

## Seminari 12

### MATEMATIKA ZA EKONOMISTE 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

#### Zadatak 1

Investitoru je ponuđen projekt u koji bi trebalo uložiti 1800 kn odmah i 10 500 kn za dvije godine. Očekivani dobiti na kraju prve tri godine su dani u tablici.

godina	1.	2.	3.
očekivani dobiti	6050 kn	3750 kn	2500 kn

- a) Radi li se o isplativom projektu ako je cijena kapitala 8%?  
b) Radi li se o isplativom projektu ako je cijena kapitala 12%?

#### Rješenje

a)

godina	1.	2.	3.
očekivani dobiti	6050 kn	3750 kn	2500 kn

Izračunamo  $NPV$  danog projekta ako je cijena kapitala 8%.

$$NPV = F_0 + \frac{F_1}{r} + \frac{F_2}{r^2} + \frac{F_3}{r^3}$$

$$NPV = -1800 + \frac{6050}{1.08} + \frac{3750 - 10\,500}{1.08^2} + \frac{2500}{1.08^3}$$

$$NPV = -0.6046$$

Kako je  $NPV < 0$ , projekt nije isplativ uz cijenu kapitala od 8%.

b)

godina	1.	2.	3.
očekivani dobiti	6050 kn	3750 kn	2500 kn

Izračunamo  $NPV$  danog projekta ako je cijena kapitala 12%.

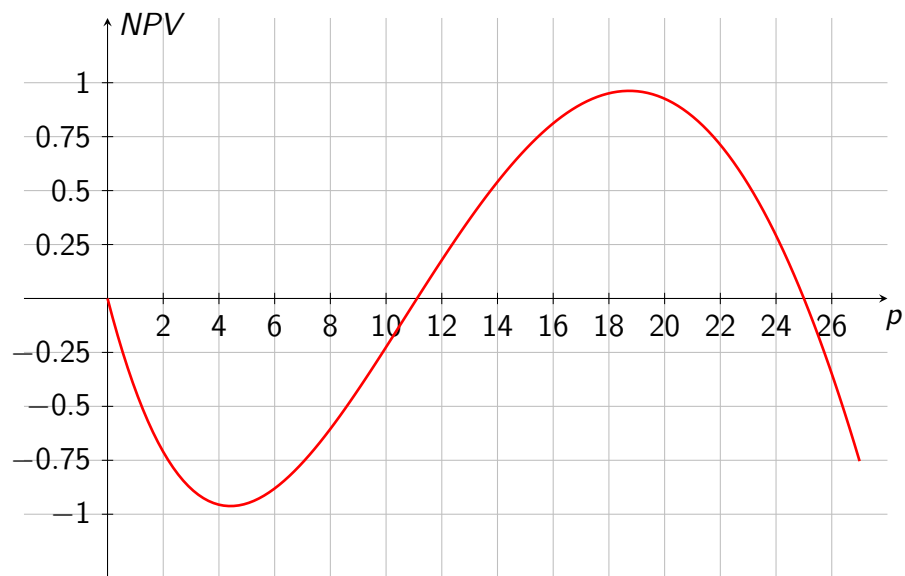
$$NPV = F_0 + \frac{F_1}{r} + \frac{F_2}{r^2} + \frac{F_3}{r^3}$$

$$NPV = -1800 + \frac{6050}{1.12} + \frac{3750 - 10\,500}{1.12^2} + \frac{2500}{1.12^3}$$

$$NPV = 0.18$$

Kako je  $NPV > 0$ , projekt je isplativ uz cijenu kapitala od 12%.

## NPV projekta kao funkcija cijene kapitala



4/30

### Rješenje

a)

godina	1.	2.	3.
očekivani dobiti	3000 €	3500 €	4000 €

Izračunamo *NPV* danog projekta za cijenu kapitala 4.5445%.

$$NPV = F_0 + \frac{F_1}{r} + \frac{F_2}{r^2} + \frac{F_3}{r^3}$$

$$NPV = -9000 + \frac{3000}{1.045445} + \frac{3500}{1.045445^2} + \frac{4000}{1.045445^3}$$

$$NPV = 572.63064$$

6/30

### Zadatak 2

U projekt treba uložiti 9 000 €. Očekivani dobiti na kraju prve tri godine su dani u tablici.

godina	1.	2.	3.
očekivani dobiti	3000 €	3500 €	4000 €

- Ispitajte koja je od ponuđenih kamatnih stopa 4.5445% i 7.7285% bolja aproksimacija za *IRR* zadanog projekta.
- Uz koju cijenu kapitala je promatrani projekt isplativ?
- Ako je cijena kapitala 5%, do kojeg uloženog iznosa je investitoru projekt isplativ?

5/30

godina	1.	2.	3.
očekivani dobiti	3000 €	3500 €	4000 €

Izračunamo *NPV* danog projekta za cijenu kapitala 7.7285%.

$$NPV = F_0 + \frac{F_1}{r} + \frac{F_2}{r^2} + \frac{F_3}{r^3}$$

$$NPV = -9000 + \frac{3000}{1.077285} + \frac{3500}{1.077285^2} + \frac{4000}{1.077285^3}$$

$$NPV = 0.00528$$

Kako je za cijenu kapitala 7.7285% *NPV* projekta bliže nuli, zaključujemo da je kamatna stopa 7.7285% bolja aproksimacija za *IRR* danog projekta.

7/30

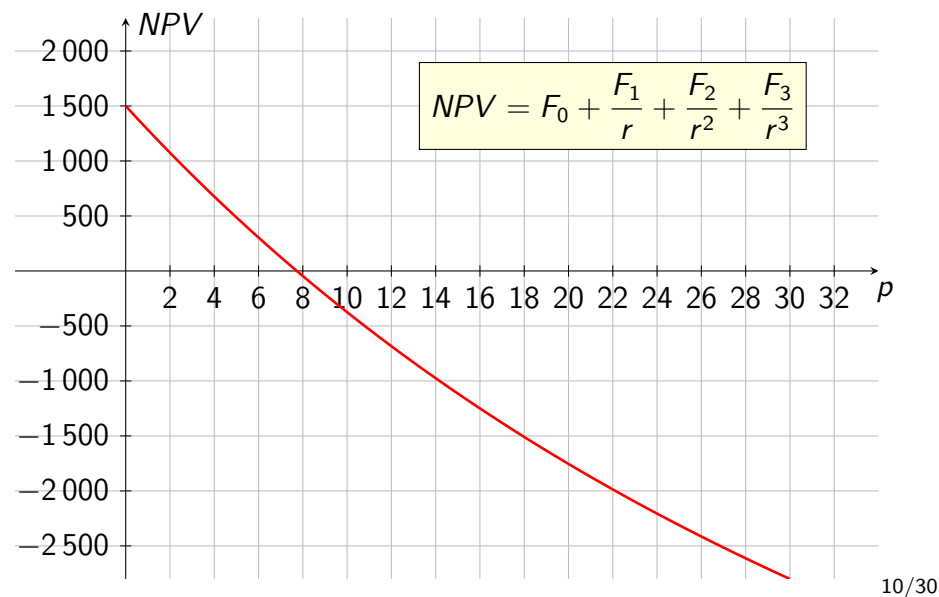
b) Projekt je isplativ po onoj cijeni kapitala  $p$  za koju vrijedi

$$p < IRR.$$

Iz prethodnog dijela zadatka smo dobili da je 7.7285% jako dobra aproksimacija za  $IRR$  promatranog projekta jer je po toj kamatnoj stopi  $NPV$  bio jako blizu nule. Stoga možemo reći da je projekt isplativ ako je cijena kapitala manja od 7.7285%.

8/30

## NPV projekta kao funkcija cijene kapitala



c)

godina	1.	2.	3.
očekivani dobici	3000 €	3500 €	4000 €

Investitoru je projekt isplativ do onog iznosa za koji je  $NPV = 0$  uz cijenu kapitala 5%.

$$NPV = F_0 + \frac{F_1}{r} + \frac{F_2}{r^2} + \frac{F_3}{r^3}$$

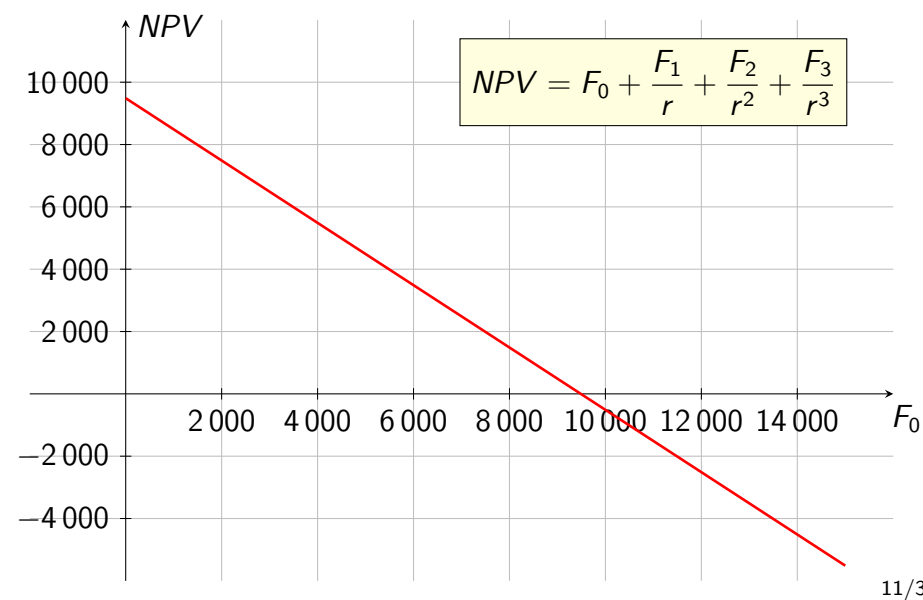
$$0 = F_0 + \frac{3000}{1.05} + \frac{3500}{1.05^2} + \frac{4000}{1.05^3}$$

$$F_0 = -9487.10$$

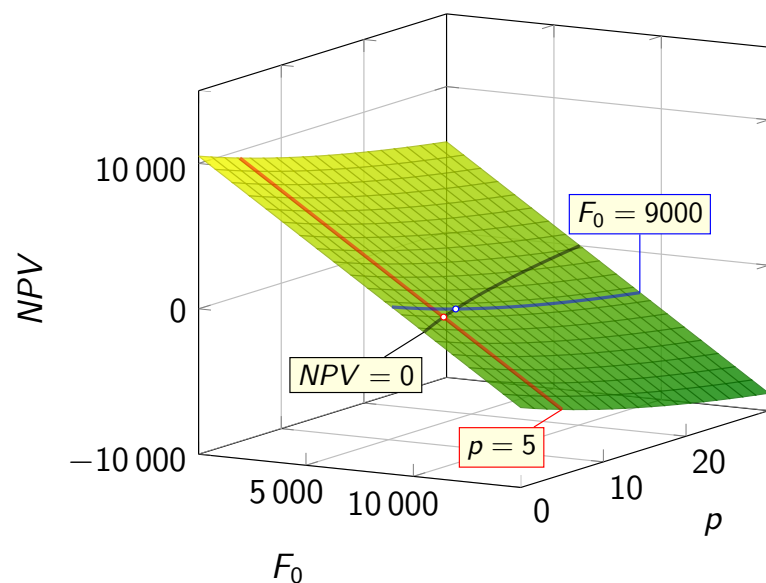
Investitoru se isplati uložiti u projekt maksimalno 9487.10 €.

9/30

## NPV projekta kao funkcija ulaganja uz $p = 5\%$



## NPV kao funkcija ulaganja i cijene kapitala

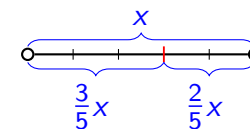


### Zadatak 3

Stroj vrijednosti 190 000 kn životnog vijeka pet godina na kraju radnog vijeka ima otpisnu vrijednost 40 000 kn. Izradite amortizacijsku tablicu ako se u prve dvije godine koristi linearna metoda amortizacije, a u preostale tri godine metoda konstantnog postotka, pri čemu je odnos otpisanih vrijednosti kod navedenih metoda 3 : 2 u korist linearne metode.

13/30

## Rješenje



- Ukupan trošak amortizacije

$$C - S = 190\,000 - 40\,000 = 150\,000$$

- Trošak amortizacije kod linearne metode

$$C_1 - S_1 = \frac{3}{5} \cdot 150\,000 = 90\,000$$

Kod linearne metode je zapravo  $C_1 = 190\,000$  i  $S_1 = 100\,000$ .

- Trošak amortizacije kod metode konstantnog postotka

$$C_2 - S_2 = \frac{2}{5} \cdot 150\,000 = 60\,000$$

Kod metode konstantnog postotka je zapravo  $C_2 = 100\,000$  i  $S_2 = 40\,000$ .

14/30

$$B_k + D_k = C$$

$$R_k = B_{k-1} \cdot \frac{d}{100}$$

$$d = 100 \left( 1 - \sqrt[n]{\frac{S}{C}} \right)$$

$$R = \frac{C - S}{n}$$

$$d \approx 26.31937$$

k	$R_k$	$D_k$	$B_k$
0	—	—	190 000
1	45 000	45 000	145 000
2	45 000	90 000	100 000
3	26 319.37	116 319.37	73 680.63
4	19 392.28	135 711.65	54 288.35
5	14 288.35	150 000	40 000

15/30

$$R_1 = R_2 = \frac{C_1 - S_1}{2} = \frac{90\,000}{2} = 45\,000$$

$$D_1 = R_1 = 45\,000$$

$$D_2 = D_1 + R_2 = 45\,000 + 45\,000 = 90\,000$$

$$B_1 = C - D_1 = 190\,000 - 45\,000 = 145\,000$$

$$B_2 = C - D_2 = 190\,000 - 90\,000 = 100\,000$$

$$d = 100 \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{40\,000}{100\,000}} \right) \approx 26.31937$$

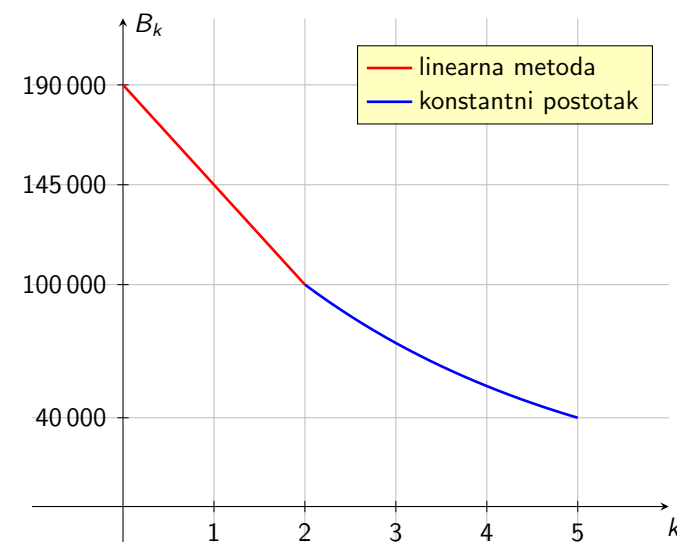
$$R_3 = B_2 \cdot \frac{d}{100} = 100\,000 \cdot \frac{26.31937}{100} = 26\,319.37$$

$$D_3 = D_2 + R_3 = 90\,000 + 26\,319.37 = 116\,319.37$$

$$B_3 = C - D_3 = 190\,000 - 116\,319.37 = 73\,680.63$$

16/30

## Linearna metoda i konstantni postotak



18/30

$$R_4 = B_3 \cdot \frac{d}{100} = 73\,680.63 \cdot \frac{26.31937}{100} = 19\,392.28$$

$$D_4 = D_3 + R_4 = 116\,319.37 + 19\,392.28 = 135\,711.65$$

$$B_4 = C - D_4 = 190\,000 - 135\,711.65 = 54\,288.35$$

$$R_5 = B_4 \cdot \frac{d}{100} = 54\,288.35 \cdot \frac{26.31937}{100} = 14\,288.35$$

$$D_5 = D_4 + R_5 = 135\,711.65 + 14\,288.35 = 150\,000$$

$$B_5 = C - D_5 = 190\,000 - 150\,000 = 40\,000$$

17/30

### Zadatak 4

Zadana je glavnica od 1200 kn i godišnja kamatna stopa 5%.

- Odredite vrijednost glavnice nakon 8 mjeseci uz konformno ukamaćivanje.
- Odredite vrijednost glavnice nakon 8 mjeseci uz relativno mjesečno ukamaćivanje.

Obračun kamata je složeni i anticipativni.

19/30

**Rješenje**

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n$$

$$\rho = \frac{100}{100 - q}$$

a) Mjesečni anticipativni kamatni faktor

$$\rho = \sqrt[12]{\frac{100}{100 - 5}} = \sqrt[12]{\frac{20}{19}}$$

Vrijednost glavnice nakon 8 mjeseci

$$C_8 = 1200 \cdot \sqrt[12]{\frac{20}{19}}^8 = 1241.74$$

20/30

**Usporedba**

	dekurzivni obračun	anticipativni obračun
konformno ukamaćivanje	$C_8 = 1239.67$	$C_8 = 1241.74$
relativno ukamaćivanje	$C_8 = 1240.59$	$C_8 = 1240.76$

	dekurzivni obračun	anticipativni obračun
konformno ukamaćivanje	$r = 1.004074124$	$\rho = 1.004283590$
relativno ukamaćivanje	$r = 1.004166667$	$\rho = 1.004184100$

22/30

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n$$

$$\rho = \frac{100}{100 - q}$$

b) Relativna mjesečna kamatna stopa:  $q_r = \frac{5}{12}$

Mjesečni anticipativni kamatni faktor

$$\rho = \frac{100}{100 - q_r} = \frac{100}{100 - \frac{5}{12}} = \frac{240}{239}$$

Vrijednost glavnice nakon 8 mjeseci

$$C_8 = 1200 \cdot \left(\frac{240}{239}\right)^8 = 1240.76$$

21/30

**Zadatak 5**

Nakon koliko bi godina uz godišnju kamatnu stopu 5% kamate bile tri puta veće od početne glavnice ako je obračun kamata

- jednostavni dekurzivni,
- jednostavni anticipativni,
- složeni dekurzivni,
- složeni anticipativni?

23/30

## Rješenje

a) Jednostavni dekurzivni obračun

$$I_{uk} = 3C_0, \quad C_n = C_0 + I_{uk} = C_0 + 3C_0 = 4C_0$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

$$4C_0 = C_0 \left(1 + \frac{5n}{100}\right) \bigg/ : C_0$$

$$4 = 1 + \frac{n}{20}$$

$$\frac{n}{20} = 3$$

$$n = 60$$

Nakon 60 godina kamate su tri puta veće od glavnice.

24/30

c) Složeni dekurzivni obračun

$$I_{uk} = 3C_0, \quad C_n = C_0 + I_{uk} = C_0 + 3C_0 = 4C_0$$

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$$

$$C_n = C_0 r^n$$

$$4C_0 = C_0 r^n \bigg/ : C_0$$

$$r^n = 4$$

$$1.05^n = 4$$

$$n = \log_{1.05} 4$$

$$n = 28.41$$

Nakon 29 godina kamate su tri puta veće od glavnice.

26/30

b) Jednostavni anticipativni obračun

$$I_{uk} = 3C_0, \quad C_n = C_0 + I_{uk} = C_0 + 3C_0 = 4C_0$$

$$C_n = C_0 \cdot \frac{100}{100 - qn}$$

$$4C_0 = C_0 \cdot \frac{100}{100 - 5n} \bigg/ : C_0$$

$$4 = \frac{100}{100 - 5n} \bigg/ \cdot (100 - 5n)$$

$$400 - 20n = 100$$

$$-20n = -300$$

$$n = 15$$

Nakon 15 godina kamate su tri puta veće od glavnice.

25/30

d) Složeni anticipativni obračun

$$I_{uk} = 3C_0, \quad C_n = C_0 + I_{uk} = C_0 + 3C_0 = 4C_0$$

$$\rho = \frac{100}{100 - q} = \frac{100}{100 - 5} = \frac{100}{95} = \frac{20}{19}$$

$$C_n = C_0 \rho^n$$

$$4C_0 = C_0 \rho^n \bigg/ : C_0$$

$$\rho^n = 4$$

$$\left(\frac{20}{19}\right)^n = 4$$

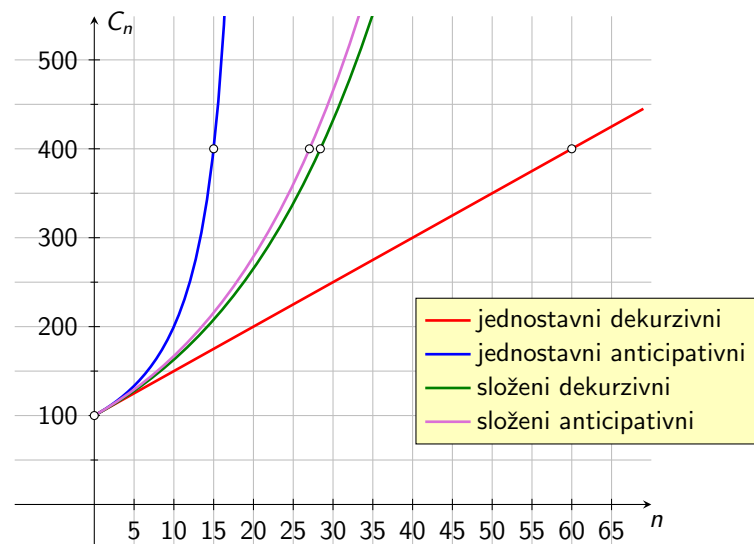
$$n = \log_{\frac{20}{19}} 4$$

$$n = 27.03$$

Nakon 28 godina kamate su tri puta veće od glavnice.

27/30

## Grafički prikaz za glavnici $C_0 = 100$



28/30

## Rješenje

$$\rho = \frac{100}{100 - q}$$

- Mjesečni anticipativni kamatni faktor

$$\rho = \sqrt[12]{\frac{100}{100 - 2.5}} = \sqrt[12]{\frac{40}{39}} \approx 1.002112045$$

- Iznos na datum 1. travnja 2015.

$$S = R \cdot \rho \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = 400 \cdot 1.002112045 \cdot \frac{1.002112045^{24} - 1}{1.002112045 - 1}$$

$$S = 9857.60$$

- Iznos na datum 1. rujna 2015.

$$X = S\rho^5 = 9857.60 \cdot 1.002112045^5 = 9962.14$$

30/30

## Zadatak 6

Antonija je početkom svakog mjeseca uplaćivala 400 kn tijekom dvije godine. Prvu uplatu je izvršila 1. travnja 2013. Kolikim će iznosom raspolagati 1. rujna 2015. godine uz složeni anticipativni obračun kamata i godišnju kamatnu stopu 2.5%?

29/30