenje

- Relativna polugodišnja kamatna stopa: $p_1 = \frac{6.47}{2} = 3.235$
- Polugodišnji kamatni faktor: $r_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1.03235$
- $n_1 = 20$ polugodišta
- Prvi anuitet

$$a_1 = K \cdot \frac{r_1^{n_1} \cdot (r_1 - 1)}{r_1^{n_1} - 1}$$

$$a_1 = 90\,000 \cdot \frac{1.03235^{20} \cdot (1.03235 - 1)}{1.03235^{20} - 1}$$

$$a_1 = 6181.61$$

$$a = K \cdot \frac{r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1} \quad 4/23$$

- Nova godišnja kamatna stopa: $6.47 + 0.5 = 6.97$

- Nova relativna polugodišnja kamatna stopa:

$$p_2 = \frac{6.97}{2} = 3.485$$

- Novi polugodišnji kamatni faktor: $r_2 = 1 + \frac{p_2}{100} = 1.03485$
- $n_2 = n_1 - 8 = 20 - 8 = 12$ polugodišta
- Drugi anuitet

$$a_2 = O_8 \cdot \frac{r_2^{n_2} \cdot (r_2 - 1)}{r_2^{n_2} - 1}$$

$$a_2 = 60\,677.46 \cdot \frac{1.03485^{12} \cdot (1.03485 - 1)}{1.03485^{12} - 1}$$

$$a_2 = 6273.60$$

$$a = K \cdot \frac{r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1} \quad 6/23$$

- Ostatak duga nakon 4 godine, tj. nakon 8 polugodišnjih otplata

$$O_8 = a_1 \cdot \frac{r_1^{n_1-8} - 1}{r_1^{n_1-8} \cdot (r_1 - 1)}$$

$$O_8 = 6181.61 \cdot \frac{1.03235^{20-8} - 1}{1.03235^{20-8} \cdot (1.03235 - 1)}$$

$$O_8 = 60\,677.46$$

$$O_k = a \cdot \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k} \cdot (r - 1)} \quad 5/23$$

$$O_k = a \cdot \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k} \cdot (r - 1)}$$

$$I_k = O_{k-1}(r - 1)$$

$$R_k = a - I_k$$

$$O_k = O_{k-1} - R_k$$

- Otplatna tablica

k	a	I _k	R _k	O _k
2	—	—	—	83 353.99
3	6181.61	2696.50	3485.11	79 868.88
4	6181.61	2583.76	3597.85	76 271.03

$$O_2 = 6181.61 \cdot \frac{1.03235^{20-2} - 1}{1.03235^{20-2} \cdot (1.03235 - 1)} = 83\,353.99$$

$$I_3 = O_2(r_1 - 1) = 83\,353.99 \cdot (1.03235 - 1) = 2696.50$$

$$R_3 = a - I_3 = 6181.61 - 2696.50 = 3485.11$$

$$O_3 = O_2 - R_3 = 83\,353.99 - 3485.11 = 79\,868.88$$

$$I_4 = O_3(r_1 - 1) = 79\,868.88 \cdot (1.03235 - 1) = 2583.76$$

$$R_4 = a - I_4 = 6181.61 - 2583.76 = 3597.85$$

$$O_4 = O_3 - R_4 = 79\,868.88 - 3597.85 = 76\,271.03$$

8/23

Rješenje

- Relativna mjesečna kamatna stopa: $p' = \frac{7.2}{12} = 0.6$

- Mjesečni kamatni faktor: $r = 1 + \frac{p'}{100} = 1.006$

- $n_1 = 60$ mjeseci

- Prvi anuitet

$$a_1 = K \cdot \frac{r^{n_1} \cdot (r - 1)}{r^{n_1} - 1}$$

$$a_1 = 85\,000 \cdot \frac{1.006^{60} \cdot (1.006 - 1)}{1.006^{60} - 1}$$

$$a_1 = 1691.13$$

$$a = K \cdot \frac{r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1} \quad 10/23$$

Zadatak 3

Kredit visine 85 000 kn odobren je na pet godina uz otplatu mjesečnim anuitetima. Nakon dvije godine podigne se dopunski kredit od 25 000 kn koji se otplaćuje zajedno s preostalim dijelom starog kredita u dogovoreno vrijeme. Izračunajte oba anuiteta i izradite otplatnu tablicu za prva tri mjeseca četvrte godine otplate kredita. Godišnja kamatna stopa iznosi 7.2%, a ukamaćivanje je cijelo vrijeme relativno.

9/23

- Ostatak duga nakon 2 godine, tj. nakon 24 mjesečnih otplata

$$O_{24} = a_1 \cdot \frac{r^{n_1-24} - 1}{r^{n_1-24} \cdot (r - 1)}$$

$$O_{24} = 1691.13 \cdot \frac{1.006^{60-24} - 1}{1.006^{60-24} \cdot (1.006 - 1)}$$

$$O_{24} = 54\,607.85$$

$$O_k = a \cdot \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k} \cdot (r - 1)}$$

11/23

- Novi ostatak duga: $K' = O_{24} + 25\,000 = 79\,607.85$
- $n_2 = n_1 - 24 = 60 - 24 = 36$ mjeseci
- Drugi anuitet

$$a_2 = K' \cdot \frac{r^{n_2} \cdot (r - 1)}{r^{n_2} - 1}$$

$$a_2 = 79\,607.85 \cdot \frac{1.006^{36} \cdot (1.006 - 1)}{1.006^{36} - 1}$$

$$a_2 = 2465.35$$

$$a = K \cdot \frac{r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

12/23

$$O_{36(12)} = 2465.35 \cdot \frac{1.006^{36-12} - 1}{1.006^{36-12} \cdot (1.006 - 1)} = 54\,952.49$$

$$I_{37} = O_{36}(r - 1) = 54\,952.49 \cdot (1.006 - 1) = 329.71$$

$$R_{37} = a - I_{37} = 2465.35 - 329.71 = 2135.64$$

$$O_{37} = O_{36} - R_{37} = 54\,952.49 - 2135.64 = 52\,816.85$$

$$I_{38} = O_{37}(r - 1) = 52\,816.85 \cdot (1.006 - 1) = 316.90$$

$$R_{38} = a - I_{38} = 2465.35 - 316.90 = 2148.45$$

$$O_{38} = O_{37} - R_{38} = 52\,816.85 - 2148.45 = 50\,668.41$$

$$I_{39} = O_{38}(r - 1) = 50\,668.41 \cdot (1.006 - 1) = 304.01$$

$$R_{39} = a - I_{39} = 2465.35 - 304.01 = 2161.34$$

$$O_{39} = O_{38} - R_{39} = 50\,668.41 - 2161.34 = 48\,507.07$$

14/23

$$O_k = a \cdot \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k} \cdot (r - 1)}$$

$$I_k = O_{k-1}(r - 1)$$

$$R_k = a - I_k$$

$$O_k = O_{k-1} - R_k$$

- Otplatna tablica

k	a	I_k	R_k	O_k
36	—	—	—	54 952.49
37	2465.35	329.71	2135.64	52 816.85
38	2465.35	316.90	2148.45	50 668.41
39	2465.35	304.01	2161.34	48 507.07

13/23

Zadatak 4

Dogovoreno je da se kredit visine 190 000 kn otplati tijekom 7 godina jednakim kvartalnim anuitetima i relativno ukamaćivanje uz godišnju kamatnu stopu 10.9% i početak od godinu dana. Nakon 20 otplata prijedeno je na otplatu mjesečnim anuitetima, a kamatna stopa je smanjena na 10.5%. Odredite interkalarne kamate, prvi i drugi anuitet, ukupno plaćene kamate i uštedu na kamatama uslijed smanjenja kamatne stope.

15/23

Rješenje

- Relativna kvartalna kamatna stopa: $p_1 = \frac{10.9}{4} = 2.725$
- Kvartalni kamatni faktor: $r_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1.02725$
- $n_1 = 28$ kvartala
- Prvi anuitet

$$a_1 = K \cdot \frac{r_1^{n_1} \cdot (r_1 - 1)}{r_1^{n_1} - 1}$$

$$a_1 = 190\,000 \cdot \frac{1.02725^{28} \cdot (1.02725 - 1)}{1.02725^{28} - 1}$$

$$a_1 = 9788.28$$

$$a = K \cdot \frac{r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

16/23

- Relativna mjesečna kamatna stopa: $p_2 = \frac{10.5}{12} = 0.875$
- Mjesečni kamatni faktor: $r_2 = 1 + \frac{p_2}{100} = 1.00875$
- $n_2 = n_1 - 20 = 28 - 20 = 8$ kvartala = 24 mjeseci
- Drugi anuitet

$$a_2 = O_{20} \cdot \frac{r_2^{n_2} \cdot (r_2 - 1)}{r_2^{n_2} - 1}$$

$$a_2 = 69\,514.82 \cdot \frac{1.00875^{24} \cdot (1.00875 - 1)}{1.00875^{24} - 1}$$

$$a_2 = 3223.82$$

$$a = K \cdot \frac{r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

18/23

- Ostatak duga nakon 20 kvartalnih otplata

$$O_{20} = a_1 \cdot \frac{r_1^{n_1-20} - 1}{r_1^{n_1-20} \cdot (r_1 - 1)}$$

$$O_{20} = 9788.28 \cdot \frac{1.02725^{28-20} - 1}{1.02725^{28-20} \cdot (1.02725 - 1)}$$

$$O_{20} = 69\,514.82$$

$$O_k = a \cdot \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k} \cdot (r - 1)}$$

17/23

- Interkalarne kamate za jedno razdoblje (kvartal)

$$I_{ik}^{(1)} = K \cdot \frac{p_1}{100} = 190\,000 \cdot \frac{2.725}{100} = 5177.5$$

- Ukupne interkalarne kamate (jedna godina)

$$I_{ik} = 4I_{ik}^{(1)} = 4 \cdot 5177.5 = 20\,710$$

- Ukupno plaćene kamate

$$I = 20a_1 + 24a_2 - 190\,000$$

$$I = 20 \cdot 9788.28 + 24 \cdot 3223.82 - 190\,000$$

$$I = 83\,137.28$$

- Ušteda na kamatama uslijed smanjenja kamatne stope

$$U = 8a_1 - 24a_2$$

$$U = 8 \cdot 9788.28 - 24 \cdot 3223.82$$

$$U = 934.56$$

19/23

Zadatak 5

Kredit visine 117 000 kn treba otplatiti mjesečnim otplatama tijekom pet godina. Kredit je dogovoren uz uvjet otplate jednakim otplatnim kvotama krajem razdoblja i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 7.2%. Izradite otplatnu tablicu za posljednja četiri mjeseca otplate kredita.

20/23

$$R = \frac{K}{n} = \frac{117\,000}{60} = 1950$$

$$O_{56} = (60 - 56) \cdot R = 4 \cdot 1950 = 7800$$

$$O_{57} = (60 - 57) \cdot R = 3 \cdot 1950 = 5850$$

$$O_{58} = (60 - 58) \cdot R = 2 \cdot 1950 = 3900$$

$$O_{59} = (60 - 59) \cdot R = 1 \cdot 1950 = 1950$$

$$O_{60} = (60 - 60) \cdot R = 0 \cdot 1950 = 0$$

22/23

$$O_k = K - kR = nR - kR = (n - k)R$$

$$I_k = O_{k-1}(r - 1)$$

Rješenje

$$a_k = I_k + R$$

- Mjesečni kamatni faktor

$$p' = \frac{7.2}{12} = 0.6 \quad r = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{0.6}{100} = 1.006$$

k	a_k	I_k	R	O_k
56	—	—	—	7800
57	1996.80	46.80	1950	5850
58	1985.10	35.10	1950	3900
59	1973.40	23.40	1950	1950
60	1961.70	11.70	1950	0

21/23

$$I_{57} = O_{56}(r - 1) = 7800 \cdot (1.006 - 1) = 46.80$$

$$I_{58} = O_{57}(r - 1) = 5850 \cdot (1.006 - 1) = 35.10$$

$$I_{59} = O_{58}(r - 1) = 3900 \cdot (1.006 - 1) = 23.40$$

$$I_{60} = O_{59}(r - 1) = 1950 \cdot (1.006 - 1) = 11.70$$

$$a_{57} = I_{57} + R = 46.80 + 1950 = 1996.80$$

$$a_{58} = I_{58} + R = 35.10 + 1950 = 1985.10$$

$$a_{59} = I_{59} + R = 23.40 + 1950 = 1973.40$$

$$a_{60} = I_{60} + R = 11.70 + 1950 = 1961.70$$

23/23