UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

Facultad Regional Rosario

CATEDRA DE ANALISIS MATEMATICO I

Ingenierías Civil, Mecánica, Química y Eléctrica, Sistemas

Directores: Angel Emilio Riva/Mónica Beatriz Dadamo

ACTIVIDAD 1.1

...funciones de una variable real...

...funciones lineales...

2020

IMPORTANTÍSIMO

Para realizar esta Actividad sugerimos descargar Graph

https://graph.uptodown.com/windows

o bien, para quienes estén más familiarizados con Geogebra

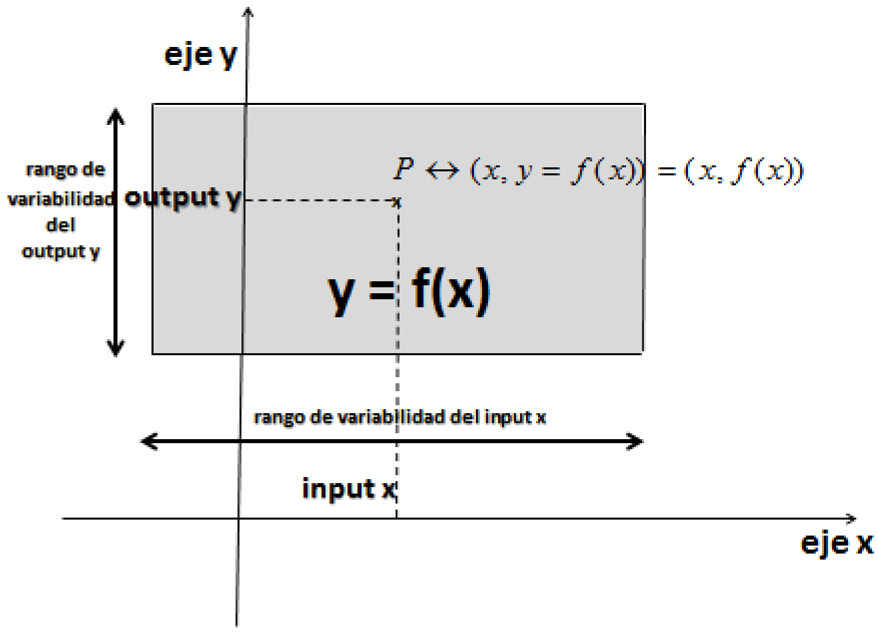
https://geogebra.uptodown.com/windows

¿POR QUÉ LAS FUNCIONES LINEALES?

En la presente actividad intentaremos comprender el concepto de relación funcional para definir funciones de variable real. De hecho este concepto se irá reforzando a lo largo del desarrollo de las diversas actividades relacionadas con las funciones de una variable real.

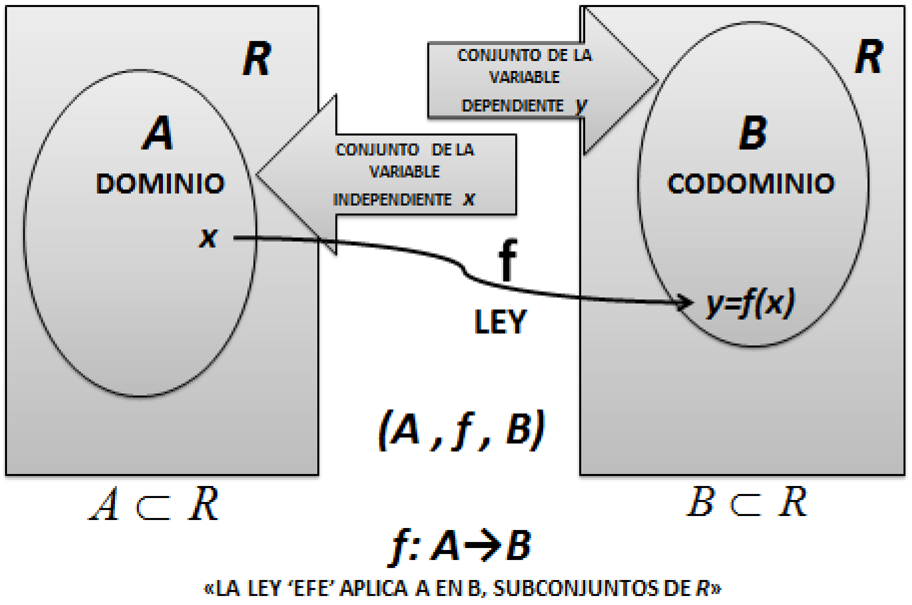
Comenzaremos con las llamadas funciones lineales porque cumplen un rol fundamental en ingeniería en los modelos matemáticos que se interesan por el cambio instantáneo, como veremos en profundidad cuando abordemos el concepto de derivada, en el contexto del llamado cálculo diferencial. Por ello en esta primera aproximación introduciremos conceptualizaciones que serán retomadas a lo largo del desarrollo de la asignatura y que recomendamos revisar atentamente y no dejar de tener en cuenta.

Nuestro punto de partida ahora es el último diagrama que fue construido en base a conceptos relacionados con el número real, utilizando dos ejes reales…



Vemos: una ley f(x), una variable independiente x (input) con su correspondiente rango de variabilidad (todos los inputs posibles); una variable dependiente y (output) con su rango de variabilidad (todos los outputs 'efe-dependientes')….contamos con conceptos que nos permiten definir 'función':

Definición: función
Llamamos aplicación, relación funcional o simplemente función a la **TERNA (A, f, B)** en la cual **A es llamado DOMINIO de la función** (se corresponde con el rango de variabilidad de los inputs x), **B es llamado CODOMINIO de la función** (se corresponde con el rango de variabilidad de los outputs) y f una ley cualquiera que a **CADA x del DOMINIO le hace corresponder un UNICO y=f(x) del codominio.**



IMPORTANTE:

Es importante señalar que para cada ley particular, *A* es el mayor conjunto de reales para el cual la ley tiene sentido. Nos interesa $f(A)=\{y \in R / \exists x \in A \wedge y = f(x)\}$, llamado **conjunto imagen** o el **conjunto las imágenes de *A***, por ello en el esquema anterior interpretamos $f(A)=B \subset R$. Notar en tal sentido que todo elemento de la imagen tiene al menos una preimagen.

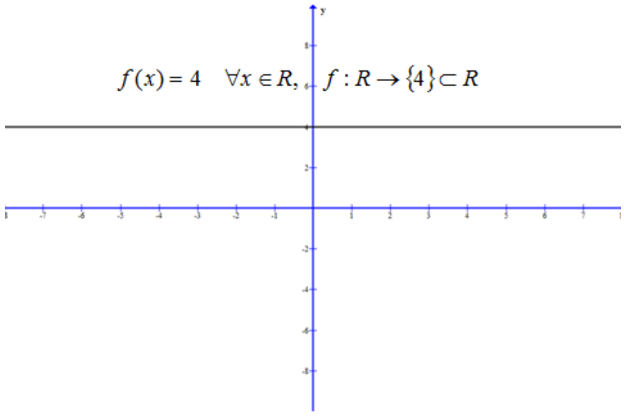
….las funciones lineales toman la forma

$$f(x)=mx+h, \quad f:R \to R$$

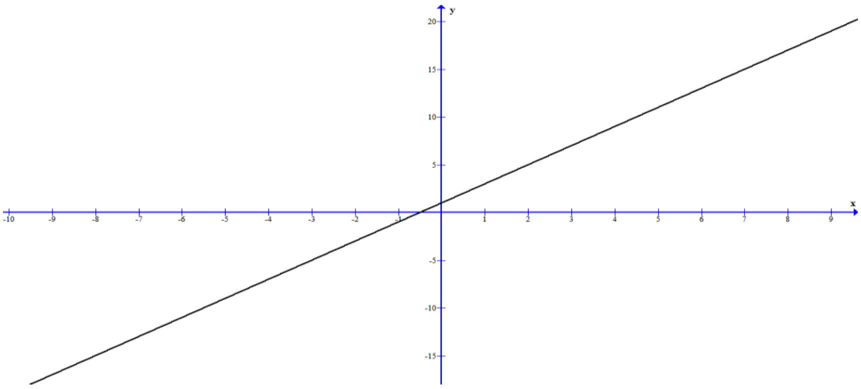
Exploraremos sus gráficas (que son líneas rectas) para oportunos valores de los **parámetros reales m y h**, el primero de los cuales desempeñará un rol importantísimo en el cálculo de una variable.

Veamos primero el caso *m=0*, es decir $f(x)=h \quad \forall x \in R, \quad f:R \to \{h\} \subset R$ que llamaremos **función constante.**

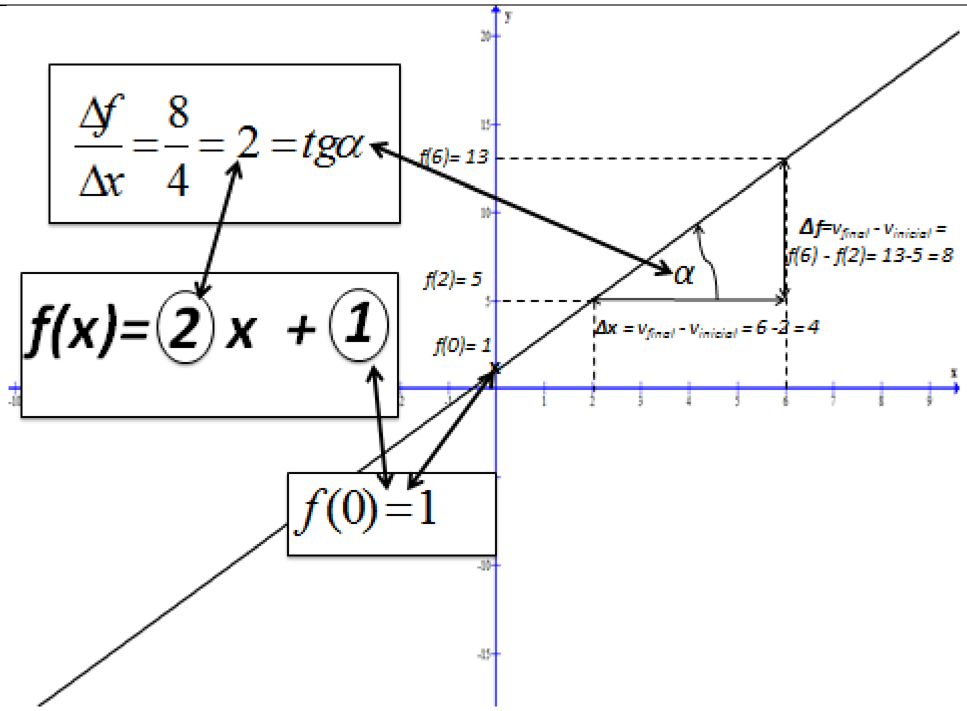
Observamos en este caso que todos los reales tienen la misma imagen…o sea la imagen *h* tiene infinitas preimágenes, es decir $f(R)=\{h\}$, siendo la gráfica (hemos elegido *h=4*)



Elijamos ahora *m=2 y h=1* es decir buscamos la IMAGEN/GRAFICO de *f(x)= 2x + 1* utilizando software (Graph) para graficar nos encontramos con lo siguiente

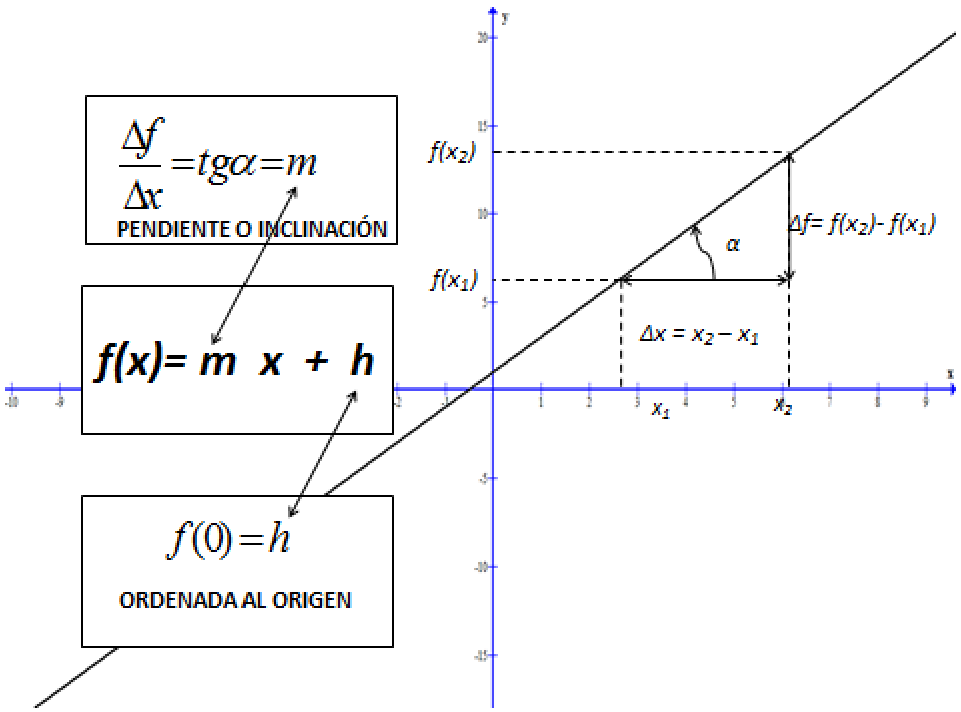


….evaluemos ahora *f(2) y f(6)*, es decir, identifiquemos en el diagrama las imágenes de los reales *2* y *6*….y vayamos al gráfico obtenido….analicemos los incrementos de las dos variables $\Delta x, \Delta f$ que habitualmente llamamos 'delta equis´ y 'delta efe', (Recordar siempre los deltas incrementales se obtienen como valor final menos valor inicial)…ubiquemos dichos incrementos en el sistema cartesiano rectangular…..y detengámonos a mirar con cuidado la profusa cantidad de cosas que aparecen….. más aún observe que el cociente de incrementos tiene una interpretación trigonométrica muy importante….



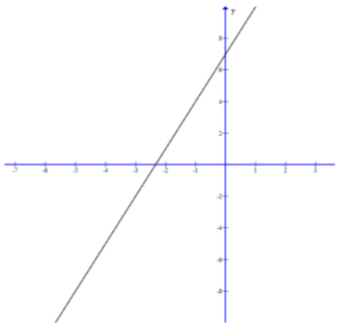
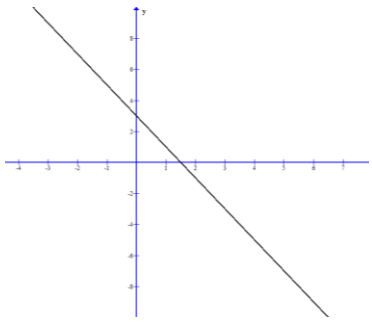
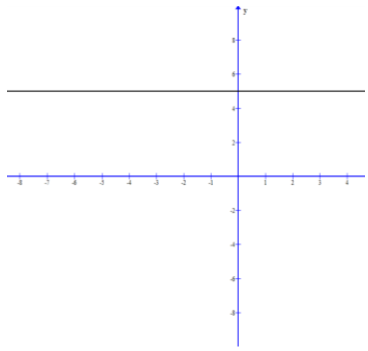
….vuelva a realizar este proceso para dos valores de x, por ejemplo $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$… …¿a qué llegó?...

Generalicemos esto para cualquier valor x_1, x_2 del dominio de $f(x)$:



El concepto de pendiente de una función lineal es el más importante a tener en cuenta….por ello debemos indagar/explorar estas situaciones….por ello te pedimos graficar, en un conveniente dominio, funciones lineales asignado: pendientes m= 1, -1, 3, -2, -5 con ordenadas al origen h=0 y pendientes m=0 con ordenadas al origen h=1, -1, 3, -2. Determine pendientes y ordenadas….¿a cuáles de estas funciones denominaría constantes?

FINALIZADA ESTA TAREA…nos vamos a encontrar con tres grandes grupos de funciones lineales…

..**estrictamente crecientes**...**estrictamente decrecientes** ….**y constantes**….

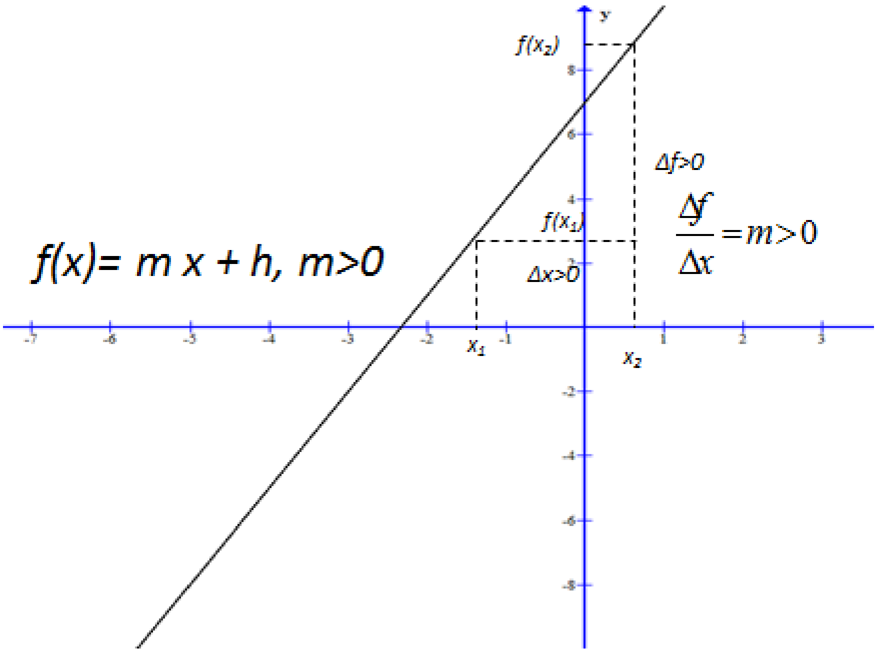
Definición: función lineal estrictamente creciente

$$f: A \rightarrow B \quad \textit{es estrictamente creciente en } A \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta f > 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$$

Interpretemos esto gráficamente con detenimiento…y explóralo en todas las funciones lineales crecientes….graficadas…



Definición: función lineal estrictamente decreciente

$$f: A \to B \quad \textit{es estrictamente decreciente en } A \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta f < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$$

…ahora interprete gráficamente…del mismo modo que lo hicimos para las funciones estrictamente crecientes…

Definición: función constante (no es estrictamente creciente…ni estrictamente decreciente)

$$f: A \to B \quad \textit{es constante en } A \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A / \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta f = 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$$

…interprete gráficamente….

¿Para qué sirve una definición?

Al graficar funciones lineales intuimos inmediatamente si son crecientes, decrecientes o constantes….pero lo que valida dicho crecimiento es que la ley funcional cumpla con la definición….es decir supongamos que no tenemos la gráfica y deseamos saber si

f(x)= -2x + 5 es creciente o decreciente….

Vamos a la definición, teniendo muy en cuenta los axiomas de orden…

$$\forall x_1, x_2 \in A / x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

A medida que la variable independiente crece….sus imágenes son menores, decrecen…

Por lo tanto concluimos que *f(x)= -2x + 5*

Proponemos verificar esto con las leyes trabajadas….

…una función muy especial…

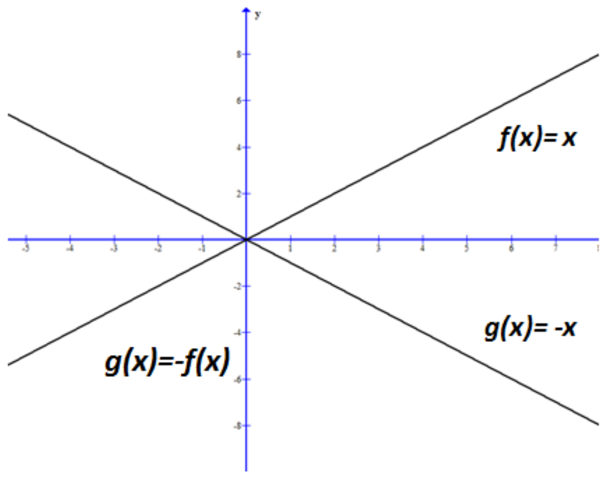
FUNCION IDENTIDAD

$$y = f(x) = x$$

observemos que todos los puntos sobre la gráfica de la función son de la forma *(x, f(x))* o sea *(x,x)*...lo que sugiere que su gráfica es la imagen conformada por la imagen de cada real, de todos los reales, puede ser interpretada como 'la imagen del eje real'…del conjunto de los reales….

A partir de la gráfica de la función lineal intuimos que:

- Es estrictamente creciente, es decir los reales están ordenados en forma estrictamente creciente (*R* es un conjunto estrictamente ordenado)
- Los reales positivos tienen imágenes positivas….los negativos negativas…
- Entre dos imágenes positivas es mayor la de mayor valor absoluto…
- Entre dos imágenes negativas, es mayor la de menor valor absoluto….
- \- *f(x)=g(x)=-x* es estrictamente decreciente….y su gráfica es simétrica de *f(x)=x* respecto del *eje x*…



…veamos la utilidad de comprender esto….

FUNCION VALOR ABSOLUTO

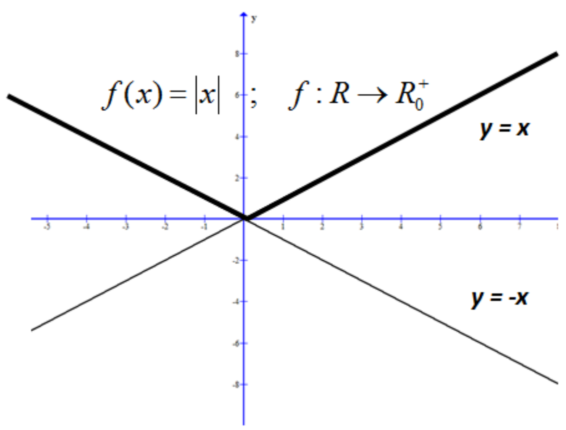
Hemos visto que

$$\forall x \in R, \quad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

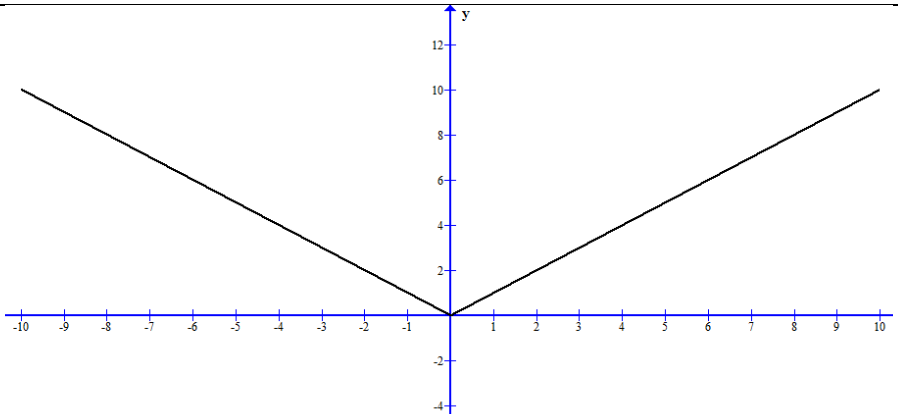
Por lo cual definimos ahora

$$\forall x \in R, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad / \ f : R \to R_0^+$$

Cuya gráfica coincidirá con la de la identidad si *x* es no negativo…y coincidirá con la de la opuesta de la identidad si *x* no es positivo…



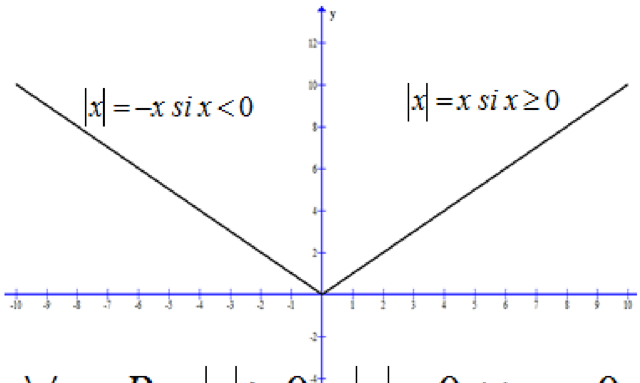
Si utilizamos Graph debemos colocar *f(x) = abs x* (valor absoluto de x) y obtenemos:



Re-veamos cuestiones…ya vistas…

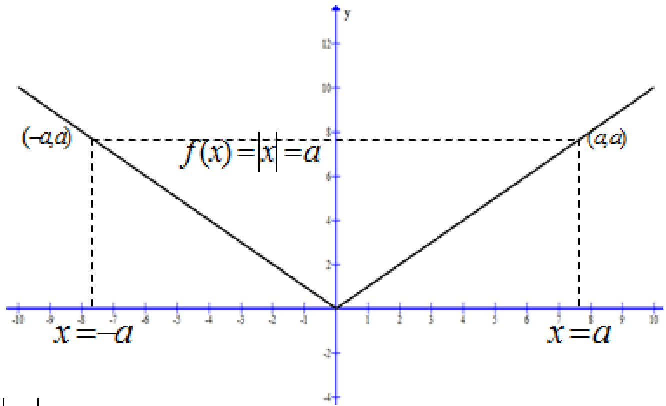
…veamos como la perspectiva funcional nos ayuda a ‘intuir’ mucho mejor algunas propiedades del valor absoluto…

1) El valor absoluto de un real es no negativo…es decir todas las imágenes de esta función son positivas o cero….nunca negativas….



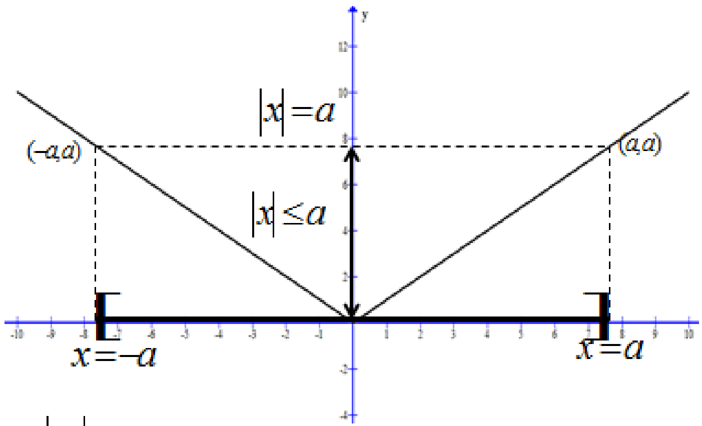
$$\forall x \in R, \quad |x| \geq 0 \wedge |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2) Si el valor absoluto de un real *x* es igual al real *a* positivo, entonces ese real *x* es *a* o el opuesto de *a*, es decir –*a*.



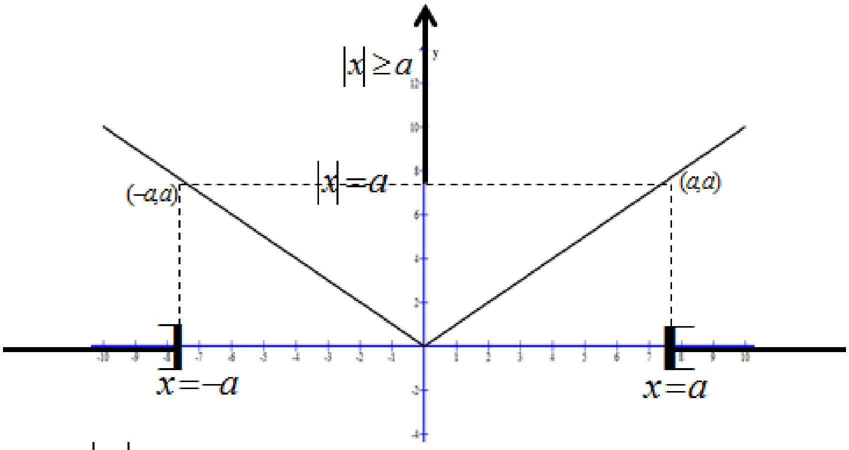
$$|x| = a,\ a > 0 \Rightarrow x = a \vee x = -a$$

3) Si el valor absoluto de un real *x* es menor o igual al del real *a* positivo, entonces los reales *x* que verifican esta condición son mayores o iguales que -*a* y menores o iguales que *a*, es decir están entre –*a* y *a*.



$$|x| \le a,\ a > 0 \Rightarrow -a \le x \le a$$

4) Si el valor absoluto de un real *x* es mayor o igual al del real *a* positivo, entonces los reales *x* que verifican esta condición son mayores o iguales que *a* y menores o iguales que -*a*, es decir están a la derecha de *a* o a la izquierda de -*a*.



$$|x| \geq a, a > 0 \Rightarrow x \geq a \vee x \leq -a$$

FUNCIONES LINEALES/FUNCIONES AFINES

Muchos autores llaman función lineal a las de la forma ***f(x)= mx, m≠0***, y a las de la forma ***f(x)= mx + h*** las llaman funciones afines….

Veamos ahora un proceso constructivo…

Graficar en un mismo diagrama funciones lineales ***f(x)= mx*** para m=3, 5, -2 y -1/2….compararlos con la función identidad…con coeficiente (pendiente) de crecimiento m=1….¿qué conclusiones sacaríamos?

Veamos ahora la siguiente transformación gráfica….Conocida la gráfica de una función, si a su ley le sumamos una constante no nula h , el gráfico de dicha función se traslada h unidades hacia arriba o hacia abajo…dependiendo del signo de h…

$$(f(x))+h = (mx)+h \quad \uparrow \downarrow$$

Explorar gráficamente esto….

…otra transformación…para la función…

$$f(x) = |x| \quad ; \quad f : R \to R_0^+$$

Explorar a partir de la gráfica de *f(x)* las gráficas de la forma para los parámetros *h* y *k* $$f(x)=\lvert x-h\rvert+k \quad ; \quad f:R\to R_0^+ \quad ; h,k\in R$$
Revisar la Actividad 3 de la autoevaluación…
Buscar aplicaciones sencillas de modelos lineales en el contexto de las ciencias básicas para la ingeniería….