
EJERCICIOS: CONJUNTOS

Importante: la respuesta o resolución de cada ejercicio debe estar debidamente justificada.

1. Sea $A = \{1, 2, a, b, c\}$. Identifica cada cso como verdadero o falso.

- | | | |
|---------------|-----------------------|--------------------------|
| (a) $2 \in A$ | (c) $c \notin A$ | (e) $\emptyset \notin A$ |
| (b) $3 \in A$ | (d) $\emptyset \in A$ | (f) $A \in A$ |

Soluciones

- (a) **Verdadero**, ya que 2 puede observarse como elemento de A en su definición.
- (b) **Falso**, ya que 3 no puede observarse como elemento de A en su definición.
- (c) **Falso**, ya que c puede observarse como elemento de A en su definición.
- (d) **Falso**, ya que \emptyset puede observarse como elemento de A en su definición.

Nótese que si bien \emptyset no es un elemento de A , si es un subconjunto, es decir: $\emptyset \subseteq A$.

- (e) **Verdadero**, ya que \emptyset no puede observarse como elemento de A en su definición.
- (f) **Falso**, ya que A no puede observarse como elemento de A en su definición.

Nótese que si bien A no es un elemento de A , si es un subconjunto, es decir: $A \subseteq A$.

2. Sea $A = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 5\}$. Identifica cada caso como verdadero o falso.

- | | | |
|---------------|------------------|---------------------|
| (a) $3 \in A$ | (c) $5 \notin A$ | (e) $-8 \in A$ |
| (b) $6 \in A$ | (d) $8 \notin A$ | (f) $3, 4 \notin A$ |

Soluciones

- (a) Verdadero pues $3 \in \mathbb{R}$ y $3 \leq 5$.
(b) Falso pues $6 > 5$.
(c) Falso pues $5 \in A$, ya que $5 \in \mathbb{R}$ y $5 \leq 5$.
(d) Verdadero pues $8 > 5$.
(e) Verdadero pues $-8 \in \mathbb{R}$ y $-8 \leq 5$.
(f) Falso pues $3, 4 \in A$, ya que $3, 4 \in \mathbb{R}$ y $3, 4 \leq 5$.

3. Identifica cada caso como verdadero o falso.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| (a) $2 \in \{2\}$ | (d) $\{3\} \in \{1, 2, 3\}$ |
| (b) $\{0\} \in \{\{0\}, \{1\}\}$ | |
| (c) $0 \in \{\{0\}, \{1\}\}$ | (e) $0 \in \{0, \{1\}\}$ |

Soluciones

- (a) Verdadero, ya que 2 puede observarse como elemento de $\{2\}$.
(b) Verdadero, ya que $\{0\}$ puede observarse como elemento de $\{\{0\}, \{1\}\}$.
(c) Falso, ya que 0 no puede observarse como elemento de $\{\{0\}, \{1\}\}$.

Nótese que $0 \neq \{0\}$, pues el primero es un número y el segundo un conjunto.

- (d) Falso, ya que $\{3\}$ no puede observarse como elemento de $\{1, 2, 3\}$.

Nótese que $\{3\} \neq 3$, pues el primero es un conjunto y el segundo un número.

(e) **Verdadero**, ya que 0 puede observarse como elemento de $\{0, \{1\}\}$.

4. Escribe por extensión los elementos de cada conjunto:

(a) $A = \{x/x \in \mathbb{Z}; x^2 \leq 14\}$

(b) $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = 4 \cdot n \wedge n < 3 \wedge n \in \mathbb{Z}^+\}$

(c) $C = \{x/x \in \mathbb{Z}; x^2 + 1 = 0\}$

Soluciones

(a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, pues para cada uno de estos elementos se verifica que son enteros y además su cuadrado es menor o igual a 14.

(b) $B = \{4, 8\}$, pues $4 = 4 \cdot 1$ y $8 = 4 \cdot 2$.

(c) $C = \emptyset = \{\}$, pues no existen soluciones enteras a la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

5. Escribe por comprensión cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

(b) $B = \{1, 8, 27, 64, 125\}$.

(c) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

(d) $D = \{\text{Brasil, Uruguay, Chile, Bolivia, Paraguay}\}$.

(e) $E = \{a, e, i, o, u\}$.

Soluciones

(a) $A = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq x \leq 10 \wedge x \text{ es par}\}$.

También podría escribirse $A = \{2 \cdot x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$. Aunque en el lenguaje matemático esto no solo es correcto sino que también usual, la cátedra no lo admite.

(b) $B = \{x/x = k^3 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq 5\}$.

Vale en este caso una nota similar a la anterior. El mismo conjunto puede escribirse como $B = \{x^3/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$.

-
- (c) $C = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 2\}$.
(d) $D = \{x/x \text{ es un país limítrofe de Argentina}\}$.
(e) $E = \{x/x \text{ es una vocal}\}$.
6. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 1, 2\}$ y $C = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge 3 \leq x + 2 \leq 5\}$.
¿Cómo están relacionados A , B y C ?

Solución Observemos que $C = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge 1 \leq x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$; luego son todos los conjuntos iguales.

7. Para cada entero no negativo n , sea $U_n = \{n, -n\}$. Encuentra U_1 , U_2 , y U_0 .

Solución

- $U_1 = \{1, -1\}$.
 - $U_2 = \{2, -2\}$.
 - $U_0 = \{0\}$.
8. Encuentra la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos:
- (a) $X = \{2, 3, 4, 5\}$
(b) $Y = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$
(c) $Z = \{x/x \in \mathbb{Z}^+; x = 3 \cdot n; n \in \mathbb{Z}^+; n \leq 5\}$

Soluciones

- (a) $|X| = 4$.
(b) $|Y| = 3$.
(c) Observemos que $Z = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, luego $|Z| = 5$.
9. Analiza y justifica si es verdadero o falso cada caso:
- (a) $\{0\} = \emptyset$
(b) $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$
(c) $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$
(d) $\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$
(e) $\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$

Soluciones

- (a) **Falso**, pues $0 \in \{0\}$ pero $0 \notin \emptyset$.
 - (b) **Falso**, pues $2 \in \{2\}$ pero $2 \notin \{1, \{2\}, \{3\}\}$.
 - (c) **Verdadero** pues $1 \in \{1\}$ y $1 \in \{1, 2\}$.
 - (d) **Verdadero** pues $1 \in \{1\}$ y $1 \in \{1, \{2\}\}$.
 - (e) **Verdadero** pues $\{2\} \in \{\{2\}\}$ y $\{2\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$.
10. Dados los siguientes conjuntos, expresa mediante símbolos todas las inclusiones posibles:

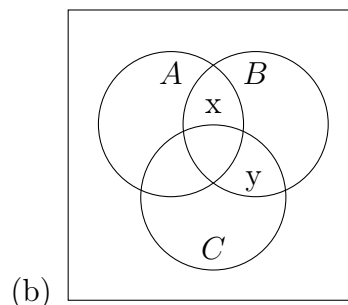
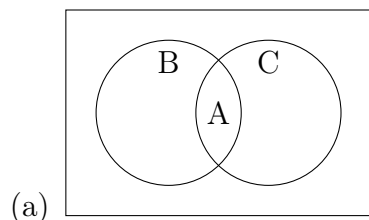
- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $T = \{x/x \in \mathbb{Z}^+, x = 3\}$
- $P = \{2, 4, 5\}$
- $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Solución Observemos que $T = \{3\}$, luego:

- $S \not\subseteq T$, pues $6 \in S$ pero $6 \notin T$.
 - $S \not\subseteq P$, pues $1 \in S$ pero $1 \notin P$.
 - $S \not\subseteq G$, pues $6 \in S$ pero $6 \notin G$.
 - $T \not\subseteq P$, pues $3 \in T$ pero $3 \notin P$.
 - $T \subseteq G$, pues $3 \in T$ y $3 \in G$.
 - $T \subseteq S$, pues $3 \in T$ y $3 \in S$.
 - $P \subseteq G$, pues para $x = 2, 4, 5$ resulta $x \in P$ y $x \in G$.
 - $P \subseteq S$, pues para $x = 2, 4, 5$ resulta $x \in P$ y $x \in S$.
 - $P \not\subseteq T$, pues $5 \in P$ y $5 \notin T$.
11. Dibuja un diagrama de Venn que represente por separado cada una de estas relaciones:

- (a) $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, $B \not\subseteq C$ y $C \not\subseteq B$.
- (b) $x \in A$, $x \in B$, $x \notin C$, $y \in B$, $y \in C$, $y \notin A$.

Soluciones



12. Sea $A = \{c, d, f, g\}$, $B = \{f, j\}$ y $C = \{d, g\}$. Analiza la veracidad y falsedad de cada una de las siguientes inclusiones, justifica tu respuesta:

(a) $B \subseteq A$.

(b) $C \subseteq A$.

(c) $C \subseteq C$.

Soluciones

(a) **Falso**, pues $j \in B$ pero $j \notin A$.

(b) **Verdadero**, pues para $x = d, g$ resulta: $x \in C$ y $x \in A$.

(c) **Verdadero**, pues para $x = d, g$ resulta: $x \in C$ y $x \in C$.

Vale la pena notar que para cualquier conjunto X resulta $X \subseteq X$.

13. Sean los conjuntos:

- $R = \{x/x \in \mathbb{Z}, x \text{ es divisible por } 2\}$.
- $S = \{y/y \in \mathbb{Z}, y \text{ es divisible por } 3\}$.
- $T = \{z/z \in \mathbb{Z}, z \text{ es divisible por } 6\}$.

Analiza la veracidad y falsedad de cada una de las siguientes inclusiones, justifica tu respuesta:

(a) $R \subseteq T$

(b) $T \subseteq R$

(c) $T \subseteq S$

Soluciones

- (a) **Falso**, pues $2 \in R$ pero $2 \notin T$.
 - (b) **Verdadero**. Sea $x \in T$, luego por definición de T resulta $x = 6 \cdot n = 2 \cdot 3 \cdot n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Tomando $k = 3 \cdot n$ vemos que $x = 2 \cdot k$ por lo que $x \in R$.
 - (c) **Verdadero**. Análogamente al caso anterior, pero tomando $k = 2 \cdot n$ podemos observar que $x \in T \Rightarrow x \in S$.
14. Sea $A = \{1, 2, 5, 8, 11\}$. Identifica cada uno de los siguientes casos verdadero o falso:
- (a) $\{5, 1\} \subseteq A$
 - (b) $\{8, 1\} \subseteq A$
 - (c) $\{1, 8, 2, 5, 11\} \not\subseteq A$

Soluciones

- (a) **Verdadero**, pues para $x = 5, 1$ resulta $x \in \{5, 1\}$ y $x \in A$.
 - (b) **Verdadero**, pues para $x = 8, 1$ resulta $x \in \{8, 1\}$ y $x \in A$.
 - (c) **Falso**, pues $\{1, 8, 2, 5, 11\} = A$.
15. Sea $U = \mathbb{Z}^+$ y sean los conjuntos A y B que se dan en cada apartado, analiza si son pares de conjuntos disjuntos.
- (a) $A = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \text{ es par}\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \text{ es impar}\}$
 - (b) $A = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge 2x \text{ es par}\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \text{ es par}\}$
 - (c) $A = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x^2 - 4 = 0\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x - 4 = 0\}$

Soluciones

- (a) **Verdadero**. Supongamos lo contrario, es decir que existe $x/x \in A \wedge x \in B$, luego por definición de A y B x es par e impar. Absurdo.
- (b) **Falso**, pues $2 \in A$ y $2 \in B$.
- (c) **Verdadero**, pues $A = \{2, -2\}$ y $B = \{4\}$.

16. Sea $A = \{a, b, c\}$ verifica si se cumplen los siguientes enunciados:

- | | |
|---|---|
| (a) $A \in \mathcal{P}(A)$. | (h) $\{\{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. |
| (b) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$. | (i) $\{\{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A)$. |
| (c) $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$. | (j) $\{\mathcal{P}(A)\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. |
| (d) $\{a, b\} \subseteq A$. | (k) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$. |
| (e) $\{\{a, b\}, \{a, c\}\} \subseteq A$. | (l) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$. |
| (f) $\{A, \{a\}, \{a, c\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. | (m) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$. |
| (g) $\{\{a, b\}, \{a, c\}\} \in A$. | (n) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$. |
- (o) La unión de todos los elementos de $\mathcal{P}(A)$ es A .
(p) Dos subconjuntos cualesquiera de A son disjuntos.
(q) Los elementos de $\mathcal{P}(A)$ son elementos de A .

Soluciones Observemos primero que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, A\}$.

- (a) **Verdadero**, pues A forma parte de la definición de $\mathcal{P}(A)$.
(b) **Verdadero**, pues \emptyset forma parte de la definición de $\mathcal{P}(A)$.
(c) **Verdadero**, pues $\{a, b\}$ forma parte de la definición de $\mathcal{P}(A)$.
(d) **Verdadero**, pues para $x = a, b$ resulta $x \in \{a, b\}$ y $x \in A$.
(e) **Falso** pues para $\{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ pero $\{a, b\} \notin A$.
(f) **Verdadero** pues para $x = A, \{a\}, \{b, c\}$ resultan $x \in \{A, \{a\}, \{a, c\}\}$ y $x \in \mathcal{P}(A)$.
(g) **Falso** pues $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ no puede observarse en la definición de A .
(h) **Verdadero**, pues $\{a, b\} \in \{\{a, b\}\}$ y $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A)$.
(i) **Falso** pues $\{\{a, b\}\}$ no puede observarse en la definición de $\mathcal{P}(A)$.
(j) **Falso** pues $\mathcal{P}(A) \in \{\mathcal{P}(A)\}$ pero $\mathcal{P}(A) \notin \mathcal{P}(A)$.
(k) **Falso** pues $\{\emptyset\}$ no puede observarse en la definición de $\mathcal{P}(A)$.
(l) **Verdadero**, pues para cualquier conjunto X , si $x \in X$ entonces trivialmente $x \in X$.

-
- (m) **Falso** pues $a \in A$ pero $a \notin \mathcal{P}(A)$.
- (n) **Verdadero**. Supongamos lo contrario, luego existe $x \in \emptyset/x \notin \mathcal{P}(A)$. Absurdo.
- (o) **Verdadero** pues $\emptyset \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{a, b\} \cup \{b, c\} \cup A = A$.
- (p) **Falso** pues $A \cap \{a\} \neq \emptyset$.
- (q) **Falso** pues $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ pero $\{a\} \notin A$.

17. Analiza los siguientes casos y justifica tu respuesta.

- (a) Si $A \cup B = A \cup C$, ¿Es $B = C$?
- (b) Si $A \cap B = A \cap C$, ¿Es $B = C$?

Soluciones

- (a) **Falso**. Basta notar que para $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ y $C = \{2\}$ se cumple $A \cup B = A \cup C$ pero $B \neq C$.
- (b) **Falso**. Basta notar que para $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ y $C = \{3\}$ se cumple $A \cap B = A \cap C$ pero $B \neq C$.
18. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 4, 5, 9\}$, $C = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x^2 \leq 16\}$ y $D = \{7, 8\}$. Calcula:

- | | | |
|----------------|--------------------|---------------------------|
| (a) $A \cup B$ | (i) $A - B$ | (q) $(A \cup B) \cup C$ |
| (b) $A \cup C$ | (j) $B - A$ | (r) $(A \cap B) \cap C$ |
| (c) $A \cup D$ | (k) $C - D$ | (s) $(B \cup C) \cap A$ |
| (d) $C \cup B$ | (l) \overline{C} | (t) $(B \cup A) \cap D$ |
| (e) $A \cap C$ | (m) \overline{A} | (u) $\overline{A \cup B}$ |
| (f) $A \cap D$ | (n) $A \oplus B$ | (v) $\overline{A \cap B}$ |
| (g) $C \cap B$ | (o) $C \oplus D$ | (w) $(B \cup C) \cup D$ |
| (h) $C \cap D$ | (p) $C \oplus B$ | (x) $(B \cap C) \cap D$ |

Soluciones Observemos que $C = \{1, 2, 3, 4\}$.

- (a) $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 5, 9\}$.
- (b) $A \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8, 3\}$.
- (c) $A \cup D = \{1, 2, 4, 6, 8, 7\}$.
- (d) $C \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$.
- (e) $A \cap C = \{1, 2, 4\}$.
- (f) $A \cap D = \{8\}$.
- (g) $C \cap B = \{2, 4\}$.
- (h) $C \cap D = \emptyset$.
- (i) $A - B = \{1, 6, 8\}$.
- (j) $B - A = \{5, 9\}$.
- (k) $C - D = \{1, 2, 3, 4\}$.
- (l) $\overline{C} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
- (m) $\overline{A} = \{3, 5, 7, 9\}$.
- (n) $A \oplus B = \{1, 6, 8, 5, 9\}$.
- (o) $C \oplus D = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$.
- (p) $C \oplus B = \{1, 3, 5, 9\}$.
- (q) $(A \cup B) \cup C = \text{COMPLETAR}$.
- (r) $(A \cap B) \cap C = \text{COMPLETAR}$.
- (s) $(B \cup C) \cap A = \text{COMPLETAR}$.
- (t) $(B \cup A) \cap D = \text{COMPLETAR}$.
- (u) $\overline{A \cup B} = \text{COMPLETAR}$.
- (v) $\overline{A \cap B} = \text{COMPLETAR}$.
- (w) $(B \cup C) \cup D = \text{COMPLETAR}$.
- (x) $(B \cap C) \cap D = \text{COMPLETAR}$.