프로그래밍 언어의 의미

문순원

January 13, 2023

소프트웨어 안정성을 높이는 방법

테스팅

- 몇 가지 케이스에서 프로그램의 실행 결과를 기대되는 결과와 비교
- 테스트를 통과했더라도 버그가 없음을 확신할 수는 없음

소프트웨어 안정성을 높이는 방법

테스팅

- 몇 가지 케이스에서 프로그램의 실행 결과를 기대되는 결과와 비교
- 테스트를 통과했더라도 버그가 없음을 확신할 수는 없음

프로그램 분석

- 프로그램을 자동으로 분석하는 프로그램
- 정지문제에 따른 한계

소프트웨어 안정성을 높이는 방법

테스팅

- 몇 가지 케이스에서 프로그램의 실행 결과를 기대되는 결과와 비교
- 테스트를 통과했더라도 버그가 없음을 확신할 수는 없음

프로그램 분석

- 프로그램을 자동으로 분석하는 프로그램
- 정지문제에 따른 한계

모델 체킹

- 상태 전이 기계의 특정 성질을 자동으로 검증
- State explosion problem을 피하기 쉽지 않음

소프트웨어 안정성을 높이는 방법

테스팅

- 몇 가지 케이스에서 프로그램의 실행 결과를 기대되는 결과와 비교
- 테스트를 통과했더라도 버그가 없음을 확신할 수는 없음

프로그램 분석

- 프로그램을 자동으로 분석하는 프로그램
- 정지문제에 따른 한계

모델 체킹

- 상태 전이 기계의 특정 성질을 자동으로 검증
- State explosion problem을 피하기 쉽지 않음

정형 검증

- 사람이 직접 프로그램의 성질을 증명
- 굉장히 높은 비용

정형 검증

정형 검증 (Formal verification)

the act of proving or disproving the correctness of intended algorithms underlying a system with respect to a certain formal specification or property, using formal methods of mathematics — from Wikipedia

정형 검증

정형 검증 (Formal verification)

the act of proving or disproving the correctness of intended algorithms underlying a system with respect to a certain formal specification or property, using formal methods of mathematics
— *from Wikipedia*

- 프로그램과 그 스펙을 수학적 대상으로 다룸
- 연역적 방법을 사용해 프로그램의 성질을 증명
- 증명의 무결성을 컴퓨터로 검사할 수 있음

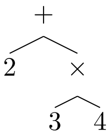
프로그램 정의의 계층

- 기호들의 나열 (concrete syntax) $[\text{`2'}, \text{`+'}, \text{`3'}, \text{`}\times\text{'}, \text{`4'}]$

프로그램 정의의 계층

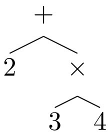
- 기호들의 나열 (concrete syntax)
- 추상 구문 트리 (abtract syntax)

$$[`2', `+', `3', `\times', `4']$$



프로그램 정의의 계층

- 기호들의 나열 (concrete syntax) $[\text{`2'}, \text{`+'}, \text{`3'}, \text{`}\times\text{'}, \text{`4'}]$
- 추상 구문 트리 (abtract syntax)

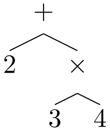


- 의미 (semantics)
  프로그래밍 언어의 패러다임, 의미의 용도에 따라 여러가지 접근이 있다.

프로그램 정의의 계층

- 기호들의 나열 (concrete syntax)
- 추상 구문 트리 (abtract syntax)

$$[‘2’, ‘+’, ‘3’, ‘\times’, ‘4’]$$



- 의미 (semantics)
  프로그래밍 언어의 패러다임, 의미의 용도에 따라 여러가지 접근이 있다.
  - Operational semantics
    - Big-step semantics
    - Small-step semantics
  - Denotational semantics
  - Axiomatic semantics

Imp

간단한 프로그래밍 언어 Imp를 통해 추상 문법과 의미를 정의하는 방법을 알아보자.

Imp

간단한 프로그래밍 언어 Imp를 통해 추상 문법과 의미를 정의하는 방법을 알아보자.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Id} & x, y, z & & \\
\text{AExp} & E & ::= & n \mid x \mid E_1 + E_2 \mid -E \mid E_1 \times E_2 \mid \ldots \\
\text{BExp} & B & ::= & \texttt{true} \mid \texttt{false} \mid \neg B \mid B_1 \wedge B_2 \mid B_1 \vee B_2 \mid \\
 & & & E_1 = E_2 \mid E_1 \leq E_2 \mid \ldots \\
\text{Stmt} & S & ::= & \texttt{skip} \mid x \leftarrow E \mid S_1 ; S_2 \mid \\
 & & & \texttt{if}\ B\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2 \mid \texttt{while}\ B\ \texttt{do}\ S
\end{array}
$$

- 정수와 논리 연산이 가능한 명령형 언어
- 변수는 정수만을 담을 수 있다
- 제어 구문은 if, while 뿐
- AExp, BExp, Stmt는 귀납적으로 정의된 추상 문법 트리들의 집합

Imp

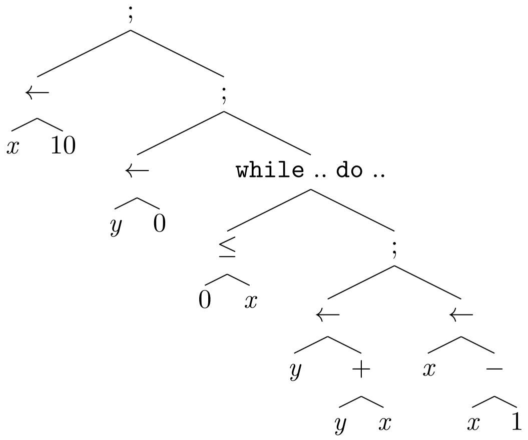
10이하 자연수들의 합을 구하는 프로그램

$$x \leftarrow 10; y \leftarrow 0; \texttt{while}\ 0 \leq x\ \texttt{do}\ \{y \leftarrow y + x; x \leftarrow x - 1\}$$

Imp

10이하 자연수들의 합을 구하는 프로그램

$$x \leftarrow 10;\, y \leftarrow 0;\, \texttt{while}\ 0 \le x\ \texttt{do}\ \{y \leftarrow y + x;\, x \leftarrow x - 1\}$$



메모리 상태

명령형 프로그래밍 언어는 변수의 상태를 바꿈으로서 계산을 수행하기 때문에, 이러한 언어의 의미를 다루기 위해서는 먼저 메모리를 정의할 필요가 있다. Imp의 메모리 상태는 다음처럼 정의할 수 있다.

$$M \in \mathrm{Mem} = \mathbb{Z}^{\mathrm{Id}}$$

메모리 상태

메모리의 상태가 정해져있다면 AExp와 BExp의 값을 구할 수 있다.

$$\text{eval} : \text{Mem} \times \text{AExp} \to \mathbb{Z}$$
$$\text{eval} : \text{Mem} \times \text{BExp} \to \mathbb{B}$$

$$\begin{array}{rcl}
\text{eval}(M, n) & = & n \\
\text{eval}(M, x) & = & M(x) \\
\text{eval}(M, E_1 + E_2) & = & \text{eval}(M, E_1) + \text{eval}(M, E_2) \\
& \cdots & \\
\text{eval}(M, \texttt{true}) & = & \text{T} \\
\text{eval}(M, \texttt{false}) & = & \text{F} \\
\text{eval}(M, B_1 \wedge B_2) & = & \text{eval}(M, B_1) \wedge \text{eval}(M, B_2) \\
\text{eval}(M, E_1 = E_2) & = & \begin{cases} \text{T}, & \text{if } \text{eval}(M, E_1) = \text{eval}(M, E_2) \\ \text{F}, & \text{otherwise} \end{cases} \\
& \cdots &
\end{array}$$

Imp의 의미 - Big-step semantics

명령형 언어의 의미를 메모리의 상태를 바꾸는 함수로 이해할 수 있지 않을까?

$$\mathrm{Stmt} \times \mathrm{Mem} \to \mathrm{Mem}$$

Imp의 의미 - Big-step semantics

명령형 언어의 의미를 메모리의 상태를 바꾸는 함수로 이해할 수 있지 않을까?

$$\mathrm{Stmt} \times \mathrm{Mem} \rightarrow \mathrm{Mem}$$

- 프로그램이 종료하지 않는다면?
- 프로그램이 비결정적이라면?

Imp의 의미 - Big-step semantics

명령형 언어의 의미를 메모리의 상태를 바꾸는 함수로 이해할 수 있지 않을까?

$$\mathrm{Stmt} \times \mathrm{Mem} \to \mathrm{Mem}$$

- 프로그램이 종료하지 않는다면?
- 프로그램이 비결정적이라면?

명령형 언어의 의미를 메모리의 상태를 바꾸는 '관계'로 정의하자.

$$\mathrm{Stmt} \to \mathcal{P}(\mathrm{Mem} \times \mathrm{Mem})$$

$$M_1 \vdash S \Downarrow M_2$$

"상태 M_1 에서 프로그램 S가 실행되었을 때 상태 M_2 로 종료할 수 있다"

Imp의 의미 - Big-step semantics

$$\frac{}{M \vdash \texttt{skip} \Downarrow M}$$

$$\frac{\text{eval}(M, E) = v}{M \vdash x \leftarrow E \Downarrow M[x \mapsto v]}$$

$$\frac{M_1 \vdash S_1 \Downarrow M_2 \quad M_2 \vdash S_2 \Downarrow M_3}{M_1 \vdash S_1 ; S_2 \Downarrow M_3}$$

$$\frac{\text{eval}(M_1, B) = \text{T} \quad M_1 \vdash S_1 \Downarrow M_2}{M_1 \vdash \texttt{if}\ B\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2 \Downarrow M_2}$$

$$\frac{\text{eval}(M, B) = \text{F} \quad M_1 \vdash S_2 \Downarrow M_2}{M_1 \vdash \texttt{if}\ B\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2 \Downarrow M_2}$$

$$\frac{\text{eval}(M, B) = \text{T} \quad M_1 \vdash S \Downarrow M_2 \quad M_2 \vdash \texttt{while}\ B\ \texttt{do}\ S \Downarrow M_3}{M_1 \vdash \texttt{while}\ B\ \texttt{do}\ S \Downarrow M_3}$$

$$\frac{\text{eval}(M, B) = \text{F}}{M \vdash \texttt{while}\ B\ \texttt{do}\ S \Downarrow M}$$

Imp의 의미 - Big-step semantics

상태 M_1에서 프로그램 S가 무한루프를 도는 경우에는

$$\{M_2 \mid M_1 \vdash S \Downarrow M_2\} = \emptyset$$

Imp의 의미 - Big-step semantics

상태 M_1 에서 프로그램 S가 무한루프를 도는 경우에는

$$\{M_2 \mid M_1 \vdash S \Downarrow M_2\} = \emptyset$$

- 무한루프를 도는 서로 다른 프로그램들을 구분할 수 없음
- 비결정적으로 무한루프를 도는 프로그램

Imp의 의미 - Small-step semantics

전이 시스템 (transition system)

상태들의 집합 S, 전이 관계 $\rightarrow \subseteq S \times S$.
$(p, q) \in \rightarrow$는 $p \rightarrow q$와 같이 표기한다.

Imp의 의미 - Small-step semantics

전이 시스템 (transition system)

상태들의 집합 S, 전이 관계 $\rightarrow \subseteq S \times S$.
$(p, q) \in \rightarrow$는 $p \rightarrow q$와 같이 표기한다.

Imp의 의미를 $S = (\mathrm{Stmt} \uplus \{\cdot\}) \times \mathrm{Mem}$을 상태로 가지는 전이 시스템으로 정의할 수 있다.

$$\mathcal{P}(S \times S)$$

$\mathrm{Stmt} \uplus \{\cdot\}$는 프로그램 카운터와 비슷한 역할

Imp의 의미 - Small-step semantics

$$S = x \leftarrow 1; y \leftarrow 2; z \leftarrow x + y$$

Imp의 의미 - Small-step semantics

$$S = x \leftarrow 1; y \leftarrow 2; z \leftarrow x + y$$

$\{* \mapsto 0\}$에서 S를 실행시키는 경우

$$\begin{array}{c}
(x \leftarrow 1; y \leftarrow 2; z \leftarrow x + y, \{* \mapsto 0\}) \\
\downarrow \\
(y \leftarrow 2; z \leftarrow x + y, \{x \mapsto 1, * \mapsto 0\}) \\
\downarrow \\
(z \leftarrow x + y, \{y \mapsto 2, x \mapsto 1, * \mapsto 0\}) \\
\downarrow \\
(\cdot, \{z \mapsto 3, y \mapsto 2, x \mapsto 1, * \mapsto 0\})
\end{array}$$

Imp의 의미 - Small-step semantics

현실의 프로그램들은 외부 세계와 상호작용(키보드 입력, 화면 출력, 디스크 작업, ...)을 하는데, 이것을 어떻게 표현할 수 있을까?

Imp의 의미 - Small-step semantics

현실의 프로그램들은 외부 세계와 상호작용(키보드 입력, 화면 출력, 디스크 작업, ...)을 하는데, 이것을 어떻게 표현할 수 있을까?

Imp를 문법을 다음과 같이 확장시켜보자.

$$\begin{array}{llll} \text{Stmt} & S & ::= & \texttt{skip} \mid x \leftarrow E \mid S_1; S_2 \mid \texttt{if } B \texttt{ then } S_1 \texttt{ else } S_2 \mid \\ & & & \texttt{while } B \texttt{ do } S \mid \texttt{put } E \mid x \leftarrow \texttt{get} \end{array}$$

Imp의 의미 - Small-step semantics

라벨이 있는 전이 시스템 (labeled transition system)

상태들의 집합 S, 라벨들의 집합 L, 전이 관계 $\rightarrow \subseteq S \times L \times S$

$$p \xrightarrow{e} q \qquad \text{where } p, q \in S \text{ and } e \in L$$

"상태 p에서 이벤트 e를 발생시키며 상태 q로 전이할 수 있다"

Imp의 의미 - Small-step semantics

라벨이 있는 전이 시스템 (labeled transition system)

상태들의 집합 S, 라벨들의 집합 L, 전이 관계 $\rightarrow \subseteq S \times L \times S$

$$p \xrightarrow{e} q \qquad \text{where } p, q \in S \text{ and } e \in L$$

"상태 p에서 이벤트 e를 발생시키며 상태 q로 전이할 수 있다"

$$\mathcal{P}(S \times L \times S)$$

$$S = (\mathrm{Stmt} \uplus \{\cdot\}) \times \mathrm{Mem}$$

$$L = \{\texttt{put}\ n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\texttt{get}\ n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Imp의 의미 - Small-step semantics

라벨이 있는 전이 시스템 (labeled transition system)

상태들의 집합 S, 라벨들의 집합 L, 전이 관계 $\rightarrow \subseteq S \times L \times S$

$$p \xrightarrow{e} q \qquad \text{where } p, q \in S \text{ and } e \in L$$

"상태 p에서 이벤트 e를 발생시키며 상태 q로 전이할 수 있다"

$$\mathcal{P}(S \times L \times S)$$

$$S = (\mathrm{Stmt} \uplus \{\cdot\}) \times \mathrm{Mem}$$

$$L = \{\texttt{put}\ n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\texttt{get}\ n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

이벤트는 프로그램과 외부세계의 상호작용을 표현한다. 외부에서 관측 되는것이 이벤트 뿐이라면, 상태를 배제하고 이벤트만으로 프로그램의 의미를 정의할 수 있지 않을까?

Imp의 의미 - 트레이스, 행동

트레이스 (trace)

프로그램의 한 실행에서 발생한 관측 가능한 이벤트들의 시퀀스.
프로그램의 행동 beh는 발생 가능한 모든 트레이스들의 집합.

$$\mathrm{beh} : \mathrm{Stmt} \to \mathcal{P}(\mathrm{Trace}(L))$$

Imp의 의미 - 트레이스, 행동

트레이스 (trace)

프로그램의 한 실행에서 발생한 관측 가능한 이벤트들의 시퀀스.
프로그램의 행동 beh는 발생 가능한 모든 트레이스들의 집합.

$$\text{beh} : \text{Stmt} \to \mathcal{P}(\text{Trace}(L))$$

Trace는 종료하지 않는 프로그램의 트레이스를 표현할 수 있도록 주의 깊게 정의 되어야 한다. CompCert에서는 프로그램의 트레이스를 다음과 같이 4가지로 분류한다.

- Termination, 유한개의 관측 가능한 이벤트를 발생시킨 후 종료한 경우.
- Divergence, 유한개의 관측 가능한 이벤트를 발생시킨 후 무한히 실행되며 종료하지 않는 경우.
- Reactive divergence, 무한개의 관측 가능한 이벤트를 지속적으로 발생시키는 경우.
- Going wrong, 유한개의 관측 가능한 이벤트를 발생시킨 후 비정상적으로 종료한 경우.