

***Universidad Tecnológica Nacional***  
***Facultad Regional Rosario***



***VECTORES***

Autor: Eduardo Gago  
Basado en el libro de *Howard Anton* (1994)

Año 2015

## VECTORES

Muchas cantidades físicas, como área, longitud y masa, se definen completamente una vez que se da un número real que representa la magnitud de la misma. Otras cantidades físicas, denominadas vectores, no quedan determinadas por completo hasta que se especifican una medida (módulo), un sentido y una dirección. Fuerza, desplazamiento y velocidad son ejemplos de vectores.

### 1. Definición de vector

Los vectores se pueden representar geoméricamente como segmentos rectilíneos orientados o flechas, en los espacios bidimensional (en plano, en  $V_2$  ó en  $R^2$ ) o tridimensional (en el espacio, en  $V_3$  ó en  $R^3$ ); la dirección de la flecha especifica el sentido del vector, la recta de acción que contiene al vector representa la dirección y la longitud del vector se describe como módulo. Respecto a la dirección del vector, se dice que vectores que estén sobre la misma recta sostén (o de acción), o que estén en rectas paralelas tienen la misma dirección.

El vector tiene un punto de aplicación, y un punto terminal. Los vectores se denotan por medio de letras minúsculas negritas y en cursiva como  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  (en el papel se hace con letras minúsculas y con una raya encima de la letra). Al analizar los vectores, los números se mencionan como escalares.

Todos los escalares que se usen son números reales y se denotan por medio de letras minúsculas cursivas  $k$ ,  $p$  y  $h$ .

El punto de aplicación del vector  $\mathbf{v}$  es  $A$  y el punto terminal es  $B$ , se escribe:  $\mathbf{v} = \overline{AB}$

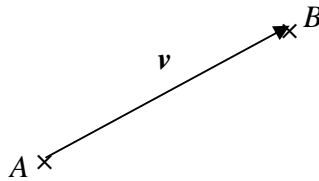


Figura 1. Vector  $\overline{AB}$

### 2. Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales si tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.

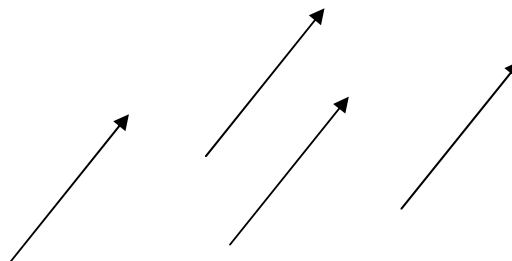


Figura 2. Vectores iguales

De la definición anterior se desprende que dos vectores son iguales aunque no ocupen la misma posición en el plano o en el espacio, y en ese caso, se dice que se trabaja con vectores libres. Además, si el vector tiene punto inicial en el origen de coordenadas el vector se denomina vector posición.

Si los vectores  $u$  y  $v$  son iguales, se expresa:

$$u = v$$

### 3. Suma de vectores

Si  $u$  y  $v$  son dos vectores cualesquiera, entonces la *suma*  $u + v$  es el vector que se determina como sigue: Se grafica el vector  $u$ , y por el punto final de  $u$  se coloca el punto inicial de  $v$ , la unión del punto inicial de  $u$  con el punto final de  $v$  determina el vector suma  $u + v$ .

Se construyen dos sumas,  $u + v$  (Figura 3 (a)) y  $v + u$  (Figura 3 (b)); y es evidente que la suma coincide con la diagonal del paralelogramo determinado por  $u$  y  $v$ . al ubicar estos vectores de modo que tengan el mismo punto inicial.

$$u + v = v + u$$

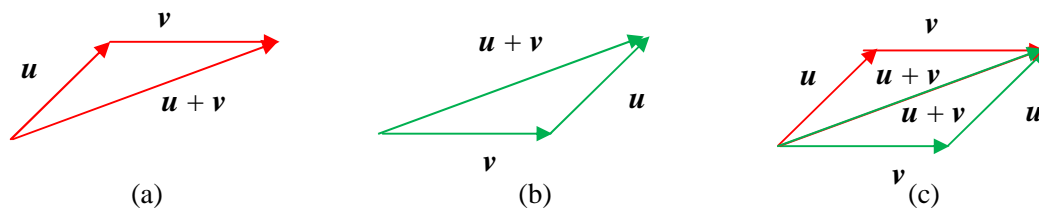


Figura 3. Suma de vectores

### 4. Vector nulo

El vector de módulo cero se denomina *vector nulo* y se denota por  $0$ . Se define

$$0 + u = u + 0 = u$$

para todo vector  $u$ . Como no existe dirección natural para el vector nulo, se establece asignar cualquier dirección que resulte conveniente para el problema que se esté considerando. Si  $v$  es cualquier vector distinto del vector nulo, es obvio que el único vector  $w$  que satisface  $v + w = 0$  es el vector que tiene el mismo módulo, la misma dirección que  $v$  pero cuyo sentido es el opuesto (Figura 4). Este vector ( $w$ ) se conoce como *opuesto* de  $v$  y se escribe:

$$w = -v$$

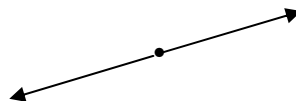


Figura 4. Vectores opuestos

Además, se define:  $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$  (el vector nulo es el único vector igual a su opuesto)

## 5. Resta de vectores

Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son dos vectores cualesquiera, entonces la sustracción se define por:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

Para obtener la diferencia  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , se procede igual que en la suma de vectores (Figura 5 (a)), considerando  $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

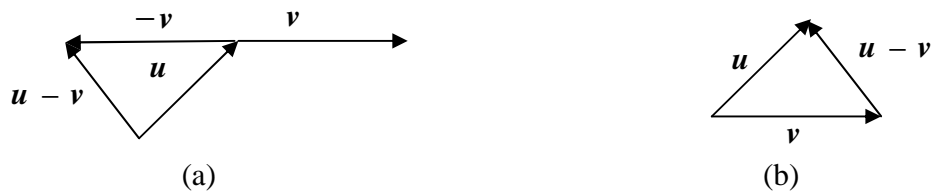


Figura 5. Resta de vectores

Otra manera gráfica de obtener la diferencia  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , sin construir  $-\mathbf{v}$ , es colocando  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  de modo que coincidan sus puntos de aplicación; el vector que va del punto terminal de  $\mathbf{v}$  hacia el punto terminal de  $\mathbf{u}$  es entonces el vector  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  (Figura 5 b)

## 6. Producto de un número real por un vector

Si  $\mathbf{v}$  es un vector cualquiera y  $k$  es un número real, entonces el *producto*  $k\mathbf{v}$  se define como un vector tal que:

- su módulo es  $|k|$  multiplicado por el módulo de  $\mathbf{v}$ .
- su dirección es la misma que la de  $\mathbf{v}$ .
- su sentido es el de  $\mathbf{v}$ , si  $k > 0$ ; y opuesto al de  $\mathbf{v}$ , si  $k < 0$ .

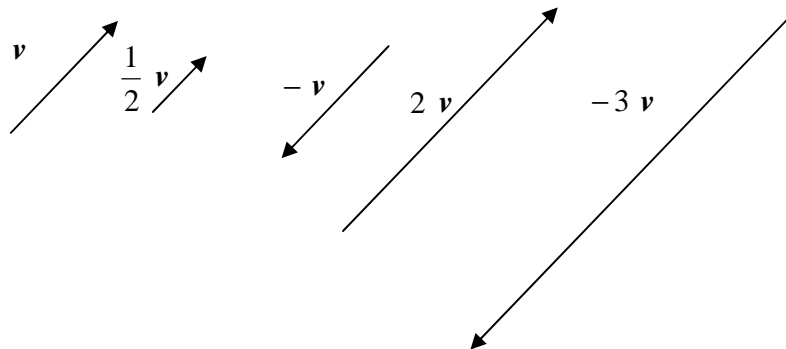


Figura 6. Vectores paralelos

Además, se define que  $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$  si  $k = 0$  o  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

En la Figura 6 se ilustra la relación entre un vector  $\mathbf{v}$  y el vector  $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ ,  $(-1)\mathbf{v}$ ,  $2\mathbf{v}$  y  $(-3)\mathbf{v}$ .

Nótese que el vector  $(-1)\mathbf{v}$  tiene el mismo módulo y dirección que  $\mathbf{v}$  pero su sentido es el opuesto. Por tanto,  $(-1)\mathbf{v}$  es precisamente el vector opuesto de  $\mathbf{v}$ ; es decir,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$

Los vectores de la Figura 6, que surgen del producto del vector  $\mathbf{v}$  por un real, son paralelos. De ahora en adelante, se considera que los vectores que tienen la misma dirección son paralelos y que estos pueden encontrarse dentro de la misma recta de acción o en rectas paralelas.

De lo expuesto en el párrafo anterior, se pueden establecer dos condiciones muy utilizadas en el tratamiento del tema vectores. Dados dos vectores no nulos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , y un número real  $k$ , entonces:

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = k \mathbf{b} \\ |\mathbf{a}| = |k| |\mathbf{b}| \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

## 7. Componentes de un vector

Los problemas relacionados con vectores a menudo se simplifican al introducir un sistema de coordenadas rectangulares. Por el momento, el análisis se restringe a vectores en  $\mathbb{R}^2$  (en el plano). Sea  $\mathbf{v}$  cualquier vector en  $\mathbb{R}^2$ , y como se observa en la Figura 7, si se coloca  $\mathbf{v}$  de manera que su punto de aplicación quede en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Las coordenadas  $(v_1, v_2)$  del punto terminal de  $\mathbf{v}$  se llaman *componentes* de  $\mathbf{v}$ , y se escribe

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

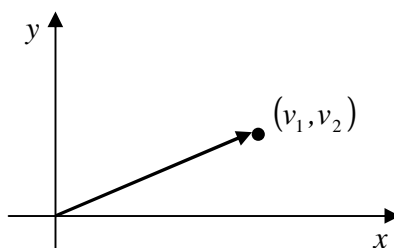


Figura 7. Componentes de un vector en el plano

Si se colocan vectores iguales,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , de modo que sus puntos de aplicación coincidan en el origen, entonces es obvio que sus puntos terminales deben coincidir. Así entonces, los vectores tienen las mismas componentes. Es igualmente obvio que vectores con las mismas componentes deben tener la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo, por consiguiente, son iguales.

En resumen, dados dos vectores:  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 \end{cases}$$

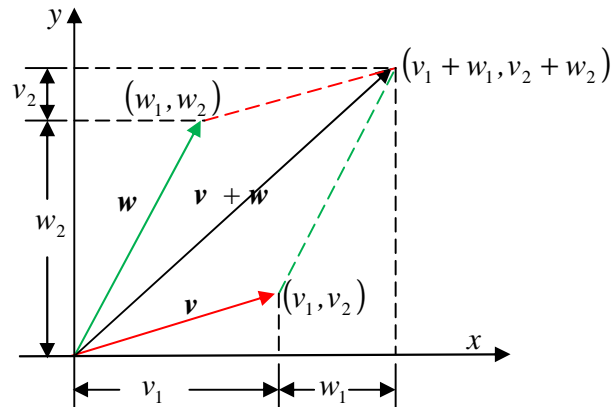


Figura 8. Suma de vectores

Las operaciones de adición vectorial y multiplicación por escalares son muy fáciles de llevar a cabo en términos de componentes.

En la Figura 8, si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ , entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2)$$

Si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  y  $k$  es un escalar cualquiera, entonces aplicando un argumento geométrico relacionado con triángulos semejantes, se observa en la Figura 9 que

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$$

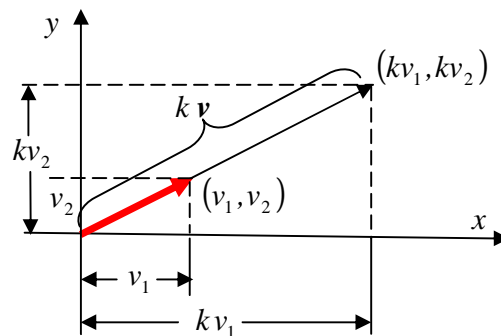


Figura 9. Producto de un real por un vector

Ejemplo 7.1. Dados los vectores  $\mathbf{v} = (1, -2)$  y  $\mathbf{w} = (7, 6)$ . Calcular  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ ,  $4\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (8, 4)$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (1, -2) - (7, 6) = (-6, -8)$$

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4, -8)$$

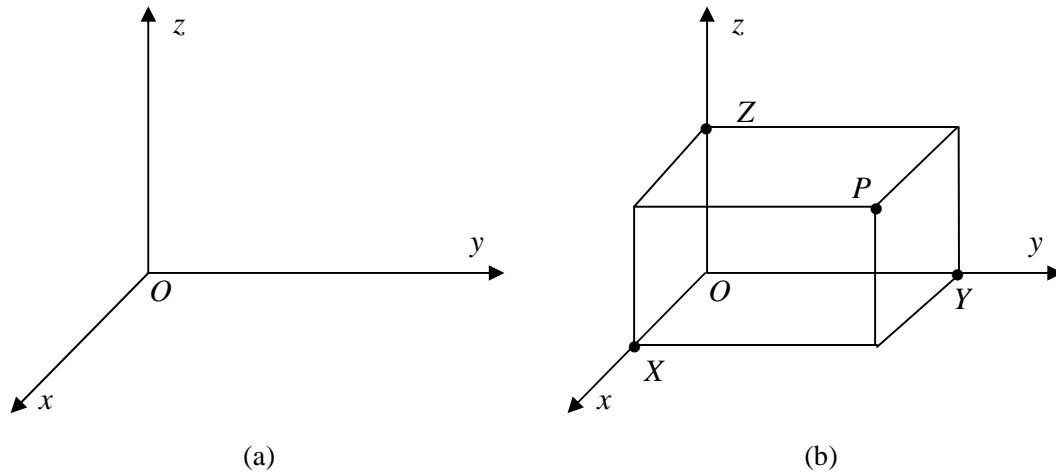


Figura 10. Ejes y planos coordenados

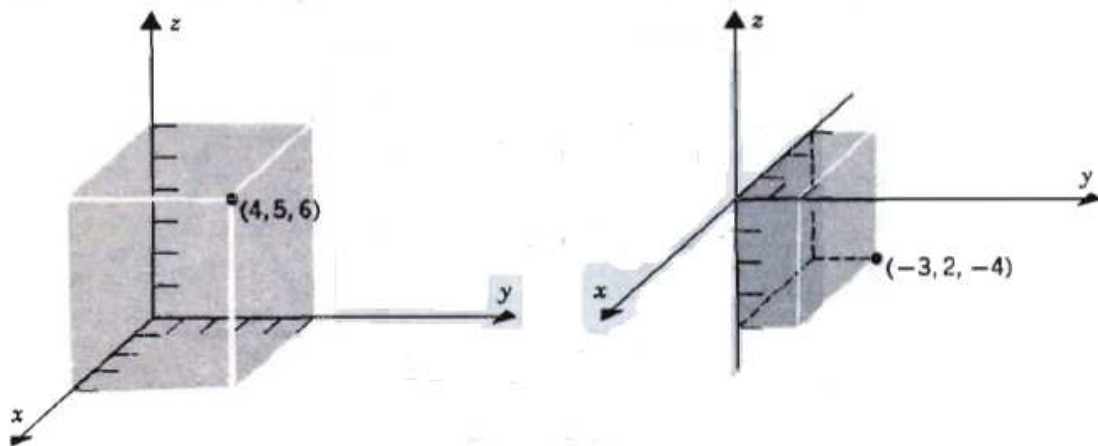


Figura 11. Localización de un punto en el espacio

Precisamente como los vectores en el plano (en  $R^2$  ó  $V_2$ ) se pueden describir por pares ordenados de números reales, es posible describir los vectores en el espacio (en  $R^3$  ó  $V_3$ ) por ternas de números reales, introduciendo un sistema de *coordenadas rectangulares*. Para construir un sistema de coordenadas de este tipo, se selecciona un punto  $O$ , conocido como *origen*, y se eligen tres rectas mutuamente perpendiculares, llamadas *ejes de coordenadas*, que pasen por el origen. Se denominan estos ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  y se selecciona una dirección positiva para cada uno de ellos, así como una unidad de longitud para medir las distancias (Figura 10 (a)). Cada par de ejes de coordenadas determinan un plano conocido como *plano coordenado*. Estos planos se mencionan como *plano  $xy$* , *plano  $xz$*  y *plano  $yz$* . A cada punto  $P$  en  $R^3$  se le asigna una terna de números  $(x, y, z)$ , llamados *coordenadas de  $P$* . Si se pasan tres planos por  $P$  que sean paralelos a los planos coordenados, y se denotan los puntos de intersección de estos planos con los tres ejes coordenados por  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  (Figura 10 (b)). Las coordenadas de  $P$  se definen como las longitudes con signo

$$x=OX \quad y=OY \quad z=OZ$$

En la Figura 11 se han situado los puntos cuyas coordenadas son  $(4,5,6)$  y  $(-3,2,-4)$

En la Figura 12, un vector  $\mathbf{v}$  en el espacio ( $\mathbf{v} \in R^3$ ) se ubica de modo que su punto de aplicación quede en el origen de un sistema rectangular de coordenadas, entonces las coordenadas del punto terminal se conocen como *componentes* de  $\mathbf{v}$  y se escribe:

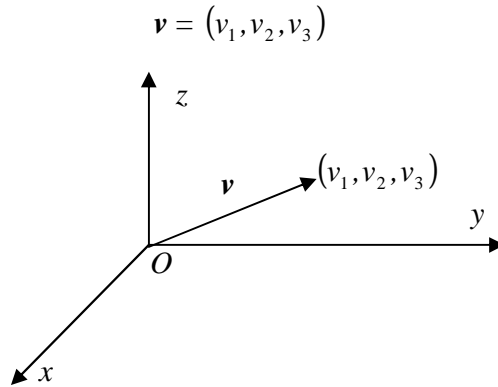


Figura 12. Componentes de un vector en el espacio

Si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  son dos vectores en  $R^3$ , entonces es posible aplicar argumentos semejantes a los usados para los vectores en  $R^2$ , a fin de establecer los resultados que siguen:

- $\mathbf{v} = \mathbf{w} \Leftrightarrow v_1 = w_1, v_2 = w_2 \text{ y } v_3 = w_3$
- $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$
- $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3), \forall k \in R$

Ejemplo 7.2. Si  $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$  y  $\mathbf{w} = (2, -6, 4)$ , calcular:  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ,  $-\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$   
 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3)$ ,  $2\mathbf{v} = (2, -6, 4)$ ,  $-\mathbf{w} = (-2, 6, -4)$ ,  $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-1, 3, -2)$ .

A veces surgen vectores que no tienen sus puntos de aplicación en el origen. Si el vector  $\overline{P_1P_2}$  tiene el punto inicial  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y el punto terminal  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , entonces

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

es decir, las componentes de  $\overline{P_1P_2}$  se obtienen de la diferencia entre las coordenadas del punto terminal menos las coordenadas del punto inicial. Se puede ver esto considerando la Figura 13; el vector  $\overline{P_1P_2}$  es la diferencia de los vectores  $\overline{OP_2}$  y  $\overline{OP_1}$  (observar que  $\overline{OP_1}$  y  $\overline{OP_2}$  son vectores posición), de modo que:



$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

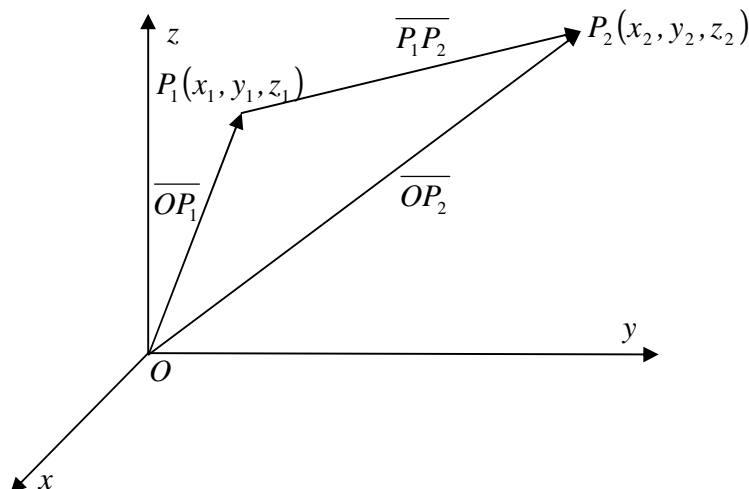


Figura 13. vector con punto aplicación fuera del origen

Ejemplo 7.3. Hallar las componentes del vector  $\mathbf{v} = \overline{P_1P_2}$ , siendo  $P_1 = (2, -1, 4)$  y  $P_2 = (7, 5, -8)$

$$\mathbf{v} = (7 - 2, 5 - (-1), -8 - 4) = (5, 6, -12)$$

De modo análogo, en  $R^2$ , el vector con punto de aplicación en  $P_1 = (x_1, y_1)$  y punto terminal  $P_2 = (x_2, y_2)$  es:

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

## 8. ÁLGEBRA VECTORIAL - MÓDULO DE UN VECTOR

Propiedades

Si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores en  $R^2$  o en  $R^3$ , y  $k$  y  $t \in R$ , entonces

1) Respecto de la suma de vectores

1-a)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  (propiedad conmutativa)

1-b)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  (propiedad asociativa)

1-c)  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$  (existencia del elemento neutro en la suma)

1-d)  $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  (existencia del opuesto en la suma)

2) Respecto del producto de un número real por un vector

2-a)  $k(t\mathbf{u}) = (k t)\mathbf{u}$

$$2-b) k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

$$2-c) (k + t)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + t\mathbf{u}$$

$$2-d) 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

Antes de analizar la demostración, observar que se han desarrollado dos enfoques en el tratamiento de los vectores: *geométrico* en el que los vectores se representan por medio segmentos rectilíneos orientados; y *analítico* en el que se representan por pares o ternas de números reales denominados componentes.

Como consecuencia, los resultados de las propiedades anteriores se pueden establecer geoméricamente o analíticamente. Como ilustración, se probará el inciso a-2) en ambas formas. Las demostraciones restantes se dejan como ejercicios.

Demostración del inciso 1-b) (analítica).

Se dará la demostración para vectores en  $R^3$ . La demostración para  $R^2$  es semejante.

Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) = \\ &= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, [u_3 + v_3] + w_3) = (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2], u_3 + [v_3 + w_3]) = \\ &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Demostración del inciso 1-b) (geométrica). Supóngase que  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  se representan por  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{QR}$  y  $\overline{RS}$ , como se muestra en la Figura 14. Entonces,

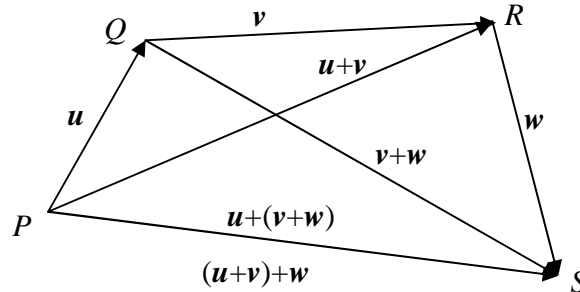


Figura 14. Propiedad conmutativa de la suma

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overline{QS} \quad , \quad \text{y} \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overline{PS}$$

También,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overline{PR} \quad , \quad \text{y} \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \overline{PS}$$

Por tanto,

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

A la longitud de un vector  $\mathbf{v}$  se le da el nombre de *módulo* de  $\mathbf{v}$  y se le denota por  $|\mathbf{v}|$ . Si se observa la Figura 15(a), y aplicando el teorema de Pitágoras se deduce que el módulo de un vector  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , en  $R^2$  es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

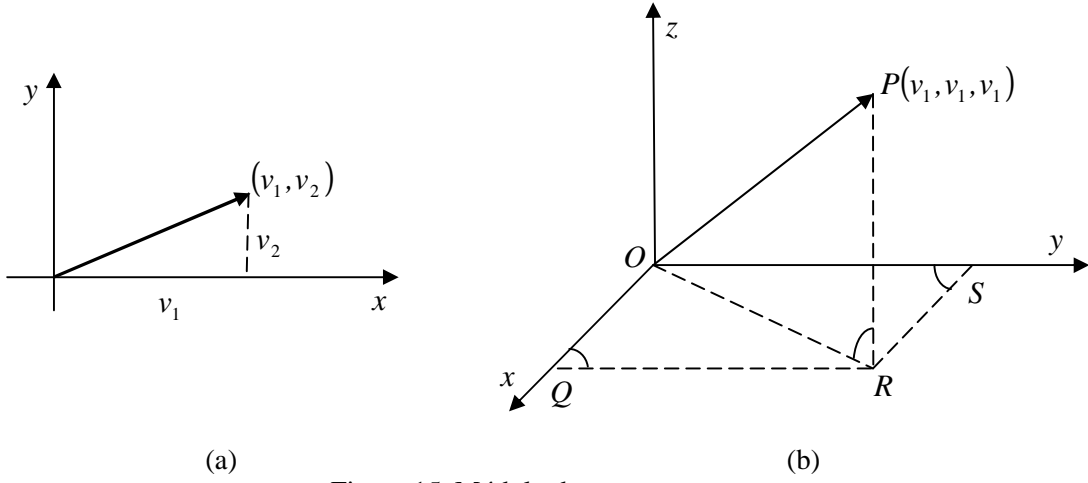


Figura 15. Módulo de un vector

Sea  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  un vector en  $R^3$ . Utilizando la Figura 15 (b) y con dos aplicaciones del teorema de Pitágoras, se obtiene

$$v^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{OS})^2 + (\overline{RP})^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (1)$$

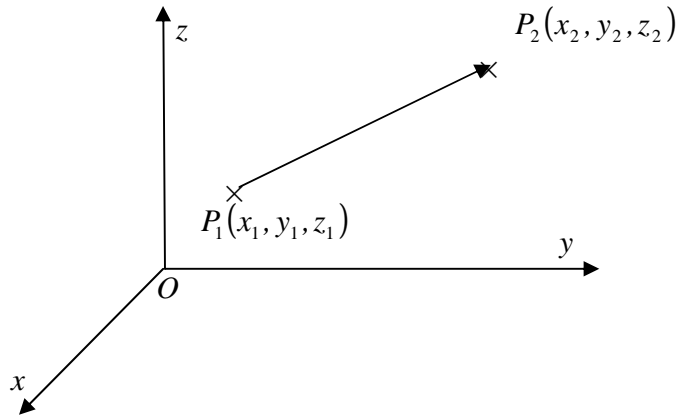


Figura 16. Distancia entre dos puntos en el espacio

Si  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  son dos puntos en  $R^3$ , entonces la distancia  $d$  entre ellos es el módulo del vector  $\overline{P_1P_2}$  (Figura 16). Debido a que

$$\overline{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

de (1) se deduce que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

De modo análogo, si  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  son puntos en  $R^2$ , entonces la distancia entre ellos está dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 8.1. Hallar el módulo del vector  $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$ ; b) La distancia  $d$  entre los puntos  $P_1(2, -1, -5)$  y  $P_2(4, -3, 1)$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

## 9. PRODUCTO ESCALAR

Definición. Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son dos vectores en  $R^2$  o en  $R^3$  y  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , entonces el *producto escalar*  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  se define por:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta & \text{si } \mathbf{u} \neq 0 \text{ y } \mathbf{v} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mathbf{u} = 0 \text{ ó } \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

Para determinar  $\theta$ , el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , se sitúan dichos vectores de modo que sus puntos iniciales coincidan. Se dice que el ángulo  $\theta = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$  satisface  $0 \leq \theta \leq \pi$  (Figura 17).

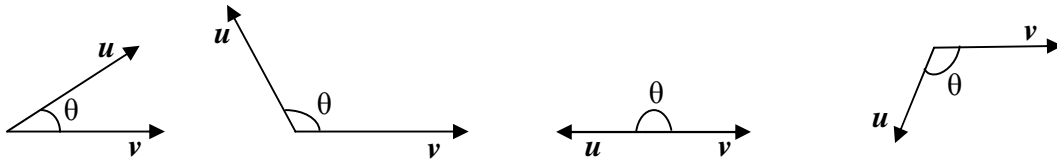


Figura 17. Ángulo entre dos vectores

Ejemplo 9.1. Hallar el producto escalar entre los vectores  $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$  y  $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$ , si el ángulo entre ellos es de  $45^\circ$ .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta = \left( \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \right) \left( \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} \right) \cos 45^\circ = \sqrt{8} \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

Sean  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  dos vectores no nulos, si  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , como se observa en la Figura 18, entonces la ley de los cosenos da

$$|\overline{PQ}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta \quad (2)$$

Puesto que  $\overline{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , se puede volver a escribir (2) como

$$|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta = \frac{1}{2} (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2)$$

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \frac{1}{2} (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2)$$

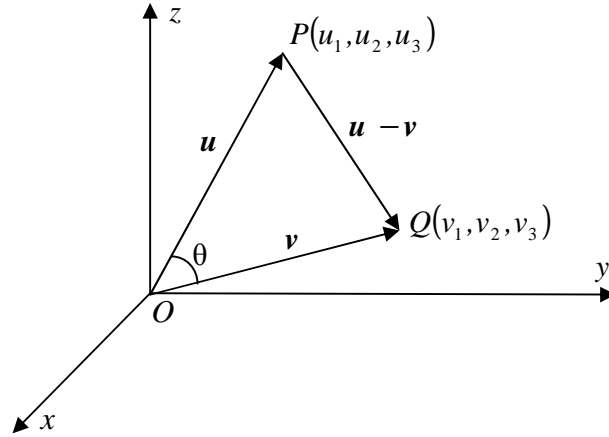


Figura 18. Triángulo formado por  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

Al hacer la sustitución,

$$|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad |\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$|\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| &= \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2 - (v_3 - u_3)^2) = \\ &= \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_1^2 - u_1^2 + 2v_1u_1 - v_2^2 - u_2^2 + 2v_2u_2 - v_3^2 - u_3^2 + 2v_3u_3) = \\ &= \frac{1}{2} (2v_1u_1 + 2v_2u_2 + 2v_3u_3) \end{aligned}$$

Después de simplificar, se obtiene:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  son dos vectores en  $R^2$ , entonces la fórmula que corresponde es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Ejemplo 9.2. Sean los vectores  $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$  y  $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ . Hallar  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  y determinar el ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

De este ejemplo es posible deducir una fórmula para calcular el ángulo entre dos vectores no nulos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

Propiedades 1. Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vectores no nulos en  $R^2$  o en  $R^3$ .

1-a)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ , es decir,  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

1-b) Si  $\theta$  es el ángulo  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , entonces:

$$\theta \text{ es agudo} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$$

$$\theta \text{ es obtuso} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Demostración.

a) El ángulo  $\theta$  entre dos vectores que son iguales es 0, se tiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}| |\mathbf{v}| \cos \theta = |\mathbf{v}|^2 \cos \theta = |\mathbf{v}|^2 \cos 0 = |\mathbf{v}|^2 \cdot 1 = |\mathbf{v}|^2$$

b) Dado que  $|\mathbf{u}| > 0, |\mathbf{v}| > 0$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  tiene el mismo signo que  $\cos \theta$ .  
Supuesto que  $\theta$  satisface  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

$$\text{el ángulo } \theta \text{ es agudo} \Leftrightarrow \cos \theta > 0$$

$$\text{el ángulo } \theta \text{ es obtuso} \Leftrightarrow \cos \theta < 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \theta = 0$$

Esta propiedad, se puede establecer una importante conclusión:

*“Dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si el producto escalar entre ambos es cero”*

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Ejemplo 9.3. Si  $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$  y  $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$ , calcular:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ ; ¿Qué conclusiones se pueden establecer de los cálculos obtenidos?

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 2 = -5$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-3) \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 21$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 0$$

Por tanto,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  forman un ángulo obtuso,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  forman un ángulo agudo y  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  son perpendiculares.

Propiedades 2. Si  $u, v$  y  $w$  son vectores en  $R^2$  o en  $R^3$  y  $k$  es un escalar, entonces

2-a)  $u \cdot v = v \cdot u$

2-b)  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

2-c)  $k(u \cdot v) = (ku) \cdot v = u \cdot (kv)$

2-d)  $v \cdot v > 0$  si  $v \neq 0$  y  $v \cdot v = 0$  si  $v = 0$

Demostración. Se probará (c) para vectores en  $R^3$  y se dejarán las demostraciones que restan como ejercicios. Sean  $u = (u_1, u_2, u_3)$  y  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ; entonces

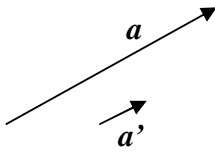
$$k(u \cdot v) = k(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) = (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3 = (ku) \cdot v$$

## 10. VERSOR

Un versor es un vector cuyo módulo es igual a uno.

### 10.1 Versor asociado a un vector dado

Dado un vector  $a$  no nulo de  $R^2$  o  $R^3$ , se llama versor asociado al vector  $a$ , y se simboliza  $a'$ , al vector que tiene la misma dirección y sentido que  $a$ .



En la Figura 19 se observa que  $a'$  es el versor asociado al vector  $a$ , y además  $a$  y  $a'$  tienen la misma dirección, por lo tanto son paralelos. Entonces  $a$  y  $a'$  deben cumplir con las condiciones vistas para vectores paralelos

Figura 19. Versor asociado a un vector

$$\text{Si } a \parallel a' \Rightarrow \begin{cases} a' = k a & (3) \\ |a'| = |k| |a| & (4) \end{cases} \quad \text{con } k \in R$$

Como  $a'$  es un versor, entonces  $|a'| = 1$ . Si se Reemplaza en la ec. (4)

$$1 = |k| |a| \Rightarrow |k| = \frac{1}{|a|} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{|a|}$$

Sustituyendo el valor de  $k$  en la ec. (3), se obtiene:

$$a' = \pm \frac{1}{|a|} a$$

De la ecuación anterior se determina que hay dos versores  $a'$ .

$\mathbf{a}' = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ , es el versor asociados al vector  $\mathbf{a}$ . En este caso,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$  tienen la misma dirección y sentido

$\mathbf{a}' = -\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ , es el opuesto al versor asociado a  $\mathbf{a}$ . En este caso,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}'$  tienen la misma dirección y pero distinto sentido.

Si  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{a} = (a_1, a_2)$ , entonces su versor asociado  $\mathbf{a}'$  es:

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} (a_1, a_2) \Rightarrow \mathbf{a}' = \left( \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \right)$$

Si  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , entonces su versor asociado  $\mathbf{a}'$  es:

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \mathbf{a}' = \left( \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right)$$

## 10.2. Versores fundamentales

Se denominan versores fundamentales, a los versores cuyas direcciones y sentidos son coincidentes con cada uno de los semiejes coordenados positivos.

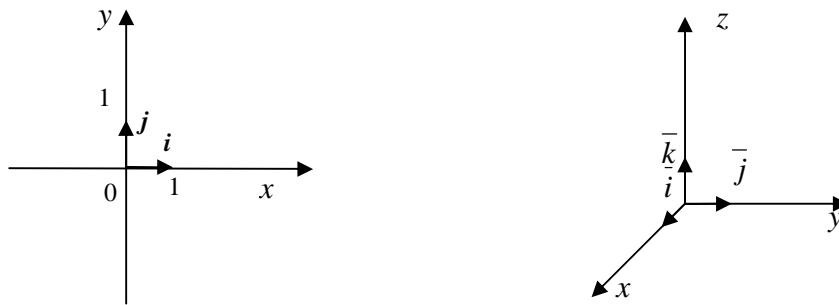


Figura 20. Versores fundamentales

En el plano:

$\mathbf{i} = (1,0)$ ; versor fundamental del eje  $x$

$\mathbf{j} = (0,1)$ ; versor fundamental del eje  $y$

Observar que:  $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$

En el espacio:

$\mathbf{i} = (1,0,0)$ ; versor fundamental del eje  $x$

$\mathbf{j} = (0,1,0)$ ; versor fundamental del eje  $y$

$\mathbf{k} = (0,0,1)$ ; versor fundamental del eje  $z$

Observar que:  $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ ;  $\mathbf{i} \perp \mathbf{k}$ ;  $\mathbf{j} \perp \mathbf{k}$



Todo vector  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  del plano se puede expresar en términos de los versores fundamentales  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \quad (5)$$

En forma análoga, todo vector  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  del espacio se puede expresar en términos de los versores fundamentales  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad (6)$$

A las ecs. (5) y (6) se las denomina forma canónica del vector  $\mathbf{a}$ .

Ejemplos:  $(-5, 7) = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ ;  $(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

### 10.3. Ángulos directores

Dado un vector no nulo  $\mathbf{a}$ , los ángulos que dicho vector forma con cada uno de los semiejes positivos coordenados, se denominan ángulos directores de  $\mathbf{a}$ . También se pueden definir a los ángulos directores de  $\mathbf{a}$ , como los ángulos que dicho vector forma con cada uno de los versores fundamentales.

Si el vector está en el plano, tendremos dos ángulos directores, mientras que si el vector está en el espacio tendremos tres ángulos directores.

Si  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{a} = (a_1, a_2)$

$\alpha_1$ : ángulo que  $\mathbf{a}$  forma con el semieje positivo  $x$  = primer ángulo director =  $(\mathbf{u}, \mathbf{i})$

$\alpha_2$ : ángulo que  $\mathbf{a}$  forma con el semieje positivo  $y$  = segundo ángulo director =  $(\mathbf{u}, \mathbf{j})$

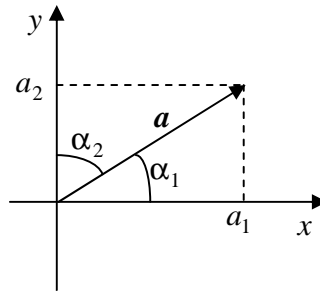


Figura 21. Ángulos directores de un versor en el plano

Si  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\alpha_1$ : ángulo que  $\mathbf{a}$  forma con el semieje positivo  $x$  = primer ángulo director =  $(\mathbf{u}, \mathbf{i})$

$\alpha_2$ : ángulo que  $\mathbf{a}$  forma con el semieje positivo  $y$  = segundo ángulo director =  $(\mathbf{u}, \mathbf{j})$

$\alpha_3$ : ángulo que  $\mathbf{a}$  forma con el semieje positivo  $z$  = tercer ángulo director =  $(\mathbf{u}, \mathbf{k})$

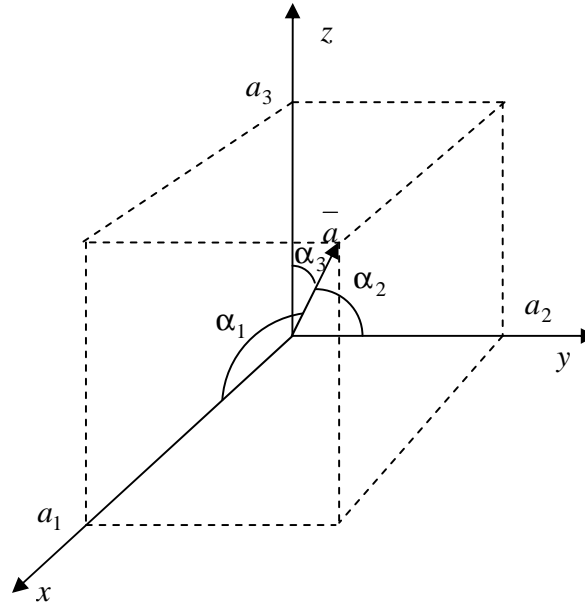


Figura 22. Ángulos directores de un versor en el espacio

#### 10.4. Cosenos directores

Son los cosenos de los ángulos directores.

En el caso de cualquier vector no nulo  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ , se establece:

$\cos \alpha_1$ : primer coseno director,  $\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$

$\cos \alpha_2$ : segundo coseno director,  $\cos \alpha_2 = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}$

De las expresiones anteriores se verifica que  $\cos \alpha_1$  y  $\cos \alpha_2$  son las componentes del versor asociado al vector  $\mathbf{a}$ . En consecuencia si se recuerda que  $\mathbf{a}'$  (versor asociado al vector  $\mathbf{a}$ ) es:

$$\mathbf{a}' = \left( \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \right)$$

Entonces

$$\mathbf{a}' = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2)$$

En el caso de cualquier vector no nulo  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , se establece:

$\cos \alpha_1$ : primer coseno director.  $\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$

$\cos \alpha_2$ : segundo coseno director.  $\cos \alpha_2 = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}$

$\cos \alpha_3$ : tercer coseno director.  $\cos \alpha_3 = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$

De las expresiones anteriores se verifica que  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \alpha_2$  y  $\cos \alpha_3$  son las componentes del versor asociado al vector  $\mathbf{a}$ . En consecuencia si se recuerda que  $\mathbf{a}'$  (versor asociado al vector  $\mathbf{a}$ ) es:

$$\mathbf{a}' = \left( \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right)$$

Entonces:

$$\mathbf{a}' = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$$

Observaciones:

- Los cosenos directores de cualquier vector y de su versor asociado son iguales.
- El versor asociado a un vector tiene como componentes a sus cosenos directores.
- Si un vector en  $R^2$  o en  $R^3$  forma un ángulo agudo con un eje coordenado determinado, entonces la componente correspondiente a la variable representada por ese eje tiene signo positivo, mientras que si el ángulo que forma es obtuso la componente correspondiente a la variable representada por ese eje es negativa.

## 11. Proyección ortogonal de un vector sobre otro

Dados  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos vectores distintos del vector nulo en  $R^2$  o en  $R^3$ , se va a deducir una expresión que permite calcular la proyección ortogonal de un vector sobre otro.

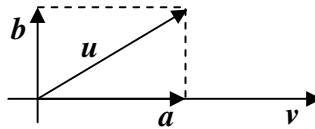


Figura 23. Proyección ortogonal de un vector sobre otro

En la Figura 23 el vector  $\mathbf{a}$  recibe el nombre de *proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$* , y además se observa que:

- $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$
- $\mathbf{a}$  es colineal (paralelo) a  $\mathbf{v}$ , en consecuencia  $\mathbf{a} = k \mathbf{v}$ ;  $\forall k \in R$
- $\mathbf{b}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ , entonces  $\mathbf{b} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = 0$

Si

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = k \mathbf{v} + \mathbf{b}$$

De las propiedades 1 y 2 vistas en producto escalar, si se aplica en ambos miembros producto escalar con  $\mathbf{v}$ , se obtiene

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = k \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = k |\mathbf{v}|^2 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = k |\mathbf{v}|^2$$

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$$

y como  $\mathbf{a} = k \mathbf{v}$ , se obtiene la *proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$*

$$\text{proyec ortog.de } \mathbf{u} \text{ s/ } \mathbf{v} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

El módulo de la proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  (que se llamará simplemente *proyección de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$* ) es:

$$\text{proyec .de } \mathbf{u} \text{ s/ } \mathbf{v} = |\mathbf{a}| = \left| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|^2} |\mathbf{v}|$$

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Ejemplo 11.1. Dados los vectores  $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$  y  $\mathbf{v} = (4, -1, 2)$ . Hallar la proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$ , y la proyección ortogonal de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{u}$ .

Si llamamos  $\mathbf{c}$  a la proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$ , entonces

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2, -1, 3) \cdot (4, -1, 2) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 8 + 1 + 6 = 15$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

$$\mathbf{c} = \frac{15}{21} (4, -1, 2) = \left( \frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

Si llamamos  $\mathbf{d}$  a la proyección ortogonal de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{u}$ , entonces

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\mathbf{d} = \frac{15}{14} (2, -1, 3) = \left( \frac{15}{7}, -\frac{15}{14}, \frac{45}{14} \right)$$

En este ejemplo se demuestra que la proyección ortogonal de  $\mathbf{u}$  sobre  $\mathbf{v}$  no es igual a la proyección ortogonal de  $\mathbf{v}$  sobre  $\mathbf{u}$ . Por lo tanto, en el cálculo de la proyección ortogonal de un vector sobre otro, no es posible variar el orden de los vectores proyectante y proyectado.

## 11. Producto vectorial

En muchas aplicaciones de los vectores a problemas de la geometría, física e ingeniería, se tiene interés en construir un vector en  $R^3$  que sea perpendicular a dos vectores dados. Ahora se va a presentar un tipo de multiplicación vectorial que facilita esta construcción.

Definición. Si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  son vectores en  $R^3$ , entonces el *producto vectorial*  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es el vector definido por:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

o, con la notación de determinantes

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad (7)$$

en donde los elementos del primer renglón son las componentes de  $\mathbf{u}$ , y los del segundo renglón son las componentes de  $\mathbf{v}$ , entonces los elementos de la determinante de la primera componente de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  se obtienen al eliminar la primera columna de la matriz, los elementos de la determinante de la segunda componente se obtienen al eliminar la segunda columna de la matriz, y los elementos de la determinante de la tercera componente se obtienen al eliminar la tercera columna de la matriz.

Notar que el producto escalar de dos vectores es un número real, mientras que el producto vectorial es otro vector

Ejemplo 11.1. Hallar  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , donde  $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$  y  $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left( \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -7, -6)$$

### Propiedades

Si  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores cualesquiera en  $R^3$  y  $k$  es un escalar cualquiera, entonces:

1. Propiedades que relacionan el producto vectorial y el producto escalar

1-a)  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$  ( $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal a  $\mathbf{u}$ )

1-b)  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$  ( $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal a  $\mathbf{v}$ )

1-c)  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$  (Identidad de Lagrange)

2. Propiedades del álgebra del producto vectorial

2-a)  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

2-b)  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

2-c)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

2-d)  $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

$$2-e) \mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$2-f) \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Ejemplo 11.2. Dados los vectores  $\mathbf{u} = (1, 2, -2)$  y  $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$ . Hallar:  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ ;  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  y  $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

En el ejemplo 11.1. se calculó  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-7) + (-2) \cdot 6 = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) + 1 \cdot (-6) = 0$$

En este ejemplo se ve que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal tanto a  $\mathbf{u}$  como a  $\mathbf{v}$  (Propiedades 1-a) y 1-b)).

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = \left( \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-6)^2} \right)^2 = \left( \sqrt{4 + 49 + 36} \right)^2 = 89$$

$$|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \left( \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \right)^2 \left( \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} \right)^2 - (1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 1)^2 = 89$$

Las demostraciones de las propiedades del ítem 2 se deducen inmediatamente de la fórmula (7) y de las propiedades de los determinantes.

Por ejemplo, 2 a) se puede probar como sigue: Al intercambiar  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  en (7) se intercambian los renglones de los tres determinantes del segundo miembro de (7) y, en consecuencia, se cambia el signo de cada componente del producto vectorial. Por tanto,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ .

Las demostraciones de los incisos restantes se dejan como ejercicios.

Ejemplo 11.3. Dados los vectores los vectores  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ;  $\mathbf{j} = (0, 1, 1)$ ;  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , se pueden obtener los siguientes resultados

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}; \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}; \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

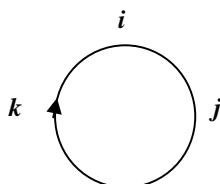


Figura 24. Producto vectorial entre los versores fundamentales

Con referencia a la Figura 24, el producto vectorial de dos vectores consecutivos es el vector que sigue sobre la circunferencia, siempre que se siga el sentido de las agujas del reloj. En caso contrario, el producto vectorial de dos vectores consecutivos, al avanzar en sentido contrario a las agujas del reloj, es el opuesto del vector siguiente sobre la circunferencia.

Observación. No se cumple que  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

Por ejemplo,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

y

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = -\mathbf{i};$$

de modo que

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$$

Ya se dijo que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es ortogonal tanto a  $\mathbf{u}$  como a  $\mathbf{v}$ . Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores no nulos, se puede demostrar que es posible determinar el sentido de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  aplicando la regla de la mano derecha. Sea  $\theta$  el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , y si se hace girar  $\mathbf{u}$  de modo que describa el ángulo  $\theta$  hasta que coincida con  $\mathbf{v}$ . Si se curvan los dedos de la mano derecha de modo que apunten en la dirección de rotación, entonces el pulgar apunta (aproximadamente) en la dirección de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

### 11.1. Módulo del producto vectorial

La identidad de Lagrange, afirma que

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

Si  $\theta$  denota el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , entonces por definición de producto escalar se sabe que

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$ , de modo que se puede volver a escribir como:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \cos^2 \theta = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

Por tanto:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta$$

### 11.2. Aplicaciones del producto vectorial: Área de un paralelogramo.

El módulo del producto vectorial entre dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no nulos ni paralelos en  $R^3$ , es igual al área del paralelogramo determinado por ambos vectores.

Se sabe que el área  $A$  de un paralelogramo está dada por el producto de la medida de la base ( $b$ ) por la medida de la altura ( $h$ ).

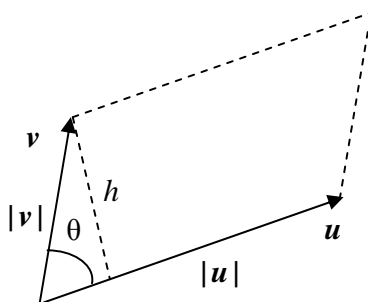


Figura 25. Área de un paralelogramo

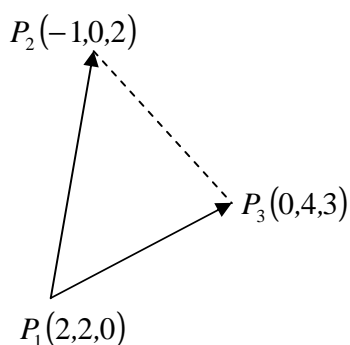
En nuestro caso:  $b = |u|$ ,  $\text{sen}\theta = \frac{h}{|v|} \Rightarrow h = |v| \text{sen}\theta$ , entonces

$$A_{\square} = b \cdot h = |u| |v| \text{sen}\theta = |u \times v|$$

Además, la mitad del valor del módulo de  $u \times v$  es igual al área del triángulo determinado por  $u$  y  $v$ .

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |u \times v|$$

Ejemplo 11.2.1. Hallar el área del triángulo determinado por los puntos  $P_1(2,2,0)$ ,  $P_2(-1,0,2)$  y  $P_3(0,4,3)$



$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}|$$

Si  $\overline{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$  y  $\overline{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$

$$\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = (-10, 5, -10)$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{(-10)^2 + 5^2 + (-10)^2} = \frac{1}{2} 15 = \frac{15}{2}$$

Resumen:

- 1)  $u \times v$  es perpendicular tanto a  $u$  como a  $v$ .
- 2) La orientación de  $u \times v$  se determina por la regla de la mano derecha.
- 3)  $|u \times v| = |u| |v| \text{sen}\theta$

Estas tres propiedades determinan por completo al vector  $u \times v$ ; la propiedad (1) determina la dirección, la (2) el sentido y la (3) su módulo.



## 12. Producto mixto

El producto mixto de tres vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  (en ese orden) en  $R^3$  es igual al número real que se obtiene de la siguiente expresión:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  ó  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ .

El cálculo del producto mixto se puede realizar haciendo en primer lugar el producto vectorial entre los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , y luego producto escalar con  $\mathbf{c}$ . Usualmente en la práctica, el cálculo del producto mixto se realiza calculando la determinante cuyas filas son los vectores dados:

Dados los vectores:  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  y  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , el producto mixto entre ellos, aplicando determinantes resulta:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 12.1. Dados los vectores:  $\mathbf{a} = (-2, 3, 5)$ ;  $\mathbf{b} = (1, -4, 7)$  y  $\mathbf{c} = (6, 10, 8)$ . Calcular el producto mixto.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 7 \\ 6 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 476$$

Propiedades:

Dados en  $R^3$  los vectores no nulos  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$

- 1) El producto mixto entre ellos es igual a cero, si solo si dichos vectores son coplanares.

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 \Leftrightarrow$  los vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son coplanares (están en un mismo plano)

- 2) El valor absoluto del producto mixto entre ellos es igual al volumen del paralelepípedo que forman dichos vectores.

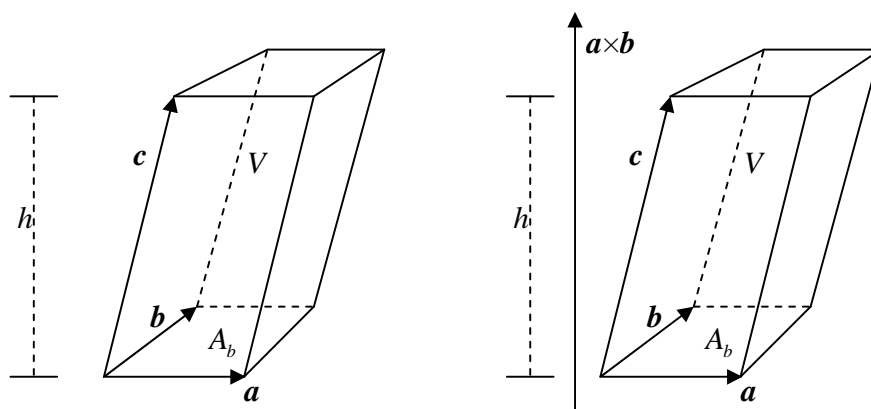


Figura 25. Volumen de un paralelepípedo

El volumen de un paralelepípedo es el producto del área de la base ( $A_b$ ) por la medida de la altura ( $h$ ).

$$Vol V = A_b \cdot h$$

En nuestro caso, la base es un paralelogramo determinado por los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , y como hemos visto su área es:

$$A_b = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

$$h = \text{proyecc. de } \mathbf{c} \text{ s/ } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

$$Vol V = A_b \cdot h = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

$$Vol V = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Ejemplos 12.2. Determinar si los siguientes vectores son coplanares

a)  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ;  $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$  y  $\mathbf{c} = (7, 8, 9)$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - (72 + 48 + 105) = 0 \Rightarrow \text{los vectores son coplanares}$$

b)  $\mathbf{a} = (-2, 2, 14)$ ;  $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$  y  $\mathbf{c} = (7, 8, 11)$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 14 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{vmatrix} = -110 + 448 + 84 - (88 - 96 + 490) = -60 \Rightarrow \text{los vectores NO son}$$

coplanares

Ejemplo 12.3. Calcular el volumen del paralelepípedo de vértices  $A = (5, 7, 6)$ ;  $B = (4, -34, -23)$ ;  $C = (-10, 1, -31)$  y  $D = (3, 9, 20)$

$$Vol = |(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}|$$

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 14 \\ -1 & -25 & -3 \\ -7 & 8 & -11 \end{vmatrix} = -550 - 112 + 42 - (22 + 48 + 2450) = -3140$$

$$Vol = |(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}| = |-3140| = 3140$$

El volumen del paralelepípedo de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  es de 3140 unidades..