**Control Robusto — Tarea 2**
Para el 27 de marzo, 2021

1. Para el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1.160 & 0.021 & -0.510 & -0.150 \\ 0.016 & -0.954 & -0.124 & 0.195 \\ -0.512 & -0.124 & -1.738 & 0.054 \\ -0.116 & 0.195 & 0.054 & -2.012 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1.205 & 0.412 \\ 0 & 0 \\ -4.467 & 0 \\ 1.842 & -0.115 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -0.122 & 0 & -0.149 & 1.093 \\ -0.434 & -0.649 & 0 & -0.817 \\ 0.222 & 0 & 0.0933 & 0.077 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1.211 & 0 \\ 3.112 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

*a*) Encuentre la función de transferencia equivalente.

Para determinar la función de transferencia del espacio de estado enunciado, se usa las siguientes funciones:

```
A = [-1.160    0.021    -0.510    -0.150;
     0.016    -0.954    -0.124     0.195 ;
    -0.512    -0.124    -1.738     0.054;
    -0.116     0.195     0.054    -2.012
];
B = [-1.205    0.412;
         0          0;
    -4.467          0;
     1.842    -0.115];
C = [-0.122          0    -0.149      1.093;
    -0.434    -0.649          0      -0.817;
     0.222          0       0.0933     0.077];
D = [-1.211          0;
    3.112           0;
         0          0];
 sys1 = ss(A,B,C,D);

tf(sys1);
```

Por lo que se obtiene la matriz de funciones de transferencia:

```
ans =

From input 1 to output...
     -1.211 s^4 - 4.275 s^3 - 4.038 s^2 - 0.4828 s + 0.501
```

```
 1:  -----------------------------------------------------
         s^4 + 5.864 s^3 + 12.2 s^2 + 10.55 s + 3.229

     3.112 s^4 + 17.27 s^3 + 33.25 s^2 + 25.6 s + 6.615
 2:  --------------------------------------------------
        s^4 + 5.864 s^3 + 12.2 s^2 + 10.55 s + 3.229

      -0.5424 s^3 - 1.928 s^2 - 1.933 s - 0.5623
 3:  --------------------------------------------
     s^4 + 5.864 s^3 + 12.2 s^2 + 10.55 s + 3.229

From input 2 to output...
      -0.176 s^3 - 0.7426 s^2 - 0.98 s - 0.4026
 1:  --------------------------------------------
     s^4 + 5.864 s^3 + 12.2 s^2 + 10.55 s + 3.229

     -0.08485 s^3 - 0.4374 s^2 - 0.7251 s - 0.3828
 2:  ---------------------------------------------
     s^4 + 5.864 s^3 + 12.2 s^2 + 10.55 s + 3.229

     0.08261 s^3 + 0.376 s^2 + 0.5418 s + 0.2433
 3:  --------------------------------------------
     s^4 + 5.864 s^3 + 12.2 s^2 + 10.55 s + 3.229
```

*b*) Encuentre los valores y vectores propios de la matriz $A$.
Para encontrar los valores propios se usa el siguiente comando:

```
e = eig(A)

e =
-0.8146
-0.9382
-2.0489
-2.0623
```

*c*) Analice la estabilidad del sistema. Para determinar la estabilidad del sistema, se determina primero los polos del sistema. Si la parte real de los polos son negativos, quiere decir que es estable el sistema. Para ello se determina la raices del denominados de la función de transferencia que se obtuvo que es:
$s^4 + 5.864s^3 + 12.2s^2 + 10.55s + 3.229$ Por lo que se obtiene:

```
p=roots([1 5.864 12.2 10.55 3.229])

p =
  -2.0585 + 0.1000i
```

```
-2.0585 - 0.1000i
-0.9258 + 0.0000i
-0.8211 + 0.0000i
```

*d*) Evalúe la controlabilidad y estabilizabilidad. Cuáles son los modos controlables?

*e*) Evalúe la observabilidad y detectabilidad. Cuáles son los modos observables?

*f*) Para cada uno de los valores propios del sistema $\lambda$, con autovectores izquierdo $v$ y derecho $x$, verifique si se cumplen las condiciones del teorema de Popov-Belevitch-Hautus

$$v\,B \neq 0; \qquad C\,x \neq 0$$

Qué implica esto desde el punto de vista de controlabilidad y observabilidad?

2. Para el sistema del problema 1, diseñe controladores, basados en observador así:

   *a*) Usando asignación de polos, tal que la respuesta al escalón en cualquiera de las entradas tiene un tiempo de asentamiento menor o igual a 1.5 seg. No se preocupe por nada más.

   *b*) Ahora escoja la matriz de realimentación $F$ usando un diseño LQR. Si nunca ha usado la función `lqr` de matlab, mire la documentación.También es válido preguntarle al profesor. O a cualquier persona.

3. Para el sistema de la figura siguiente, calcule las matrices de transferencia

   *a*) $d \mapsto y_1$.

   *b*) $d \mapsto u$.

   *c*) $r \mapsto u$.

   *d*) $r \mapsto y_2$.

   Recuerde que cuando hay varias trayectorias que van de un punto a otro, se suman las funciones de transferencia.

4. Suponga que $(A, B)$ es controlable. Muestre que $(F, G)$ es controlable, donde,

$$F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

es controlable si y solo si

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

tiene rango completo. (**Sug.:** Use teorema PBH).

5. Un modelo para un reactor “batch” inestable, descrito por Rosenbrock, puede ser linealizado en la forma:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1.38 & -0.2077 & 6.715 & -5.676 \\ -0.5814 & -4.29 & 0 & 0.675 \\ 1.067 & 4.273 & 1.343 & -2.104 \\ 0.048 & 4.273 & 1.343 & -2.104 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.679 & 0 \\ 1.136 & -3.146 \\ 1.136 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Analice el efecto del controlador proporcional integral

$$K(s) = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre la función de transferencia $T = GK\left(I - GK\right)^{-1}$. Determine la estabilidad del sistema de lazo cerrado y dibuje $\bar{\sigma}\left(T\left(j\omega\right)\right)$[1]. Repita para $S = I - T$.

6. Un modelo linealizado del control potencia-velocidad de una turbina hidráulica, incluyendo la válvula y el generador se puede representar por medio de

$$G(s) = \frac{-12s^2 - 45s + 70}{s^3 + 4.152s^2 + 12s + 13.33}$$

Vamos a cambiar el controlador actual por un controlador basado en RVE, de manera que el error ante una referencia constante sea cero y que rechace perturbaciones en la entrada de la planta. El actuador tiene una limitación tal que $|u(t)| \leq 0.1$. Haga disños adecuados que satisfagan las especificaciones. Compare las respuestas. En este problema, es claro (¿cierto?) que no es posible medir las variables de estado. Entonces diseñe un observador adecuado.

7. La figura siguiente muestra el diagrama de bloques para controlar la altitud de un avión diseñado para aterrizar y despegar de pistas cortas (STOL - Short Take Off and Landing). Estos aviones generalmente están equipados con superficies de sustentación directa, las cuales a diferencia de los “flaps” convencionales, pueden rotar hacia arriba o hacia abajo. El servo de sustentación directa se puede modelar por medio de

$$\frac{\delta_f}{u} = \frac{-10}{s + 10}$$

donde $\delta_f$ es el angulo de la superficie de sustentación y $u$ es la salida del controlador. El amplificador tiene una ganancia $k$. La f.t. de la dinámica del avión se puede expresar como

$$\frac{h}{\delta_f} = \frac{50}{s\left(s + 1.4\right)}$$

[1] Utilice la función `sigma(T), grid` con la cual podrá ver los valores singulares de $T$ en función de la frecuencia.

Controlador

*a*) ¿Cuáles son las variables de estado en este caso? ¿Es posible medirlas? En caso contrario, tiene que diseñar un observador para implementar sus controladores

*b*) Diseñe un control óptimo LQR para este sistema de manera que el actuador no se sature. Escoja un valor adecuado del ángulo máximo que son capaces de moverse los servomotores $\delta_f^{\text{máx}}$.

*c*) Ecuentre el controlador $K(s)$ resultante de la combinación controlador-observador.

8. Para el sistema del problema 7, construya modelos del avión y el servo en Matlab, para usarlos posteriormente. También puede utilizarlo para resolver el problema 7, pero eso no es necesario. Su modelo debe tener como entradas la referencia $h_r$ y la señal de control $u$ y la salida es el error $e$. Para ello,

   *a*) Utilice la función `sysic` que permite definir configuraciones muy generales y discutimos en clase.

   *b*) La función `iconnect`, que puede consultar en la documentación de Matlab.[2]

9. Dadas las realizacions de funciones de transferencia

$$G_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right], \text{ y } G_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right]$$

   Verifique las fórmulas:

   *a*) $G_1(s)\,G_2(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1\,C_2 & B_1\,D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1\,C_2 & D_1 D_2 \end{array}\right]$

   *b*) $G_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_1^{-1} C_1 & B_1 D_1^{-1} \\ \hline -D_1^{-1} C_1 & D_1^{-1} \end{array}\right]$, cuando la inversa $D_1^{-1}$ existe, lo cual garantiza que $G_1^{-1}$ es una función racional ($G_1^{-1} \in RP$)

[2]Aprender a usar estas dos funciones le ahorrará muchísimo trabajo en el resto del curso.