VECTORES

Un vector es un ente abstracto que se define matemáticamente como un elemento de una estructura más compleja, denominada espacio vectorial. Su definición es objeto de estudio en los cursos de Álgebra y Geometría Analítica y no la vamos a abordar en este apunte.

En Física, los vectores se utilizan para describir aquellas magnitudes a las que se les puede asociar un valor y una orientación, a las cuales nos referiremos como magnitudes vectoriales; por ejemplo, la posición, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza y muchas otras.

En un espacio tridimensional, los vectores (y por tanto, también las magnitudes físicas vectoriales) se pueden representar por una tríada ordenada de componentes o, gráficamente, mediante segmentos de recta orientados.

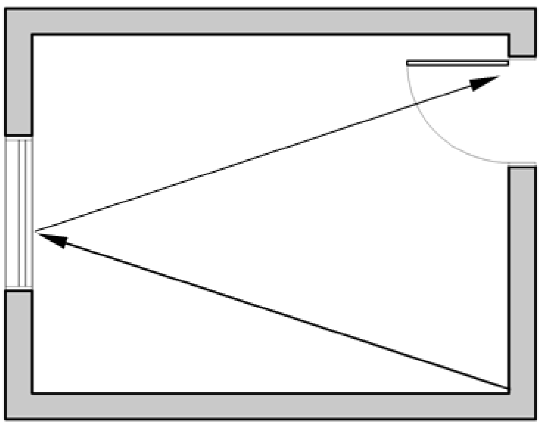
MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Las “magnitudes físicas escalares” son aquellas que quedan determinadas por un solo número real, resultado de su medida, acompañadas de la unidad correspondiente; por ejemplo, longitud, volumen, peso específico, densidad, presión, trabajo, tiempo, etc.

Cuando necesitamos identificar el valor de una longitud nos basta con indicar el número que expresa el valor medido y la unidad con que se midió. En el caso de un lápiz, por ejemplo, decimos que mide 15 cm donde el número 15 es la cantidad de veces que la unidad elegida, el cm, está contenida en el lápiz.

Si tenemos varios recipientes con un líquido y sabemos el contenido de cada uno de los recipientes; para saber el contenido total, lo único que necesitamos hacer es sumar el contenido de cada uno de ellos. Esta suma se puede hacer sin preocuparnos por el orden en que los sumamos. El resultado es independiente del orden; es decir, la suma es conmutativa.

Otras magnitudes, como la velocidad o el desplazamiento, no quedan totalmente determinadas por un valor numérico (con su correspondiente unidad), sino que hace falta conocer también su orientación (dirección y sentido). Para expresar estas magnitudes se utilizan los vectores, y se les denomina “magnitudes físicas vectoriales”.



Analicemos la Figura. Si desplazamos un cuerpo por una habitación no resulta lo mismo que lo llevemos de una esquina a la ventana que de la ventana a la puerta. Aunque la distancia recorrida por el cuerpo sea la misma en ambos casos, el resultado final no es el mismo.

Entonces, para describir el fenómeno, es necesario utilizar un tipo de ente matemático que, además de indicar un valor (en este caso, la longitud recorrida), indique una orientación. Los vectores nos permiten describir eventos de este tipo.

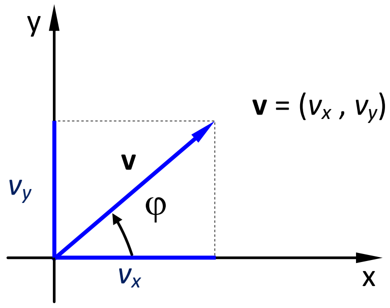
Un vector se puede representar gráficamente como un segmento orientado en el espacio tridimensional. La longitud del segmento será proporcional al valor de la magnitud que representa y lo llamamos módulo; en el ejemplo anterior, es la distancia recorrida por el cuerpo en la habitación, mientras que la orientación del segmento indica la dirección y sentido en que se produce el desplazamiento del cuerpo. En el ejemplo, con la flecha se indica el sentido de desplazamiento del cuerpo, de la esquina a la ventana y de la ventana a la puerta.

VECTORES EN DOS DIMENSIONES

Comencemos analizando vectores en un espacio plano (dos dimensiones). Para denotar un vector, utilizaremos letras "**negritas**" o letras con una pequeña flecha encima.

Un vector en un plano, lo podemos describir haciendo referencia a un sistema de ejes cartesianos (mutuamente perpendiculares entre sí).

En la figura está representado un vector **v** (ó $\vec{v}$), de módulo v (ó |**v**|), cuya orientación está determinada por el ángulo φ, entre el eje coordenado x y el segmento que representa al vector (tomado en sentido antihorario).



v: módulo del vector **v**.

v = |**v**|

φ: ángulo formado entre el eje coordenado x y el vector **v** y (tomado en sentido antihorario).

Representación del vector v por su módulo y ángulo:

v = (v; φ)

Esta representación se conoce como representación polar de un vector. Al módulo **v** y al ángulo φ se les llama componentes polares del vector.

Representación del vector v por sus componentes cartesianas:

v = (v_x ; v_y)

Esta representación se conoce como representación cartesiana de un vector. A v_x y v_y se les llama componentes cartesianas del vector. Dichas componentes son las proyecciones del vector **v** sobre los ejes coordenados.

Relación entre componentes cartesianas y componentes polares:

$v_x = v \,.\, \cos(\varphi)$

$v_y = v \,.\, \mathrm{sen}(\varphi)$

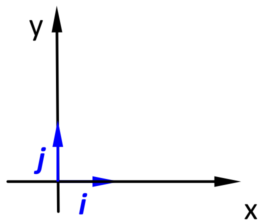
$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x^{\,2} + v_y^{\,2})}$

$\varphi = \tan^{-1}(v_y / v_x)$

Vectores base ó versores:

$\boldsymbol{i} = |\mathbf{i}| = 1$, $\boldsymbol{j} = |\mathbf{j}| = 1$

$i_x = 1$, $i_y = 0$, $j_x = 0$, $j_y = 1$



Los vectores base ***i*** y ***j*** son vectores unitarios (de módulo igual a uno) orientados según los ejes cartesianos. Los vectores unitarios también se conocen como "versores".

Representación del vector v a partir de los vectores base:

$\mathbf{v} = (v_x ; v_y) = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$

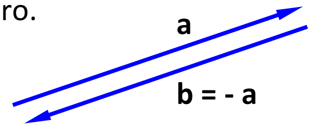
Igualdad de vectores:

Dos vectores son iguales si y sólo si tienen **igual módulo**, **igual dirección** e **igual sentido**.

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{b} \\ \mathbf{a} // \mathbf{b} \\ \text{sentido } \mathbf{a} = \text{sentido } \mathbf{b} \end{cases}$$

Vector opuesto:

Dado un vector **a** (***Figura***) se define el vector opuesto de **a** a todo vector **b** = - **a** tal que sumado con **a** de cómo resultado el vector nulo ($\bar{0}$) cuyo módulo es cero.



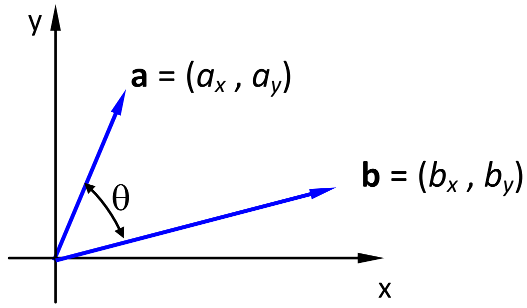
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \bar{0}$$

OPERACIONES CON VECTORES

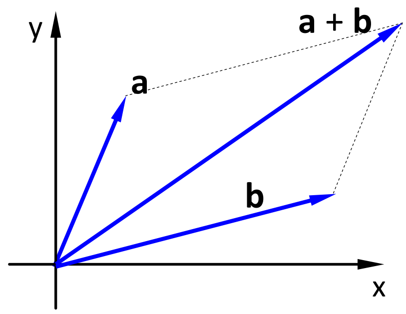
Consideremos dos vectores **a** y **b**, donde:

$\mathbf{a} = (a_x ; a_y) = a_x \, \boldsymbol{i} + a_y \, \boldsymbol{j}$

$\mathbf{b} = (b_x ; b_y) = b_x \, \boldsymbol{i} + b_y \, \boldsymbol{j}$



Suma de vectores

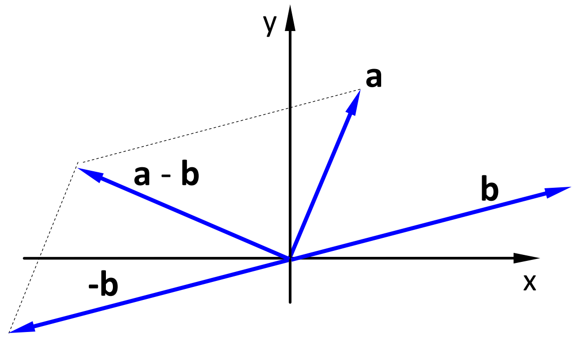


$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x \; ; a_y + b_y)$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \, \boldsymbol{i} + (a_y + b_y) \, \boldsymbol{j}$

Resta de vectores



$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x \; ; a_y - B_y)$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x) \, \boldsymbol{i} + (a_y - b_y) \, \boldsymbol{j}$

Producto de un escalar C por un vector

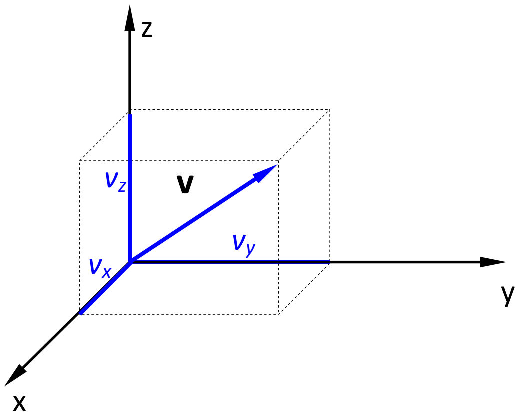
$\mathrm{C}. \mathbf{a} = \mathrm{C}(a_x ; a_y) = (\mathrm{C} . a_x ; \mathrm{C} . a_y)$

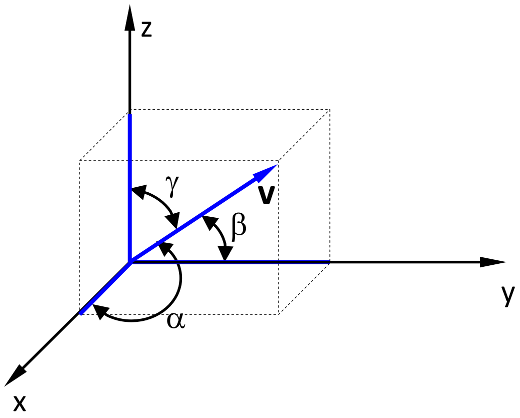
$\mathrm{C} . \mathbf{a} = \mathrm{C} (a_x ; a_y) = (\mathrm{C} . a_x) \, \boldsymbol{i} + (\mathrm{C} . a_y) \, \boldsymbol{j}$

VECTORES EN TRES DIMENSIONES

Componentes cartesianas de un vector:

En la figura está representado un vector **v** (ó $\vec{v}$), de módulo v (o $|\mathbf{v}|$), cuya orientación está determinada por los ángulos α, β y γ, entre el segmento que representa al vector y los ejes coordenados x, y, z, respectivamente. Los ángulos α, β y γ se conocen como ángulos directores del vector **v**. Se puede demostrar que $(\cos(\alpha))^2 + (\cos(\beta))^2 + (\cos(\gamma))^2 = 1$, luego, conociendo dos cualesquiera de ellos, se puede determinar el tercero.





Representación del vector v por sus componentes cartesianas:

$\mathbf{v} = (v_x\,;\,v_y\,;\,v_z)$

Al igual que en el caso de vectores de dos dimensiones, esta representación se conoce como representación cartesiana del vector y a v_x, v_y y v_z se les llama componentes cartesianas del vector. Dichas componentes son las proyecciones del vector **v** sobre los ejes coordenados.

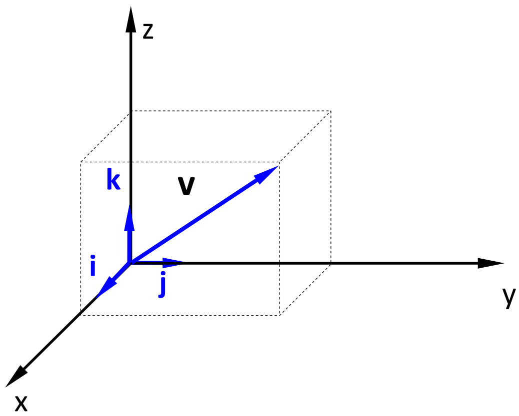
Relación entre las componentes cartesianas, el módulo del vector y sus ángulos directores:

$v_x = v\cos(\alpha)$

$v_y = v\cos(\beta)$

$v_z = v\cos(\gamma)$

$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$



Vectores base ó versores:

$i = |\mathbf{i}| = 1\ ,\ j = |\mathbf{j}| = 1\ ,\ k = |\mathbf{k}| = 1$

$i_x = 1\ ,\ j_y = 1\ ,\ k_z = 1$

Los vectores base ***i***, ***j*** y ***k*** son vectores unitarios orientados según los ejes cartesianos x, y, z respectivamente.

Representación del vector v a partir de los vectores base:

$\mathbf{v} = (v_x\,;\,v_y\,;\,v_z) = v_x\,\boldsymbol{i} + v_y\,\boldsymbol{j} + v_z\,\boldsymbol{k}$

OPERACIONES CON VECTORES

Consideremos dos vectores **a** y **b**, donde:

$\mathbf{a} = (a_x\,;\,a_y\,;\,a_z) = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}$

$\mathbf{b} = (b_x\,;\,b_y\,;\,b_z) = b_x\,\boldsymbol{i} + b_y\,\boldsymbol{j} + b_z\,\boldsymbol{k}$

Suma de vectores

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x \ ; a_y + b_y \ ; a_z + b_z)$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\, \boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\, \boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\, \boldsymbol{k}$

Resta de vectores

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x \ ; a_y - b_y \ ; a_z - b_z)$

$\mathbf{a} - \mathbf{B} = (a_x - b_x)\, \boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\, \boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\, \boldsymbol{k}$

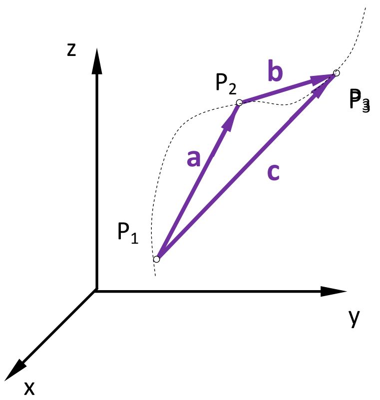
Producto de un escalar C por un vector

$C.\, \mathbf{a} = C\,(a_x \ ; a_y \ ; a_z) = (Ca_x \ ; C\,a_y \ ; C\,a_z)$

$C\,.\, \mathbf{a} = C\,(a_x \ ; a_y \ ; a_z) = (C\,a_x)\, \boldsymbol{i} + (C\,a_y)\, \boldsymbol{j} + (C\,a_z)\, \boldsymbol{k}$

VECTOR DESPLAZAMIENTO

Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos con la cantidad vectorial más simple, el desplazamiento, que es un cambio en la posición de una partícula.



La ***Figura*** muestra la trayectoria de una partícula que se mueve desde el punto P_1 hasta un segundo punto P_2 y luego a un tercer punto P_3. El desplazamiento de P_1 a P_2 viene representado por el vector **a** y el desplazamiento de P_2 a P_3 por el **b**. Obsérvese que el desplazamiento depende sólo de los puntos extremos y no de la trayectoria real de la partícula; no se relaciona directamente con la distancia total recorrida. Si la partícula volviera a P_1, el desplazamiento total sería cero.

Al dibujar diagramas con vectores, debemos usar una escala adecuada, en la que la distancia en el diagrama sea proporcional a la magnitud del vector. Por ejemplo, un desplazamiento de 5 km podría representarse con un vector de 1 cm en el diagrama y lo anotaríamos como $ESC._{\text{Desplazamiento}} = 5$ km/1cm

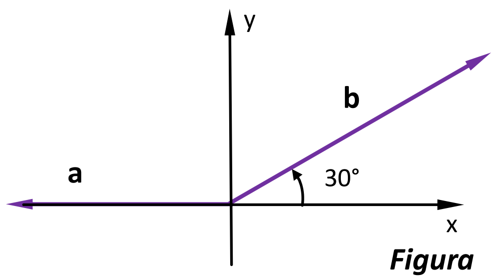
Al trabajar con cantidades vectoriales distintas a los desplazamientos, como por ejemplo fuerzas, también debemos adoptar una escala. En un diagrama de vectores de fuerza podríamos representar una fuerza de 4 N con un vector de 1 cm. Entonces, un vector de 5 cm representaría una fuerza de 20 N y lo anotaríamos como $ESC._{\text{Fuerza}} = 4$ N/1cm

EJEMPLOS:

1) Dados los vectores **a** y **b** de la ***Figura***, use un dibujo en escala para obtener:

a) La suma **a + b**

b) La diferencia **a - b**

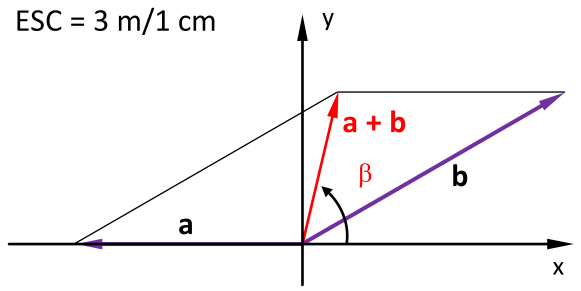


Figura

$|\vec{a}| = 9{,}00$ m

$|\vec{b}| = 12{,}0$ m

a)

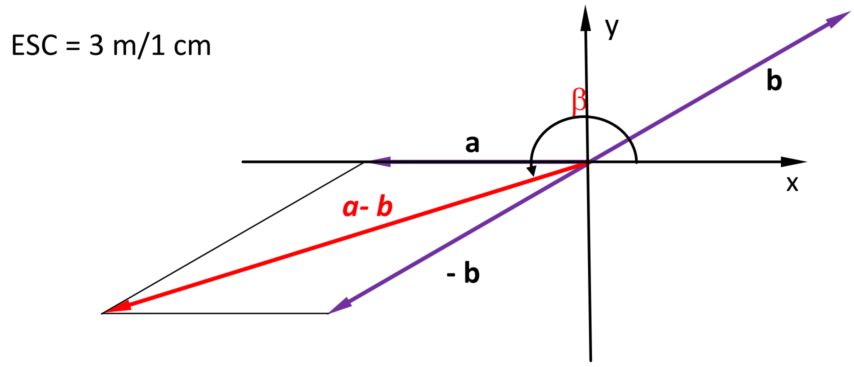


Mido la longitud del vector suma (2,1 cm) y lo multiplico por la Escala y obtengo:

|a + b| = 6,3 m

β = 76°

b)



|a - b| = 20,1 m

β = 197°

2) Resolver el problema anterior analíticamente.

a)

a_x= **a** . cos 180° = - 9,00 m

a_y = **a** . sen 180° = 0

b_x = **b** . cos 30° = 10,4 m

b_y = **b** . sen 30° = 6,00 m

$a_x + b_x$ = 1,4 m

$a_y + b_y$ = 6,00 m

a + b =[(6,00 m)^2 +(1,4 m)^2)] ^{½}

a + b = 6,2 m

β = 77°

b)

-b_x = **b** . cos 30° = - 10,4 m

-b_y = **b** . sen 30° = - 6,00 m

$a_x - b_x$ = - 19,4 m

$a_y - b_y$ = - 6,00 m

a - b =[(-19,6 m)^2 +(-6,00 m)^2)] ^{½}

a - b = **20,5 m**

β = 197°

3) Escribir los vectores **a** y **b** del problema 1) en términos de **i**, **j**.

a = - 9,00 m **i**

b = 10,4 m **i** + 6,00 **j**

4) Dados dos vectores:

a = 4,00 m ***i*** + 3,00 m ***j***

b = 5,00 m ***i*** - 2,00 m ***j***

a) Calcular el módulo de cada vector.

b) Calcular **a** - **b** usando vectores unitarios.

c) Obtener el módulo, dirección y sentido de **a** - **b**

a) | a = **5,00 m**

b = **5,38 m**

b) **a - b** = -1,00 m ***i*** + 5,00 m ***j***

c) |**a - b**|= 5,10 m

θ = 101°

PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

En este curso de Física también utilizaremos otros dos productos, el escalar y el vectorial, que explicaremos brevemente, ya que dejaremos a la cátedra de Álgebra y Geometría Analítica para que lo desarrollen en profundidad y resuelvan problemas. El este curso de Física utilizaremos en producto escalar en Trabajo y el vectorial en Torque.

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar, también conocido como producto interno o producto punto, es una operación algebraica de dos vectores que da como resultado un número real (un escalar).

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$

θ : ángulo formado entre los vectores **a** y **b**

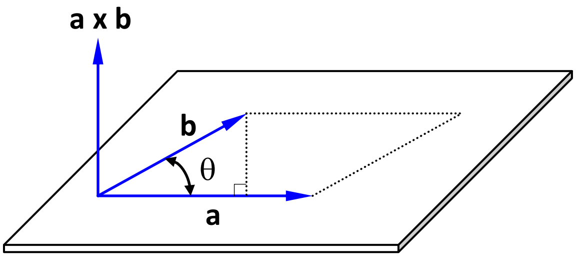
Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial o producto cruz es una operación entre dos vectores en un espacio tridimensional. El resultado es un vector perpendicular a los vectores que se multiplican, y por lo tanto normal al plano que los contiene.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [(a_y b_z - a_z b_y) ; (a_z b_x - a_x b_z) ; (a_x b_y - a_y b_x)]$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| . |\mathbf{b}| \operatorname{sen}(\theta)$

θ : ángulo formado entre los vectores **a** y **b**

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$

|**a** x **b**| es equivalente al área del paralelogramo cuyos lados están formados por los vectores **a** y **b**.

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

1- Un empleado postal conduce su camión por la ruta de la ***Figura 1***. Calcular el módulo, dirección y sentido del desplazamiento resultante en un diagrama en escala.

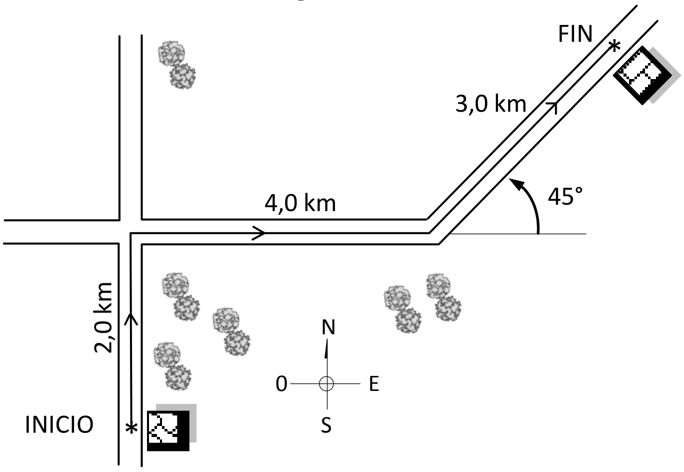
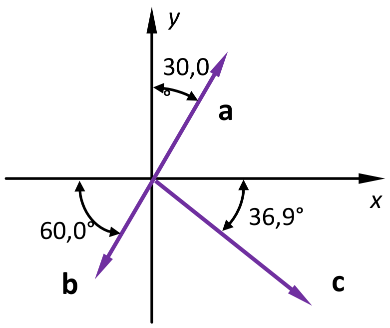


Figura 1

2- **-** Calcule las componentes **x** e **y** de los vectores de la ***Figura 2.***



a = 12,00 m
b= 6,00 m
c= 15,00 m

Figura 2

3- Verificar los resultados obtenidos en el problema anterior gráficamente.

4- Sea el ángulo θ el que forma el vector **a** con el eje +x, medido en sentido antihorario a partir de ese eje. Calcular el ángulo θ para un vector que tiene estas componentes:

a) a_x = 2,00 m, a_y = - 1,00 m;
b) a_x = 2,00 m, a_y = 1,00 m,
c) a_x = - 2,00 m, a_y = 1,00 m,
d) a_x = - 2,00 m, a_y = - 1,00 m.

5- Utilizando el método de componentes, verificar el módulo, dirección y sentido del desplazamiento resultante del empleado postal que conduce el camión por la ruta de la ***Figura 1***.

6- El vector **a** tiene componentes a_x = 2,70 cm, a_y = 2,25 cm; el vector **b** tiene componentes b_x =0,30 cm, b_y= 1,75 cm.

a) Calcular las componentes de la resultante **a + b**
b) Calcular el módulo, dirección y sentido de **a + b**
c) Calcular las componentes del vector diferencia **a - b**
d) Calcular l el módulo, dirección y sentido de **a - b**

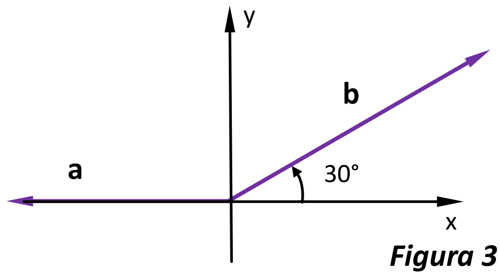
7- Un automovilista conduce 3,25 km al norte, 4,00 km al oeste y 1,50 km al sur. Calcular el módulo, dirección y sentido del desplazamiento resultante utilizando el método de componentes.

8- Escribir los vectores de la ***Figura 2*** en términos de los vectores unitarios ***i*** y ***j***.

9- De la ***Figura 3:***

a) Utilizando vectores unitarios calcular el vector **c,** donde **c** = 3 . **a** - 2 . **b**

b) Calcular el módulo, dirección y sentido de **c**.



a = 9,00 m
b = 12,0 m

Figura 3

10- Dados dos vectores:

a = 4,00 m ***i*** + 3,00 m ***j***

b= 5,00 m ***i*** - 2,00 m ***j***

a) Calcular el módulo de cada vector.

b) Calcular **a** - b usando vectores unitarios.

c) Obtener el módulo, dirección y sentido de **a** - b