CONCEPTOS BÁSICOS

Teorema es un enunciado declarativo en matemática para el que existe una prueba o una demostración. Una demostración es un ensayo que indica en forma incontrovertible que un enunciado es verdadero. Expresa la connotación de importancia y generalidad.

Decir que un enunciado es verdadero equivale a asegurar que es correcto y que se puede confiar en él. En lo cotidiano la mayor parte de los enunciados tienen un alcance limitado, se comprende que su verdad no debe considerarse como absoluta y universal. Sin embargo, en matemática la palabra verdadero es mucho más estricta que en otras disciplinas y se la considera absoluta, incondicional y sin excepción.

Recordemos el teorema más utilizado en la geometría, el enunciado de Pitágoras. Si a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c es la longitud de la hipotenusa, entonces: $a^2 + b^2 = c^2$. Esta ecuación es válida en forma absoluta y sin excepción para los catetos y la hipotenusa de todos los triángulos rectángulos, lo sabemos porque podemos demostrar este teorema.

Por otra parte, el enunciado: los números primos son impares no es verdadero. (Recuerde que un número primo es un entero mayor que uno cuyos únicos divisores positivos de él sean 1 y él mismo). El número 2 es primo, pero no es impar. Por lo tanto este enunciado es falso. Estamos tentados a decir que es casi verdadero porque todos los números primos, a excepción del 2, son impares.

En Matemática se ha adoptado la convención de llamar verdadero a un enunciado siempre que sea absolutamente verdadero, sin excepción alguna. Un enunciado que no es absolutamente verdadero, es falso.

Si …. Entonces

En matemática la mayoría de los teoremas puede expresarse de la forma **"Si A entonces B"**. Por ejemplo: el teorema "la suma de dos enteros pares es par" se puede expresar

"si x e y son dos enteros pares, entonces x + y también es par".

El enunciado "Si A entonces B" quiere decir que cada vez que la condición A es verdadera, B también tiene que ser verdadera. Veamos el siguiente ejemplo: imaginemos que soy un político y en campaña anuncio que "Si salgo elegido, (entonces) bajaré los impuestos". Bajo qué condiciones van a decir que soy un mentiroso?

- Si salgo elegido y bajo los impuestos, no soy mentiroso, cumplí mi promesa
- Si salgo elegido y no bajo los impuestos, soy un mentiroso, he roto mi promesa
- Si no salgo elegido, pero de alguna otra forma hago que los impuestos bajen, tampoco he roto mi promesa.
- Si no salgo elegido y los impuestos no bajan, nadie puede decir que soy un mentiroso porque yo prometí que los bajaría si era elegido.

Es decir, la única circunstancia bajo la cual "si (A) yo salgo elegido, entonces (B) bajaré los impuestos" es mentira cuando A es verdadero y B es falso.

Otras alternativas que expresan lo mismo que "si A entonces B":

1. “A implica a B” escrito simbólicamente $A \Longrightarrow B$
2. “Siempre que A se tiene B”
3. “A es suficiente para B” o “A es condición suficiente para B”
4. “Para que sea válido B, basta con que se tenga A”
5. “B es necesario para A”
6. “A sólo si B”

Veamos un caso especial. Ejemplo: “Si un entero es cuadrado y primo a la vez, es negativo”. Para que este enunciado sea falso, A debe ser verdadero y B falso. Pero la condición A es imposible, no existen números que sean cuadrados y primos a la vez, por lo tanto no se puede encontrar un entero que haga la condición A verdadera y la B falsa. Por lo cual este enunciado es verdadero. Los enunciados de la forma “si A, entonces B” en las que es imposible la condición A se llaman **vacuas** y en matemática se consideran verdaderas porque no tienen excepciones.

Si, y sólo si

Existen algunos teoremas que expresan enunciados de la siguiente forma “A implica B y B implica A”. Este enunciado puede replantearse como **“A si y sólo si B”**.

Ejemplo: Un entero x es par si y sólo si x + 1 es impar

Analicemos las cuatro posibilidades:

- Es imposible que A sea verdadera y siendo B falsa pues $A \Longrightarrow B$. Es imposible que B sea verdadera siendo A falsa pues $B \Longrightarrow A$. Así las dos condiciones deben ser verdaderas o falsas a la vez.
- Para algunos enteros, como el número 4 son verdaderas ambas condiciones A y B (4 es par y si le sumamos 1 da 5 que es impar). Para otros enteros, como x = 7, ambas condiciones son falsas (7 no es para y 8 no es impar)

Otras alternativas del enunciado “si y sólo si” son:

1. “A es necesaria y suficiente para B”
2. “A equivale a B”
3. Simbólicamente $A \Leftrightarrow B$

Y, o y no

El uso matemático del y como del no es igual al lenguaje cotidiano.

El enunciado **“A y B”** quiere decir que A y B son ambos verdaderos. Ejemplo: “todo entero cuyo dígito es 0, es divisible entre 2 y entre 5” (recordar divisible es que puede ser dividido por él y el resultado es otro entero). Esto quiere decir que todo número que termine en 0 se puede dividir por 2 y por 5.

El enunciado **“no A”** es verdadero si y sólo si A es falsa. Ejemplo: “todos los primos son impares” es falsa, por lo que el enunciado “no todos los primos son impares” es verdadero.

El uso del o, en el lenguaje cotidiano, sugiere una lección entre una y otra opción, pero no ambas. En contraste el “o” en matemática es más inclusivo, permite ambas. Por lo que el enunciado **“A o B”** quiere decir que A es verdadera, o B es verdadera o que A y B son verdaderos.

Demostraciones

Las demostraciones en matemática son muy estructuradas, emplean construcciones claves que tienen un formato determinado.

Modelo de demostración directa de un teorema si … entonces

1. ***Escriba la o las primeras oraciones de la demostración replanteando la hipótesis. Use una notación adecuada, por ejemplo asignando letras que representen variables***
2. ***Escriba la o las últimas oraciones de la demostración replanteando la conclusión o tesis.***
3. ***Aclare las definiciones, avanzando desde el inicio de la demostración y desde el final.***
4. ***Piense en lo que conoce y lo que precisa. Trate de formar una vinculación entre las dos mitades del argumento.***

Ejemplo: Sea el siguiente enunciado "La suma de dos números pares es par"

Convertir el enunciado a la forma si … entonces. Si dos enteros son pares entonces la suma de ambos es un entero par

1. Replantear la hipótesis con variables. "La suma de dos enteros pares". Usamos las letras x, y para dar nombre a esos enteros
2. Replantear la conclusión. "La suma de ambos es un entero par". Queda $x + y$ es par.
3. Aclarar las definiciones. ¿Qué quiere decir que x es par? Un entero es par siempre y cuando es divisible por 2 (o lo que es igual a decir que es múltiplo de 2).
   a) Para x puede escribirse que existe un entero a tal que $x = 2.a$
   b) Para y puede escribirse que existe un entero b tal que $y = 2.b$
   c) Para la conclusión debería llegarse a que $x + y$ también es divisible por 2, es decir que existe un entero c tal que $x + y = 2.c$
4. Sabemos a) y b) y precisamos llegar a c). Pero es fácil porque solo tenemos que sumar y reemplazar: $x + y = 2.a + 2.b = 2 . (a + b)$ saco factor común 2 y ahora me queda la suma de dos enteros a y b que da como resultado otro entero al que llamo c (convenientemente). Y por lo tanto ya se ha llegado a lo que se pretendía demostrar.

Modelo de demostración de teoremas si y sólo si

1. ***Demuestre "Si A … entonces B" $\Longrightarrow$)***
2. ***Demuestre "Si B …entonces A"*** $\Longleftarrow$)

Ejemplo: Sea el siguiente enunciado "Sea x un entero. Entonces x es par si y sólo si $x + 1$ es impar"
El esqueleto básico de la demostración es el siguiente:
Sea x un entero
$\Longrightarrow$) Si que x es par …. entonces $x + 1$ es impar
$\Longleftarrow$)Si que $x + 1$ es impar … entonces x es par

Analizando cada caso
$\Longrightarrow$) Supongamos que x es par. Esto quiere decir que existe un entero a tal que $x = 2.a$. Si sumamos 1 a ambos lados de la igualdad $x + 1 = 2.a + 1$ (y según la definición de número impar $x + 1$ lo es) por lo tanto se demostró la primera implicancia.

$\Leftarrow$) Supongamos que x + 1 es impar. Entonces existe un entero b tal que x + 1 = 2.b + 1. Al restar ambos lados de la ecuación se obtiene x = 2.b (y de esta forma x es par) que es lo que se quería demostrar.

Modelo de demostración por refutación

Para descalificar un enunciado de la forma "Si A entonces B" encuentre un caso en el que A es verdadero pero B es falso. Se busca un contraejemplo.

Este tipo de demostraciones se da cuando se intenta demostrar "Si entonces B" y se encuentra con un problema o se intuye que pueden existir casos en donde esto no se verifique.

<u>Ejemplo:</u> "Sean a y b enteros. Si a es divisible por b y b es divisible por a, entonces a = b"

Replanteo el enunciado a es divible por b se escribe simbólicamente a | b e implica que a = b.y, donde y es entero. De la misma manera si b es divisible por a, existe un x entero tal que b = a.x

Tenemos entonces dos ecuaciones a = b.y   b = a.x   Podemos sustituir una variable en una de las ecuaciones y nos queda a = b.y = a.x.y

Podemos tentarnos en dividir a ambos lados por a, pero si el a es cero no podría hacerlo. Tengo un problema.

Sigamos analizando, por el momento no consideremos ese caso, tendríamos 1 = x.y

Si planteo 1 . 1 = 1 y ambos son iguales …. Si planteo (-1) . (-1) = 1 y ambos son iguales….. ¿Puede ser que el enunciado sea falso? Es decir que x sea distinto de y . ¿Qué sucede si x = -y?

Verifiquemos que sucede con a = 3 y b= -3 en este caso x = 1 mientras que y = -1, a es divisible por b y b es divisible por a, pero a $\neq$ b