

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Facultad Regional Rosario

CATEDRA DE ANALISIS MATEMATICO I

Ingenierías Civil, Mecánica, Química y Eléctrica, Sistemas

Directores: Angel Emilio Riva/Mónica Beatriz Dadamo

ACTIVIDAD 0: números reales

2020

Números reales

...a manera de punto de partida/de encuentro...proponemos algunas actividades...

Estamos ya familiarizados con el conjunto de los **números reales** al que designamos con R , ya trabajado en el ciclo introductorio en la FRRos de la UTN. Descubrimos este conjunto a través de un largo **proceso constructivo textual (el libro de texto, elegido por el docente/instructor único para todas y todos)** que comenzó tempranamente en los niveles educativos transitados a partir del conjunto de los **números naturales** N , de los **enteros** Z , de los **racionales** Q y los **irracionales** I . En todos ellos se han definido operaciones, las cuales, a través de restricciones sugirieron la necesidad de sucesivas ampliaciones hasta llegar al ‘descubrimiento’ de los irracionales.

Nuestro desafío es no volver al texto sino **desarrollar un proceso conectivo hipertextual**, desde una **multi perspectiva**, es decir, saber dónde conectarnos para dar respuestas a algunas cuestiones que proponemos en estas actividades y que serán fundamentales en el desarrollo de la asignatura. Que en principio será individual pero que re-trabajaremos grupalmente en las instancias presenciales, en la cual seguramente nos sorprenderemos por nuestros recorridos, tanto docentes como alumnos. Proceso en el cual aprender significará construir nuestra propia red, nuestras propias cartografías...pretendemos conferir sentido al rol del número real en nuestras carreras, es decir, respondernos porqué la ingeniería -en particular la de la

especialidad que cursamos- se interesa por estos objetos/entes matemáticos.

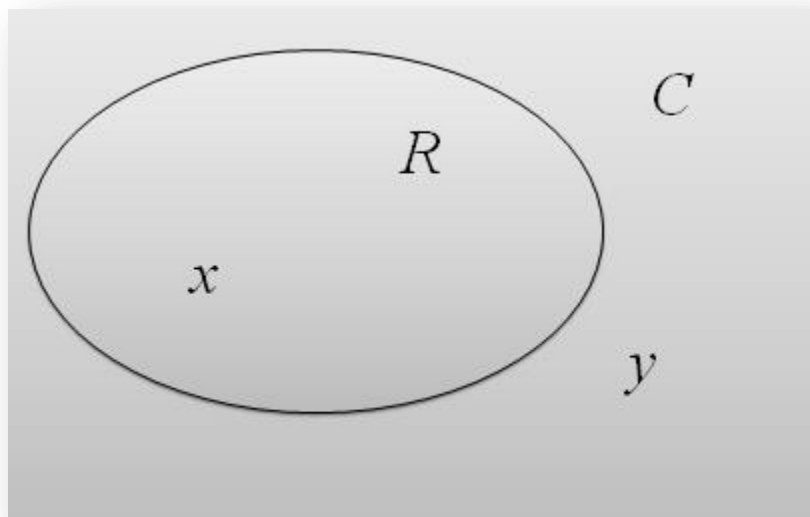
Por ello proponemos una serie de actividades a realizar por cada uno de ustedes que los llevará a ser protagonistas de sus aprendizajes, a generar sus propias cartografías que re-trabajaremos en las instancias presenciales. En las que todos, alumnos y tutores, intentaremos, como se repetirá muchas veces, conferir sentido al número real en el contexto de la ingeniería, para aumentar nuestra inteligencia colectiva sobre el campo disciplinar al que dedicaremos nuestros esfuerzos, en el que construiremos nuestros proyectos de vida.

Actividad 1

...números reales: de la perspectiva sistémica a la perspectiva conjuntista...

Si nuestro punto de partida es la perspectiva o enfoque o tratamiento conjuntista de los reales, contamos con los diagramas conjuntistas -llamados diagramas de Venn- para representar al conjunto de los números reales. Pero para ello debemos recordar y tener presente dos relaciones fundamentales: la **relación de pertenencia** \in -que relaciona/vincula únicamente elementos con conjuntos- y la **relación de inclusión** \subset -que relaciona/vincula únicamente conjuntos con conjuntos-.

No menos importantes son los **conectivos lógicos** ($\Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$) así como también los **cuantificadores existencial y universal** (\exists, \forall) a partir de los cuales construiremos proposiciones diversas, que recomendamos revisar cuidadosamente, como así tampoco las operaciones entre conjuntos y sus propiedades.



De este modo escribimos

$x \in R$ (el elemento x **pertenece** al conjunto R)

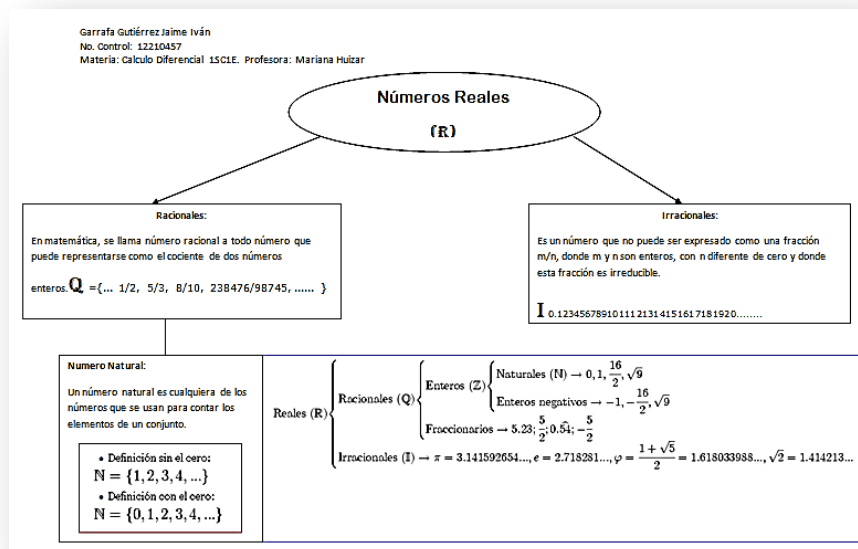
$y \notin R$ (el elemento y **no pertenece** al conjunto R)

$R \subset C \quad \vee \quad C \supset R$ (el conjunto R está incluido en C o bien C incluye a R , lo que equivale a afirmar que todo elemento de R está en C , es decir $x \in R \Rightarrow x \in C$ pero no todo elemento de C está en R , es decir $y \in C \Rightarrow \neg y \in R$).

En un sitio (uno de tantos)

<https://sites.google.com/site/calculodiferencial1scegarrafa/1-numeros-reales/1-1-diagrama-de-los-numeros-reales/Diagrama%20de%20los%20numeros%20reales.PNG?attredirects=0>

se muestra una imagen que responde al clásico esquema que **sistematiza** las **relaciones** entre el conjunto de los **números naturales** N , el de los **enteros** Z , el de los **racionales** Q y el de los **irracionales** I . Es decir un mapeo, un mapa conceptual, una especie de calco que nos permite movernos de un sitio a otro. Sería interesante que cada uno de nosotros encontremos otros sitios para elegir diagramas que nos parezcan más convenientes. Pero para ver que siempre son mapeos de nuestras rutas seguidas para construir los conjuntos numéricos.



Pretendemos que esta sistematización sea re-pensada desde una perspectiva conjuntista, es decir realizar/seleccionar un diagrama conjuntista que a su entender le muestre las relaciones inclusivas entre estos subconjuntos de los números reales y a los reales como parte de un conjunto numérico que lo contiene y que será trabajado en el espacio curricular de Álgebra.

Es decir ‘superar’ sin excluir estos esquemas para pensar a los reales y a sus subconjuntos a partir de las **relaciones de inclusión y pertenencia**, o bien a los reales como parte de un conjunto ‘mayor’ que lo incluye...es decir recurrir a los diagramas conjuntistas, adoptar una perspectiva conjuntista....

Dado que en las clases presenciales deberemos justificar nuestras exploraciones y nuestras elecciones, pedimos registrar cada uno de los sitios (tres o cuatro por lo menos) a los que nos conectamos, indicando porque elegimos el que elegimos, qué cuestiones fueron cruciales en nuestras elecciones.

SITIO	Diagrama	Comentarios

<p>¿Qué me aportan cada una de estas perspectivas?</p>		

<p align="center">Actividad 2</p> <p align="center">...números reales: de las perspectivas sistémica y conjuntista...a la perspectiva estructural axiomática...</p>	
<p>http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/1ercuat2016/taller_de_calculo_avanzado/axiomas_reales.pdf</p> <p>Este es uno de los tantos sitios donde los números reales (o el sistema, o el conjunto) aparecen como estructura axiomática. La idea es pensar los reales como entes pertenecientes a una estructura (en la cual su caracterización como racionales o irracionales pasa a un segundo plano), sino como un conjunto de entes numéricos que responden axiomas de cuerpo, axiomas de orden (y un axioma de completitud que por ahora dejaremos en suspenso...que re-trabajaremos más al final). Por ello le pedimos, al igual que en la actividad anterior explore sitios o autores o videos en los que se discuta esto...y genere su propia cartografía, sin perder de vista lo trabajado en la Actividad 1...</p>	
<p align="center">AXIOMAS DE CUERPO</p> <p align="center">...ecuaciones algebraicas...</p>	
<p>Sitios</p>	
<p>Enuncie los axiomas de cuerpo.</p> <p>Esquematice a través de gráficos de conjuntos reforzando la idea de operación interna</p>	

entre reales y sus propiedades, que le serán muy útiles en Álgebra al trabajar en la axiomatización de los espacios vectoriales reales.

Proponga algunas **ecuaciones sencillas**, resuélvalas y señale a cada paso que propiedades aplicó, determine el conjunto solución. Puede recurrir a textos, sitios de internet, proponerlas...

AXIOMAS DE ORDEN

...inecuaciones algebraicas...

Sitios	
--------	--

Enuncie los axiomas de orden.

Proponga algunas **inecuaciones sencillas**, resuélvalas y señale a cada paso que propiedades aplicó, determine el conjunto solución.

¿Qué diferencias nota respecto al tipo de soluciones entre ecuaciones e inecuaciones?

¿Qué nos aporta a su entender a esta perspectiva axiomática a las ya trabajadas?

Actividad 2

...números reales: de las perspectivas sistémica, conjuntista y axiomática...a la perspectiva representacional...

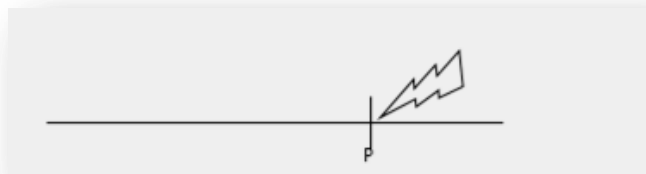
En el **contexto de la ingeniería** estamos interesados en los modelos funcionales reales, (nuestro máximo desafío) es decir, modelos construidos a partir de números reales, por ello destacamos la necesidad de utilizar otro modelo representacional muy conocido, el eje llamado real, que utiliza como soporte a una figura geométrica muy sencilla, la recta. **Por ello le proponemos leer con atención...**

La perspectiva representacional utiliza un eje rectilíneo que debemos explorar en sus alcances, en sus límites.

¿Por qué este modelo representacional? Precisamente porque estamos interesados en recalcar algunas cuestiones, las que supuestamente se visualizan mucho mejor sobre este soporte, como por ejemplo el hecho de que, la ingeniería representa variables continuas

R consta de infinitos entes o elementos llamados números que no pueden ser contados

Dado que la recta, como figura, tiene a su vez infinitos puntos podemos identificar puntos P con números reales. Es decir, **‘cada punto de la recta es identificado con un único número real y cada número real es identificado con un único punto P de la recta’**.



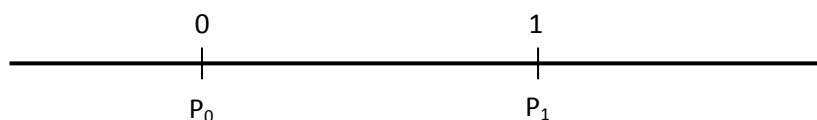
$\forall x / x \in R$

P punto de la recta

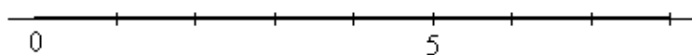
$x \leftrightarrow P$

Si bien puntos y números son entes de naturaleza diferente hablamos indistintamente, a la luz de esta modelización, de punto y/o número.

Elegimos un punto en la recta real y lo identificamos con el número cero.

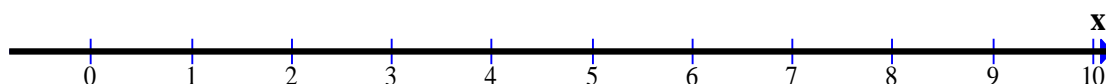


Entonces, una vez elegido el cero vamos a señalar un punto diciendo, por ejemplo, “aquí está el número 5”; pero debemos tener cuidado, el 5 no es un punto, sino que es un número real que visualizo o ubico en tal posición.



¡Cuidado! Cualquier punto puede ser un número real, pero una vez fijado el 0 (cero) y el 1 (uno) todos los demás quedan biunívocamente identificados con un único punto.

Fijado el 0 y el 1 es posible representar el conjunto de los números naturales N , sobre la recta real teniendo en cuenta que luego del 1 **todo natural tiene un único sucesor**.



- N es un **conjunto infinito** porque hay infinitos números naturales
- N es un **conjunto discreto**, es decir, no siempre entre dos naturales encontramos un tercer natural.

¿Qué ocurre con Z y Q en relación con la discretitud?

Analizaremos el caso de los racionales

Dado que en Q la suma y la multiplicación son operaciones cerradas se verifica que

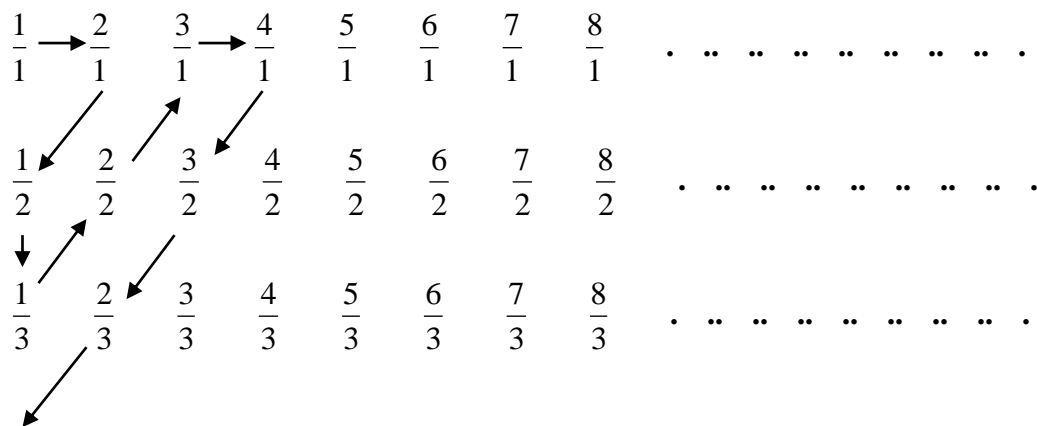
$$\forall x, y \in Q \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in Q \text{ y además se puede probar que } x < \frac{x+y}{2} < y$$

Entonces a través de un proceso interminable resulta que **entre dos racionales siempre encontraremos un tercero** intermedio entre ambos por más próximos que estén.

➤ \mathbb{Q} es un **conjunto denso**.

➤ \mathbb{Q} es un **conjunto infinito**

Nos preguntamos, si $N \subset \mathbb{Q}$ y ambos conjuntos son infinitos ¿en qué conjunto hay más elementos? O dicho de otra manera ¿es verdad que por el simple hecho de que los números naturales forman parte del conjunto de los números racionales entonces son menos? Lo interesante es que, aunque parezcan muchísimos más, hay tantos racionales como naturales. Lo podemos demostrar asignando a cada número racional un número natural. Lo hacemos así:



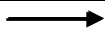
Como se ve a cada número racional positivo le asignamos un número natural. Esta asignación es biunívoca, en el sentido que a toda fracción le corresponde un natural y viceversa. Hay “flechitas” que salen de un conjunto y llegan al otro sin dejar libre ningún elemento de ninguno de los dos conjuntos.¹

➤ Decimos que \mathbb{Q} es un **conjunto numerable**.

Podríamos pensar que todos los conjuntos infinitos son numerables

Georg Cantor descubrió que hay infinitos más grandes que otros.

¹ Hay racionales que “contamos” varias veces, aun así quedan suficientes naturales para seguir contando todos los que faltan



Eligió el segmento unitario $[0;1]$...

“...y por más esfuerzos que hacía por encontrar flechitas para poder coordinar este conjunto con los números naturales, no podía. Tal era su desesperación que en un momento cambio de idea (e hizo algo genial, claro, porque tuvo una idea maravillosa) y pensó: “¿y si no puedo encontrar las flechitas porque no es posible encontrarlas? ¿No será preferible que trate de demostrar que no se pueden encontrar las flechitas porque no existen?”... Cantor dijo entonces: “voy a suponer que este conjunto (segmento unitario) se puede coordinar con los naturales”. O sea, supuso que tenían el mismo cardinal. Si esto fuera cierto, entonces debería haber una asignación (o lo que llamamos “las flechitas”) entre los elementos del segmento $[0;1]$ y los números naturales. Resultaría posible, como en el ejemplo anterior, que podríamos poner en una lista a todos los elementos del segmento $[0;1]$.

Y eso hizo:

1	→	$0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}.....$
---	---	--

2	→	$0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}.....$
---	---	--

3	→	$0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}.....$
---	---	--

4	→	$0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}.....$
---	---	--

...

n	→	$0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}a_{n6}.....$
---	---	--

En este caso, lo que representan los distintos símbolos de la forma a_{pq} , son los dígitos del desarrollo de cada número. Por ejemplo, supongamos que estos son los desarrollos decimales de los primeros números de la lista:

1	→	0,483798099937.....
---	---	---------------------

2	→	0,523787123478.....
---	---	---------------------

3	→	0,52873440002.....
---	---	--------------------

4	→	0,001732845.....
---	---	------------------

Es decir,

$$0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\dots = 0,483798099937\dots$$

$$0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\dots = 0,523787123478\dots$$

Y así siguiendo.

O sea, lo que Cantor hizo fue suponer que existe una manera de “poner flechitas”, o de hacer asignaciones, de manera tal que todos los números reales del segmento $[0;1]$ estuvieran coordinados con los naturales.

Y ahora, la genialidad de Cantor: “voy a construir un número que está en el segmento $[0;1]$, pero no está en la lista”.

Y lo fabricó así: se construyó el número

$$A = 0,b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8\dots$$

Uno sabe que este número está en el segmento $[0;1]$, porque empieza con 0 ...

¿Pero quienes son las letras b_k ? Bueno, Cantor dijo: Tomo

b_1 de manera que sea un dígito diferente de a_{11}

b_2 de manera que sea un dígito diferente de a_{22}

b_3 de manera que sea un dígito diferente de a_{33}

...

b_n de manera que sea un dígito diferente de a_{nn}

De esta forma, tengo garantizado que el número A no está en la lista. ¿Por qué? No puede ser el primero de la lista, porque el b_1 difiere de a_{11} . No puede ser el segundo, porque el b_2 difiere de a_{22} . No puede ser el tercero, porque el b_3 difiere de a_{33} . No puede ser el enésimo, porque el b_n difiere de a_{nn} . Luego, Cantor se fabricó un número real que está en el segmento $[0;1]$ que no está en la lista. Y esto lo pudo construir independientemente de cual fuera la lista.

Es decir, si viene cualquier otra persona y le dice “yo tengo una lista diferente de la suya, y la mía si funciona y contiene todos los números reales del intervalo $[0;1]$ ”, Cantor puede aceptar cualquier desafío, porque él puede construir un número real que debería estar en la

lista, pero que no puede estar.

Y esto culmina la demostración, porque prueba que si uno quiere hacer una correspondencia biunívoca entre los números reales y los naturales, va a fracasar. Cualquier lista que presuma de tenerlos a todos pecará por dejar alguno afuera. Y no hay manera de arreglarlo.

Este método se conoce con el nombre de método diagonal de Cantor, fue uno de los saltos cualitativos más importantes de la historia, en términos de conjuntos infinitos. A partir de ese momento, se supo entonces que había infinitos más grandes que otros."²

...conclusiones...para tener muy en cuenta....

➤ R es un conjunto infinito no numerable, se dice que goza de la **potencia del continuo**.

Hemos mencionado al conjunto de los números irracionales como un subconjunto I de R .

¿ I es un conjunto numerable? Si lo fuera sería posible hacer una lista con los números irracionales y por lo tanto contar los reales, cosa que Cantor ya demostró que no es posible. Por lo tanto el conjunto I tiene la potencia del continuo.

Si visualizamos la numerabilidad de Q en nuestro modelo representacional, veríamos que al borrar todos los racionales la recta real quedaría prácticamente intacta. Pero si fuera posible borrar todos los irracionales, la recta quedaría infinitamente agujereada.

¿Qué aporta a su entender la lectura de este apartado?

² Extraído de: Matemática ...¿estas ahí? Adrián Paenza. Colección "Ciencia que ladra". Universidad Nacional de Quilmes. 2006.

Actividad 3

...números reales: re-trabajando el orden parcial y el orden total en el modelo representacional...

Hemos visto la relación de orden en R . Explorar porqué decimos que los reales o el conjunto de los reales **responden a un orden parcial** (\leq , reflexivo, anti simétrico, transitivo) es decir R es un conjunto parcialmente ordenado o bien que también responden a un **orden total o estricto** ($<$, arreflexivo, antisimétrico y transitivo).

Analizar ahora y conferir sentido a lo siguiente desde la perspectiva del eje real. Es decir, $x > 5$, significa ‘visualizar/interpretar’ todo aquello que está a la derecha de 5 (orden parcial), en cambio decir, $x \geq 5$, significa ‘visualizar/interpretar’ todo aquello que es igual a cinco o está a la derecha de 5.

Ahora interpretemos lo siguiente, indicando como llamaríamos a estos conjuntos, grafiquelos en el eje real....

Subconjuntos notables de R

$$R^+ = \{x \in R / x > 0\}$$

$$R^- = \{x \in R / x < 0\}$$

$$R_0^- = \{x \in R / x \leq 0\}$$

$$R_0^+ = \{x \in R / x \geq 0\}$$

Tenemos que señalar algo importante que seguramente ya sabíamos:

Dados $x, y \in R$, en un orden estricto se da una y solamente una de las siguientes posibilidades:

$$x = y, \quad x < y, \quad x > y$$

Recordemos propiedades ya trabajadas en la perspectiva axiomática, volvamos a ellas y re-trabajemos lo trabajado intentando resignificarlas en el eje numérico, graficando...

$$x > y \Rightarrow kx > ky \text{ si } k > 0$$

$$x > y \Rightarrow kx < ky \text{ si } k < 0$$

$$x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$$

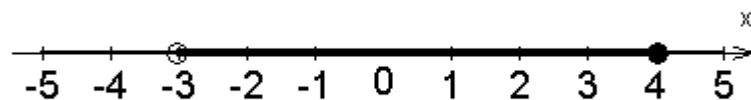
$$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$$

¿Qué me/nos aporta esta actividad?

Actividad 4

...números reales: intervalos... en el contexto de los órdenes parciales y totales...

Interpretamos en la siguiente inecuación que $-3 < x \leq 4$ es verificada por cualquier real mayor que -3 y menor o igual que 4 , es decir, x es un real que está a la derecha de -3 , a la izquierda de 4 o coincide con 4 , es decir 'conviven los órdenes parcial y total. Que nos interesa representar en el modelo de la recta numérica:



No es posible dar los elementos de este subconjunto por enumeración (recordemos que \mathbb{R} es no numerable). Entonces utilizamos la ya conocida notación de intervalo:

$$(-3; 4] = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 4\}$$

Avancemos un poco más sobre esto:

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



Observamos que

$\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in (a; b]$ es $x \leq C$ C es una cota superior

$\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in (a; b]$ es $x \geq c$ c es una cota inferior

➤ $(a; b]$ es un **conjunto acotado**, dado que posee cotas inferior y superior

Es evidente que si existe una cota superior C , existen infinitas cotas superiores; y si existe una cota inferior c también hay infinitas cotas inferiores. Por lo tanto es bueno preguntarnos:

¿Cuál es la menor de las cotas superiores del intervalo $(a; b]$? Respuesta: b

¿ b pertenece al $(a; b]$? Respuesta: SI

Luego, $(a; b]$ admite o tiene valor máximo

Del mismo modo

¿Cuál es la mayor de las cotas inferiores? Respuesta: a

¿Pertenece al $(a; b]$? Respuesta: NO

Luego, $(a; b]$ NO admite un valor mínimo

Estudiemos, ahora el intervalo

$$[2; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$$

¿Este conjunto admite cotas superiores? Respuesta: No

Entonces concluimos que $[-2; +\infty)$ NO está acotado superiormente

¿Este conjunto admite cotas inferiores? Respuesta: SI

¿Cuál es la mayor de las cotas inferiores? Respuesta: -2

¿La cota inferior, pertenece al $[-2; +\infty)$? Respuesta: SI

Luego $[-2; +\infty)$, admite un valor mínimo

Podemos concluir que:

$R^+ = \{x \in R / x > 0\} = (0; +\infty)$ es un conjunto acotado inferiormente

$R^- = \{x \in R / x < 0\} = (-\infty; 0)$ es un conjunto acotado superiormente

!!!!!! $R = (-\infty; +\infty)$ es un conjunto no acotado ;!!!

Actividad 5

...números reales: incorporando la perspectiva métrico/topológica...

¿Cómo construir una métrica sobre/para el eje real?

En esta actividad introduciremos la idea de métrica desde una perspectiva euclidiana, a través del concepto de valor absoluto. Hemos ya trabajado con el **valor absoluto** de un número real, que **definimos**:

$$\text{Sea } x \in R \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Y que hemos interpretado/intuido como la ‘distancia de un real al origen’. Proponemos leer con cuidado lo siguiente para comprender el tipo de instrumento de medición que utilizaremos a lo largo del curso, recordando primero algunas **propiedades** tales como:

$$\text{➤ } |x| = |-x|$$

$$\text{➤ } |x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a \text{ con } a \in R^+$$

- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \text{ con } a \in \mathbb{R}^+$
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a \text{ con } a \in \mathbb{R}^+$
- $|x+y| \leq |x|+|y|$

Con el fin de “medir” la distancia entre reales, utilizaremos una métrica, es decir una función que nos va a permitir, por ejemplo, determinar la longitud del intervalo $(-3;4]$ o encontrar los reales que equidisten de 2 en un décimo, entre muchas otras cuestiones...

...pero...¿qué es una métrica?

Una **métrica** es una ley que a cada par de números reales x e y le asocia un número real que simbolizaremos $d(x; y)$

¿Qué condiciones debe cumplir una métrica?

Son las siguientes:

Simetría: $d(x; y) = d(y; x)$, es decir, la distancia de x a y es la misma de y a x .

Por ejemplo; la distancia entre -3 y 4 es la misma que entre 4 y -3 (¡¡menos mal!)

Positividad: $d(x; y) \geq 0$ La distancia debe ser no negativa

Triangularidad: $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$

Veremos que la siguiente definición para distancia (no es la única posible) respeta estas cuestiones:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d(x; y) = |x - y|$$

Simetría: $d(x; y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y; x)$

Positividad: $d(x; y) = |x - y| \geq 0$

Triangularidad:

$$d(x; y) = |x - y| = |x - z + z - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x; z) + d(z; y)$$

Entonces la definición propuesta es efectivamente una métrica, conocida como **métrica euclídea o euclídiana** que utilizaremos para calcular las distancias entre reales.

En particular $d(x;0) = |x|$ razón por la cual el valor absoluto de un número real es interpretado como la distancia de ese número al origen, como hemos señalado al principio de esta actividad.

Veamos si esta métrica nos ayuda a resolver cuestiones antes planteadas:

Preguntarnos cuál es la longitud del intervalo $(-3;4]$ equivale a preguntarnos por la distancia entre -3 y 4

$$\text{long}(-3;4] = d(-3;4) = |-3 - 4| = |-7| = 7$$

Nos proponemos ahora encontrar los reales que equidistan de 2 exactamente un décimo.

Esbozar gráficamente la situación planteada. Procedamos analíticamente para confirmar nuestra intuición:

$$x \text{ tal que } d(x, 2) = 0.1$$

$$x \text{ tal que } |x - 2| = 0.1$$

$$x \text{ tal que } x - 2 = 0.1 \quad \vee \quad x - 2 = -0.1$$

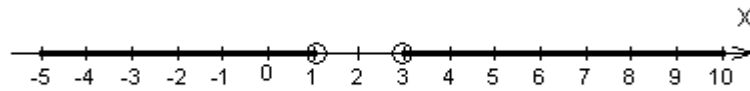
Por lo tanto los números que equidistan de 0.1 dos unidades son 2.1 y -1.9

Veamos otros ejercicios. Algunos de ellos son muy fáciles de resolver utilizando la representación de los reales en la rectal real.

Ejemplo 1: Hallar el conjunto solución para $|x - 2| > 1$

Como $|x - 2| = d(x, 2)$ resolver esta inecuación significa encontrar los números reales cuya distancia a 2 sea mayor que 1

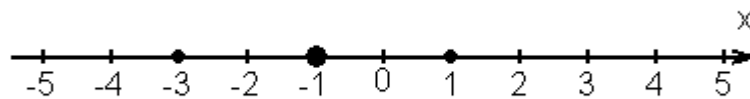
Gráficamente:



La solución al problema es el conjunto $A = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Ejemplo 2: Hallar el conjunto solución para $|x + 3| = |x - 1|$

En otros símbolos, $d(x, -3) = d(x, 1)$, es decir, debemos encontrar el conjunto de números reales que están a igual distancia de -3 que de 1

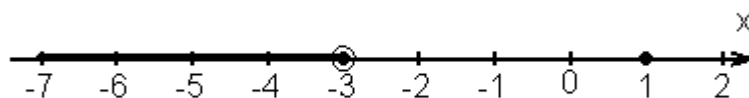


La solución es el conjunto $B = \{-1\}$

Ejemplo 3: Hallar el conjunto solución para $|x + 4| < |x + 2|$

Equivalentemente, $d(x, -4) < d(x, -2)$, es decir, debemos encontrar el conjunto de números reales que están “más cerca” de -4 que de -2

Gráficamente:



La solución al problema es el conjunto $C = (-\infty; -3)$

¿Qué me aporato esta actividad?

Actividad 6

Números reales: desde dónde, cómo y para qué en el contexto de la ingeniería...

En esta actividad nos detenemos a reflexionar y re-pensar lo trabajado....nos interesa que la multiperspectiva abordada sea ‘visualizada’ e ‘intuida’ sobre el eje real, teniendo siempre en cuenta que el modelo del eje real no es un simple eje representacional sino que comporta un sustrato de trabajo en ingeniería en el cual siempre debemos considerar que

R es un conjunto ordenado

$R = (-\infty; +\infty)$ es un conjunto no acotado

R es un conjunto infinito no numerable

R es un espacio métrico, es decir, está dotado de una métrica que nos permite medir distancias entre reales.

¿Por qué entender estas cuestiones?

Porque R es el conjunto de ‘puntos’ a partir del cual construiremos a partir del cual construiremos otros espacios de puntos.

Por ello en esta actividad le pedimos que explore a qué llamamos producto cartesiano y cómo a partir de él podemos construir nuevos conjuntos, en particular R^2 y R^3 que identificaremos en algebra y en cálculo como un espacio bidimensional que lo representaremos como un plano, el plano cartesiano, como un espacio bidimensional, que identificaremos como el espacio del plano, como un espacio tridimensional, que identificaremos como el espacio del espacio tridimensional ordinario.

Busque de que maneras o modos, siguiendo la idea de lo que hicimos en el ‘eje cartesiano’= eje real establecer correspondencias entre puntos y coordenadas referenciales

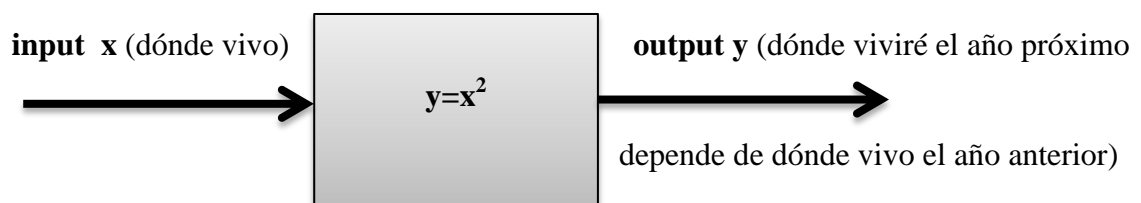
de esos puntos, es decir busque modos o maneras de representar entes de esos espacios, utilizando ejes reales....perpendiculares...

Un modelo dinámico sencillo: a divertirnos un rato...

Sobre el modelo representacional presentado para los números reales es posible “edificar” nuevos modelos matemáticos. Veamos un ejemplo de un modelo llamado dinámico discreto:

Vamos a suponer que el gobierno ¡¡¡¡decreta que cada año debemos mudarnos de nuestros domicilios ubicados en el eje real según la ley “eleve su domicilio al cuadrado y múdese allí”!!!!

¿Qué sucede con quien vive inicialmente en 1? (input: aquí vivo; output: allí viviré el próximo año...una máquina trivial que me dice cómo ‘funciona’ esto, que podemos esquematizar:



input : 1 output : 1 input : 1 output : 1

¡Eternamente vivirá en 1!

¿Qué sucede con quien vive inicialmente en -1?

input : -1 output : 1 input : 1 output : 1

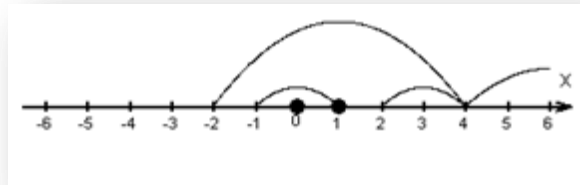
¡¡De por vida debe convivir con 1!!

La dinámica de este sistema puede visualizarse construyendo un retrato de fase

¿Quién vivirá eternamente solo pero en su domicilio se acumularan infinidad de vecinos?
Cuando encuentres la respuesta habrás encontrado un **atractor**.

¿Quiénes pelearan constantemente y harán que todos sus vecinos huyan despavoridos?
Cuando encuentres la respuesta habrás encontrado un **repulsor**.

¿Qué, cómo, de qué manera interpreta este llamado diagrama de fase?



...‘elija’ un domicilio cualquiera...e intente saber a qué distancia del domicilio original vivirá dentro de diez años...intente graficarlo...

Actividades teórico/procedimentales

En todas estas actividades le pedimos que no deje de recurrir a los aspectos teóricos en los que hemos incursionado en las actividades anteriores...es aquí como nos autoevaluaremos en nuestras cartografías...

Actividad 1

Explorar modos o maneras de representar los siguientes reales:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad -\sqrt{5} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Actividad 2

Explorar modos o maneras de:

Interpolar cuatro números racionales equidistantes entre -3 y 7

Interpolar cinco números en el segundo intervalo del ítem anterior. ¿Cuántas veces podría reiterar esta actividad?

Intercalar un número racional y uno irracional entre $0,0000021$ y $0,0000019$

Actividad 3

Ordene en forma creciente los siguientes reales y escriba los números listados en ítem (a) en notación científica

-
- (a) $2,8 \times 10^{-2}$ $1,6 \times 10^{-4}$ $0,032 \times 10^{-4}$ $32,526 \times 10^{-5}$
- (b) π $3,14141414....$ $3,1415$ $3,141514151415....$
-

Actividad 4

Grafique en el eje real:

$$[-7,3)$$

$$(-2,4] \cup [5,9]$$

$$(4,7) \cap \mathbb{R}$$

$$[a,b] \cup \mathbb{R}$$

$$(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$$

Dar ejemplos de conjuntos de números reales de modo que todo elemento y su opuesto pertenezcan a ellos.

Dar ejemplos de conjuntos de reales de modo que no siempre elementos opuestos pertenezcan a los mismos

Definir conjunto simétrico. Dar ejemplos de conjuntos simétricos que contienen o no al cero.

Actividad 5

Siendo $A = (-2,5]$, $B = [1,8]$ y $C = [-5,9)$ hallar

$$A \cup B$$

$$A - B$$

$$B - A$$

$$C - (A \cap B)$$

$$B \cap \{2\}$$

$$B \cap \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \cap A$$

$$\mathbb{R}_0^- \cap B$$

$$(\mathbb{R}^+ \cap C) - A$$

Graficar cada uno de los conjuntos hallados. Definirlos por comprensión.

Actividad 5

Representar en el eje real los siguientes conjuntos:

$$A = \{x / x \in \mathbb{R}, x = 2t + 1, -4 \leq t < 3, t \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{u / u = 2m^2, m \in \mathbb{N} \wedge 6 < m \leq 10\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = p \wedge p \in \mathbb{Z}^-\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 7\}$$

Actividad 6

Encontrar el conjunto solución para cada una de las siguientes inecuaciones o sistemas de inecuaciones

$$3x - 1 \geq 2$$

$$-1 < -2x + 3 \leq 5$$

$$\begin{cases} 4x + 1 > 2 \\ x - 3 \leq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2 > 1 \\ x < 4 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x > 5 \\ -6x \geq 3 \end{cases}$$

Actividad 7

Hallar el conjunto solución en cada caso

$$\frac{5x-2}{x} > 1$$

$$-1 < \frac{3x+2}{x-1} \leq 3$$

$$\frac{2}{-x+3} < 0$$

Actividad 8

Resolver y verificar las soluciones en cada caso

$$3|x| - 4 = 5$$

$$|x-3| = |x+5|$$

$$||x-2|-2| = 1$$

$$\left| \sqrt[3]{|x+3|} - 12.531 \times 10^{-17} \right| = -7$$

Actividad 9

a) Expresar las siguientes distancias en términos de valor absoluto:

b)

$$d(x, 3) = 8$$

$$d(z, 3) = d(z, -5)$$

$$d(x, 0) > 5$$

$$d(t-2) < d(t, 4)$$

b) Determinar los conjuntos de reales que verifican las condiciones planteadas en el ítem a)

Actividad 10

Resolver de dos modos diferentes:

$$|x-2| \geq 3$$

$$|x-1| - |x+3| > 0$$

$$2 < |x-2| < 5$$

$$|x-2| > 3$$

$$|2x-4| \leq 8$$

$$|x-3| = |x+4|$$

$$|x| \leq |x+4|$$

$$|-3x+5| > 2$$

Discutir las ventajas y desventajas de cada modo de resolución.

Actividad 11

Dados los siguientes subconjuntos de números reales, clasificarlos en acotados y no acotados. Determinar si admiten o no valores mínimos y/o máximos

$$A = [-2; 5) \quad B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\} \quad A \cap B \quad \mathbb{R}_o^+ \quad \mathbb{R}_o^+ \cap A$$

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R} / |x| < 2\} \quad C_2 = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| > 3\} \quad C_i \cup \{-2; 2\} \text{ con } i = 1, 2$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 3\} \quad E = \{x \in \mathbb{R} / -2x + 1 < 5\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} / 1 < -3x \leq 9\} \quad G = \{x \in \mathbb{R} / |-x| \geq 3\}$$

Actividad 12

Siendo $A = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| \leq 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / d(x, O) < 2\}$ determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta

a) $A \cap B$ admite valor máximo en $A = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| \leq 3\}$

b) Existe un irracional $\alpha \in B$ que verifica la inecuación $-2x + 3 < 2$

c) $A - B$ es un intervalo cerrado

d) $A \cup B \cup [-5, 2]$ es un intervalo simétrico

El número real es la base de la construcción de infinitud de modelos de suma utilidad para la ingeniería...por ello le pedimos...después de concluida esta actividad...que nos refiera brevemente cuales han sido las dificultades con las que se encontró...

...y que vuelva a re-leerlas cuando realice la segunda actividad...profundamente conectada con esta primera...

!!!GRACIAS!!!
!!!GRACIAS!!!