Plancha 1

Representación Computacional de datos

2024 - Arquitectura del Computador

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Introducción

El objetivo de esta serie de ejercicios es familiarizarse con la representación de datos orientada a la computación, sin depender de la implementación computacional propiamente dicha. Muchos de los ejercicios están diseñados para ser resueltos con papel y lápiz, aunque aunque posteriormente se pueden utilizar herramientas inform´aticas para verificar los resultados.

Ejercicios

- 1. Determinar la representación binaria de los siguientes números:
 - a) 29
 - b) 0,625
 - c) 5,75
 - d) -138
 - e) -15,125
 - *f*) 0,1

Soluciones

a)

$$29 = 2 \cdot 14 + \boxed{1} \Rightarrow a_0 = \boxed{1}.$$

$$\blacksquare 14 = 2 \cdot 7 + \boxed{0} \Rightarrow a_1 = \boxed{0}.$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow a_2 = 1.$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow a_3 = 1.$$

$$1 = 2 \cdot 0 + \boxed{1} \Rightarrow a_4 = \boxed{1}.$$

$$\therefore 29 = (a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)_2 = (11101)_2.$$

•
$$0,625 \cdot 2 = \boxed{1}, 25 \Rightarrow a_{-1} = \boxed{1}.$$

•
$$0,25 \cdot 2 = \boxed{0}, 5 \Rightarrow a_{-2} = \boxed{0}.$$

$$\bullet 0, 5 \cdot 2 = \boxed{1} \Rightarrow a_{-3} = \boxed{1}.$$

$$\therefore 0,625 = (0,a_{-1}a_{-2}a_{-3})_2 = (0,101)_2.$$

■
$$0,75 \cdot 2 = \boxed{1}, 5 \Rightarrow a_{-1} = \boxed{1}.$$

■ $0,5 \cdot 2 = \boxed{1} \Rightarrow a_{-2} = \boxed{1}.$

$$\bullet 0, 5 \cdot 2 = \boxed{1} \Rightarrow a_{-2} = \boxed{1}.$$

```
• 5 = 2 \cdot 2 + \boxed{1} \Rightarrow a_0 = \boxed{1}.
       \therefore 5,75 = (a_2a_1a_0, a_{-1}a_{-2})_2 = (101,11)_2.
d)
       ■ 138 = 2 \cdot 69 + \boxed{0} \Rightarrow a_0 = \boxed{0}
       • 69 = 2 \cdot 34 + \boxed{1} \Rightarrow a_1 = \boxed{1}.
       ■ 17 = 2 \cdot 8 + \boxed{1} \Rightarrow a_3 = \boxed{1}.
       \blacksquare 4 = 2 \cdot 2 + \boxed{0} \Rightarrow a_5 = \boxed{0}
        1 = 2 \cdot 0 + \boxed{1} \Rightarrow a_7 = \boxed{1}
    \therefore -138 = (-a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0)_2 = (-10001010)_2.
       • 0,125 \cdot 2 = \boxed{0}, 25 \Rightarrow a_{-1} = \boxed{0}
       0,25 \cdot 2 = 0,5 \Rightarrow a_{-2} = 0.
       0, 5 \cdot 2 = \boxed{1} \Rightarrow a_{-3} = \boxed{1}.
       ■ 15 = 2 \cdot 7 + \boxed{1} \Rightarrow a_0 = \boxed{1}
       -7 = 2 \cdot 3 + \boxed{1} \Rightarrow a_1 = \boxed{1}.
        3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow a_2 = 1 
       -1 = 2 \cdot 0 + \boxed{1} \Rightarrow a_3 = \boxed{1}.
    \therefore -15,125 = (-a_3a_2a_1a_0, a_{-1}a_{-2}a_{-3})_2 = (-1111,001)_2.
f)
       0, 1 \cdot 2 = 0, 2 \Rightarrow a_{-1} = 0
       0, 2 \cdot 2 = \boxed{0}, 4 \Rightarrow a_{-2} = \boxed{0}
       \bullet 0, 4 \cdot 2 = \boxed{0}, 8 \Rightarrow a_{-3} = \boxed{0}.
       0.8 \cdot 2 = \boxed{1}, 6 \Rightarrow a_{-4} = \boxed{1}
       0, 6 \cdot 2 = 1, 2 \Rightarrow a_{-5} = 1
    \therefore 0, 1 = (a_0, a_{-1}\overline{a_{-2}a_{-3}a_{-4}a_{-5}})_2 = (0, 0\overline{0011})_2.
```

2. Repita el ejercicio anterior utilizando el sistema de numeración posicional denominado *magnitud y signo* con punto fijo:

$$(-1)^s (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots)_2$$

Analizar en cada caso cuántos dígitos son necesarios para poder representar cada uno de los números.

2. Ejercicios

a)

•
$$29 = (-1)^0 (11101)_2 = (011101)_{|\pm 2|}.$$

• Son necesarios 6 bits.

b)

• $0,625 = (-1)^0 (0,101)_2 = (00,101)_{|\pm 2|}.$

• Son necesarios 5 bits.

c)

• $5,75 = (-1)^0 (101,11)_2 = (0101,11)_{|\pm 2|}.$

• Son necesarios 6 bits.

d)

• $-138 = (-1)^1 (10001010)_2 = (110001010)_{|\pm 2|}.$

• Son necesarios 9 bits.

e)

• $-15,125 = (-1)^1 (1111,001)_2 = (11111,001)_{|\pm 2|}.$

• Son necesarios 8 bits.

f)

• $0,1 = (-1)^0 (0,0\overline{0011})_2 = (00,0\overline{0011})_{|\pm 2|}.$

• Son necesarios infinitos bits.

- 3. Convertir los siguientes números decimales a binario utilizando la representación en complemento a dos con seis bits:
 - *a*) -16
 - *b*) 13
 - c) -1
 - d) -10
 - *e*) 16
 - f) -31

¿Qué tienen en común todos los números negativos y todos los números positivos al utilizar esta representación?

Soluciones

a)
$$-16 = (-010000)_2 = (110000)_{C_2^6}$$
.
b) $13 = (001101)_2 = (001101)_{C_2^6}$.
c) $-1 = (-000001)_2 = (111111)_{C_2^6}$.
d) $-10 = (-001010)_2 = (110110)_{C_2^6}$.

e)
$$16 = (010000)_2 = (010000)_{C_2^6}$$
.
f) $31 = (-011111)_2 = (100001)_{C_2^6}$.

Los números negativos en complemento a 2, tienen el bit mas significativo en 1 mientras que los positivos lo tienen en 0.

4. Repetir el ejercicio anterior pero ahora utilizando 8 bits. ¿Qué conclusión se puede sacar comparando los resultados con los del ejercicio anterior?

Soluciones

 $\begin{array}{ll} a) & -16 = (110000)_{C_2^6} = (11110000)_{C_2^8}. \\ b) & 13 = (001101)_{C_2^6} = (00001101)_{C_2^8}. \\ c) & -1 = (111111)_{C_2^6} = (11111111)_{C_2^8}. \\ d) & -10 = (110110)_{C_2^6} = (11110110)_{C_2^8}. \\ e) & 16 = (010000)_{C_2^6} = (00010000)_{C_2^8}. \\ f) & 31 = (100001)_{C_2^6} = (11100001)_{C_2^8}. \end{array}$

Basta con extender el bit mas significativo para realizar la conversión.

- 5. Dadas las siguientes secuencias de bits, indicar a qué números corresponden en sistema decimal utilizando la representación en complemento a dos:
 - a) $(00001101)_{C_2^8}$
 - b) $(01001101)_{C_2^8}$
 - c) $(11100001)_{C_2^8}$
 - d) $(111111001)_{C_2^8}$
 - e) $(111111111)_{C_2^8}$
 - $f) (00000000)_{C_2^8}$

Soluciones

- a) $(00001101)_{C_2^8} = 2^0 + 2^2 + 2^3 = 1 + 4 + 8 = 13.$
- b) $(01001101)_{C_2^8} = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 1 + 4 + 8 + 64 = 77.$
- c) $(11100001)_{C_2^8} = 2^0 + 2^5 + 2^6 2^7 = 1 + 32 + 64 128 = -31.$
- d) $(11111001)_{C_2^8} = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 2^7 = -7.$
- e) $(111111111)_{C_2^8} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 2^7 = -1.$
- $f) (00000000)_{C_2^8} = 0.$

6. Mostrar que $(13,25)_{10} = (1101,01)_2 = (15,2)_8 = (D,4)_{16}$.

Solución

$$(13,25)_{10} = (1101,01)_2:$$

•
$$0,25 \cdot 2 = \boxed{0}, 5 \Rightarrow a_{-1} = \boxed{0}.$$

•
$$0.5 \cdot 2 = \boxed{1} \Rightarrow a_{-2} = \boxed{1}$$
.

•
$$13 = 2 \cdot 6 + \boxed{1} \Rightarrow a_0 = \boxed{1}$$
.

•
$$6 = 2 \cdot 3 + \boxed{0} \Rightarrow a_1 = \boxed{0}$$
.

•
$$3 = 2 \cdot 1 + \boxed{1} \Rightarrow a_2 = \boxed{1}$$
.

•
$$1 = 2 \cdot 0 + \boxed{1} \Rightarrow a_3 = \boxed{1}$$
.

$$(13,25)_{10} = (15,2)_8:$$

•
$$0.25 \cdot 8 = \boxed{2} \Rightarrow a_{-1} = \boxed{2}$$
.

•
$$13 = 8 \cdot 1 + \boxed{5} \Rightarrow a_0 = \boxed{5}$$
.

•
$$1 = 8 \cdot 0 + \boxed{1} \Rightarrow a_1 = \boxed{1}$$
.

$$(13,25)_{10} = (D,4)_{16}:$$

•
$$0,25 \cdot 16 = \boxed{4} \Rightarrow a_{-1} = \boxed{4}$$
.

•
$$13 = 16 \cdot 0 + 13 = \boxed{13} \Rightarrow a_0 = \boxed{D}$$
.

7. Rellenar la siguiente tabla:

Binario	Octal	Hexadecimal	Decimal
1101100,110			
	362,23		
		A1,03	
			74,3

En cada fila encontrarán un valor numérico expresado en la base indicada en la casilla superior de la columna correspondiente. Completen el resto de las casillas con la representación correspondiente según la base indicada en la parte superior, de manera que se mantengan las equivalencias en cada fila. Asuman que los números son sin signo.

Solución

Binario	Octal	Hexadecimal	Decimal
1101100,110	154,6	6C, C	108,75
11110010,010011	362,23	F2,4C	242,296875
10100001,00000011	241,006	A1,03	161,01171875
1001010,01001	112, 23146	$4A, 4\overline{C}$	74,3

8. Determinar el formato hexadecimal que use el mínimo número de dígitos y que permita representar el número $(16,25)_{10}$ de manera exacta. ¿Cuál es el rango y la precisión del formato? Asumir números sin signo. *Ayuda*: Tener en cuenta que la precisión se puede interpretar como la diferencia entre un número y el siguiente número representable.

Solución Observemos que $16,25_{10}=(10,4)_{16}$, luego nos bastará un formato hexadecimal de punto fijo con dos dígitos para la parte entera y uno para la parte fraccionaria.

Este formato permite expresar numeros entre $0 \le N \le (FF, F)_{16} = (255, 9375)_{10}$ y tiene una presición de $16^{-1} = 0,0625$.

9. Realicen cada una de las siguientes operaciones en complemento a dos, utilizando 8 bits para representar cada número.

a)
$$10 - 3$$

b)
$$-39 + 92$$

c)
$$-19-7$$

$$d)$$
 44 + 45

$$e) 104 + 45$$

$$f) -75 + 59$$

$$g) -103 - 69$$

h)
$$127 + 1$$

i)
$$-1+1$$

$$j) -1 - 1$$

$$k) -8 - 127$$

$$l)$$
 127 + 127

Para cada operación, analicen si los resultados obtenidos son correctos o incorrectos, explicando las razones. Ubique los resultados en la recta real, incluyendo los valores mínimos y máximos para esta representación. Además, indicar el estado de las banderas *Carry* y *Overflow* luego de realizar cada una de las operaciones anteriores.

2. Ejercicios

Soluciones

a) Observemos que $(10)_{10} = (00001010)_{C_2^8}$ y $(3)_{10} = (00000011)_2 = (11111101)_{C_2^8}$, luego:

- El resultado es correcto pues $(00000111)_{C_2^8} = (7)_{10} = 10 3$.
- La bandera Carry Flag se enciende y la Overflow Flag se apaga.
- b) Observemos que $(-39)_{10} = (-00100111)_2 = (11011001)_{C_2^8}$ y $(92)_{10} = (01011100)_{C_2^8}$, luego:

- El resultado es correcto pues $(00110101)_{C_2^8} = (53)_{10} = -39 + 92$.
- La bandera *Carry Flag* se enciende y la *Overflow Flag* se apaga.
- c) Observemos que $(-19)_{10} = (-00010011)_2 = (11101101)_{C_2^8}$ y $(-7)_{10} = (-00000111)_2 = (11111001)_{C_2^8}$, luego:

- El resultado es correcto pues $(11100110)_{C_2^8} = (-26)_{10} = -19 7$.
- La bandera *Carry Flag* se enciende y la *Overflow Flag* se apaga.
- d) Observemos que $(44)_{10} = (00101100)_2$ y $(45)_{10} = (00101101)_2$, luego:

- El resultado es correcto pues $(01011001)_{C_3^8} = (89)_{10} = 44 + 45$.
- La bandera *Carry Flag* se apaga y la *Overflow Flag* se apaga.
- e) Observemos que $(104)_{10}=(01101000)_{\mathbb{C}_2^8}$ y $(45)_{10}=(00101101)_{\mathbb{C}_2^8}$, luego:

- El resultado es correcto pues $(10010101)_2 = (-107)_{10} \neq (149)_{10} = 104 + 45$.
- La bandera *Carry Flag* se apaga y la *Overflow Flag* se *enciende*.
- f) Observemos que $(-75)_{10} = (-01001011)_2 = (10110101)_{C_2^8}$ y $(59)_{10} = (00111011)_{C_2^8}$, luego:

- El resultado es correcto pues $(11110000)_{C_2^8} = (-16)_{10} = -75 + 59$.
- La bandera Carry Flag se apaga y la Overflow Flag se apaga.
- g) Observemos que $(-103)_{10}=(-01100111)_2=(10011001)_{C_2^8}$ y $(-69)_{10}=(-01000101)_2=(10111011)_{C_2^8}$, luego:

- El resultado es incorrecto pues $(01010100)_{C_2^8} = (84)_{10} \neq -172 = -19 7$.
- La bandera Carry Flag se enciende y la Overflow Flag se enciende.
- h) Observemos que $(127)_{10} = (01111111)_{C_2^8}$ y $(1)_{10} = (00000001)_{C_2^8}$, luego:

- El resultado es incorrecto pues $(10000000)_{C_2^8} = (-1)_{10} \neq 128 = 127 + 1$.
- La bandera *Carry Flag* se apaga y la *Overflow Flag* se enciende.
- i) Observemos que $(-1)_{10}=(11111111)_{C_2^8}$ y $(1)_{10}=(00000001)_{C_2^8}$, luego:

- El resultado es correcto pues $(00000000)_{C_2^8} = (0)_{10} = -1 + 1$.
- La bandera *Carry Flag* se enciende y la *Overflow Flag* se apaga.

j) Observemos que $(-1)_{10} = (11111111)_{C_2^8}$, luego:

- El resultado es correcto pues $(111111110)_{C_2^8} = (-2)_{10} = -1 1$.
- La bandera Carry Flag se enciende y la Overflow Flag se apaga.
- k) COMPLETAR.
- l) COMPLETAR.
- 10. Dados A=200, B=300, C=500 y D=400, calcular $S=A\cdot B\cdot C\cdot D$, interpretando los datos como enteros con signo. Imprimir el resultado por pantalla haciendo un programa en lenguaje C con datos tipo int y analizar el resultado. Repetir para datos tipo long int.

Ayuda: Para poder imprimir un long int se debe usar el especificador %ld.

Solución

- $S = (10110010110100000101111100000000000)_2 = 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{16} + 2^{22} + 2^{24} + 2^{25} + 2^{27} + 2^{30} + 2^{31} + 2^{33} = 120000000000.$
- $T = (11001011010000010111100000000000)_{C_2^8} = 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{16} + 2^{22} + 2^{24} + 2^{25} + 2^{27} + 2^{30} 2^{31} = -884901888.$
- 11. Ejecutar el siguiente programa y analizar lo que imprime por pantalla. Conviene usar GDB para observar el contenido de las variables.

Solución

- Puesto que $127 = (1111111)_2 = (01111111)_{C_2^8}$, el resultado impreso no presenta ninguna particularidad.
- Ahora bien $127 + 1 = (10000000)_2 = 128$, pero $(10000000)_{C_2^8} = -128$.
- A partir del punto anterior, es análogo interpretar este.
- Finalmente $128 + 1 = (10000001)_2 = 129$, pero $(10000001)_{C_2^8} = -127$.
- 12. Dados los siguientes números A = 0xc4 y B = 0x4e:
 - a) Realizar la suma C = A + B en hexadecimal.
 - b) Escriba el valor decimal de C, interpretando el resultado como signed char y luego como unsigned char.
 - c) Indicar el rango y la cantidad de números representables en ambos casos.
 - *d*) Indicar el valor de las banderas *CF*, *OF* y *SF* luego de realizarse la operación suma.

Solución

a)

$$\begin{array}{ccccc}
 & c & 4 \\
 & + & 4 & e \\
\hline
 & 1 & 1 & 2
\end{array}$$

b) Puesto que $(112)_{16} = 274 = (100010010)_2$, luego $(00010010)_2 = (00010010)_{\mathbb{C}_2^8} = 18$.

c)

La bandera Carry Flag se enciende y la Overflow Flag se apaga.

13. Supongamos que en un servidor de almacenamiento los tamaños de los archivos se gestionan usando el sistema octal. La capacidad total del servidor es de 010000 unidades de almacenamiento. Actualmente, el servidor contiene los siguientes archivos:

Archivo Unidad	
A	0345
В	0672
С	01250
D	0507
E	0710

- a) Convertir los tamalos de los archivos a su equivalente en decimal.
- b) Convertir la capacidad total del servidor a su equivalente en decimal.
- c) Calcular el espacio total usado en el servidor en octal y decimal.
- d) Calcular el espacio libre en el servidor en octal y decimal.
- e) Si se desea almacenar un nuevo archivo de tamaño 0500 unidades, determinar si hay suficiente espacio disponible. Si el archivo se puede almacenar, actualizar la lista de archivos y recalcular el espacio usado y libre en el servidor.

Solución COMPLETAR.

14. Una plataforma de criptomonedas gestiona las transacciones de sus usuarios utilizando identificadores de transacción en sistema hexadecimal. Cada transacción tiene un identificador único y un valor asociado en una criptomoneda llamada CryptoCoin (CC). Actualmente, la plataforma tiene las siguientes transacciones registradas:

Transacción	Identificador	Valor
\overline{A}	0x1a2f	0x3b CC
В	0x2c4d	0x4e CC
С	0x3d5a	0x25 CC
D	0x4e7c	0x6a CC
Е	0x5f8e	0x72 CC

- *a*) Convierte los identificadores y valores de las transacciones a su equivalente en decimal.
- b) Calcula el valor total de todas las transacciones en CryptoCoin en decimal y hexadecimal.
- c) La plataforma añade dos nuevas transacciones con los siguientes detalles:

- Transacción *F*: Identificador 0*x*6*a*7*b*, valor 0*x*3*c* CC.
- Transacción *G*: Identificador 0*x*7*b*9*d*, valor 0*x*4*a* CC.

Actualiza la lista de transacciones y recalcula el valor total de todas las transacciones.

SOLUCIÓN COMPLETAR.

15.	A continuación se presentan ciertos números enteros expresados en binario utilizando 32 bits y a su derecha, expresiones en lenguaje C incompletas. Complete estas expresiones de forma que la igualdad sea cierta. Utilice operadores de bits, operadores enteros y constantes de enteros literales según considere necesario.
	<i>a</i>)
	<i>b</i>)

b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)

Soluciones

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

- 16. Implemente una función que indique si el bit b del entero n es 1 o 0. *Ayuda*: Pensar en las propiedades de los operadores de bits.
- 17. Implemente una función que tome un entero de 32 bits y lo imprima en binario. Utilizar esta función para mostrar en binario los números del ejercicio 2.

Ayuda: Se puede utilizar la función realizada en el ejercicio anterior.

18. Implemente una función en lenguaje C que tome tres parámetros *a*, *b* y *c* y que rote los valores de las variables de manera que al finalizar la función el valor de *a* se encuentre en *b*, el valor de *b* en *c* y el de *c* en *a*. Evitar utilizar variables auxiliares.

Ayuda: Tener en cuenta las propiedades del operador XOR. Se puede pensar primero en intercambiar dos variables.

19. Escriba en lenguaje C un programa que tome la entrada estándar, la codifique e imprima el resultado en salida estándar. La codificación deberá ser hecha carácter a carácter utilizando el operador XOR y un código que se pase al programa como argumento de línea de comando.

El código adicional para el operador XOR también se debe pasar como argumento de línea de comandos al programa. Es decir, suponiendo que el ejecutable se llame prog, la línea de comando para ejecutar el programa tendría el formato: .

Por ejemplo, se podría hacer para codificar la cadena «Mensaje» con el código 12. Pruebe el programa codificando con diferentes códigos, por ejemplo, utilizando el código -98.

¿Qué modificaciones se tendrían que hacer al programa para que decodifique? ¿Se gana algo codificando más de una vez?

Solución No es necesario modificar el programa para decodificar pues:

$$(m \oplus a) \oplus a = m \oplus (a \oplus a) = m \oplus 0 = m$$

No se gana nada codificando varias veces pues:

$$(m \oplus a) \oplus b = m \oplus (a \oplus b)$$

20. *Algoritmo del campesino ruso*: La multiplicación de enteros positivos puede implementarse con sumas, el operador AND y desplazamientos de bits usando las siguientes identidades:

$$a \cdot b \begin{cases} 0 & \text{si } b = 0 \\ a & \text{si } b = 1 \\ 2a \cdot k & \text{si } b = 2k \\ 2a \cdot k + a & \text{si } b = 2k + 1 \end{cases}$$

Úselas para implementar una función en lenguaje C.

21. (*Opcional*) Muchas arquitecturas de CPU restringen los enteros a un máximo de 64 bits. ¿Qué sucede si ese rango no nos alcanza? Una solución es extender el rango utilizando más de un entero (en este caso enteros de 16 bits) para representar un valor. Así podemos pensar que: representa el valor:

Podemos pensar en la estructura nro como un entero de 256 bits. Lamentablemente la arquitectura no soporta operaciones entre valores de este tipo, por lo cual debemos realizarlas en software.

- *a*) Implemente funciones que comparen con 0 y con 1 y determinen paridad para valores de este tipo.
- b) Realice funciones que corran a izquierda y derecha los valores del tipo nro.
- c) Implemente la suma de valores del tipo nro.

Nota: en el repositorio Subversion de la materia hay una función para imprimir valores de este tipo. Esta función utiliza la biblioteca GMP (GNU Multiple Precision Arithmetic Library), por lo cual deberá compilar el código agregando la opción -lgmp. Puede encontrar la función en el archivo código/enteros/grandes/gmp1.c: https://svn.dcc.fceia.unr.edu.ar/svn/lcc/R-222/Public/código/enteros_grandes/gmp1.c.

2. Ejercicios

Soluciones

- a)
- b) COMPLETAR.
- c)
- 22. (*Opcional*) Implemente el algoritmo del campesino ruso para los números anteriores.