

Zadatak 2

Roditelji su štedjeli za studij svoje djece. Od 1.11.2007. na račun su uplaćivali 420 € početkom svakog mjeseca tijekom 80 mjeseci. Od 1.2.2015. svako od dvoje djece dobiva mjesečnu rentu tijekom iduće četiri godine. O kojem se iznosu radi ako je godišnja kamatna stopa 4.5%?

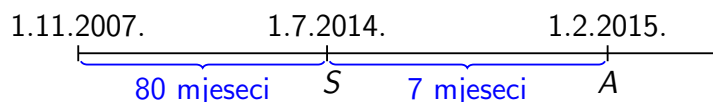
4/28

Zadatak 3

Netko uplati tri puta u razmacima od 9 mjeseci 15 000 kn uz godišnju kamatnu stopu 5.5%. Šest mjeseci nakon prve uplate podigne 12 000 kn. Na osnovu svote s kojom raspolaže četiri godine nakon prve uplate želi primati postnumerando mjesečnu rentu visine 3500 kn. Koliko će takvih renti primiti i kolika je krnja isplata?

6/28

Rješenje



$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 420 \cdot \sqrt[12]{1.045} \cdot \frac{\sqrt[12]{1.045}^{80} - 1}{\sqrt[12]{1.045} - 1} = 39\,121.33$$

$$A = S \cdot r^7 = 39\,121.33 \cdot \sqrt[12]{1.045}^7 = 40\,138.84$$

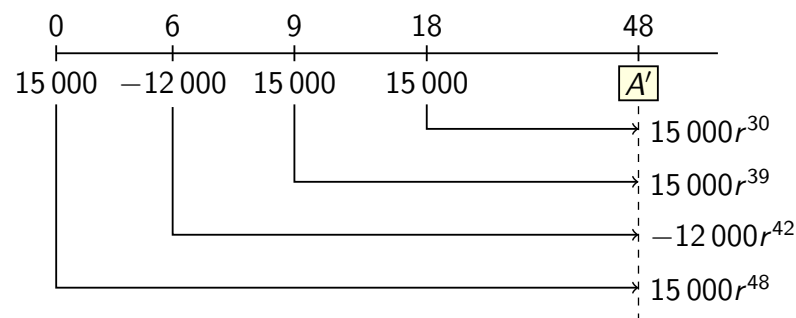
$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)} \quad R = \frac{A \cdot r^{n-1} \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$R = \frac{40\,138.84 \cdot \sqrt[12]{1.045}^{47} \cdot (\sqrt[12]{1.045} - 1)}{\sqrt[12]{1.045}^{48} - 1} = 910.33$$

Svako dijete dobiva mjesečno 455.16 €.

5/28

Rješenje



$$A' = 15\,000r^{48} - 12\,000r^{42} + 15\,000r^{39} + 15\,000r^{30}$$

$$A' = 15\,000 \cdot \sqrt[12]{1.055}^{48} - 12\,000 \cdot \sqrt[12]{1.055}^{42} + 15\,000 \cdot \sqrt[12]{1.055}^{39} + 15\,000 \cdot \sqrt[12]{1.055}^{30}$$

$$A' = 39\,108.48$$

7/28

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} \quad n = \frac{\log \frac{R}{R - A' \cdot (r - 1)}}{\log r}$$

$$n = \frac{\log \frac{3500}{3500 - 39\,108.48 \cdot (\sqrt[12]{1.055} - 1)}}{\log \sqrt[12]{1.055}} = 11.48$$

Dakle, $n = 11$, tj. može se primiti 11 isplata visine 3500 kn.

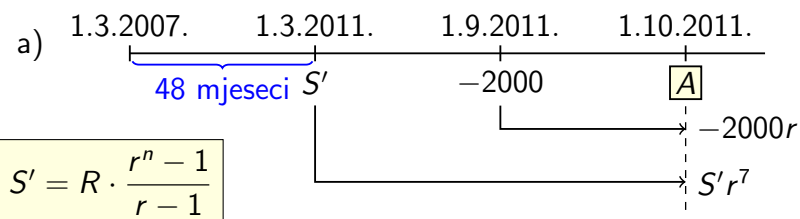
Krnja isplata

$$R' = \left(A' - R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} \right) \cdot r^{n+1} \quad R' = 1710.93$$

$$R' = \left(39\,108.48 - 3500 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.055}^{11} - 1}{\sqrt[12]{1.055}^{11} \cdot (\sqrt[12]{1.055} - 1)} \right) \cdot \sqrt[12]{1.055}^{11+1}$$

8/28

Rješenje



$$R = 500 + 700 = 1200$$

$$S' = 1200 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.065}^{48} - 1}{\sqrt[12]{1.065} - 1} = 65\,332.50$$

$$A = S' r^7 - 2000r$$

$$A = 65\,332.50 \cdot \sqrt[12]{1.065}^7 - 2000 \cdot \sqrt[12]{1.065}$$

$$A = 65\,766.61$$

10/28

Zadatak 4

Ivan ima brižne roditelje i strica Stjepana. Kako bi Ivanu osigurali bezbrižno studiranje, njegovi roditelji zajedno sa stricom Stjepanom su otvorili račun u banci. Krajem svakog mjeseca tijekom četiri godine, počevši od ožujka 2007., roditelji izdvajaju 500 kn, a stric Stjepan 700 kn i ukupni iznos uplaćuju na Ivanov račun. Zbog troškova upisa na fakultet, Ivan je sa svojeg računa 1. rujna 2011. godine podigao 2000 kn.

- a) Od 1. listopada 2011. Ivan želi početkom svakog mjeseca primiti rentu u iznosu od 1200 kn. Koliko takvih isplata Ivan može primiti temeljem iznosa s kojim raspolaže na svojem računu?
- b) Kolika je krnja isplata?

Godišnja kamatna stopa je 6.5%.

9/28

$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)} \quad n = \frac{\log \frac{R \cdot r}{R \cdot r - A \cdot (r - 1)}}{\log r}$$

$$n = \frac{\log \frac{1200 \cdot \sqrt[12]{1.065}}{1200 \cdot \sqrt[12]{1.065} - 65\,766.61 \cdot (\sqrt[12]{1.065} - 1)}}{\log \sqrt[12]{1.065}} = 64.42$$

Dakle, $n = 64$, tj. Ivan može primiti 64 isplate visine 1200 kn.

b) Krnja isplata

$$R' = \left(A - R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)} \right) \cdot r^n \quad R' = 506.70$$

$$R' = \left(65\,766.61 - 1200 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.065}^{64} - 1}{\sqrt[12]{1.065}^{64-1} \cdot (\sqrt[12]{1.065} - 1)} \right) \cdot \sqrt[12]{1.065}^{64}$$

11/28

Zadatak 5

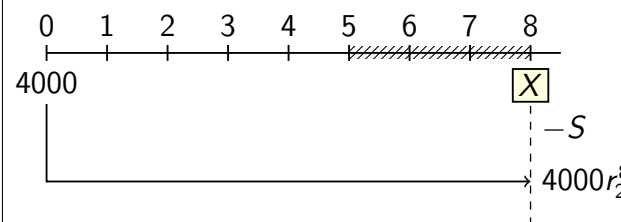
Tomislav je uložio u banku 4000 €.

- a) Kolikim će iznosom raspolagati na kraju osme godine ako u posljednje tri godine bude podizao iz banke po 500 € početkom svakog kvartala?
- b) Ukoliko od kraja desete godine od raspoloživog iznosa Tomislav želi primati prenumerando mjesečne isplate visine 300 €, koliko takvih isplata može primiti i kolika je krnja isplata?

Polugodišnja kamatna stopa je 5.1%.

12/28

a) **Drugi način:** preko prenumerando uplata



$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

kvartalni dekurzivni
kamatni faktor

$$r_1 = \sqrt{1.051}$$

godišnji dekurzivni
kamatni faktor

$$r_2 = 1.051^2$$

$$S = R \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^n - 1}{r_1 - 1}$$

$$S = 500 \cdot \sqrt{1.051} \cdot \frac{\sqrt{1.051}^{12} - 1}{\sqrt{1.051} - 1} = 7078.798$$

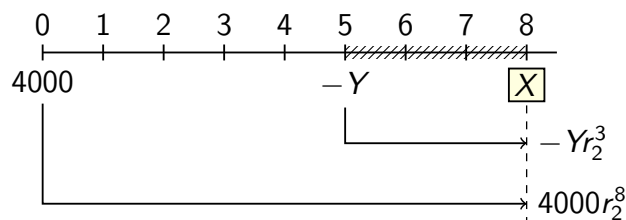
$$X = 4000r_2^8 - S$$

$$X = 4000 \cdot (1.051^2)^8 - 7078.798 = 1786.71$$

14/28

Rješenje

a) **Prvi način:** preko prenumerando isplata



$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)}$$

kvartalni dekurzivni
kamatni faktor

$$r_1 = \sqrt{1.051}$$

godišnji dekurzivni
kamatni faktor

$$r_2 = 1.051^2$$

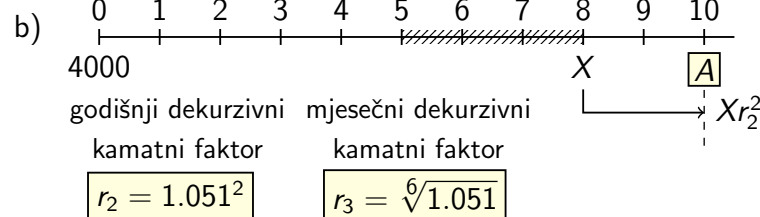
$$Y = R \cdot \frac{r_1^n - 1}{r_1^{n-1} \cdot (r_1 - 1)}$$

$$Y = 500 \cdot \frac{\sqrt{1.051}^{12} - 1}{\sqrt{1.051}^{12-1} \cdot (\sqrt{1.051} - 1)} = 5252.22$$

$$X = 4000r_2^8 - Yr_2^3$$

$$X = 4000 \cdot (1.051^2)^8 - 5252.22 \cdot (1.051^2)^3 = 1786.71$$

13/28



$$A = Xr_2^2 = 1786.71 \cdot (1.051^2)^2 = 2180.04$$

$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)} \quad n = \frac{\log \frac{R \cdot r_3}{R \cdot r_3 - A \cdot (r_3 - 1)}}{\log r_3}$$

$$n = \frac{\log \frac{300 \cdot \sqrt[6]{1.051}}{300 \cdot \sqrt[6]{1.051} - 2180.04 \cdot (\sqrt[6]{1.051} - 1)}}{\log \sqrt[6]{1.051}} = 7.46 \quad \boxed{n = 7}$$

Tomislav može primiti ukupno 7 mjesečnih isplata visine 300 €.

15/28

Krnja isplata

$$R' = \left(A - R \cdot \frac{r_3^n - 1}{r_3^{n-1} \cdot (r_3 - 1)} \right) \cdot r_3^n$$

$$R' = \left(2180.04 - 300 \cdot \frac{\sqrt[6]{1.051}^7 - 1}{\sqrt[6]{1.051}^{7-1} \cdot (\sqrt[6]{1.051} - 1)} \right) \cdot \sqrt[6]{1.051}^7$$

$$R' = 139.19$$

Krnja isplata iznosi 139.19 €.

16/28

Zadatak 6

Godine 2000. ustanovljena je znanstvena zaklada za školarine s fondom od 300 000 € tako da kamate omogućuju vječne rente visine 40 000 € krajem svake godine.

- Uz koju je godišnju kamatnu stopu uložen polazni iznos?
- Na kraju 2010. godine kamatna stopa je promijenjena na 9.5%. Kolika je u tom slučaju visina godišnjih, a kolika mjesečnih isplata krajem razdoblja?
- Umjesto da se nastavi s vječnim isplatama, od 2015. godine zaklada se odlučila za konačni broj isplata visine 40 000 € krajem svake godine. Koliko je takvih renti moguće isplatiti i kolika je krnja isplata?

18/28

Vječna renta

• Postnumerando slučaj

$$\left(A'_\infty - \frac{R}{r} \right) \cdot r = A'_\infty \implies A'_\infty = \frac{R}{r-1}$$

$$A'_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A' = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)}$$

• Prenumerando slučaj

$$(A_\infty - R) \cdot r = A_\infty \implies A_\infty = \frac{Rr}{r-1}$$

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)}$$

• Veza između postnumerando i prenumerando vječne rente

$$A_\infty = A'_\infty + R$$

17/28

Rješenje

$$a) A'_\infty = 300\,000, \quad R = 40\,000$$

$$A'_\infty = \frac{R}{r-1}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$A'_\infty(r-1) = R$$

$$r-1 = \frac{p}{100}$$

$$r-1 = \frac{R}{A'_\infty}$$

$$p = 100(r-1)$$

$$p = 100 \cdot (1.1333 - 1)$$

$$r = \frac{R}{A'_\infty} + 1$$

$$p = 13.33$$

$$r = \frac{40\,000}{300\,000} + 1$$

Godišnja kamatna stopa iznosi 13.33%.

$$r = \frac{17}{15} \approx 1.1333$$

19/28

b) $A'_\infty = 300\,000$, $R = 40\,000$, $p = 9.5\%$

$$A'_\infty = \frac{R}{r-1}$$

- godišnji kamatni faktor: $r_1 = 1.095$

$$R_{\text{god}} = A'_\infty(r_1 - 1) = 300\,000 \cdot (1.095 - 1) = 28\,500$$

Visina godišnjih isplata jednaka je 28 500 €.

- mjesečni kamatni faktor: $r_2 = \sqrt[12]{1.095}$

$$R_{\text{mj}} = A'_\infty(r_2 - 1) = 300\,000 \cdot (\sqrt[12]{1.095} - 1) = 2277.46$$

Visina mjesečnih isplata jednaka je 2277.46 €.

20/28

Zadatak 7

Poslodavci su odlučili osnovati fond za stipendiranje trideset studenata informatike. Po završetku studija stipendiju dobiva novi student. Stipendije počinju s isplatom 1. rujna, a po studentu iznose 1200 kn mjesečno.

- Koliki iznos trebaju poslodavci uplatiti u fond 1. rujna da bi fond imao dostatna sredstva?
- Ukoliko odluče stipendije isplaćivati kvartalno u iznosu od 3600 kn, hoće li isti iznos biti dostatan?

Godišnja kamatna stopa iznosi 8%.

22/28

c) $A' = 300\,000$, $R = 40\,000$, $p = 9.5\%$

- broj isplata

$$n = \frac{\log \frac{R}{R - A' \cdot (r - 1)}}{\log r} = \frac{\log \frac{40\,000}{40\,000 - 300\,000 \cdot (1.095 - 1)}}{\log 1.095}$$

$$n = 13.74 \quad \boxed{n = 13}$$

Moguće je isplatiti ukupno 13 takvih renti visine 40 000 €.

- krnja isplata

$$R' = \left(A' - R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} \right) \cdot r^{n+1}$$

$$R' = \left(300\,000 - 40\,000 \cdot \frac{1.095^{13} - 1}{1.095^{13} \cdot (1.095 - 1)} \right) \cdot 1.095^{13+1}$$

$$R' = 29\,760.13$$

21/28

Rješenje

$$A_\infty = \frac{Rr}{r-1}$$

a) $R_1 = 30 \cdot 1200 = 36\,000$, $r_1 = \sqrt[12]{1.08}$

$$A_\infty = \frac{R_1 r_1}{r_1 - 1} = \frac{36\,000 \cdot \sqrt[12]{1.08}}{\sqrt[12]{1.08} - 1} = 5\,631\,248.92$$

Poslodavci trebaju uplatiti 5 631 248.92 kn.

b) $R_2 = 30 \cdot 3600 = 108\,000$, $r_2 = \sqrt[4]{1.08}$

$$A_\infty = \frac{R_2 r_2}{r_2 - 1} = \frac{108\,000 \cdot \sqrt[4]{1.08}}{\sqrt[4]{1.08} - 1} = 5\,667\,402.84$$

U ovom slučaju poslodavci bi trebali uplatiti veći iznos.

23/28

Zadatak 8

Rajka je odlučila štedjeti na način da krajem svakog mjeseca idućih 10 godina uplaćuje na posebni bankovni račun 10% svoje plaće. Trenutno zarađuje 3500 kn mjesečno, a godišnja stopa rasta plaće je 2.1%. Banka svoju imovinu ukamaćuje uz godišnju kamatnu stopu od 4.3%. Nakon isteka 10 godina, dvije godine nije trošila ušteđevinu, a zatim je odlučila da krajem svakog mjeseca idućih 5 godina podigne određeni iznos tako da svaki mjesec podigne 20 kn više nego prethodni mjesec. Koliko je Rajka uštedjela tijekom deset godina? Kolika je visina prve i posljednje isplate?

24/28

$$\text{uplate: } R, qR, q^2R, \dots, q^{n-1}R \quad \hat{S}' = R \cdot \frac{q^n - r^n}{q - r}$$

- Ukupna vrijednost svih uplata nakon 10 godina

$$\hat{S}' = S' \cdot \frac{q^n - r^n}{q - r} = 4282.15 \cdot \frac{1.021^{10} - 1.043^{10}}{1.021 - 1.043} = 56\,933.91$$

- Dvije godine nije bilo isplate ušteđevine

$$X = \hat{S}' \cdot 1.043^2 = 56\,933.91 \cdot 1.043^2 = 61\,935.5$$

26/28

Rješenje

- 10% Rajkine mjesečne plaće: $R = \frac{10}{100} \cdot 3500 = 350$

- Ukupna vrijednost uplata na kraju prve godine

$$S' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 350 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.043}^{12} - 1}{\sqrt[12]{1.043} - 1} = 4282.15$$

- Plaća godišnje raste za 2.1% pa je godišnji faktor rasta plaće $q = 1.021$. Stoga se mjesečne i godišnje ukupne uplate povećavaju za isti postotak.

- Mjesečne uplate tijekom pojedine godine kroz 10 godina

$$R, qR, q^2R, \dots, q^9R.$$

- Ukupne uplate tijekom pojedine godine kroz 10 godina

$$S', qS', q^2S', \dots, q^9S'.$$

25/28

$$\text{isplate: } R, 2R, 3R, \dots, nR \quad \hat{A}' = \frac{R}{r - 1} \left(\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)} - \frac{n}{r^n} \right)$$

- Iznos potreban za povećanje isplata (20 kn)

$$\hat{A}' = \frac{R}{r - 1} \left(\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)} - \frac{n}{r^n} \right)$$

$$\hat{A}' = \frac{20}{\sqrt[12]{1.043} - 1} \left(\frac{\sqrt[12]{1.043}^{60} - 1}{\sqrt[12]{1.043}^{60-1} (\sqrt[12]{1.043} - 1)} - \frac{60}{\sqrt[12]{1.043}^{60}} \right)$$

$$\hat{A}' = 31\,810.74$$

27/28

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)}$$

- Dio za fiksnu isplatu

$$\hat{F} = X - \hat{A}' = 61\,935.5 - 31\,810.74 = 30\,124.76$$

$$\hat{R} = \hat{F} \cdot \frac{r^n(r - 1)}{r^n - 1}$$

$$\hat{R} = 30\,124.76 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.043}^{60} \cdot (\sqrt[12]{1.043} - 1)}{\sqrt[12]{1.043}^{60} - 1}$$

$$\hat{R} = 557.76$$

- Prva isplata: $557.76 + 1 \cdot 20 = 577.76$
- Posljednja isplata: $557.76 + 60 \cdot 20 = 1757.76$