

Seminari 14

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Princip ekvivalencije

- **Premija** → uplata osiguranika (kotizacija)
- **Princip ekvivalencije**
Sadašnja vrijednost matematički očekivanih uplata mora biti jednaka sadašnjoj vrijednosti matematički očekivanih isplata.
- **premija = osigurana svota · koeficijent**
Kod različitih vrsta osiguranja **koeficijent** se računa po drukčijoj formuli i ima drukčiju oznaku.

$$B = S \cdot \text{koeficijent}$$

2/22

Oznake

- D_x → diskontirani broj živih osoba starosti x
$$D_x = \ell_x \cdot v^x, \quad v = \frac{1}{r}$$
- N_x → zbroj diskontiranih živih osoba starijih od x godina
$$N_x = D_x + D_{x+1} + \dots + D_w$$
- C_x → diskontirani broj umrlih osoba starosti x
$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$
- M_x → zbroj diskontiranih umrlih osoba starijih od x godina
$$M_x = C_x + C_{x+1} + \dots + C_w$$

1/22

Premije u osiguranju života

Poopćenje osobnih renti (periodskih isplata)

- Neodgođena doživotna osobna renta
- Neodgođena osobna renta trajanja n godina
- Za n godina odgođena doživotna renta (starosna renta)

Nekoliko posebnih vrsta osiguranja

- Osiguranje za slučaj doživljenja
- Osiguranje za slučaj smrti
 - Doživotno osiguranje za slučaj smrti
 - Privremeno osiguranje za slučaj smrti
- Mješovito osiguranje

3/22

Neodgođena doživotna osobna renta

- Nakon uplate premije osiguraniku se doživotno isplaćuje renta

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots + \frac{D_\omega}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

$$B = S \cdot \ddot{a}_x$$

Neodgođena osobna renta trajanja n godina

- Nakon uplate premije osiguraniku se n godina isplaćuje renta

$$\ddot{a}_{x:n] = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$B = S \cdot \ddot{a}_{x:n]}$$

4/22

Doživotno osiguranje za slučaj smrti

- Nakon uplate premije osiguranikovo se obitelji nakon njegove smrti isplaćuje osigurana svota

$$A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \dots + \frac{C_\omega}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

$$B = S \cdot A_x$$

Privremeno osiguranje za slučaj smrti s trajanjem n godina

- Nakon uplate premije, u slučaju smrti osiguranika u idućih n godina, osiguranikovo se obitelji isplaćuje osigurana svota

$${}_nA_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \dots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$B = S \cdot {}_nA_x$$

6/22

Za n godina odgođena doživotna renta (starosna renta)

- Nakon uplate premije osiguraniku se doživotno isplaćuje renta tek nakon isteka n godina

$${}_n\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \dots + \frac{D_\omega}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$B = S \cdot {}_n\ddot{a}_x$$

Osiguranje za slučaj doživljenja

- Nakon uplate premije osiguraniku se nakon n godina isplaćuje osigurana svota.

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}, \quad B = S \cdot {}_nE_x$$

5/22

Mješovito osiguranje

- osiguranje za slučaj doživljenja + osiguranje za slučaj smrti

Jednokratna uplata

$$A_{x:n] = {}_nE_x + {}_nA_x = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$B = S \cdot A_{x:n]}$$

Godišnja uplata

$$B = S \cdot \frac{A_{x:n]}}{\ddot{a}_{x:n]}}$$

7/22

Dostatna premija mješovitog osiguranja – uključuje troškove

- **troškovi zaključenja (akvizicijski)** – jednokratni
– stopa troškova α
- **inkaso troškovi** – troškovi prikupljanja premija
– stopa troškova β
- **upravni troškovi** – stopa troškova γ

Jednokratna uplata

$$A_{x:n}^a = \frac{A_{x:n} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:n}}{1 - \beta}, \quad B = S \cdot A_{x:n}^a$$

Godišnja uplata

$$P_{x:n}^a = \frac{A_{x:n} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:n}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:n}}, \quad B = S \cdot P_{x:n}^a$$

8/22

$$B = S \cdot A_x$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

Zadatak 2

Koliku jednokratnu premiju mora uplatiti osiguranica starosti 50 godina kako bi u slučaju njezine smrti osiguravajuće društvo njezinoj obitelji isplatilo 20 000 €?

Rješenje

$$A_{50} = \frac{M_{50}(f)}{D_{50}(f)} = \frac{6146.51}{17\,434.07} = 0.352557$$

$$B = S \cdot A_{50} = 20\,000 \cdot 0.352557 = 7051.14$$

Osiguranica mora uplatiti jednokratnu premiju visine 7051.14 €.

10/22

$$B = S \cdot {}_nE_x$$

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Zadatak 1

Koliku jednokratnu premiju mora uplatiti osiguranik starosti 40 godina kako bi nakon navršene 65 godine raspolagao osiguranom svotom visine 8000 €?

Rješenje

$${}_{25}E_{40} = \frac{D_{65}(m)}{D_{40}(m)} = \frac{8322.27}{24\,594.50} = 0.338379$$

$$B = S \cdot {}_{25}E_{40} = 8000 \cdot 0.338379 = 2707.03$$

Osiguranik mora uplatiti jednokratnu premiju visine 2707.03 €.

9/22

Zadatak 3

Osiguranica starosti 35 godina uplati mješovito životno osiguranje s istekom osiguranja po navršenih 65 godina života. Osigurana svota iznosi 15 000 €.

- Koliku jednokratnu premiju mora uplatiti osiguranica?
- Ukoliko umjesto jednokratne premije osiguranica želi uplaćivati godišnje premije, kolika je visina godišnjih premija?

11/22

Rješenje

$$B = S \cdot A_{x:n}]$$

$$A_{x:n}] = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

a)

$$\begin{aligned} A_{35:30}] &= \frac{D_{65}(f) + M_{35}(f) - M_{65}(f)}{D_{35}(f)} = \\ &= \frac{9\,662.06 + 6\,515.84 - 5\,232.91}{29\,724.41} = 0.368216 \end{aligned}$$

$$B = S \cdot A_{35:30}] = 15\,000 \cdot 0.368216 = 5523.24$$

Osiguranica mora uplatiti jednokratnu premiju visine 5523.24 €.

Interpretacija broja $A_{35:30}]$

Uplati li osiguranica premiju visine 0.37 €, u slučaju da u idućih 30 godina nastupi osigurani slučaj, obitelj ili ona sama će raspolagati osiguranom svotom visine 1 €.

12/22

Zadatak 4

Osiguranik starosti 28 godina uplati mješovito životno osiguranje s istekom osiguranja po navršeni 65 godina života. Godišnja premija iznosi 5 000 kn, a osigurana svota je 250 000 kn.

- Izračunajte iznos premije privremene jedinične neodgođene osobne rente osiguranika i objasnite značenje dobivenog rezultata.
- Izračunajte iznos jednokratne premije mješovitog osiguranja za jediničnu osiguranu svotu i objasnite značenje dobivenog rezultata.
- Ako su zadani α i γ troškovi osiguranja $\alpha = 0.032$ i $\gamma = 0.0022$, izračunajte β troškove.
- Ukoliko osiguranik umjesto godišnjih premija odluči uplatiti jednokratnu premiju, koliko bi iznosila ta premija?

14/22

b)

$$B = S \cdot \frac{A_{x:n}] }{\ddot{a}_{x:n}]}$$

$$\ddot{a}_{x:n}] = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{35:30}] &= \frac{N_{35}(f) - N_{65}(f)}{D_{35}(f)} = \\ &= \frac{686\,310.58 - 130\,976.15}{29\,724.41} = 18.682774 \end{aligned}$$

$$B = S \cdot \frac{A_{35:30}] }{\ddot{a}_{35:30}] } = 15\,000 \cdot \frac{0.368216}{18.682774} = 295.63$$

Osiguranica mora tijekom 30 godina godišnje uplaćivati 295.63 €.

Interpretacija broja $\ddot{a}_{35:30}]$

Uplati li osiguranica odmah 18.68 €, idućih 30 godina može dobivati godišnje rente visine 1 €.

13/22

Rješenje

$$\ddot{a}_{x:n}] = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

a)

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{28:37}] &= \frac{N_{28}(m) - N_{65}(m)}{D_{28}(m)} = \\ &= \frac{869\,668.78 - 95\,725.33}{37\,654.02} = 20.554072 \end{aligned}$$

Uplati li osiguranik odmah 20.55 kn, idućih 37 godina može dobivati godišnje rente visine 1 kn.

15/22

b)

$$A_{x:n] = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$\begin{aligned} A_{28:37] &= \frac{D_{65}(m) + M_{28}(m) - M_{65}(m)}{D_{28}(m)} = \\ &= \frac{8\,322.27 + 8\,244.93 - 5\,085.18}{37\,654.02} = 0.304935 \end{aligned}$$

Uplati li osiguranik premiju visine 0.30 kn, u slučaju da u idućih 37 godina nastupi osigurani slučaj, obitelj ili on sam će raspolagati osiguranom svotom visine 1 kn.

16/22

$$A_{x:n]}^a = \frac{A_{x:n]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:n]}}{1 - \beta}$$

$$P_{x:n]}^a = \frac{A_{x:n]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:n]}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:n]}}$$

$$\beta = 1 - \frac{A_{28:37]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{28:37]}}{P_{28:37]}^a \ddot{a}_{28:37]}}$$

$$\beta = 1 - \frac{0.304935 + 0.032 + 0.0022 \cdot 20.554072}{0.02 \cdot 20.554072}$$

$$\beta = 0.070369$$

$$B = S \cdot P_{x:n]}^a$$

$$B' = S \cdot A_{x:n]}^a$$

d) Jednokratna premija iznosi 102 770.36 kn.

$$B' = B \cdot \ddot{a}_{28:37]} = 5\,000 \cdot 20.554072 = 102\,770.36$$

18/22

c)

$$B = S \cdot P_{x:n]}^a$$

$$P_{x:n]}^a = \frac{A_{x:n]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:n]}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:n]}}$$

$$P_{28:37]}^a = \frac{B}{S} = \frac{5\,000}{250\,000} = 0.02$$

$$P_{28:37]}^a = \frac{A_{28:37]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{28:37]}}{(1 - \beta) \ddot{a}_{28:37]}} \quad \Bigg/ \cdot (1 - \beta) \ddot{a}_{28:37]}}$$

$$P_{28:37]}^a \cdot (1 - \beta) \ddot{a}_{28:37]} = A_{28:37]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{28:37]} \quad \Bigg/ : P_{28:37]}^a \ddot{a}_{28:37]}}$$

$$1 - \beta = \frac{A_{28:37]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{28:37]}}{P_{28:37]}^a \ddot{a}_{28:37]}}$$

$$-\beta = -1 + \frac{A_{28:37]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{28:37]}}{P_{28:37]}^a \ddot{a}_{28:37]}} \quad \Bigg/ \cdot (-1)$$

$$\beta = 1 - \frac{A_{28:37]} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{28:37]}}{P_{28:37]}^a \ddot{a}_{28:37]}}$$

17/22

Zadatak 5

Osiguranica starosti 42 godine uplati mješovito životno osiguranje s istekom osiguranja nakon navršenih 65 godina života. Godišnja premija iznosi 3 050 kn, a osigurana svota 74 500 kn.

- Ako su β i γ troškovi osiguranja $\beta = 0.03$ i $\gamma = 0.004$, izračunajte α troškove.
- Ako se svi troškovi udvostruče, koliko bi uz trostruko veću osiguranu svotu iznosila godišnja premija?
- Koliko iznosi premija koju osiguranica mora uplatiti odmah da bi iduće 23 godine mogla dobivati osobnu rentu visine godišnje premije mješovitog osiguranja?

19/22

Rješenje

a)

$$B = S \cdot P_{x:n}^a$$

$$P_{x:n}^a = \frac{A_{x:n} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:n}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:n}}$$

$$P_{42:23}^a = \frac{B}{S} = \frac{3\,050}{74\,500} = 0.040940$$

$$\ddot{a}_{42:23} = \frac{N_{42}(f) - N_{65}(f)}{D_{42}(f)} = \frac{498\,504.41 - 130\,976.15}{23\,253.48} = 15.805301$$

$$\begin{aligned} A_{42:23} &= \frac{D_{65}(f) + M_{42}(f) - M_{65}(f)}{D_{42}(f)} = \\ &= \frac{9\,662.06 + 6\,395.84 - 5\,232.91}{23\,253.48} = 0.465521 \end{aligned}$$

$$A_{x:n} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

20/22

b)

$$B = S \cdot P_{x:n}^a$$

$$P_{x:n}^a = \frac{A_{x:n} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:n}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:n}}$$

$$\begin{aligned} P_{42:23}^a &= \frac{A_{42:23} + 2\alpha + 2\gamma \cdot \ddot{a}_{42:23}}{(1 - 2\beta) \ddot{a}_{42:23}} = \\ &= \frac{0.465521 + 2 \cdot 0.098915 + 2 \cdot 0.004 \cdot 15.805301}{(1 - 2 \cdot 0.03) \cdot 15.805301} = \\ &= 0.053160 \end{aligned}$$

$$B = 3S \cdot P_{42:23}^a = 3 \cdot 74\,500 \cdot 0.053160 = 11\,881.26$$

Godišnja premija iznosila bi 11 881.26 kn.

c)

$$B = S \cdot \ddot{a}_{42:23} = 3\,050 \cdot 15.805301 = 48\,206.17$$

Osiguravica bi morala odmah uplatiti premiju visine 48 206.17 kn.

22/22

$$P_{x:n}^a = \frac{A_{x:n} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:n}}{(1 - \beta) \cdot \ddot{a}_{x:n}}$$

$$P_{42:23}^a = \frac{A_{42:23} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{42:23}}{(1 - \beta) \ddot{a}_{42:23}} \quad \bigg/ \cdot (1 - \beta) \ddot{a}_{42:23}$$

$$P_{42:23}^a \cdot (1 - \beta) \ddot{a}_{42:23} = A_{42:23} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{42:23}$$

$$-\alpha = A_{42:23} + \gamma \cdot \ddot{a}_{42:23} - P_{42:23}^a \cdot (1 - \beta) \ddot{a}_{42:23} \quad \bigg/ \cdot (-1)$$

$$\alpha = P_{42:23}^a \cdot (1 - \beta) \ddot{a}_{42:23} - A_{42:23} - \gamma \cdot \ddot{a}_{42:23}$$

$$\alpha = 0.040940 \cdot (1 - 0.03) \cdot 15.805301 - 0.465521 - 0.004 \cdot 15.805301$$

$$\alpha = 0.098915$$

21/22