CAPITULO 3: Movimiento en dos y tres direcciones [S.Z.F.Y. 3.3]

a) MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

Proyectil: llamamos **proyectil** a cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. (Por ahora despreciaremos los efectos producidos por el aire)
El camino que sigue el proyectil es su **trayectoria**.
Omitiremos en principio a los efectos del aire (resistencia), y la curvatura y rotación de la tierra.

El movimiento de un proyectil está determinado en un plano vertical por la dirección de la velocidad inicial. La aceleración ***g*** es vertical.

La **clave** para analizar el movimiento de proyectiles, es tratar por separado el movimiento, en las **coordenadas** *x* e *y*.

El movimiento real es la superposición de los dos movimientos en ***x*** y en ***y***; *con:* $a_x = 0$; $a_y = -g$ *si se toma positivo el sentido del eje vertical hacia arriba y si además, se elige para* $t_0 = 0$; $x_0 = 0$; $y_0 = 0$

ECUACIONES:

EJE y:

$$y = y_o + v_{oy} \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2$$

$$v_y = v_{oy} + a_y \cdot t$$

EJE x:

$$x = x_o + v_{ox} \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2$$

$$v_x = v_{ox} + a_x \cdot t$$

DISTINTOS CASOS:

a$_1$) Cuerpo lanzado horizontalmente ó tiro horizontal:

Planteamos las ecuaciones entre 0 y 1

EJE y:

$0 = h - \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

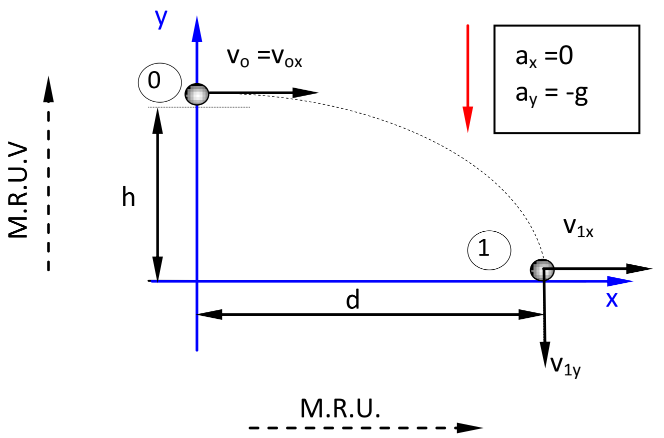
$v_y = -g \cdot t$

EJE x:

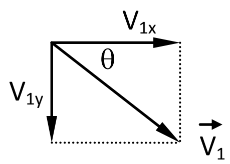
$d = v_{ox} \cdot t$

$v_x = v_{ox} = cte$

$|v_1| = v_{1x}^2 + v_{1y}^2$



Velocidad un instante antes de llegar al suelo:



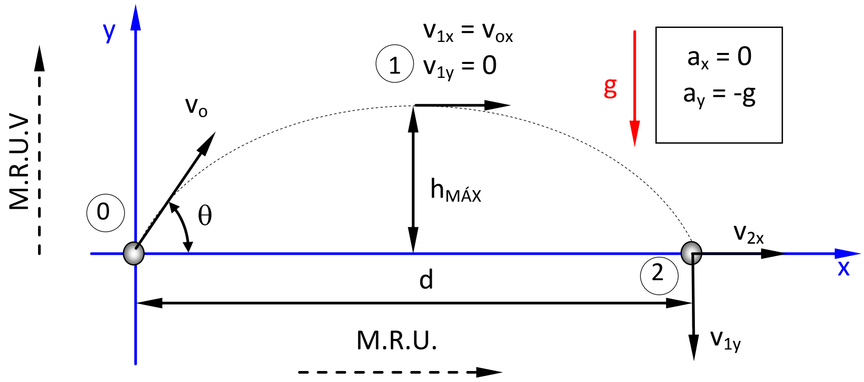
$|\vec{v_1}|^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2$

$\theta = \arctan(v_{1y}/v_{1x})$

a_2) Cuerpo lanzado formando un ángulo con la horizontal ó tiro oblicuo:

$v_{OX} = v_o \cdot \cos\theta$

$v_{Oy} = v_o \cdot \text{sen}\,\theta$



Calculo de la altura máxima alcanzada, planteamos las ecuaciones entre 0 y 1

EJE y:

$v_{1y} = v_{oy} + a_y \cdot t$

$0 = v_o \cdot \text{sen}\,\theta - g \cdot t \rightarrow t = v_o \cdot \text{sen}\,\theta / g$

$h_{MÁX} = v_o \cdot \text{sen}\,\theta \cdot t - ½ \cdot g \cdot t^2$

$h_{MÁX} = v_o \cdot \text{sen}\,\theta \cdot v_o \cdot \text{sen}\,\theta / g - ½ \cdot g \cdot (v_o \cdot \text{sen}\,\theta / g)^2$

$h_{MÁX} = v_o^2 \cdot \text{sen}^2\theta / g - ½ \cdot v_o^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta / g$

$$h_{MÁX} = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen}^2\theta}{2g}$$

Calculo del alcance máximo

EJE y:

$0 = v_o \cdot \text{sen}\,\theta \cdot t - ½ \cdot g \cdot t^2$

$½ \cdot g \cdot t = v_o \cdot \text{sen}\,\theta$

$t = 2 \cdot v_o \cdot \text{sen}\,\theta / g$

EJE x:

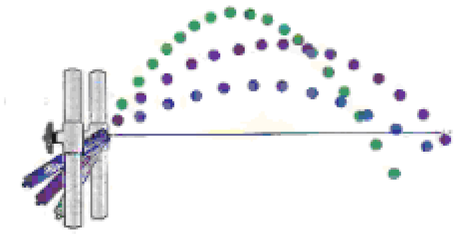
$d = v_o \cdot \cos\theta \cdot t$

$d = v_o \cdot \cos\theta \cdot 2 \cdot v_o \cdot \text{sen}\,\theta / g$

$d = v_o^2 \cdot 2 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\,\theta / g$

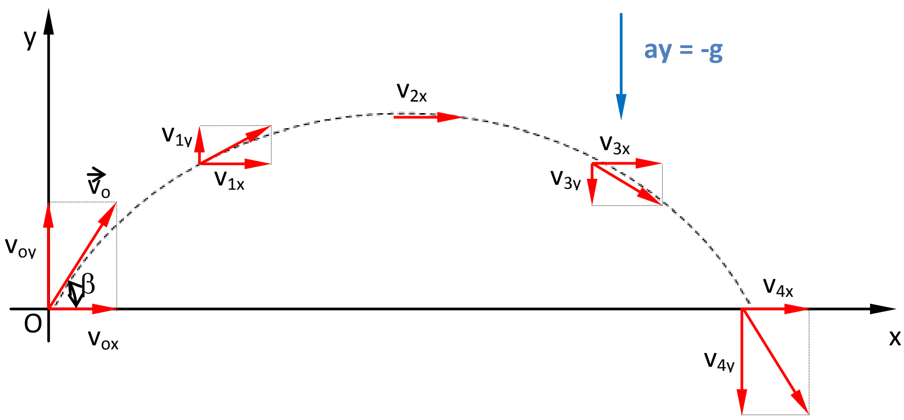
IDENTIDAD TRIGONOMETRICA: $2 \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,2\theta$

$$d = v_o^2 \cdot \text{sen}\,2\theta / g$$



El máximo valor de sen2 θ es 1; por lo cual: 2 θ =90º, o bien θ =45º

Esto es válido solamente cuando el proyectil llega al piso en el mismo nivel desde donde fue lanzado.



b) MOVIMIENTO CIRCULAR

Movimiento circular Uniforme: [S.Z.F.Y. 3.4]

Es un movimiento cuya trayectoria es una circunferencia y el móvil recorre arcos iguales en tiempos iguales. Es decir, la rapidez tangencial es constante.

En la figura muestra una partícula que se mueve en una trayectoria circular del punto **1** a punto **2** en un $\Delta t = t_2 - t_1$

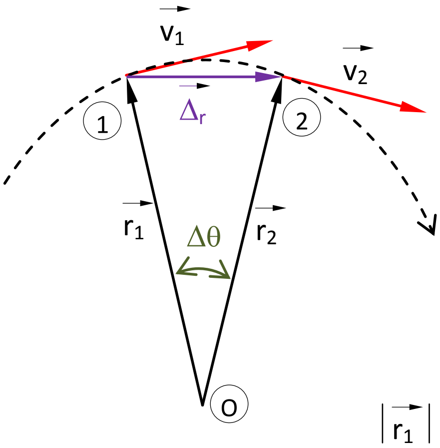
Los ángulos $\Delta\theta$ son iguales porque $\vec{v}_1$ es perpendicular a la línea $\overline{O1}$ y $\vec{v}_2$es perpendicular a la línea $\overline{O2}$.

Por lo tanto los triángulos son semejantes.

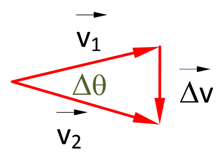
Dos triángulos son semejantes si el ángulo entre cualquiera de los dos lados es el mismo para ambos triángulos y si la relación de las longitudes de dichos lados es la misma.

Los cocientes de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales.

Ahora se puede escribir una correspondencia entre las longitudes de los lados para los dos triángulos de las figuras:



$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$



Esta figura muestra el cambio vectorial de la velocidad durante Δt

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r_1} \qquad |\Delta\vec{v}| = v_1 \frac{|\Delta\vec{r}|}{R} \qquad |\vec{r}_1| = R$$

La magnitud de aceleración media durante Δt entre 1 y 2 es:

$$a_{med} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

La magnitud de la aceleración instantánea en el punto 1 es el límite de esta expresión cuando el punto 2 se acerca al 1:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

Sin embargo, el límite de $\Delta r/\Delta t$ es la rapidez v, en el punto 1. Además el punto 1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que podemos omitir el subíndice y con v representar la rapidez, en cualquier punto. Así.

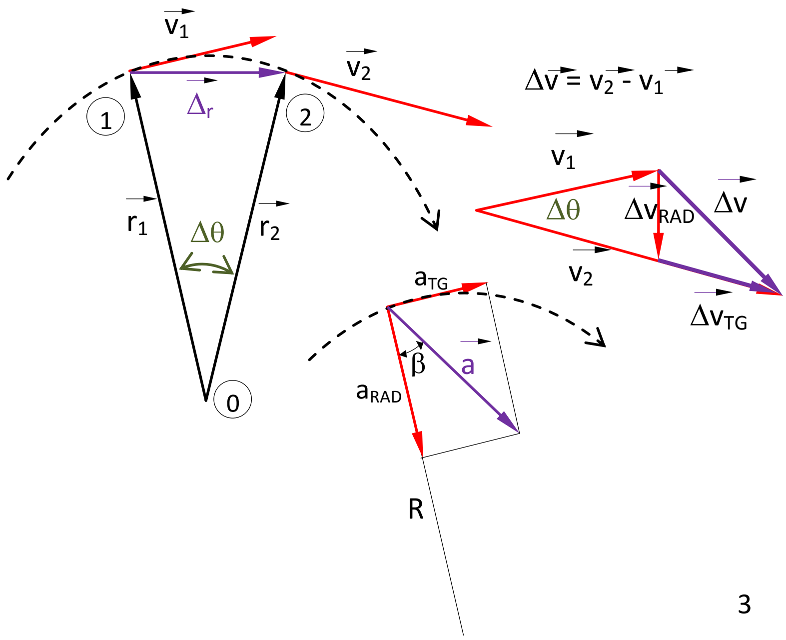
$$\boxed{a_{rad} = \frac{v^2}{R}}$$

Agregamos el subíndice "rad" para recordar que la dirección de la aceleración instantánea siempre sigue un radio del círculo, hacia su centro. Como la rapidez es constante la aceleración siempre es perpendicular a la velocidad instantánea.

En conclusión, ***en el movimiento circular uniforme, la magnitud de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la velocidad dividido entre el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a v hacia adentro sobre el radio.*** Esto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama aceleración centrípeta o normal.

Movimiento circular no Uniforme:

Hemos supuesto que la rapidez, de la partícula es constante. Si la rapidez varía, tenemos un movimiento circular no uniforme donde hay una componente de aceleración paralela a la velocidad instantánea. Esta componente de aceleración tangencial (tangente al círculo) a_{TG} es igual a la tasa de cambio de la rapidez, entonces:



$a_{RAD} = \dfrac{v^2}{R}$ $\qquad a_{TG} = \dfrac{d|v|}{dt}$

$|\vec{a}^2| = a_{RAD}^2 + a_{TG}^2$

$\beta = \operatorname{arctg}(a_{TG}/a_{RAD})$

MCUAcel.→ v_{TG} y a_{TG} = sentido

MCUDesacel.→ v_{TG} y a_{TG} ≠ sentido

<u>Posición, velocidad y aceleración angulares</u>: [S.Z.F.Y. 9.1]

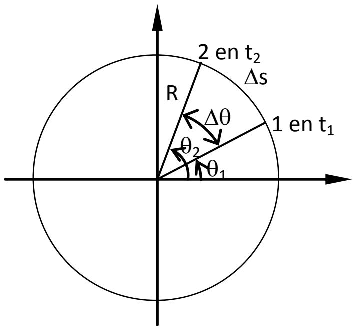
Al describir un movimiento rotacional, la forma más natural de medir el ángulo θ no es en grados, sino en radianes. Como se muestra en la figura un radián (1 rad) es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco cuya longitud es igual al radio del círculo.

$\Delta\theta = 1$ rad si $\Delta s = R$

$\Delta\theta = \Delta s / R$ o bien $\Delta s = \Delta\theta \cdot R$ **(1)**

Para un ángulo de una vuelta

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{R} = 2 \cdot \pi \text{ rad}$$



En el sistema Sexagesimal: 1 vuelta = 360^o

Por lo tanto $\boxed{\mathbf{360^o = 2 \cdot \pi \text{ rad}} \rightarrow 1 \text{ rad} = 57^o\, 17'\, 45'' = 57{,}3^o}$

a) <u>Posición angular:</u> θ [rad]

θ_1 posición angular en t_1

θ_2 posición angular en t_2

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ [Desplazamiento Angular entre t_2 y t_1]

b) <u>Velocidad angular:</u> ω [rad/s y rpm]

<u>Velocidad angular media:</u>

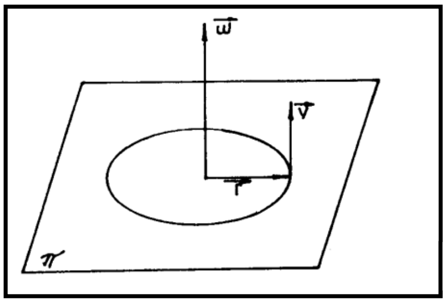
La definimos como la razón entre el desplazamiento angular y el intervalo de tiempo

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

<u>Velocidad angular instantánea:</u>

Es el límite de la velocidad angular media cuando Δt tiende a cero, es decir la derivada de θ con respecto a t

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$



<u>Velocidad angular como vector</u>

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ Regla de la mano derecha

c) <u>Aceleración angular:</u> α [rad/s^2]

<u>Aceleración angular media:</u>

La definimos como la razón entre la variación de la velocidad angular y el intervalo de tiempo

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

<u>Aceleración angular instantánea:</u>

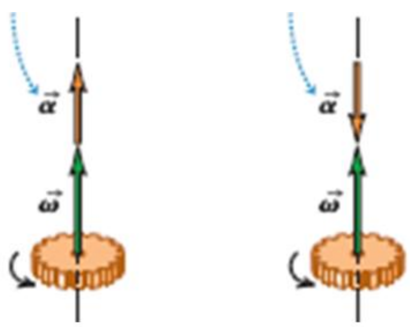
Es el límite de la aceleración angular media cuando Δt tiende a cero, es decir la derivada de ω con respecto a t

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{dt}$$

<u>Aceleración angular como vector:</u>

Si α y ω tienen la misma dirección y sentido se acelera.

Si tienen sentido contrario se frena.



<u>Relación entre cinemática lineal y angular</u>: **[S.Z.F.Y. 9.3]**

a) ***<u>Entre el arco y el ángulo:</u>***

de **(1)** $s = \theta \,.\, R$

b) ***<u>Entre la rapidez lineal y la angular:</u>***

Derivamos **(1)** con respecto al tiempo, observamos que R es constante

$$\frac{ds}{dt} = R \,.\, \frac{d\theta}{dt}$$

ds/dt: es el valor absoluto de la razón de cambio de la longitud de arco, que es igual a la rapidez lineal instantánea v de la partícula.
$d\theta/dt$: es el valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, que es la rapidez angular instantánea ω es decir, la magnitud de la velocidad angular instantánea

$v = R \,.\, \omega$ **(2)**

c) ***<u>Entre la aceleración tangencial y la aceleración angular</u>***

Derivamos **(2)** con respecto al tiempo

$$\frac{dv}{dt} = R \,.\, \frac{d\omega}{dt}$$

$a_{TG} = R \,.\, \alpha$ **(3)**

A partir de la ecuación **(2)** podemos escribir:

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \,.\, R$$

<u>Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante</u>

$$s = \theta \,.\, R \quad \textbf{(1)}$$
$$v = \omega \,.R \quad \textbf{(2)}$$
$$a_{TG} = \alpha \,.\, R \quad \textbf{(3)}$$
$$a_{RAD} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \,.\, R \quad \textbf{(4)}$$

MRUV	MCU	MCUV
a_x = cte	$\alpha = 0$	α = cte
	$a_{TG} = 0$	$a_{TG} = \alpha \,.\, R$ = cte
	$a_{RAD} = v^2/R = \omega^2 \,.\, R$ = cte	$a_{RAD} = v^2/R = \omega^2 \,.\, R \neq$ cte

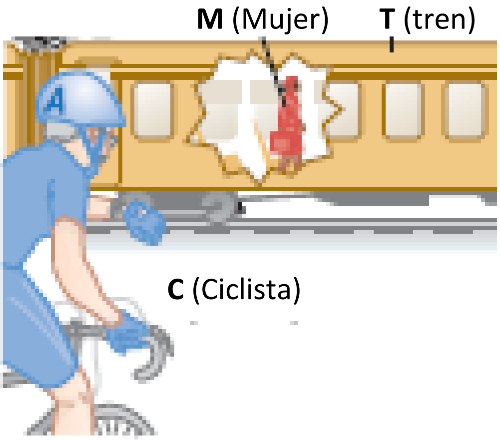
ECUACIONES:

$v_x = v_{ox} + a_x \,.\, t$	ω = cte	$\omega = \omega_o + \alpha \,.\, t$
$X = x_o + v_{ox} \,.\, t + ½ \,.\, a_x \,.\, t^2$	$\theta = \theta_o + \omega \,.\, t$	$\theta = \theta_o + \omega_o \,.\, t + ½ \,.\, \alpha \,.\, t^2$
$v_x^2 = v_{ox}^2 + 2 \,.\, a_x \,.\, (x - x_o)$		$\omega^2 = \omega_o^2 + 2 \,.\, \alpha \,.\, (\theta - \theta_o)$

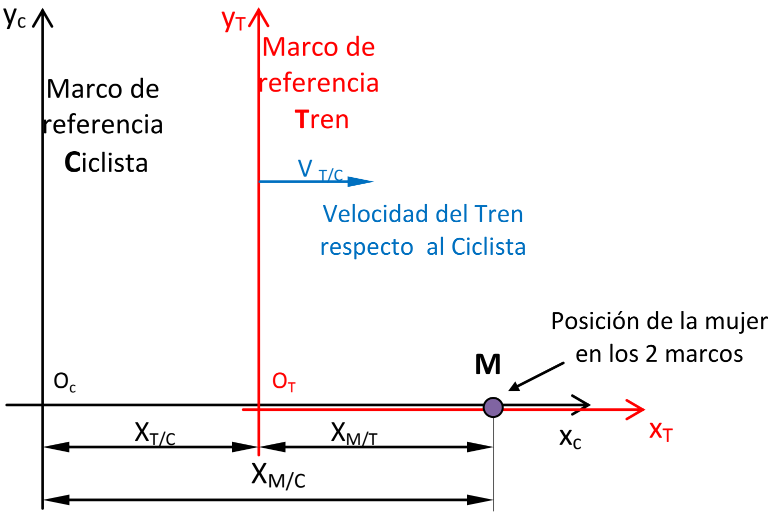
VELOCIDAD RELATIVA EN UNA DIMENSIÓN: [S.Z.F.Y. 3.5]

Una mujer camina con una velocidad de 1,0 m/s por el pasillo de un vagón de ferrocarril que se mueve a 3,0 m/s . ¿Qué velocidad tiene la mujer? Es una pregunta sencilla, pero no tiene una sola respuesta. Para un pasajero sentado en el tren, la mujer se mueve a 1,0 m/s. Para un ciclista parado junto al tren, la mujer se mueve a 1,0 m/s + 3,0 m/s = 4,0 m/s. Un observador en otro tren que va en la dirección opuesta daría otra respuesta. Debemos especificar quién es el observador y dar la velocidad relativa a él. La velocidad de la mujer relativa al tren es 1,0 m/s, relativa al ciclista es 4,0 m/s, etcétera.

Cada observador, equipado en principio con un metro y un cronómetro, constituye lo que llamamos un **marco de referencia**. Así, un marco de referencia es un sistema de coordenadas más una escala de tiempo.



(a)



(b)

Figura 1

En la ***Figura 1*** observamos como una mujer camina dentro de un tren, llamemos **C** al marco de referencia del ciclista (en reposo con respecto al suelo) y **T** al marco de referencia del tren en movimiento.

En el movimiento rectilíneo, la posición de un punto **M** relativa al marco de referencia T está dada por:

$x_{M/T}$: la posición de **M** con respecto al marco **T**

$x_{M/C}$: la posición de **M** con respecto al marco **C**

$x_{T/C}$: la posición del marco **T** con respecto al marco **C**

La distancia del origen **C** a **M** es:

$$x_{M/C} = x_{M/T} + x_{T/C}$$

Si dividimos por dt:

$$\frac{x_{M/C}}{dt} = \frac{x_{M/T}}{dt} + \frac{x_{T/C}}{dt}$$

Obtenemos:

$$v_{M/C} = v_{M/T} + v_{T/C}$$

Se expresa:

La velocidad (absoluta) de la partícula Mujer con respecto al Ciclista es igual a la velocidad relativa de la Mujer con respecto al Tren más la velocidad del tren con respecto al Ciclista (llamada velocidad de arrastre).

En el ejemplo $v_{M/C}$ = 1,0 m/s + 3,0 m/s = 4,0 m/s

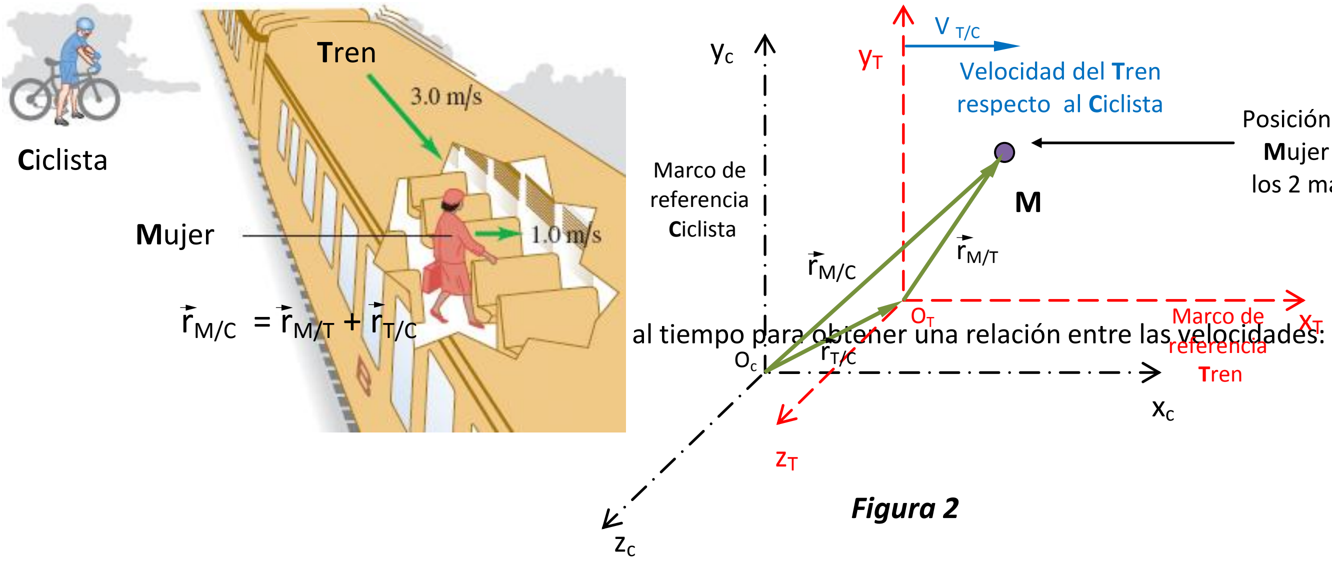
VELOCIDAD RELATIVA EN DOS Ó TRES DIMENSIONES

Podemos extender el concepto de velocidad relativa al movimiento en un plano o en el espacio, usando suma vectorial para combinar velocidades. Suponga que la mujer de la ***Figura 2*** camina no por el pasillo del vagón sino de un costado al otro, con rapidez de 1,0 m/s. También podemos describir su posición **M** en dos marcos de referencia distintos:

C: para el observador terrestre estacionario y

T: para el tren en movimiento.

En vez de coordenadas *x* usamos vectores de posición porque el problema es bidimensional.



$$\vec{r}_{M/C} = \vec{r}_{M/T} + \vec{r}_{T/C}$$

al tiempo para obtener una relación entre las velocidades:

Figura 2

$$\frac{\vec{r}_{M/C}}{dt} = \frac{\vec{r}_{M/T}}{dt} + \frac{\vec{r}_{T/C}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}_{M/C} = \vec{v}_{M/T} + \vec{v}_{T/C}}$$ Velocidad relativa en el espacio

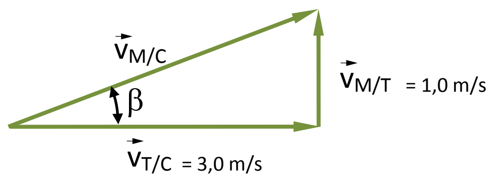
Esta ecuación se conoce como *transformación galileana de la velocidad.*

Si las tres velocidades están en la misma línea, esta ecuación se reduce a la ecuación para las componentes de las velocidades en esa línea.

Si la velocidad del tren relativa al suelo tiene magnitud 3,0 m/s y la velocidad de la mujer relativa al vagón tiene magnitud 1,0 m/s, la magnitud de la velocidad se obtiene de la ***Figura 3*** con el Teorema de Pitágoras:

$$v_{M/C}^2 = v_{M/T}^2 + v_{T/C}^2$$

$$v_{M/C} = 3{,}2 \text{ m/s}$$



Vista Superior

Figura 3

Y la dirección y sentido de este vector se obtiene:

$$\text{tg } \beta = v_{M/T} / v_{T/C}$$

$$\beta = 18^{o}$$

A principios del siglo 20, en su teoría especial de la relatividad Albert Einstein demostró que la relación de suma de velocidades dada en la ecuación se modifica cuando la rapidez se aproxima a la rapidez de la luz, que se denota con *c*. Resultó que Nada puede viajar más rápido que la luz.

C = 300.000 km/s y V_{SONIDO} = 343 m/s