CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

Conceptualizando

Un conjunto es una colección de objetos de cualquier naturaleza, bien definidos y diferenciables entre sí. A dichos objetos se los llama elementos o miembros de un conjunto. Es esencial que esté bien definida la colección, no debe haber ambigüedad ni subjetividad. Ejemplo: los alumnos de esta comisión cuyo nombre comienza con A (no hay dudas de quienes son), la colección de números enteros comprendidos entre 1 y 6 (todos sabemos quiénes son los elementos de esta colección), los santafecinos entre 20 y 30 años (tomados al día de hoy, mañana tal vez es otra colección si cumplen años). Contraejemplo: la colección de los mejores profesores de la Facultad Regional Rosario.

Notación

Para nombrar a conjuntos se emplea letra mayúscula. Ejemplo: A
Para nombrar a elementos se usa letra minúscula. Ejemplo: x
Si x es un elemento del conjunto A se simboliza $x \in A$ (se lee "x pertenece a A")
Si x es un elemento que no está en el conjunto se simboliza $x \notin A$ (se lee "x no pertenece a A")
Observe que a la derecha del símbolo ∈ está el nombre del conjunto y a la izquierda el nombre de alguno de los elementos.

Observación: la notación especificada es definida en forma genérica. Es decir, generalmente se utiliza la letra minúscula para referenciar los elementos de un conjunto, más adelante veremos que puede haber elementos que son conjuntos (considere el conjunto potencia) y en ese caso se los indica con mayúscula.

Ejemplo:

Sea el conjunto de las estaciones del año, que simbólicamente lo nombramos con la letra E. La palabra primavera es un elemento del conjunto, es decir, primavera pertenece al conjunto E. Simbólicamente:

primavera $\in$ E

Formas de explicitar un conjunto

Un conjunto está bien determinado o definido si se sabe exactamente cuáles son los elementos que pertenecen a él y cuáles no. Hay dos maneras de determinar a un conjunto: por extensión o enumeración y por comprensión.

Extensión o enumeración

Si un conjunto tiene un número finito de objetos, es posible listar (o nombrar) los elementos que lo componen separados por comas y encerrados entre llaves. Esta notación se conoce con el nombre de extensión o enumeración.

Ejemplo:

Sea el conjunto V formado por las vocales de nuestro alfabeto español. Definimos el conjunto V por extensión de la siguiente manera:

$$V= \{a, e, i, o, u\}$$

Describe el conjunto integrado por los elementos a, e, i, o, u (las vocales de nuestro alfabeto).

Claramente se observa lo siguiente: $a \in V$ pero por ejemplo la siguiente letra del alfabeto no está en el conjunto, es decir, $b \notin V$.

Observación:

- No importa el orden que se listan los elementos {a, e, i, o, u} {o, u, a, e, i} {i, o, u, a, e} son representaciones del mismo conjunto V.
- Cada elemento de un conjunto se nombra en la lista una sola vez, es decir no es correcto escribir al conjunto V de la siguiente forma {a, a, o, u, i, i, e}.

Comprensión

Si un conjunto es infinito o es finito pero sería complicado listar todos sus elementos por la cantidad que tiene, es conveniente definirlo por comprensión, es decir especificar un criterio, una característica o propiedad que los elementos del conjunto tienen en común. Se emplea la notación P(x) para denotar una oración o enunciado P relativo al objeto o variable x. Así **{x / P(x)}** (se lee "x tal que P de x") constituye la colección de todos los objetos x que satisfacen la propiedad P.

Ejemplo:

V = {x/ x es una vocal} (se lee V es el conjunto de x tal que x es una vocal)

Como puede observarse "x" en este caso designa a un elemento cualquiera del conjunto, ninguno en particular, por eso se lo llama variable o elemento genérico, y por lo tanto puede ir adoptando diferentes valores. Es decir, si reemplazo la x genérica por alguna de las vocales queda una oración (llamada proposición) que es verdadera, mientras que si reemplazo la "x" por una consonante, la oración será falsa. Además, observe el verbo empleado, se usa **es** y no son (concordancia del singular entre sujeto y verbo), porque se analiza un elemento por vez.

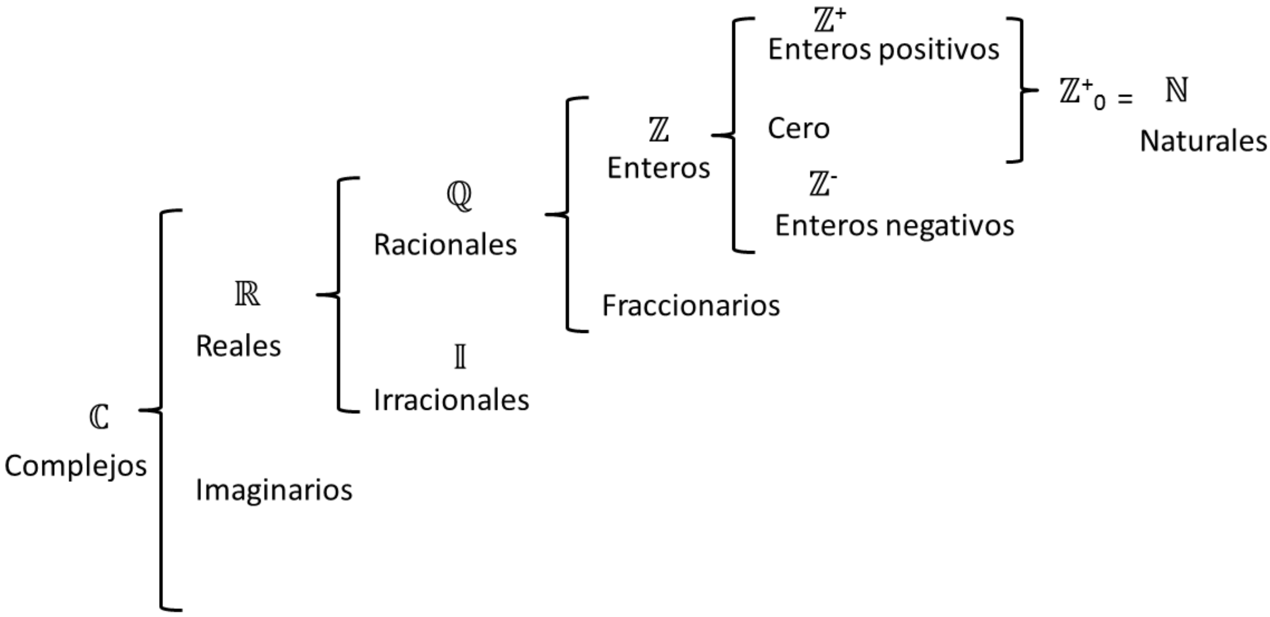
EJERCICIO:

A es el conjunto formado por todas las letras de la palabra "amistad", definirlo por extensión y por comprensión

A = {m,t,d,a,i,s}　　　　　A={x/x es una letra de la palabra "amistad"}

Observación: Un conjunto escrito por extensión también podría ser definido por comprensión, pero lo contrario no siempre es posible.

Repaso de conjuntos numéricos



- La adición de un superíndice + o – indica que sólo los elementos positivos o negativos se van a incluir.
- El cero no es ni positivo ni negativo. Algunos autores definen a los números naturales sólo como los enteros positivos, para evitar problemas utilizaremos la notación $\mathbb{Z}^+$ (para indicar enteros positivos solamente) y $\mathbb{Z}^+_0$ (para indicar enteros positivos con el cero) y no tanto la de naturales.
- El conjunto de los números reales generalmente se describe como el conjunto de todos los puntos en una recta.

Ejemplo:

B es el conjunto de los enteros positivos menores o iguales que 4. Defina por extensión y comprensión

Por extensión B = {1, 2, 3, 4}

Por comprensión B = {x/x es un entero positivo y x es menor o igual que 4}

O expresado mediante fórmulas simbólicas para lograr brevedad y precisión de la siguiente forma

$B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } x \leq 4\}$

(Se lee el conjunto B está formado por x tal que x es un número entero positivo y x es menor e igual a 4 o B es el conjunto de todo número entero positivo que es menor o igual que 4).)

¿Podría escribir por comprensión de alguna otra forma el conjunto B? Analice cuál es la más conveniente.

Observación:

- En el ejemplo, la propiedad necesaria para que un elemento pertenezca al conjunto tiene dos partes: la que determina el conjunto al que pertenece el elemento ($x \in \mathbb{Z}^+$) y la que establece otra condición más restrictiva, no son todos los enteros positivos, son los menores o iguales a 4.
- Una propiedad puede ser definida por varios criterios (o partes), cada uno de ellos vinculados por: “y” o “$\wedge$” o “;” o “, “.

Ejemplo:

Determina los elementos del conjunto A = $\{x/x \in \mathbb{R} ; x + 1 = 5\}$ (se lee el conjunto A está formado por todo número real x que sumado a 1 da como resultado 5 o el conjunto A es igual al conjunto de x tal que x es un número real que sumado a 1 da como resultado 5)

¿Cómo está definido el conjunto? ¿Puedo listar sus elementos? ¿Qué debo hacer para encontrar qué elementos satisfacen la propiedad?

Al despejar la ecuación se puede comprobar que el único valor posible de x es 4, por lo tanto A = {4}. Es un conjunto que tiene solo un elemento y se lo llama unitario.

Cuestión: ¿Cómo identifico si un elemento pertenece a un conjunto dado?

- Si el conjunto está dado por extensión, solo es necesario ver si el elemento aparece o no en la lista.
- Si el conjunto está dado por comprensión, se debe verificar si el elemento cumple con la propiedad indicada. Es decir sustituimos la x por el elemento que queremos analizar y verificamos si satisface todas las condiciones.

EJERCICIO:

Analiza los siguientes conjuntos y resuelve lo pedido en cada caso justificando la respuesta:

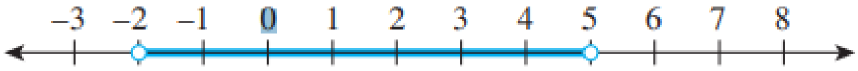
a) A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ¿El elemento 4 pertenece al conjunto? ¿El elemento 9 pertenece al conjunto?
b) B = $\{x/x \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq x^2 \leq 20\}$ Lista los elementos que pertenecen a B.
c) C = $\{x/x \in \mathbb{Z}^+; x^3 < 60\}$. Indica si los números 6, 2 y -3 pertenecen al conjunto.
d) D = $\{x/x \in \mathbb{R}$ y $-2 < x < 5\}$
e) E = $\{x/x \in \mathbb{Z}$ y $-2 < x < 5\}$
f) F = $\{x/ x \in \mathbb{Z}^+$ y $-2 < x < 5\}$

Solución:

a) Como el conjunto está dado por extensión, claramente se observa que el 4 está listado en el conjunto A por lo cual pertenece, mientras que el elemento 9 no está listado por lo cual no pertenece al conjunto.
b) El conjunto está dado por comprensión, lo primero que analizamos es el conjunto al que pertenece x, en este caso los enteros. Podemos comenzar con 0, $0 \in \mathbb{Z}$ y $0^2 \leq 20$ entonces $0 \in$ B. Tomo el siguiente entero que sigue, el 1 y verifico si cumple la condición de su cuadrado ser menor o igual a 20 y sigo hasta que considero el número 4 (su cuadrado es $16 \leq 20$). Luego tomo los negativos y realizo el mismo análisis. Por lo cual B = {0, 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, -4}
c) Veamos cada caso:

$6 \in \mathbb{Z}^+$ pero $6^3 = 216 > 60$ entonces $6 \notin$ C
$2 \in \mathbb{Z}^+$ y $2^3 = 8 < 60$ entonces $2 \in$ C
$-3 \notin \mathbb{Z}^+$ entonces $-3 \notin$ C (aunque $(-3)^3 = 27 < 60$)

d) El conjunto está dado por comprensión y se trata del intervalo abierto de los números reales (estrictamente) entre -2 y 5, como no podemos listar los elementos pues son infinitos, se ilustran de la siguiente manera:



e) Es el conjunto de todos los enteros (estrictamente) entre -2 y 5. Es igual al conjunto {-1, 0, 1, 2, 3, 4}.

f) Dado que todos los números enteros en $\mathbb{Z}^+$ son positivos, F = {1, 2, 3, 4}.

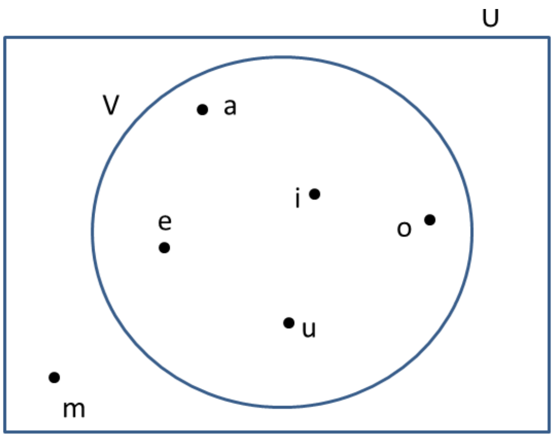
Diagramas de Venn

Ya se analizó el lenguaje coloquial y el simbólico empleado para conjuntos. Ahora introducimos el lenguaje gráfico donde se pueden visualizar los elementos de un conjunto. Así un conjunto puede ser representado gráficamente por medio de diagramas de Venn, teniendo en cuenta que:

1) Todo conjunto se representa gráficamente por una curva simple cerrada.
2) Los elementos del conjunto se representan por puntos interiores a la curva.
3) Los elementos que no pertenecen al conjunto se representan por puntos exteriores a la curva.
4) Ningún punto se representa sobre la curva.

A continuación se observa la representación gráfica del conjunto V, de las vocales. Claramente se puede observar que los elementos a, e, i, o, u están dentro círculo, pues cumplen con la propiedad de ser una vocal. Mientras que m no pertenece al conjunto V.

Observe que al conjunto V se lo ha incluido dentro de un rectángulo. Ese elemento gráfico se denomina Universal o referencial (la definición se verá en el apartado Conjuntos especiales). Siempre un conjunto se encuentra dentro de un referencial.



Cardinal de un conjunto

Cuando un conjunto es finito se puede contar la cantidad de elementos que tiene, en el caso de V tiene 5 elementos.

Simbólicamente $|V| = 5$ (se lee cardinal del conjunto V es 5)

Subconjuntos. Inclusión

Definición

Si A y B son conjuntos, entonces A se llama subconjunto de B y se escribe $A \subseteq B$, si y sólo si, cada elemento de A es también un elemento de B. Cuando sucede esto decimos que el conjunto A está incluido en B o está contenido en B.

Simbólicamente:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

(Se lee, A está incluido en B si y solo si, para todo elemento de A se cumple que es elemento de B).

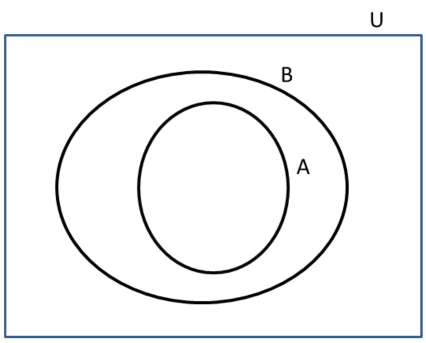
Observación:

Analizar bien la diferencia entre el si y sólo si y el implica (o entonces). Un si y sólo si nos indica una doble implicación. El entonces tiene que ver con la idea de condición "Si X entonces Y" si se da lo primero se da lo segundo, pero no a la inversa. Es importante diferenciar estos casos para poder realizar bien las demostraciones.

Ejemplo:

Sea el conjunto B formado por los alumnos de la Facultad Regional Rosario. Consideremos el conjunto A formado por los alumnos que cursan Ingeniería en Sistemas. Todos los elementos de A son elementos de B, puesto que están cursando en la facultad.

Gráficamente:

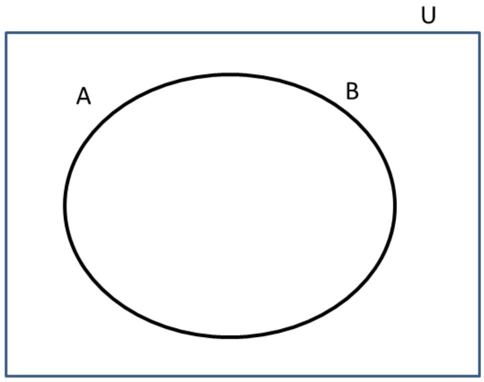


Observación:

- A está contenido en B y B contiene a A, son formas alternativas para decir que A es un subconjunto de B.
- A y B son solo nombres que damos, la idea es pensar en un primer conjunto y un segundo conjunto que se comparan entre sí.
- La definición se refiere al sentido amplio de la inclusión, es decir, contempla la posibilidad que A sea B, por eso se coloca una "rayita" debajo del símbolo de inclusión.

¿Cómo sería la representación en diagrama de Venn si los dos conjuntos tienen los mismos elementos?

Si A es igual al conjunto B, podemos definir la igualdad considerando el concepto de inclusión visto anteriormente. Note que esta situación es un caso especial de la inclusión $A \subseteq B$, imaginando que en la parte de B fuera de A no hay ningún elemento.



$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

(Se lee el conjunto A es igual al conjunto B si y solo si, A está incluido en B y B está incluido en A)

¿Cuándo diremos que $A \nsubseteq B$?

Se deberá negar el para todo. Veamos un ejemplo: Si digo todos los alumnos de esta comisión ya tienen su título de Secundario. ¿Cuándo este enunciado es falso? Si encuentro por lo menos un alumno de la comisión que no tenga aún el título.

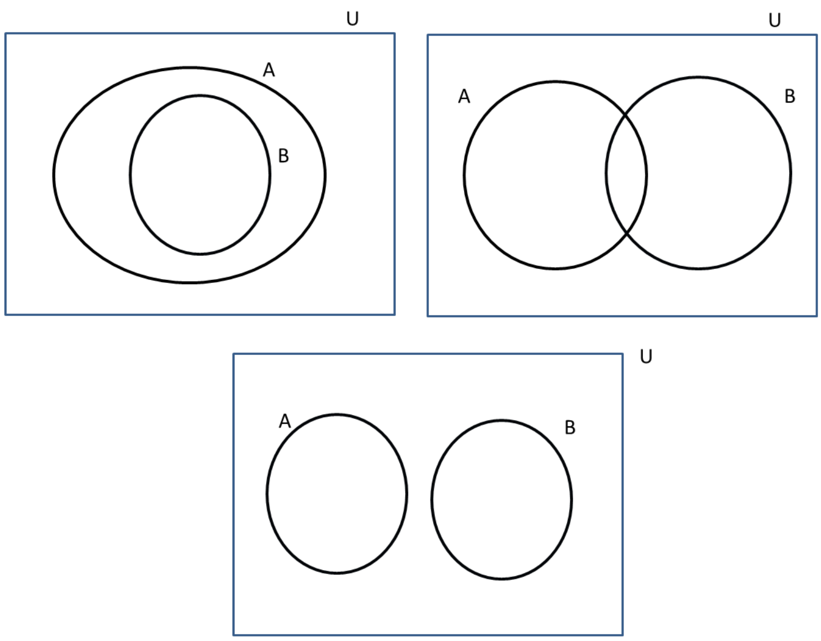
De la definición se deduce que un conjunto A no es subconjunto de un conjunto B si existe al menos un elemento de A que no es elemento de B. Simbólicamente:

$$A \nsubseteq B \iff (\exists\, x,\ x \in A \wedge x \notin B)$$

(Se lee A no está incluido en B si y solo si, existe un elemento x que pertenece a A, pero x no pertenece a B)

Entienda que A y B son solo nombres que damos, la idea es que existe por lo menos un elemento del primer conjunto que no está en el segundo conjunto.

Gráficamente podríamos tener los siguientes casos:



1. Primer caso: Suponga $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$,
    a. $A \not\subseteq B$. Pues existen elementos de A, en este caso 4 y 5 que no están en B, es decir existen elementos que están en el primer conjunto y no están en el segundo.
    b. $B \subseteq A$. Pues todos los elementos de B pertenecen a A. Todos los elementos del primer conjunto están en el segundo.
2. Segundo caso: Suponga $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$,
    a. $A \not\subseteq B$, pues existen elementos de A, en este caso 4 y 5 que no están en B.
    b. $B \not\subseteq A$, pues existen elementos de B, en este caso 7, 8 y 9 que no están en A.
3. Tercer caso: Suponga $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{7, 8, 9\}$
    a. $A \not\subseteq B$, pues existen elementos de A, en este caso 1, 2, 3, 4 y 5 que no están en B.
    b. $B \not\subseteq A$, pues existen elementos de B, en este caso 7, 8 y 9 que no están en A.
    c. En particular no existe ningún elemento en común entre ambos conjuntos. Cuando tenemos una situación así decimos que los conjuntos son **disjuntos**.

Ejemplo:

a) Si $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+; 1 < x < 5\}$ verifique que $A = B$ (todos los elementos de A están en B)

b) Si $A = \{2, 3, 4, 8\}$ y $B = \{x/ x \in \mathbb{Z}^+; 1 < x \leq 5\}$ analice que $A \neq B$ (A no está contenido en B ni B está en A)

Propiedad 1: Todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Simbólicamente $\mathbf{A \subseteq A, \forall A}$

Esto puede comprobarse de forma inmediata usando la definición dado que: $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in A$

Ejemplo:

$$\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$$

EJERCICIO:

Sea $A = \mathbb{Z}^+$, $B = \{x/x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 100\}$ y $C = \{100, 200, 300, 400, 500\}$. Evalúe si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a. $B \subseteq A$ b. $C \subseteq A$ c. C y B tienen por lo menos un elemento en común

d. $C \subseteq B$ e. $C \subseteq C$

Solución:

a) Falso. El cero no es entero positivo. Por lo tanto el cero está en B y no está en A. $B \nsubseteq A$

b) Verdadero. Cada elemento de C es un entero positivo y está en A. Hay elementos de A que no están en C. Por ejemplo el 1 está en A y no en C.

c) Verdadero. Por ejemplo 100 está en C y en B

d) Falso. Por ejemplo 200 está en C y no en B.

e) Verdadero. Por la propiedad 1 comentada antes, todo conjunto es subconjunto de sí mismo (o lo que es equivalente decir “todo conjunto está incluido en sí mismo”).

EJERCICIO:

Sean A, B, C conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $C \subseteq A$. ¿Qué puede deducir sobre estos conjuntos?

Solución:

Puesto que $B \subseteq C$ y $C \subseteq A$, entonces $B \subseteq A$, pero por hipótesis $A \subseteq B$, entonces por definición de igualdad $A = B$. De forma similar, $C \subseteq A$ y $A \subseteq B$, por lo tanto $C \subseteq B$, pero por hipótesis $B \subseteq C$, entonces por definición de igualdad $B = C$. De ambos pasos se puede deducir que los tres conjuntos son iguales.

EJERCICIO:

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es falso o verdadero

a. $2 \in \{1,2,3\}$ b. $\{2\} \in \{1,2,3\}$ c. $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$ d. $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

e. $\{2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$ f. $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$ g. $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$ h. $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$

Solución:

a) Verdadero. Puesto que 2 es un elemento listado en $\{1,2,3\}$

b) Falso. Para que b) sea verdadero el conjunto $\{1,2,3\}$ debería contener el elemento $\{2\}$, pero no está listado. Observe que 2 no es lo mismo que $\{2\}$.

c) Falso. Para que c) sea verdadero el número 2 debería ser un conjunto y todos los elementos en el conjunto de dos tendrían que ser un elemento de $\{1,2,3\}$. Este no es el caso.

d) Verdadero. El conjunto $\{2\}$ tiene un único elemento, el número 2. Este elemento está también en $\{1, 2, 3\}$. Como cada elemento del primer conjunto está en el segundo la inclusión es verdadera.

e) Falso. Para que e) sea verdadero todos los elementos del conjunto $\{2\}$ deberían ser elementos del conjunto $\{\{1\}, \{2\}\}$. Pero en realidad $\{2\}$ es un elemento del conjunto pues está listado en él.

f) Verdadero. El conjunto $\{\{1\}, \{2\}\}$ tiene dos elementos, dos conjuntos unitarios (ambos tienen un solo elemento).

g) Verdadero. El conjunto $\{1\}$ tiene un único elemento que es 1, y ese elemento es también elemento del conjunto $\{1, \{1\}\}$, por lo tanto el primer conjunto está incluido en el segundo.

h) Verdadero. El elemento {1} está listado en el conjunto {1, {1}} que tiene dos elementos, por lo tanto pertenece a él.

EJERCICIO

Demuestre que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ no es subconjunto de $B = \{x/x \in \mathbb{Z}^+,\ x = 2.n,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

Solución:

Es necesario demostrar que al menos un elemento de A no pertenece a B. Puede tomarse el 3, pues $3 \in A$ pero $3 \notin B$.

Hasta ahora se analizaron casos de igualdad e inclusión para conjuntos con un determinado número finito de elementos.

¿Cómo analizamos una relación entre dos conjuntos cuando no es tan sencillo listar los elementos?

Si queremos demostrar que un conjunto está dentro del otro podemos usar esto:

Método básico para demostrar que un conjunto es subconjunto de otro
Sean los conjuntos X y Y dados. Para demostrar que $X \subseteq Y$,
1. suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de X,
2. demuestre que x es un elemento de Y.

Si queremos demostrar que un conjunto es igual a otro podemos usar esto:

Método básico para demostrar que un conjunto es igual a otro
Sean los conjuntos X y Y dados. Para demostrar igualdad realice prueba de doble inclusión:
Demostrar que $X \subseteq Y$,
1. suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de X,
2. demuestre que x es un elemento de Y.

Demostrar que $Y \subseteq X$,
1. suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de Y,
2. demuestre que x es un elemento de X.

Muchas veces la demostración de la doble inclusión se resuelve empleando un si y sólo si en cada uno de los pasos.

A continuación, vemos dos ejemplos donde se analiza cómo llevar a cabo estos dos tipos de demostraciones de inclusión e igualdad de conjuntos, cuando los mismos no son finitos y no es posible ver a simple vista si se cumplen las condiciones definidas.

Demostrando y refutando relaciones de subconjunto

Defina los conjuntos A y B de la siguiente manera:

$$A = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 6r + 12 \text{ para alguna } r \in \mathbf{Z}\}$$

$$B = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 3s \text{ para alguna } s \in \mathbf{Z}\}$$

a. Diseñe una demostración para $A \subseteq B$. b. Demuestre que $A \subseteq B$.
c. Refute que $B \subseteq A$.

Solución

a. **Diseño de una demostración:**
Suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de A.

.
.
.

Por tanto, x es un elemento de B.

b. **Demostración:**
Suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de A.
[Debemos demostrar que $x \in B$. Por definición de B, esto significa que debemos demostrar que $x = 3 \cdot$ (algún entero).]

Por definición de A, existe un entero r tal que $x = 6r + 12$.
[Considerando que $x = 6r + 12$, ¿podemos expresar a x como $3 \cdot$ (algún entero)? Es decir, ¿es $6r + 12 = 3 \cdot$ (algún entero)? Sí, $6r + 12 = 3 \cdot (2r + 4)$.]

Sea $s = 2r + 4$.
[Debemos comprobar que s es un número entero.]

Entonces, s es un entero porque productos y sumas de enteros son enteros.
[Ahora debemos comprobar que $x = 3s$.]

También $3s = 3(2r + 4) = 6r + 12 = x$,
Así, por definición de B, x es un elemento de B,
[que es lo que se quería demostrar].

c. Refutar un enunciado significa mostrar que es falso y para demostrar que es falso que $B \subseteq A$, debe encontrar un elemento de B que no sea un elemento de A. Por las definiciones de A y B, esto significa que debe encontrar un entero x de la forma $3 \cdot$ (algún entero) que no se puede escribir en forma $6 \cdot$ (algún entero) $+ 12$. Un poco de experimentación revela que funcionan distintos números. Por ejemplo, puede hacer $x = 3$. Entonces $x \in B$ porque $3 = 3 \cdot 1$, pero $x \notin A$ porque no hay ningún entero r tal que $3 = 6r + 12$. Por si existiera dicho entero, entonces,

$$\begin{aligned} & 6r + 12 = 3 && \text{por suposición} \\ \Rightarrow\ & 2r + 4 = 1 && \text{dividiendo ambos lados por 3} \\ \Rightarrow\ & 2r = 3 && \text{restando 4 de ambos lados} \\ \Rightarrow\ & r = 3/2 && \text{dividiendo ambos lados por 2,} \end{aligned}$$

pero $3/2$ no es un entero. Por tanto, $3 \in B$ pero $3 \notin A$ y así $B \nsubseteq A$.

Igualdad de conjuntos

Se definen los conjuntos A y B de la siguiente manera:

$$A = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = 2a \text{ para algún entero } a\}$$

$$B = \{n \in \mathbf{Z} \mid n = 2b - 2 \text{ para algún entero } b\}$$

¿es, $A = B$?

Solución Sí. Para probar esto, deben demostrarse ambas relaciones de subconjunto $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$.

Parte 1. Demostración de que $A \subseteq B$:

Suponga que x es un elemento particular arbitrariamente elegido de A.

[Debemos demostrar que $x \in B$. Por definición de B, esto significa que tenemos que demostrar que $x = 2 \cdot$ (algún entero) $- 2$.]

Por definición, de A, existe un entero tal que $x = 2a$.

[Dado que $x = 2a$, ¿también se puede expresar a x como $2 \cdot$ (algún entero) $- 2$? Es decir, ¿existe un número entero, digamos b, tal que $2a = 2b - 2$? Resuelva para b para obtener $b = (2a + 2)/2 = a + 1$. Compruebe para ver si esto funciona.]

Sea $b = a + 1$.

[Primero compruebe que b es un número entero.]

Entonces, b es un entero, ya que es una suma de números enteros.

[A continuación, compruebe que $x = 2b - 2$.]

También $2b - 2 = 2(a + 1) - 2 = 2a + 2 - 2 = 2a = x$,

Así, por definición de B, x es un elemento de B

[que es lo que se quería demostrar].

Parte 2. Demostración de que $B \subseteq A$:

Suponga que x es un elemento particular de B arbitrariamente elegido.

[Debemos demostrar que x ∈ A. Por definición de A, esto significa que debemos demostrar que x = 2 . (algún entero).]

Por definición de B, existe un entero b tal que x = 2b - 2.

[Dado que x = 2b - 2, ¿podemos expresar a x como 2 . (algún entero)? Es decir, ¿existe un entero, digamos a, tal que 2b – 2 = 2a? Resolver para a para obtener que a = b - 1. Compruebe que esto funciona.]

Sea a = b - 1.

[Primero compruebe que a es un entero.]

Entonces a es un entero porque es la diferencia de enteros.

[Después compruebe que x = 2a.]

También 2a = 2(b - 1) = 2b - 2 = x.

Así, por definición de A, x es un elemento de A,

[que era lo que se quería demostrar].

Conjuntos especiales

Conjunto universal

Todo conjunto está incluido en otro conjunto formado por todos los elementos del tema de referencia, ese conjunto se llama Universal o Referencial.

En el caso que V = {a, e, i, o, u} el universal puede ser considerado como el conjunto de todas las letras del abecedario español.

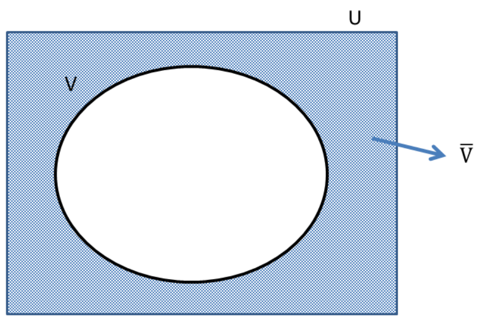
Observe que en este caso también podría definir al conjunto universal como las letras de la palabra "murciélago".

Complemento

De lo anterior, surge que, dados V y U se determina otro conjunto, formado por todos los elementos que están en el Universal pero no están en V. Dicho conjunto es llamado complemento de V y se lo designa $\overline{V}$. Así el complemento de un conjunto cuyos elementos satisfacen a P(x) es un conjunto formado por los elementos que satisfacen a la negación P(x).

Ejemplo:

V = {a, e, i, o, u} $\overline{V}$ = { x/x es una consonante} = $\{x/x \in U \text{ y } x \notin V\}$



Observación:

- En algunos textos el complemento se lo simboliza con la letra c como super-índice o por un apóstrofo. Es decir $\overline{V} = V' = V^C$

Propiedad del complemento:		
Si A = B entonces $\overline{A} = \overline{B}$	Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{B} \subseteq \overline{A}$	ej 17 a de la práctica

Conjunto vacío

Al definir un conjunto por comprensión puede ocurrir que tenga varios elementos, uno o ninguno. Ejemplo:

D = {alumnos de esta clase que han viajado a la luna}

Este conjunto no tiene elementos y se lo denomina vacío. Se expresa simbólicamente $\emptyset$ o así { }

Observación:

Use una de las dos simbologías, no ambas simultáneamente pues {∅} es un conjunto no vacío pues tiene un elemento que es el vacío.

Ejemplo:

Sea H = {x/x ∈ $\mathbb{Z}^+$, x + 5 < 2}

Ningún número entero positivo satisface la segunda condición, porque al despejar x nos da -3 y ese número no es entero positivo. Por lo tanto H = ∅

Propiedad 2: El conjunto vacío está incluido en todo conjunto**.** Simbólicamente ∅ ⊆ **A,**∀ **A**

Esto puede demostrarse por contradicción. Suponga lo contrario, que ∅ ⊈ A. Entonces, debe existir un elemento en ∅ que no pertenezca a A. ¡Pero esto es Absurdo! Pues ∅ no tiene elementos. Por lo que se concluye que ∅ ⊆ **A,**∀ **A**

El cardinal del conjunto vacío es cero. Es decir |∅|= 0

Conjunto potencia o partes de un conjunto

Sea A un conjunto, se llama conjunto potencia o partes de A al conjunto formado por todos los subconjuntos que pueden formarse con los elementos de A y se lo simboliza P(A).

¿Cuántos subconjuntos admite un conjunto dado?

- Caso 1: A es ∅. Según la propiedad ∅ ⊆ **A,** ∀ **A,** el conjunto vacío (igual que todos los otros) es subconjunto de sí mismo y es el único. Entonces | P(∅)| = 1
- Caso 2: A es un conjunto unitario (tiene un único elemento). Según las propiedades de inclusión: ∅ ⊆ A y A⊆ A ∀ A. Entonces tiene dos elementos el conjunto potencia en este caso.
- Caso 3: planteamos A ={a,b}, además de los subconjuntos anteriores: {a} ⊆ A y {b} ⊆ A Por lo tanto hay 4 elementos en este conjunto potencia

Se puede observar que cada vez que agregamos un elemento al conjunto, duplicamos la cantidad de subconjuntos que admite: 1, 2, 4, 8, y así sucesivamente. Estos números son las sucesivas potencias de 2:

$$1 = 2^0$$
$$2 = 2^1$$
$$4 = 2^2$$
$$8 = 2^3$$

Entonces, podríamos generalizar y decir que: Un conjunto con n elementos admite 2^n partes o subconjuntos (una prueba más formal se verá al trabajar el tema en conteo). Por lo que podemos escribir:

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

Ejemplo:

Sea A= {1,2,3} Entonces P(A) = { {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, [2,3}, {1,2,3}, ∅ }

Puede observarse que P(A) se trata de un conjunto cuyos elementos son conjuntos, se habla que posee una familia de conjuntos.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Luego de definir a los conjuntos veremos que operaciones se pueden hacer con ellos.

Definición

Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U

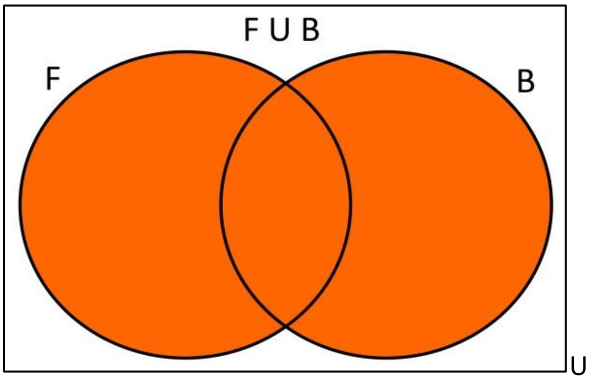
La **Unión** de A y B, se denota $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que se encuentran en al menos uno de los dos conjuntos, son elementos que pertenecen a A o pertenecen a B (es decir que el elemento está en A, en B o en ambos, se trata de un o inclusivo).

Simbólicamente

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\} = \{x/\ x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo:

Dados dos conjuntos F = {x/x estudiantes que juegan fútbol} y B = {x/x estudiantes que juegan básquet}, la unión será FUB = {x/x estudiantes que juegan fútbol o básquet}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:

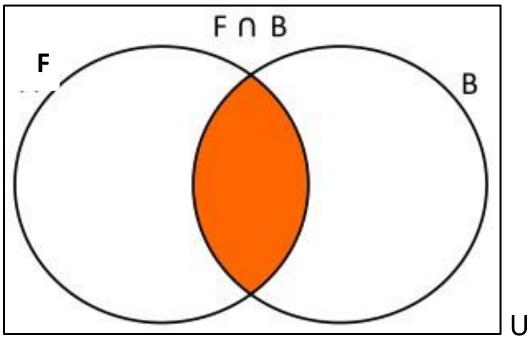


La **Intersección** de A y B, que se denota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes a ambos conjuntos, es decir que pertenecen simultáneamente a A y a B.

Simbólicamente

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\} = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Si continuamos con el ejemplo anterior, la intersección $F \cap B$ = {x/x estudiantes que juegan fútbol y básquet}



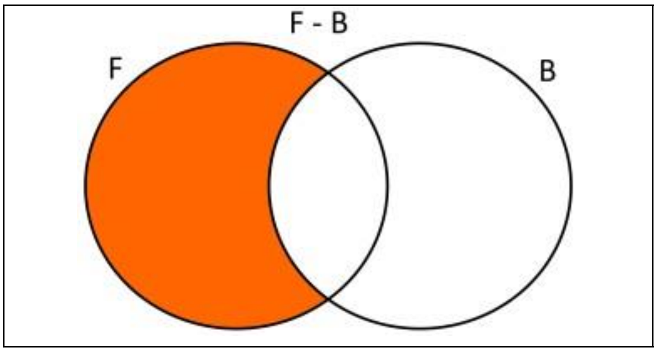
La **diferencia** de A menos B (o complemento de B respecto a A) se denota A – B, es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B. También se puede definir la diferencia de B menos A (o complemento de A respecto de B, como el conjunto formado por todos los elementos de B que no pertenecen a A.

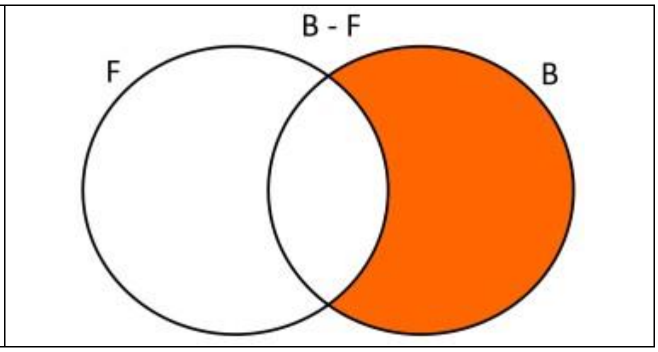
$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\} = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$B - A = \{x/x \in B \text{ y } x \notin A\} = \{x/x \in A \wedge x \notin A\}$$

Seguimos con el ejemplo:

Dados dos conjuntos F = {x/x estudiantes que juegan fútbol} y B = {x/x estudiantes que juegan básquet}, la diferencia de F con B, será F-B = {x/x estudiantes que sólo juegan fútbol} y B-F = {x/x estudiantes que sólo juegan básquet}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:





Observación:

- La diferencia puede ser empleada para dar una definición más formal del complemento de un conjunto $\overline{V}$ = U - V

Sean A y B conjuntos se define la **diferencia simétrica** A ⊕ B como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B pero no pertenecen a ambos simultáneamente.

Simbólicamente:

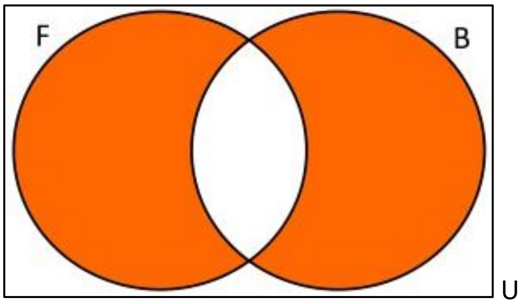
$$A \oplus B = \{x/ (x \in A \text{ y } x \notin B) \text{ o } (x \in B \text{ y } x \notin A)$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Siguiendo con el ejemplo, la diferencia simétrica de A y B nos daría el conjunto de estudiantes que solamente juegan al fútbol o solo juegan al básquet. Usando el diagrama de Venn se tendría:

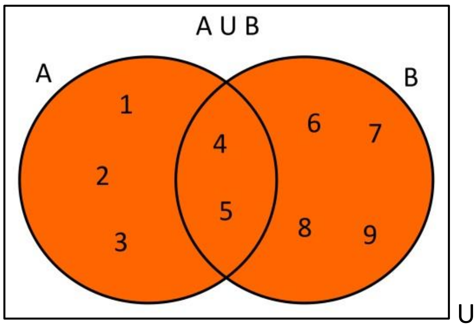
F ⊕ B



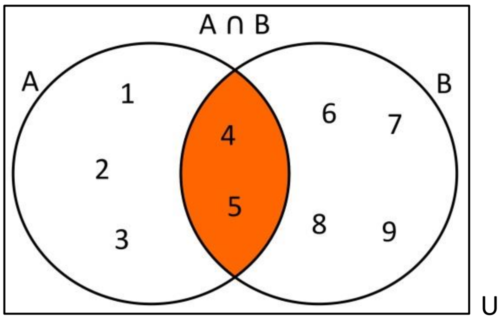
EJERCICIO:

Sea A = {1,2,3,4,5} y B = {4,5,6,7,8,9}

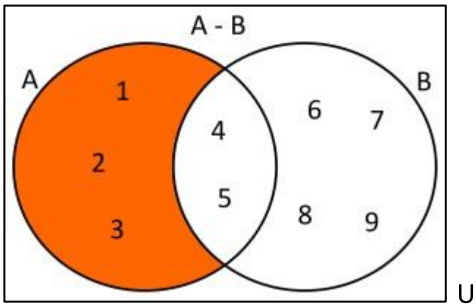
A ⋃ B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}



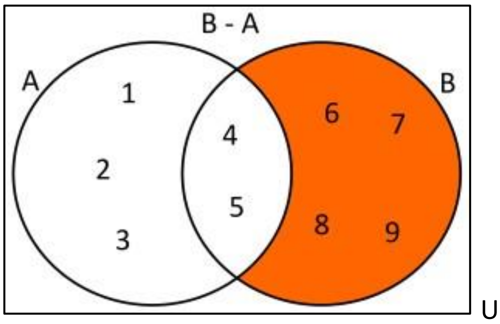
A ⋂ B = {4,5}



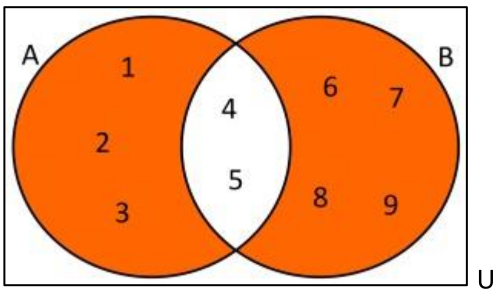
A-B = {1,2,3}



B-A = {6,7,8,9}



A ⊕ B ={1,2,3,6,7,8,9}



Uniones e Intersecciones generalizadas

Las operaciones de unión e intersección pueden extenderse a más de dos conjuntos. Así si consideramos la operación entre los conjuntos $A \cup B \cup C$ tendremos un nuevo conjunto que contiene los elementos que están en A o en B o en C. Y si realizamos la operación $A \cap B \cap C$ tendremos un conjunto constituido por los elementos que están en los tres conjuntos simultáneamente.

Dados los conjuntos A_1, A_2, A_3, …. A_n como subconjuntos de un universal entonces extendemos la operación unión utilizando (se lee la unión de A subíndice i desde i igual a 1 hasta n). Así la generalización de la unión y la intersección pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A_1} \cup \boldsymbol{A_2} \cup \boldsymbol{A_3} \cup \boldsymbol{A_4} .. \cup \boldsymbol{A_n}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{A_2} \cap \boldsymbol{A_3} \cap \boldsymbol{A_4} .. \cap \boldsymbol{A_n}$$

Ejemplo:

Sea A={1, 2, 3, 4, 5, 7} , B={1, 3, 8, 9}, C={1, 3, 6, 8}. Calcule la unión y la intersección de los tres conjuntos.

Solución:

$A \cup B \cup C$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

$A \cap B \cap C$ = {1,3}

Teorema 1: Relaciones de subconjuntos

1. *Inclusión de intersección*: Para todos los conjuntos A y B,

   a) $A \cap B \subseteq A$ y *b)* $A \cap B \subseteq B$.

2. *Inclusión en la unión*: Para todos los conjuntos A y B,

   a) $A \subseteq A \cup B$ y *b)* $B \subseteq A \cup B$.

3. *Propiedad transitiva de subconjuntos*: Para todos los conjuntos A, B y C,

   si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

En todas estas demostraciones se tratan de probar inclusiones, es decir, si un conjunto X es un subconjunto de otro conjunto Y. Para demostrarlo suponga que x es cualquier elemento [particular arbitrariamente elegido como representante, lo que le pasa a ese elemento le pasará a todo otro elemento del conjunto] de X y demuestre que x es un elemento de Y. En la mayoría de las demostraciones de las propiedades de conjuntos, el secreto de obtener la suposición de que x está en X a la conclusión de que x está en Y es pensar en términos de las definiciones de las operaciones básicas de conjuntos.

Demostración de la inclusión de intersección

Demuestre que para todos los conjuntos A y B, $A \cap B \subseteq A$

Hipótesis) $x \in A \cap B$

Tesis) $x \in A$

- Análisis con diagrama de Venn de un caso posible. (Se deja para el lector).
- Justificación sin diagrama de Venn.

Coloquialmente

Se pretende demostrar una inclusión de un conjunto en otro (recordar la definición).

Seleccionamos un elemento cualquiera de $A \cap B$

H1) Como x está contenido en A intersección B por definición de intersección

x está en A y está en B

En particular x está en A (omito parte de la información)

Por lo tanto $A \cap B \subseteq A$

Se llega a la conclusión que se quería demostrar

Simbólicamente

Sea $\underbrace{x \in A \cap B}_{\text{Hipótesis}} \Longrightarrow \underbrace{x \in A \text{ y } x \in B}_{\text{por definición de intersección}} \Longrightarrow x \in A \qquad \therefore\ A \cap B \subseteq A$

- Observación: también se podría haber concluido que x está en B

Demostración de la inclusión en la unión

Demuestre que para todos los conjuntos A y B, $A \subseteq A \cup B$

Hipótesis) $x \in A$

Tesis) $x \in A \cup B$

- Análisis con diagrama de Venn de un caso posible. (Se deja para el lector).
- Justificación sin diagrama de Venn.

Coloquialmente

Se pretende demostrar una inclusión de un conjunto en otro (recordar la definición).

Seleccionamos un elemento cualquiera de A

Hipótesis) Como x está contenido en A si realizamos A unión cualquier otro conjunto seguirá siendo válida la afirmación que x está en ese nuevo conjunto

Si x está en A está en A o x está en B

Por lo tanto $A \subseteq A \cup B$

Se llega a la conclusión que se quería demostrar

Simbólicamente

Sea $\underbrace{x \in A}_{\text{Hipotesis}} \Longrightarrow \underbrace{x \in A \text{ o } x \in B}_{\text{por definición de unión}} \Longrightarrow x \in A \cup B \qquad \therefore\ A \subseteq A \cup B$

- Observación: también se podría haber concluido que x está en B

Demostración de propiedad transitiva

Dados los conjuntos A, B y C demostrar que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$

Hipótesis 1) $A \subseteq B$ abreviado H1)
Hipótesis 2) $B \subseteq C$ abreviado H2)
Tesis) $A \subseteq C$

- Análisis con diagrama de Venn de un caso posible. (Se deja para el lector).
- Justificación sin diagrama de Venn.

Coloquialmente

Seleccionamos un elemento cualquiera de A

H1) Como A está contenido en B,

Si x está en A entonces está en B

H2) Como B está contenido en C,

Si x está en B entonces está en C

Por lo tanto x está en C

Se llega a la conclusión que se quería demostrar

Simbólicamente

$$\text{Sea } x \in A \underset{\text{Por H1)}}{\Longrightarrow} x \in B \underset{\text{por H2)}}{\Longrightarrow} x \in C \qquad \therefore \ A \subseteq C$$

Observación

- **Si A y B son disjuntos, es decir no tienen elementos en común $A \cap B = \emptyset$**
- $\mathbf{A - B = A \cap \overline{B}}$ (La demostración se realiza en la práctica ejercicio 17, inciso k)

Propiedades generales de conjuntos

La identidad es una ecuación que es universalmente válida para todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, la ecuación $a + b = b + a$ es una identidad para números reales, porque es verdadera para todos los números reales a y b. La colección de propiedades del conjunto en el teorema siguiente consiste completamente de identidades de conjuntos. Es decir, son ecuaciones que son verdaderas en todos los conjuntos en algún conjunto universo.

Teorema 2: Identidades de conjuntos

Sea U un conjunto universal y sean A, B y C subconjuntos de U. Las siguientes propiedades se cumplen.

a) Leyes asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

b) Leyes conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

c) Leyes distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d) Leyes de identidad:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap U = A$$

e) Leyes de complemento:

$$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

f) Leyes de idempotencia:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

g) Leyes de acotación:

$$A \cup U = U, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

h) Leyes de absorción:

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$$

i) Leyes de involución:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

j) Leyes 0/1

$$\overline{\emptyset} = U, \quad \overline{U} = \emptyset$$

k) Leyes de De Morgan para conjuntos:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Demostración de identidades de conjunto

La conclusión de cada parte es que un conjunto es igual a otro. Como vimos anteriormente: Dos conjuntos son iguales si cada uno de ellos es un subconjunto del otro. Recordemos un método que se usa para esto.

Método básico para demostrar que los conjuntos son iguales

Sean los conjuntos X y Y. Para demostrar que X = Y:

1. Demuestre que $X \subseteq Y$.
2. Demuestre que $Y \subseteq X$.

Demostración de una ley conmutativa

$$A \cup B = B \cup A \qquad \forall\, A, B$$

Sea $x \in A \cup B$, por definición de la unión $x \in A \vee x \in B$

Por propiedad conmutativa de disyunción se puede escribir: $x \in A \vee x \in B \;\equiv\; x \in B \vee x \in A$

De allí que: $\{ x / x \in A \vee x \in B\} = \{x / x \in B \vee x \in A\}$, entonces $A \cup B = B \cup A$

Demostración de la propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad \forall\, A, B, C$$

Intente identificar la idea propuesta en la ley empleando tres conjuntos cualesquiera, graficar sus diagramas de Venn correspondientes y utilizar regiones sombreadas para el análisis inicial. Identifique cada caso por separado.

Demostración:

Supongamos que A y B son conjuntos.

Demostración de que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

Suponga que $x \in A \cup (B \cap C)$. Por definición de unión, $x \in A$ o $x \in B \cap C$.

Caso 1 ($x \in A$): Ya que $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$ por definición de unión y también $x \in A \cup C$ por definición de unión. Por tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ por definición de intersección.

Caso 2 ($x \in B \cap C$): Dado que $x \in B \cap C$, entonces $x \in B$ y $x \in C$ por definición de intersección. Ya que $x \in B$, $x \in A \cup B$ y puesto que $x \in C$, $x \in A \cup C$, ambos por la definición de unión. Por tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ por definición de intersección.

En ambos casos, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por tanto $A \cup (B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ por definición del subconjunto.

Demostración de que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$:

Suponga que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por definición de intersección, $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$. Considere los dos casos $x \in A$ y $x \notin A$.

Caso 1 ($x \in A$): Dado que $x \in A$, podemos inmediatamente concluir que $x \in A \cup (B \cap C)$ por definición de unión.

Caso 2 ($x \notin A$): Ya que $x \in A \cup B$, x está en al menos uno de A o B. Pero x no está en A; por tanto, x está en B. Similarmente, puesto que $x \in A \cup C$, x está al menos en uno de A o C. Pero x no está en A; por tanto x está en C. Hemos demostrado que tanto $x \in B$ y $x \in C$ y por tanto por definición de intersección, $x \in B \cap C$. Se deduce por definición de unión que $x \in A \cup (B \cap C)$.

En ambos casos $x \in A \cup (B \cap C)$. Por tanto, por definición de subconjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Conclusión: Dado que se han demostrado ambas relaciones de subconjuntos, se deduce por definición de igualdad de conjuntos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demostración de una ley de identidad

$$A \cup \emptyset = A \;\; \forall A$$

Demostración: Sea A un conjunto. *[Debemos demostrar igualdad de conjuntos es decir doble inclusión de conjuntos]*
Suponga que $x \in A \cup \emptyset$. Entonces, por definición de unión $x \in A$ o $x \in \emptyset$. Pero $x \notin \emptyset$ porque $\emptyset$ no tiene elementos. Así $x \in A$.

$$\therefore A \cup \emptyset \subseteq A \quad (1)$$

Supongamos $x \in A$. Entonces el enunciado "$x \in A$ o $x \in \emptyset$ es verdadero". Así que por definición de unión x $x \in A \cup \emptyset$. *[Alternativamente, $A \subseteq A \cup \emptyset$. por la propiedad de la inclusión de la unión]*

$$\therefore A \subseteq A \cup \emptyset \quad (2)$$

De (1) y (2) $A \cup \emptyset = A \;\; \forall A$

Demostración de propiedad de complemento

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \;\; \forall A$$

Demostración: Por contradicción. Sea A un subconjunto de un conjunto Universal.
Suponga que $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$, entonces existe por lo menos un elemento x, tal que $x \in A \cap \overline{A}$. Entonces, por definición de intersección $x \in A$ y $x \in \overline{A}$. Y por definición de complemento $x \in A$ *y* $x \notin A$, lo cual es una contradicción, debido a proponer una hipótesis falsa. Por lo tanto la intersección entre A y su complemento debe ser el conjunto vacío.

Demostración de una de las leyes de De Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad\qquad \forall A, B$$

Solución:
Por tratarse de una igualdad conjuntista, la demostración se divide en dos inclusiones:
Primera inclusión:
$\overline{(A \cup B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
[Debemos mostrar que $\forall x \in \overline{(A \cup B)}$ *entonces* $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ *]*
Sea $x \in \overline{(A \cup B)} \Longrightarrow x \notin A \cup B$ (por definición de complemento)
Pero decir que $x \notin A \cup B$ significa que es falso que (x está en A o x está en B).
Por las leyes de De Morgan de la lógica $\Longrightarrow$ x no está en A y x no está en B $\Longrightarrow x \notin A$ y $x \notin B$ y por definición de complemento $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ (por definición de intersección)

$$\therefore \overline{(A \cup B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \text{ [como se quería demostrar]} \quad (1)$$

Segunda inclusión:
$\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{(A \cup B)}$
[Debemos mostrar que $\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ *entonces* $x \in \overline{(A \cup B)}$ *]*
Sea $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B}$ (por definición de intersección) $\Longrightarrow x \notin A$ y $x \notin B$ (por definición de complemento) $\Longrightarrow x \notin A \cup B$ (por leyes de De Morgan de lógica) $\Longrightarrow x \in \overline{(A \cup B)}$

$$\therefore \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{(A \cup B)} \text{ [como se quería demostrar]} \quad (2)$$

De (1) y (2) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Observación: La demostración de la ley de absorción se verá en la práctica

Demostración algebraica para simplificar expresiones o encontrar identidades

En este caso utilizaremos directamente las identidades de conjuntos del Teorema 2 para justificar cada uno de los pasos

Ejemplo:

Sean A, B y C conjuntos. Demostrar que:

$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$

Solución:

$\overline{A \cup (B \cap C)}$	$= \bar{A} \cap (\overline{B \cap C})$	por primera ley de De Morgan
	$= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$	por segunda ley de De Morgan
	$= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$	por ley conmutativa de la intersección
	$= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$	por ley conmutativa de la unión

PRINCIPIO DE ADICIÓN

Sean A y B conjuntos finitos de un conjunto universal U. Con frecuencia es útil saber si existe una fórmula para saber cuál es el cardinal de A ∪ B, es decir conocer cuántos elementos existen luego de realizar la operación unión sin tener que contarlos uno a uno. Veamos un primer caso:

A = { 1, 2, 3, 4} y B = {7, 8, 9}

Si hacemos la unión de ambos conjuntos el resultado es A ∪ B = { 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9}. Tendremos entonces que el cardinal de esa operación da como resultado 7. Es lógico pensarlo ¿no? Si tengo 4 manzanas y 3 naranjas ¿Cuántas frutas voy a tener? Exactamente la suma de las cardinalidades de cada uno de los conjuntos.

Analicemos este segundo caso: A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6} y B = {5, 6, 7, 8, 9} ¿Cuál será la cardinalidad? ¿Podemos hacer lo mismo que antes? Si lo pensamos igual tendríamos el número 11 como cardinal de la unión pero si hacemos la unión tenemos A ∪ B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} solo 9 elementos ¿Qué sucede? Sucede que hay elementos en común a ambos conjuntos que los estamos sumando dos veces. Entonces al planteo anterior podemos deducir que tenemos que restar algo. ¿Qué es lo que tenemos que restar? Si respondiste el cardinal de la intersección estás en lo correcto.

¿Y esa fórmula será general? ¿La podríamos aplicar al primer caso que planteamos como ejemplo?

Si respondiste que sí estás en lo correcto. Porque el cardinal de la intersección de dos conjuntos disjuntos es cero, entendiste de qué se trata.

Teorema 3. *Si A y B son conjuntos finitos, entonces* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. ●

Ejemplo Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{c, e, f, h, k, m\}$. Verifique el teorema **3**.

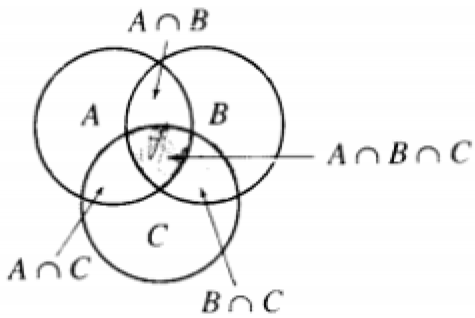
Solución: Se tiene que $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h, k, m\}$ y $A \cap B = \{c, e\}$. También, $|A| = 5$, $|B| = 6$, $|A \cup B| = 9$, y $|A \cap B| = 2$. Entonces $|A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 6 - 2$, o sea 9, y el teorema 2 está verificado. ◆

Si A y B son conjuntos disjuntos, $A \cap B = \varnothing$ y $|A \cap B| = 0$, de manera que la fórmula del teorema se convierte ahora en $|A \cup B| = |A| + |B|$. Este caso especial puede enunciarse en una forma que resulta útil para una variedad de situaciones de conteo.

El principio de adición para conjuntos disjuntos

Si un trabajo o tarea T_1 puede efectuarse exactamente de n maneras, y una tarea T_2 puede efectuarse exactamente de m maneras, el número de formas de realizar la tarea T_1 o la tarea T_2 es $n + m$.

La situación para tres conjuntos es un poco más complicada, como se muestra en la figura . Puede enunciarse en principio de adición para tres conjuntos sin lugar a dudas.



Teorema 4 *Sean A, B y C conjuntos finitos. Entonces,* $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$. ●

Ejemplo Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, e, g, h\}$, y $C = \{b, d, e, g, h, k, m, n\}$. Verifique el teorema .

Solución: Se tiene que $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, g, h, k, m, n\}$, $A \cap B = \{a, b, e\}$, $A \cap C = \{b, d, e\}$, $B \cap C = \{b, e, g, h\}$, y $A \cap B \cap C = \{b, e\}$, de manera que $|A| = 5$, $|B| = 5$, $|C| = 8$, $|A \cup B \cup C| = 10$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 3$, $|B \cap C| = 4$, y $|A \cap B \cap C| = 2$. En consecuencia, $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 5 + 5 + 8 - 3 - 3 - 4 + 2$, o sea, 10, y el teorema 3 está verificado. ◆

Este tipo de problemas son muy comunes en la vida diaria. Supongamos los siguientes casos

Ejemplo

Una empresa de sistemas tiene que contratar 25 programadores para desarrollo en Java y 40 programadores que sepan desarrollo en Python. De los que se contrate se espera que 10 realicen ambas tareas. ¿Cuántos programadores se deberán contratar en total?

Lo primero que hacemos es modelizar el problema, es decir definimos cuáles son los conjuntos con los que vamos a trabajar. Consideramos

A: conjunto de programadores en Java

B: conjunto de programadores en Phyton

Colocamos los datos o hipótesis que conocemos

$|A| = 25$ $|B| = 40$ $|A \cap B| = 10$

Escribimos la tesis, qué debemos encontrar: $|A \cup B|$

Usando la fórmula del teorema 3

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 40 - 10 = 55 \text{ programadores}$$

Ejemplo

Una consultora recibe una serie de datos producto de una encuesta realizada en donde se preguntaba telefónicamente al azar a un grupo de personas, cuál es el medio de transporte que más frecuentemente es empleado por cada uno de los miembros de la familia para movilizarse a su trabajo o a la escuela. Las opciones dadas en la encuesta eran: colectivo, bicicleta, auto (las personas podían responder más de una opción). Teniendo en cuenta que no se conoce cuántas llamadas se realizaron y cuántas personas hay en cada domicilio, la pregunta es con los datos que se tiene, ¿se puede saber de cuántas personas se tienen los datos?

El problema plantea la necesidad de ver cuál es la cantidad de personas total de las que se tienen respuestas, es decir el cardinal de la unión de las tres categorías.

Planteamos el modelo del problema:

A: conjunto de personas que viajan en auto

B: conjunto de personas que viajan en bicicleta

C: conjunto de personas que viajan en colectivo

Las hipótesis (en base a los datos suministrados) son las siguientes:

$|A| = 30$ $|B| = 35$ $|C| = 100$ $|A \cap B| = 15$ $|A \cap C| = 15$ $|B \cap C| = 20$ $|A \cap B \cap C| = 5$

Tomando la fórmula del teorema 4 tenemos que la cantidad total de personas $|A \cup B \cup C|$ es:

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 30 + 35 + 100 - 15 - 15 - 20 + 5 = 120$$